Kapitola 13

Separabilita, úplnost, kompaktnost

Tato kapitola je ve skutečnosti pokračováním kapitoly předcházející. V ní jsme zavedli řadu pojmů a popsali mnoho příkladů. Nyní se soustředíme na nejdůležitější vlastnosti metrických prostorů.

13.1 Separabilní prostory

Definice 13.1.1. Nechť $A \subset P$ je libovolná podmnožina MP (P, ϱ). Jestliže $\overline{A} = P$, pak říkáme, že A je *hustá v prostoru* (P, ϱ), resp. krátce (není-li nebezpečí z nedorozumění), že A je hustá.

Hustota množiny A je, podobně jako uzavřenost nebo otevřenost, topologická vlastnost.

Příklady 13.1.2. 1. Je-li $A \subset B \subset (P, \varrho)$ a množina A je hustá v P, je $P = \overline{A} \subset \overline{B}$, a tedy B je rovněž hustá množina v P.

2. Zřejmě je $\mathbb{Q}$ hustou podmnožinou $\mathbb{R}$. Také všechny body z $\mathbb{R}^m$, jejichž souřadnice jsou vesměs racionální čísla, tvoří hustou množinu v $\mathbb{R}^m$. V jistém smyslu je tedy tato množina „dost velká“, odtud však *neplyne*, že doplněk husté množiny není hustý (je v tomto smyslu „malý“); stačí uvážit, že $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Věta 13.1.3. *Množina A je hustá, právě když pro každou neprázdnou otevřenou $G \subset P$ je $G \cap A \neq \emptyset$.*

Důkaz. Nechť $\overline{A} = P$ a $G \neq \emptyset$ je otevřená množina. Pak z $G \cap A = \emptyset$ plyne $A \subset P \setminus G$, a proto je $P = \overline{A} \subset \overline{P \setminus G} = P \setminus G$, tedy $G = \emptyset$, což je spor. Není-li $\overline{A} = P$, pak $G = P \setminus \overline{A} \neq \emptyset$ je otevřená množina, pro kterou $A \cap G = \emptyset$. □

Definice 13.1.4. Prostor (P, ϱ) se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje *spočetná* hustá podmnožina.

Příklad 13.1.5. Protože je $\mathbb{Q}$ spočetná množina, je $\mathbb{R}$ separabilní prostor. Z úvahy v Příkladech 13.1.2 (2) plyne, že i $\mathbb{R}^m$ je pro všechna $m \in \mathbb{N}$ separabilní prostor.

Příklad 13.1.6. Také prostor $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ s obvyklou supremovou normou je separabilní. Označme D_n ekvidistantní dělení intervalu $[\,a,b\,]$, tj. dělení

$$D_n = \Big\{ x_k\,;\, x_k = a + \frac{k(b-a)}{n},\ k = 0,1,\ldots,n \Big\}$$

Spojité, *po částech lineární funkce*, které v dělících bodech x_k dělení $D_n \in \mathcal{D}(a,b)$ nabývají pouze racionálních hodnot a jsou lineární na každém z dílčích intervalů $[\,x_{k-1}, x_k\,]$, $k = 1,\ldots,n$, tvoří spočetnou podmnožinu $M_n \subset \mathcal{C}([\,a,b\,])$.

Dokážeme, že systém $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je hustou množinou v prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$. K tomu stačí dokázat, že pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ a každé $\varepsilon > 0$ lze nalézt funkci $l \in M$ tak, že $\|f - l\|_\infty < \varepsilon$. K $\varepsilon/2 > 0$ existuje $\delta > 0$ ze stejnoměrné spojitosti funkce f na $[\,a,b\,]$ tak, že je

$$(x, y \in [\,a,b\,],\ |x-y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2\,.$$

K tomuto δ zvolíme takové dělení D_n, jehož norma $\nu(D_n) = (b-a)/n < \delta$ (viz (11.5) v Kapitole 10). Zvolme hodnoty $l(x_k) \in \mathbb{Q}$ tak, aby bylo $|l(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/2$ pro všechna $k = 0,1,\ldots,m$, kde $m+1$ je počet dělicích bodů zvoleného dělení. Pak je také pro všechna $k = 1,\ldots,m$ a $t \in [\,x_{k-1}, x_k\,]$

$$\begin{aligned} l(t) &= \frac{t - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\, l(x_k) + \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-1}}\, l(x_{k-1})\,, \\ f(t) &= \frac{t - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\, f(t) + \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-1}}\, f(t)\,. \end{aligned}$$

Proto pro tato t dostáváme

$$|l(t) - f(t)| \le \frac{t - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\, |\,l(x_k) - f(t)| + \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-1}}\, |\,l(x_{k-1}) - f(t)|\,. \tag{13.1}$$

Konečně triviální odhady obou absolutních hodnot v (13.1) pomocí trojúhelníkové nerovnosti

$$\begin{aligned} |\,l(x_k) - f(t)| &\le |\,l(x_k) - f(x_k)| + |\,f(x_k) - f(t)| < \varepsilon\,, \\ |\,l(x_{k-1}) - f(t)| &\le |\,l(x_{k-1}) - f(x_{k-1})| + |\,f(x_{k-1}) - f(t)| < \varepsilon \end{aligned}$$

dávají $|l(t) - f(t)| < \varepsilon$ v každém dělícím intervalu dělení D_n, a tedy všude v $[\,a,b\,]$.

Abychom dokázali, že nějaký MP *není separabilní*, stačí v něm nalézt *nespočetnou* podmnožinu A tak, že pro nějaké $\varepsilon > 0$ je $\varrho(x,y) > \varepsilon$, $x, y \in A$. Každá množina, jejíž uzávěr by měl obsahovat A musí již být nutně nespočetná.

Příklady 13.1.7. 1. Diskrétní prostor (P, ϱ) s nespočetnou P není separabilní, jedinou jeho hustou podmnožinou je P.

2. V Příkladu 12.3.42 jsme zavedli lineární prostor $\mathcal{M}(A)$ všech omezených funkcí na neprázdné množině A. Pro $A := (a, b)$ není tento normovaný lineární prostor separabilní, protože vzdálenost dvou charakteristických funkcí jednobodových podmnožin (a, b) je rovna 1 a množina B všech těchto funkcí je nespočetná. Potom i každá podmnožina C všech funkcí $f \in \mathcal{M}(A)$, pro kterou je $\operatorname{dist}(B, C) < \varepsilon < 1/2$ je také nespočetná, a tedy i každá hustá množina v $\mathcal{M}((a, b))$ je nespočetná.

13.2 Úplné prostory

Definice 13.2.1. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset (P, \varrho)$ splňuje *Bolzano-Cauchyho podmínku* (krátce: *je cauchyovská*), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(\forall\, m, n \geq k)\,(\varrho\,(x_n, x_m) < \varepsilon)\ .$$

Poznámky 13.2.2. 1. Definici 13.2.1 si lehce zapamatujeme, neboť je to opět „přepis“ analogické definice cauchyovské posloupnosti z $\mathbb{R}$.

2. Snadno dokážeme, analogicky jako v $\mathbb{R}$, že konvergentní posloupnost v metrickém prostoru je cauchyovská.

3. Není pravda, že každá cauchyovská posloupnost v (P, ϱ) konverguje v (P, ϱ). Uvažujte množiny $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nebo interval $(0, 1)$ jako podprostory $\mathbb{R}^1$. Pak $\sqrt{2}/n \to 0$, tedy tato posloupnost konverguje v $\mathbb{R}$, ale *v uvažovaných (pod)prostorech* nekonverguje.

4. Nechť f je homeomorfní zobrazení metrického prostoru (P, ϱ) na prostor (Q, σ). Je-li $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost v (P, ϱ), *nemusí* být posloupnost $\{f(x_n)\}$ cauchyovská. Uvažte posloupnost $a_n := 1 - 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, v prostoru $(0, 1)$ s eukleidovskou metrikou a homeomorfismus $f(x) = x/(1 - x)$ intervalů $(0, 1)$ a $(0, \infty)$, rovněž s eukleidovskou metrikou. Pak je $f(a_n) = n - 1$, a tedy $\{f(a_n)\}$ *není* cauchyovská posloupnost.

Definice 13.2.3 (Fréchet 1906). Prostor (P, ϱ), ve kterém každá cauchyovská posloupnost konverguje, se nazývá *úplný prostor*. Jinak řečeno, je-li $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost v úplném metrickém prostoru (P, ϱ), pak *existuje* $x \in P$ tak, že $x_n \to x$.

Historická poznámka 13.2.4. Pro možnost přímého porovnání uveďme původní definici z Fréchetovy práce [7]: *Říkáme, že třída (V) připouští zobecnění Cauchyho věty, pokud každá posloupnost jejích prvků splňující Cauchyho podmínku* [1]*), má (nutně jedinou) limitu.*

Příklady 13.2.5 (důležité). 1. Prostor $\mathbb{R}^1$ (s eukleidovskou metrikou) je úplný prostor. To jsme dokázali ve Větě 2.4.8.

---

[1]) Cauchyovská posloupnost v naší terminologii.

2. Obecněji, prostor $\mathbb{R}^m$ je pro každé $m \in \mathbb{N}$ úplný prostor. Užijeme-li označení $x = [\,x_1, \ldots, x_m\,]$, $y = [\,y_1, \ldots, y_m\,]$, je

$$|x_k - y_k| \le \|x - y\|_2\,, \quad k = 1, \ldots, m\,,$$

a cauchyovská posloupnost bodů z $\mathbb{R}^m$ je cauchyovská „po složkách“: Odtud plyne, že cauchyovská posloupnost $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} = \big\{[\,x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n\,]\big\}_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}^m$ je konvergentní po složkách k nějakému bodu $x = [\,x_1, \ldots, x_m\,]$, a $x^n \to x$ v $\mathbb{R}^m$. Stejnou úvahu jsme relativně podrobně provedli pro Gaussovu rovinu $\mathbb{C}$, která je izometrická s $\mathbb{R}^2$.

Lemma 13.2.6. *Prostor $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ s normou $\|\cdot\|_\infty$ je úplný.*

Toto tvrzení není zcela jednoduché dokázat, neboť důkaz využívá znalostí o tzv. stejnoměrné konvergenci, což je právě konvergence v normě, které se běžně používá v $\mathcal{C}([\,a, b\,])$. Tato konvergence je mj. nástrojem pro zvládnutí záměny pořadí dvou limitních procesů; tomuto problému se budeme podrobně věnovat v Kapitole 15.

Důkaz. Posloupnost cauchyovská v supremové normě je zřejmě cauchyovská v každém bodě, neboť pro všechna $t \in [\,a, b\,]$

$$|f_n(t) - f_m(t)| \le \sup\{|f_n(t) - f_m(t)|;\, t \in [a, b]\} = \|f_n - f_m\|_\infty\,. \tag{13.2}$$

Lze tedy definovat $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ pro všechna $t \in [\,a, b\,]$, neboť vlastní limita vpravo vždy existuje. Limitním přechodem pro $m \to \infty$ dostaneme z (13.2), že také $|f_n(t) - f(t)| \le \|f_n - f\|_\infty$. Zbývá dokázat spojitost funkce f na $[\,a, b\,]$. Zvolme bod $x_0 \in [\,a, b)$ a dokažme, že funkce f je spojitá zprava v bodě x_0. Zřejmě je pro h, $0 \le h \le b - x_0$,

$$\begin{gathered}|f(x_0 + h) - f(x_0)| \le \\ \le |f(x_0 + h) - f_n(x_0 + h)| + |f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|\,.\end{gathered}$$

Vágně řečeno, výraz na pravé straně nerovnosti je třeba „udělat“ menší než libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ pro všechna h, $0 < h < \delta$, a to volbou dostatečně velkého $n \in \mathbb{N}$ a dostatečně malého $\delta > 0$. Podrobněji: zvolme $\varepsilon > 0$ a dále $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3$. Pak je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3$ pro všechna $t \in [\,a, b\,]$, což nám umožní odhadnout první a třetí výraz číslem $\varepsilon/3$. Pak zvolíme s využitím spojitosti funkce f_n číslo $\delta > 0$ tak, aby pro všechna h, $0 \le h < \delta < b - x_0$ platilo

$$|f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3\,.$$

Spojitost zleva v bodě $x_0 \in (a, b\,]$ se dokáže obdobně. Toto tvrzení je jen malou ukázkou „síly“ stejnoměrné konvergence. □

Poznámka 13.2.7 (důležitá). Když jsme se seznamovali s $\mathbb{R}$, zjistili jsme, že obsahuje $\mathbb{Q}$ jakožto svoji spočetnou hustou podmnožinu. Prostor $\mathbb{Q}$ však není úplný. Vnucuje se otázka, zda lze ke každému metrickému prostoru (P, ϱ) najít „nadprostor", který by byl úplný. Jde tedy o úplný prostor (Q, σ) takový, aby (P, ϱ) byl jeho (metrickým) podprostorem. Takový prostor vždy existuje a při jisté „úspornosti" je *do jisté míry* jednoznačně určen. Tento vágně popsaný fakt zpřesníme, neboť částečně osvětluje zavedení $\mathbb{R}$ a ukazuje, jak přesně jsou reálná čísla axiómy (1) – (13) z Kapitoly 1 určena.

Definice 13.2.8. Jsou-li (P, ϱ), (Q, σ) metrické prostory takové, že (P, ϱ) je podprostor (Q, σ), P je hustá v Q a (Q, σ) je úplný prostor, nazýváme metrický prostor (Q, σ) *úplný obal* (někdy též *zúplnění*) prostoru (P, ϱ).

Věta 13.2.9 (Baire, Hausdorff 1914). *Ke každému metrickému prostoru (P, ϱ) existuje jeho úplný obal. Jsou-li (Q_1, σ_1) a (Q_2, σ_2) dva úplné metrické obaly (P, ϱ), pak existuje* izometrie *mezi (Q_1, σ_1) a (Q_2, σ_2), která je identitou na P.*

Náznak důkazu. Nechť (P, ϱ) je *libovolný* MP. Označme C množinu všech *cauchyovských* posloupností bodů z P a definujme na C ekvivalenci $\sim$ vztahem

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varrho\,(x_n, y_n) \to 0\,.$$

Množinu všech tříd vzájemně ekvivalentních posloupností označme Q_1. Označíme-li $[x_n]$ třídu určenou posloupností $\{x_n\}$, můžeme definovat na $Q_1 \times Q_1$ funkci

$$\sigma_1([x_n], [y_n]) := \lim_{n\to\infty} \varrho\,(x_n, y_n)\,.$$

Je vcelku jednoduché, avšak pracné (srovnejte s [4], str. 92), dokázat, že (Q_1, σ_1) je úplný metrický prostor; ztotožníme-li $x \in P$ s třídou v Q_1, určenou posloupností $\{x, x, \dots\}$, lze (P, ϱ) považovat za podprostor (Q_1, σ_1). Dále lze dokázat i druhou část Věty 13.2.9 o izometrii. □

Poznámka 13.2.10. Nabízí se možnost využít popsaného postupu k zavedení $\mathbb{R}$. Pak je nutno mít především základ, tj. mít vybudováno uspořádané pole $\mathbb{Q}$. K dalším krokům však nelze použít nic z teorie MP, neboť jsme v definici metriky již existenci $\mathbb{R}$ předpokládali. Přesto však lze analogickým postupem vytvořit z pole $\mathbb{Q}$ pole $\mathbb{R}$; srovnejte s [12], Ch. 1, str. 32. Platí totiž: (a) *Každé uspořádané pole obsahuje izomorfní obraz $\mathbb{Q}$, přičemž izomorfismus zachovává i uspořádání.* (b) *Každá dvě úplná archimedovská pole T_1 a T_2 s množinami kladných prvků P_1 a P_2 jsou algebraicky izomorfní, přičemž izomorfismus zachovává uspořádání.* Podrobnosti lze nalézt v [12]. V kontextu Věty 13.2.9 je $\mathbb{R}$ úplným obalem $\mathbb{Q}$. Dá se dokázat, že reálná čísla jsou soustavou axiomů (1) – (13) určena „jednoznačně až na homeomorfismus".

Věta 13.2.11 (Cantor 1872*). *Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v prostoru P, tj. $A_{n+1} \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť dále* $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$. *Potom existuje právě jeden bod $x \in P$ takový, že $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Poznámka 13.2.12. Předcházející Věta 13.2.11 je jedním z možných zobecnění Cantorovy věty o vložených intervalech (Věta 2.4.1). Všimněme si, jak se tvrzení liší od analogického tvrzení v $\mathbb{R}$: neříká, že bez posledního předpokladu o $\operatorname{diam}(A_n)$ je průnik $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ neprázdný. Poslední předpoklad přináší v tomto kontextu nejen *jednoznačnost* (průnik je jednobodový), ale i *existenci*; bez něj by „modifikovaná věta" neplatila. Skutečně, intervaly $[\,n,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, jsou vesměs uzavřené množiny, jsou do sebe zařazené a přitom $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\,n,\infty) = \emptyset$. V tomto případě je $\operatorname{diam}([\,n,\infty)) = \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a proto průměry množin *nekonvergují* k 0. Stejně snadno může čtenář dokázat, že i další předpoklady Věty 13.2.11 jsou *podstatné*, tj. po vynechání monotonie nebo uzavřenosti A_n takto modifikované tvrzení neplatí.

Poznamenejme, že se Cantor podobnou problematikou zabýval v souvislosti se zaváděním reálných čísel — k této době se váže letopočet uvedený u věty. Cantor *nepracoval* v kontextu MP, běžně užívané označení je spíše vyjádřením pocty zakladateli teorie množin.

Důkaz Věty 13.2.11. Tvrzení dokážeme tak, že hledaný bod průniku zkonstruujeme. Zvolme posloupnost $\{x_n\}$ tak, že $x_n \in A_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tato posloupnost je cauchyovská, neboť pro $m \geq n$ je $x_m, x_n \in A_n$ a

$$\varrho\,(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(A_n) \to 0$$

při $n \to \infty$. Protože je prostor (P,ϱ) úplný, existuje $x \in P$ tak, že $x_n \to x$. Protože jsou A_n uzavřené a $x_k \in A_n$ pro $k \geq n$, je $x \in \overline{A_n} = A_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy leží i v jejich průniku. Pro libovolné dva body x, y tohoto průniku je $\varrho\,(x,y) \leq \operatorname{diam}(A_n) \to 0$, z čehož plyne $x = y$. $\square$

Příklad 13.2.13. Sestrojíme zobrazení $\psi : [\,0,1\,] \to [\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$, které zobrazí $[\,0,1\,]$ *na* $[\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$. Vyjádříme-li každé $t \in [\,0,1)$ ve tvaru dyadického čísla $0{,}t_1t_2t_3\ldots$ tak, aby zápis obsahoval vždy nekonečně mnoho číslic 0 (tím zakazujeme zápis čísla tvaru $0{,}10\overline{1}$ s jednočlennou periodou 1), bude vyjádření každého t jednoznačné a lze definovat zobrazení

$$\psi : t \mapsto [\,0{,}t_1t_3t_5\ldots,\,0{,}t_2t_4t_6\ldots\,]\,, \quad \psi(1) = [\,1,1\,]\,.$$

Toto zobrazení je surjekce (zobrazení na), ale není prosté ani spojité, protože např. bod $[\,0{,}1; 0{,}1\,]$ je obrazem bodů [2]) $0{,}11$, $0{,}10010101\ldots$ a $0{,}011010101\ldots$. Posloupnost $\{t_k\}$ bodů z $[\,0,1\,]$

$$\{\,t_k\,\} = \{0{,}0011;\; 0{,}001111;\; 0{,}00111111;\; 0{,}0011111111;\; \ldots\}$$

je volena tak, že $\psi(t_1) = [\,0{,}01;\, 0{,}01\,]$, $\psi(t_2) = [\,0{,}011;\, 0{,}011\,]$, $\psi(t_3) = [\,0{,}0111;\, 0{,}0111\,]$, $\psi(t_4) = [\,0{,}01111;\, 0{,}01111\,], \ldots$, takže $t_k \to 0{,}01$, $\psi(t_k) \to [\,0{,}1;\, 0{,}1\,]$ a zároveň platí $\psi(0{,}01) = [\,0{,}0;\, 0{,}1\,] \neq [\,0{,}1;\, 0{,}1\,]$. Je tedy

$$\lim_{k\to\infty} \psi(t_k) \neq \psi(\lim_{k\to\infty} t_k)\,.$$

Že je ψ zobrazením *na* $[\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$ plyne z následují úvahy Je $\psi(1) = [\,1,1\,]$. Alespoň jeden vzor pro bod $[\,0{,}t_1t_3t_5\ldots,\, 0{,}t_2t_4t_6\ldots\,]$, kde pro dyadické vyjádření obou souřadnic zakážeme zápis s jednomístnou periodou 1 , získáme „proložením": Bude jím bod $0{,}t_1t_2t_3\ldots$. Poznamenejme ještě, že použití dyadického vyjádření není podstatné.

[2]) Užijeme schematického zápisu, který umožní čtenáři snadno pochopit konstrukci příkladů.

Příklad 13.2.14. Nyní přidáme ve srovnání s Příkladem 13.2.13 požadavek spojitosti hledaného zobrazení. Sestrojíme spojité zobrazení $\varphi : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$, zobrazující jednotkový interval *na* jednotkový čtverec. Ke konstrukci využijeme Cantorovu Větu 13.2.11. Sestrojíme ekvidistantní dělení $D_n \in \mathcal{D}(0,1)$ na 4^n dělicích intervalů a rozdělíme i čtverec $[0,1] \times [0,1]$ na 4^n shodných uzavřených čtverečků S_k, $k = 1, 2, \ldots, 4^n$; jsou to dvourozměrné uzavřené intervaly tvaru

$$\Big[\frac{r-1}{2^n}, \frac{r}{2^n}\Big] \times \Big[\frac{s-1}{2^n}, \frac{s}{2^n}\Big], \quad r, s = 1, 2, \ldots, 2^n .$$

Toto provedeme pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Při přechodu od D_n k D_{n+1} se dělí každý interval dělení D_n na čtyři intervaly dělení D_{n+1} a podobně každý (dvourozměrný) interval S_k dělení F_n na čtyři (dvourozměrné) intervaly dělení F_{n+1}. Nyní budeme přiřazovat zobrazením φ_n každému intervalu dělení D_n interval dělení F_n podle těchto pravidel:

(a) Zobrazení φ_n jsou prostá pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

(b) sousedním intervalům dělení D_n přiřadíme vždy *stranami sousedící* intervaly (čtverečky) dělení F_n, a

(c) je-li J interval dělení F_n přiřazený zobrazením φ_n intervalu I dělení D_n, pak všechny čtyři intervaly dělení D_{n+1} ležící v I musí zobrazení φ_{n+1} zobrazit na intervaly ležící v J.

Jak to lze udělat naznačuje trojice schematických obrázků: Silnější lomená čára probíhá po řadě čtverce dělení F_1, F_2 a F_3 tak, jak jsou přiřazeny po sobě jdoucím intervalům dělení D_1, D_2 a D_3 [3]).

Podmínky (a)–(c) zaručí spojitost zobrazeni φ, definovaného takto: k bodu $t \in [0,1)$ sestrojíme posloupnost intervalů I_n dělení D_n, $n \in \mathbb{N}$, tak, aby tyto intervaly vždy obsahovaly bod t. Takový interval dělení D_n existuje a jsou (v každém dělení) maximálně dva; v takovém případě vybereme kterýkoli z nich. Vzniklou posloupnost intervalů I_n s $\operatorname{diam}(I_n) = 4^{-n} \to 0$ a $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{t\}$ zobrazíme pomocí zobrazení φ_n. Pak posloupnost $\varphi_n(I_n)$ vyhovuje předpokladům Cantorovy Věty 13.2.11, $\operatorname{diam}(\varphi_n(I_n)) = \sqrt{2} \cdot 2^{-n} \to 0$ a lze definovat bod $\varphi(t)$ jako prvek jednobodové množiny

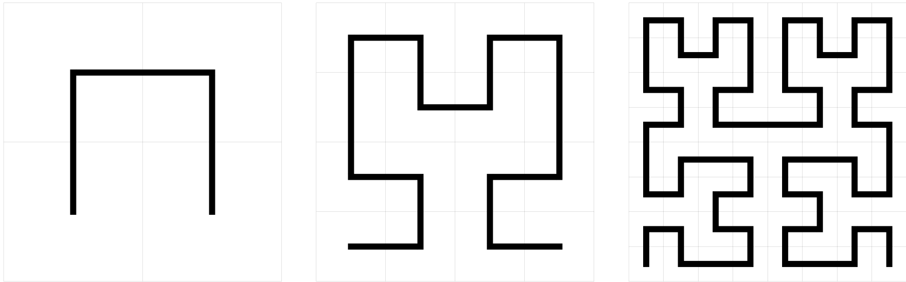
$$\{\varphi(t)\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n(I_n) . \tag{13.3}$$

Zbývá dokázat, že zobrazení φ je korektně definované, že je zobrazením na $[0,1] \times [0,1]$ a že je spojité.

Pokud existují v nějakém dělení D_n dva intervaly dělení I_n, I'_n obsahující bod t, musí být t jejich společným koncovým bodem a ve všech děleních $D_{n+1}, D_{n+2}, \ldots$ jsou výběrem I_n nebo I'_n intervaly $I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots$ jednoznačně určeny: Bod t je pro všechny koncovým bodem, nebo je bod t pro všechny počátečním bodem a tak je bod t předpisem (13.3) definován pro posloupnost intervalů obsažených v I_n i pro posloupnost intervalů obsažených I'_n tentýž a díky pravidlu (b) je i $\varphi(t)$ určen jednoznačně.

---

[3]) Tento postup, popsaný r. 1891, pochází od Davida Hilberta.



Obr. 1.

Obr. 1 znázorňuje přiřazení φ_n: plná lomená čára prochází po řadě čtverci, přiřazenými postupně intervalům $[x_{k-1}, x_k,]$, $k = 1, 2, \ldots, 4^n$. Spojitost zobrazení je dána pravidlem (c). Je-li dáno $t \in [0,1]$ a libovolná posloupnost $t_k \in [0,1]$, pak existuje m tak, že pro všechna $k \geq m$ je $|t - t_k| < 4^{-n}$ a tedy t_k i t leží v nějakém (ne nutně jediném) intervalu dělení S_n. Pak však eukleidovská vzdálenost $\varrho(f(t_k), f(t))$ je odhadnuta číslem $\sqrt{2} \cdot 2^{-n}$, a proto z $t_k \to t$ plyne $f(t_k) \to f(t)$ a φ je spojité.

Definice 13.2.15. Zobrazení $A : (P, \varrho) \to (P, \varrho)$ se často nazývá operátor na (P, ϱ). Pro operátory užíváme následující označení:

$$A^1(x) := A(x), \quad A^{n+1}(x) := (A \circ A^n)(x), \quad x \in P.$$

Jestliže existuje $\alpha \in [0,1)$ tak, že

$$\varrho(A(x), A(y)) \leq \alpha \varrho(x, y), \quad x, y \in P, \tag{13.4}$$

říkáme, že A je *kontrakce* na (P, ϱ). Bod $\xi \in P$ se nazývá *pevný bod* operátoru A, pokud $A(\xi) = \xi$.

Poznámka 13.2.16 (důležitá). Každá kontrakce je spojitým zobrazením. Je-li A kontrakce na (P, ϱ), pak existuje $\alpha \in [0,1)$ tak, že pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \to x \in P$, je

$$\varrho(A(x_n), A(x)) \leq \alpha \varrho(x_n, x), \quad n \in \mathbb{N},$$

a tedy $A(x_n) \to A(x)$; zobrazení A je spojité.

Věta 13.2.17 (Banach 1920). *Nechť (P, ϱ) je úplný MP a A je kontrakce na (P, ϱ). Potom existuje právě jeden pevný bod A.*

Důkaz. Zvolme $x_0 \in P$ libovolně a definujme $x_n = A^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská a konverguje k hledanému pevnému bodu ξ. Podle definice kontrakce existuje $\alpha \in [0,1)$ tak, že je (13.4). Pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, je

$$\begin{aligned}\varrho(x_n, x_m) &\le \varrho(x_n, x_{n+1}) + \cdots + \varrho(x_{m-1}, x_m) \le \\ &\le \alpha^n \varrho(x_1, x_0) + \alpha^{n+1}\varrho(x_1, x_0) + \cdots + \alpha^{m-1}\varrho(x_1, x_0) \le \\ &\le (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \cdots)\,\varrho(x_1, x_0)\,,\end{aligned}$$

z čehož plyne odhad

$$\varrho(x_n, x_m) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\varrho(x_1, x_0)\,; \tag{13.5}$$

proto s ohledem na $\alpha^n \to 0$ je $\{x_n\}$ cauchyovská. Existuje tedy $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ a (využíváme spojitosti A)

$$A(\xi) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \xi\,.$$

Pokud by existovaly dva různé body ξ a ζ tak, že $A(\xi) = \xi$ a $A(\zeta) = \zeta$, pak by platilo

$$0 < \varrho(\xi, \zeta) = \varrho(A(\xi), A(\zeta)) < \varrho(\xi, \zeta)\,,$$

což je spor. □

Poznámky 13.2.18. 1. Předcházející větě se zpravidla říká *Banachova věta o pevném bodu.* Často se užívá její verze pro úplný normovaný lineární prostor. Tyto prostory se na Banachovu počest nazývají *Banachovy prostory.* Věta 13.2.17 však platí v každém úplném MP a má, jak je dobré si povšimnout, „nelineární charakter“, tj. operátor v ní vystupující *nemusí být obecně lineární.*

2. Nahlížíme-li na členy posloupnosti $\{x_n\}$ jako na jisté aproximace pevného bodu ξ, je užitečné přejít v odhadu (13.5) k limitě pro $m \to \infty$. Dostaneme tak nerovnost

$$\varrho(x_n, \xi) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\varrho(x_1, x_0)\,,$$

pomocí níž můžeme odhadnout příslušnou vzdálenost (často užíváme označení *odhad chyby*) a „zastavit výpočet“ ξ po dosažení potřebné přesnosti.

Příklad 13.2.19. V Příkladu 2.4.15 jsme použili zobrazení

$$A(x) = \frac{1}{p}\Big((p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}\Big)$$

k výpočtu $\sqrt[p]{a}$. Dokážeme postupně, že

(1) A' na intervalu $[\sqrt[p]{a}, +\infty)$ nabývá svého maxima $(p-1)/p$ v bodě $\sqrt[p]{a}$;

(2) A je na intervalu $[\sqrt[p]{a}, \infty)$ kontrakce.

Skutečně,

$$A'(x) = \frac{p-1}{p}\Big(1 - \frac{a}{x^p}\Big)\,;$$

Snadno nahlédneme, že maximum A' na intervalu $[\sqrt[p]{a}, \infty)$ je rovno $(p-1)/p$. Dostaneme tak odhad

$$|A(x) - A(y)| \leq ((p-1)/p)|x-y|, \quad x, y \in [\sqrt[p]{a}, \infty)\,,$$

a funkce A, chápaná jako (nelineární) operátor na prostoru $[\sqrt[p]{a}, \infty)$, je kontrakce. V Příkladu 2.4.15 jsme ukázali, že při $x_0 \in (0, \infty)$ je posloupnost $\{A^n(x_0)\}$ (jde opět o skládání zobrazení jako ve Větě 13.2.17, ne o mocninu!) od indexu 1 nerostoucí (dokonce klesající, pokud není $x_0 = \sqrt[p]{a}$), a tak se v jistém smyslu konvergence „neustále zlepšuje".

Poznámka 13.2.20. Čtenář snadno předcházející tvrzení zobecní: Je-li I interval v $\mathbb{R}$, který je uzavřenou množinou v $\mathbb{R}$, $f(I) \subset I$, kde f je spojité zobrazení a f má v každém vnitřním bodě $x \in I$ derivaci takovou, že $|f'(x)| < 1$, pak rovnice $f(x) = x$ má jediné řešení. Podstatně hlubší aplikaci Věty 13.2.17 o pevném bodu ukážeme v Kapitole 14.

V souvislosti s Příklady 13.1.2 se ještě informativně zmíníme o „velkých" a „malých" množinách v topologickém smyslu. Tato partie má řadu zajímavých aplikací, např. v teorii reálných funkcí. Příklad (2) 13.1.2 naznačil jednu obtíž spočívající v tom, že množina $\mathbb{Q}$ není uzavřená v $\mathbb{R}$.

Definice 13.2.21. Říkáme, že $A \subset P$ je *řídká v prostoru* (P, ϱ), jestliže

$$\overline{P \setminus \overline{A}} = P\,,$$

tj. uzávěr doplňku $\overline{A}$ je celý prostor P.

Důsledek 13.2.22. *Je-li A řídká množina a $\overline{A} = \overline{B}$, je B také řídká množina. Speciálně to platí např. když $A \subset B \subset \overline{A}$.*

Lemma 13.2.23. *Je-li $A \subset B \subset P$ a B je řídká množina, je řídká i množina A.*

Důkaz. Zřejmě je $\overline{A} \subset \overline{B}$, takže $P \setminus \overline{B} \subset P \setminus \overline{A}$. Odtud dostaneme

$$P = \overline{P \setminus \overline{B}} \subset \overline{P \setminus \overline{A}}\,,$$

a množina A je tudíž řídká. □

Lemma 13.2.24. *Je-li množina $A \subset (P, \varrho)$ hustá a otevřená, je její komplement $P \setminus A$ řídká množina.*

Důkaz. Je-li A hustá a otevřená, je

$$P = \overline{A} = \overline{P \setminus (P \setminus A)} = \overline{P \setminus \overline{(P \setminus A)}}\,,$$

z čehož již plyne tvrzení lemmatu. □

Věta 13.2.25. *Množina $A \subset P$ je řídká, právě když pro každou $\emptyset \neq G \subset P$ otevřenou existuje $\emptyset \neq G_1 \subset G$ otevřená, pro niž $G_1 \cap A = \emptyset$.*

Důkaz. Je-li množina A řídká, je podle Definice 13.2.21 $P\setminus\overline{A}$ hustá množina. Proto pro každou otevřenou množinu $G \neq \emptyset$ je $G_1 := G \cap (P \setminus \overline{A})$ podle Věty 13.1.3 neprázdná a otevřená, přičemž zřejmě $A \cap G_1 \subset A \cap (P \setminus \overline{A}) \subset A \cap (P \setminus A) = \emptyset$, takže podmínka je splněna.

Není-li množina A řídká, není $P \setminus \overline{A}$ hustá. Proto existuje otevřená $\emptyset \neq G \subset P$ tak, že $G \cap (P \setminus \overline{A}) = \emptyset$, tj. $G \subset \overline{A}$ (a mj. je $(\overline{A})^\circ \neq \emptyset$). Nyní stačí ukázat, že pro každou $\emptyset \neq G_1 \subset G$ je $G_1 \cap A \neq \emptyset$. To dokážeme sporem: Z $G_1 \cap A = \emptyset$ plyne $A \subset P \setminus G_1$ a tedy $G_1 \subset G \subset \overline{A} \subset \overline{P \setminus G_1} = P \setminus G_1$, z čehož vyplývá $G_1 = \emptyset$; nalezený spor dokazuje druhou část tvrzení. □

Někdy se jako kritérium řídkosti může hodit ekvivalentní vlastnost, kterou popíšeme v následujícím tvrzeni.

Lemma 13.2.26. *Množina $A \subset P$ je řídká, právě když $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.*

Důkaz. Pokud A není řídká, dokázali jsme v průběhu předcházejícího důkazu, že $(\overline{A})^\circ \neq \emptyset$. Vnitřek $(\overline{A})^\circ$ je otevřená množina pro každou $A \subset P$ a jestliže je A řídká, je

$$P \setminus (\overline{A})^\circ \supset \overline{P \setminus \overline{A}} = P\,, \quad \text{a tedy } P \setminus (\overline{A})^\circ = P\,, \quad \text{nebo-li } \ (\overline{A})^\circ = \emptyset\,;$$

tím je tvrzení lemmatu dokázáno. □

Definice 13.2.27. Existují-li $A_n \subset P$ řídké v (P, ϱ) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tak, že je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, nazývá se A *množinou 1. kategorie* (v Baireově smyslu).

Poznámka 13.2.28. Zřejmě je každá řídká množina v P také množinou 1. kategorie a všechny množiny 1. kategorie tvoří systém, který je uzavřený vzhledem ke spočetným sjednocením. V úplných MP jsou množiny 1. kategorie „malé“. Toho lze, jak uvidíme dále, využít v existenčních důkazech.

Věta 13.2.29 (Baire 1899). *Nechť (P, ϱ) je úplný prostor a nechť $\{\, G_k\,;\, k \in \mathbb{N}\,\}$ je systém otevřených hustých podmnožin P. Potom i $G := \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ je hustá.*

Důkaz. Zvolme libovolně $\emptyset \neq H$ otevřenou v (P, ϱ) a dokažme, že $G \cap H \neq \emptyset$; tím bude s ohledem na 13.1.3 tvrzení dokázáno.

Protože G_1 je otevřená hustá, je $H \cap G_1$ otevřená a existuje tedy otevřená koule $B_1 = B(x_1, r_1)$ ležící i se svým uzávěrem v $G_1 \cap H$.

Protože G_2 je otevřená hustá, je $B_1 \cap G_2$ otevřená a existuje tedy otevřená koule $B_2 = B(x_2, r_2)$ ležící i se svým uzávěrem v $G_2 \cap B_1 \subset G_2 \cap (G_1 \cap H)$.

Takto postupujeme dále: Je-li již vybrána B_{k-1}, pak z hustoty otevřené G_k plyne existence koule $B_k = B(x_k, r_k)$ ležící i se svým uzávěrem v množině

$$G_k \cap B_{k-1} \subset \cdots \subset G_k \cap \bigl(G_{k-1} \cap \cdots \cap G_1 \cap H\bigr)$$

Je zřejmé, že poloměry r_k koulí B_k lze přitom volit tak, že $r_k \to 0$, takže i $\operatorname{diam}(\overline{B_k}) \to 0$. Nyní na uzávěry $\overline{B_k}$ užijeme Cantorovu Větu 13.2.11 a dostaneme tak existenci bodu v $H \cap G$. Tím, že je tato množina neprázdná, jsme důkaz dokončili. □

Věta 13.2.30 (Baire 1899). *Úplný metrický prostor* (P, ϱ) *není 1. kategorie.*

Důkaz. Protože A je řídká, právě když je $P \setminus \overline{A}$ hustá, pro každou posloupnost $\{A_k\}$ řídkých množin, jsou množiny $(P \setminus \overline{A_k})$ otevřené a husté v (P, ϱ). Podle Věty 13.2.29 pak dostaneme

$$\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^{\infty} (P \setminus \overline{A_k}) = P \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} \subset P \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \,,$$

takže (P, ϱ) nemůže být 1. kategorie. □

Poznámka 13.2.31 (důležitá). Množiny, které nejsou množinami 1. kategorie, se nazývají *množiny* 2. *kategorie.* Podle vyslovené věty je tedy úplný metrický prostor (v sobě) 2. kategorie. Doplňkem množiny 1. kategorie v prostoru 2. kategorie *nemůže být* množina 1. kategorie. Na tom je založena metoda důkazu existence funkcí se zajímavými vlastnostmi, která bývá velmi často nazývána *metoda kategorií.* Při důkazu postupujeme podle tohoto obecného principu:

(1) vybere se vhodný *úplný* metrický prostor (P, ϱ), a

(2) ukáže se, že všechny jeho prvky s určitou vlastností tvoří v (P, ϱ) množinu 1. kategorie.

Předcházející věta pak říká, že v P existuje prvek, který zkoumanou vlastnost nemá.

Pokud je A množina 1. kategorie, nazývá se často množina $P \setminus A$ *reziduální*; ta je v prostoru, který je 2. kategorie, také množinou 2. kategorie (je zřejmé, že systém všech množin 1. kategorie je uzavřený vzhledem ke sjednocení konečně mnoha prvků). V takovém případě o prvcích $P \setminus A$ říkáme, že jsou *typickými* prvky P.

Tak lze např. dokázat, že existuje spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která nemá v žádném bodě (vlastní) derivaci, nebo která není monotónní na žádném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a řada dalších zajímavých tvrzení. My takovou funkci, která je spojitá na $\mathbb{R}$ a nemá v žádném bodě konečnou derivaci, později zkonstruujeme v Kapitole 15; právě popsaný postup vede kromě tvrzení o existenci i k poznání, že takových funkcí je v prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ v jistém smyslu „velmi mnoho“.

Lemma 13.2.32. *Množina všech funkcí* $f \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$*, které jsou monotónní na nějakém intervalu* $(\alpha, \beta) \subset [\,a, b\,]$ *je 1. kategorie v* $\mathcal{C}([\,a, b\,])$.

Důkaz. Protože každá funkce, která je monotónní na nějakém otevřeném intervalu v $[\,a, b\,]$, je monotónní i na nějakém otevřeném intervalu v $[\,a, b\,]$ s *racionálními* *koncovými body*, můžeme pracovat pouze s takovými intervaly. Tyto intervaly tvoří pouze spočetnou množinu $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Označme A_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ množinu všech funkcí, které jsou monotónní na intervalu I_n. Množiny A_n jsou uzavřené; k tomu stačí dokázat, že jejich doplňky jsou otevřené množiny. Pokud $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ *není* monotónní v intervalu I_n, existují body $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I_n$ tak, že

$$(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) > 0\,, \quad (f(x_4) - f(x_3))(x_4 - x_3) < 0\,.$$

Pro $r < \min(|f(x_2) - f(x_1)|, |f(x_4) - f(x_3)|)/2$ leží celá koule $B(f, r)$ v doplňku A_n, a proto je tento doplněk otevřená množina.

Množiny A_n jsou řídké v $\mathcal{C}([\,a,b\,])$: K tomu stačí pro dané $n \in \mathbb{N}$ nalézt k $\varepsilon > 0$ a k libovolné funkci $f \in A_n$ funkci $g \in (\mathcal{C}([\,a,b\,]) \setminus A_n)$ tak, aby $\|\, f - g \,\| < \varepsilon$. K libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ a např. k neklesající funkci f na I_n existují v I_n body $x_1 < x_2$ tak, že $f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon/2$. Monotonii f lze „porušit“ přičtením k f po částech lineární funkce h, nabývající v bodě x_1 hodnoty $h(x_1) = \varepsilon$ a v bodě x_2 hodnoty $h(x_2) = 0$, lineární na $[\,x_1, x_2\,]$ a konstantní na intervalech doplňku $I_n \setminus (x_1, x_2)$. Pak je $\|h\| = \varepsilon$ a lze definovat $g = f + h$, takže $g(x_1) > g(x_2)$. Proto je doplněk $\mathcal{C}([\,a,b\,]) \setminus A_n$ hustý v $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ a je to otevřená množina, takže podle Lemmatu 13.2.24 je A_n řídká. Množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je tedy množinou 1. kategorie a tvrzení je dokázáno. $\square$

Důsledek 13.2.33. *Množina všech spojitých monotónních funkcí z prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ je 1. kategorie v $\mathcal{C}([\,a,b\,])$, takže typická funkce z $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ není monotónní na žádném nedegenerovaném intervalu ležícím v $[\,a,b\,]$.*

Příklad 13.2.34. Dokážeme, že typická funkce z $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ nemá v žádném bodě intervalu $[\,a,b\,]$ konečnou jednostrannou derivaci. Označme A^+ množinu všech funkcí $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$, pro něž existuje *vlastní* $f'_+(x)$ v nějakém bodě $x \in [\,a,b)$. Analogicky označme A^- množinu všech těch funkcí f, pro něž existuje vlastní $f'_-(x)$ v nějakém bodě $x \in (\,a,b\,]$.

Abychom dokázali, že funkce z doplňku $\mathcal{C}([\,a,b\,]) \setminus A$, kde $A := A^+ \cup A^-$, jsou typické, stačí ukázat že obě množiny A^+ i A^- jsou 1. kategorie v $\mathcal{C}([\,a,b\,])$. Provedeme to pro množinu A^+, pro množinu A^- je důkaz obdobný. Důkaz rozdělíme do několika kroků:

1. Položíme-li pro $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \Big\{\, f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])\,;\, (\exists x \in [\,a, b - 1/n\,])\, (\forall h \in (0, 1/n))\, \Big(\Big|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\Big| \le n\Big)\Big\}\,,$$

je $A^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Rovnost dokážeme, pokud k funkci $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ s vlastní $f'_+(x)$ v nějakém bodě $x \in [\,a,b)$ najdeme A_n, v níž tato funkce leží. Zřejmě existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \ge n_1$ je $x < b - 1/n$; dále existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \ge n_2$ je $|\, f'_+(x)\,| < n$ a $n_3 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \ge n_3$

$$h \in (0, 1/n) \quad \Longrightarrow \quad \frac{|\, f(x+h) - f(x)\,|}{h} \le n\,.$$

Položme $n_0 = \max\{ n_1, n_2, n_3 \}$. Potom pro všechna $n \geq n_0$ leží f v A_n. Dále dokážeme, že množiny A_n jsou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ uzavřené a řídké.

2. Zvolme pevně n a ukažme, že $A_n = \overline{A_n}$. K tomu postačí ukázat, že

$$\big(f_k \in A_n,\ f_k \to f \text{ v } \mathcal{C}([\,a,b\,])\big) \Longrightarrow f \in A_n\,,$$

neboli že

$$(\exists x \in [\,a, b - 1/n\,])\,(\forall h \in (0, 1/n))\,(|\,f(x+h) - f(x)\,| \leq nh)\,. \tag{13.6}$$

Zvolíme nyní libovolně konvergentní posloupnost funkcí $f_k \in A_n$ a k nim ty body, pro něž

$$(\exists x_k \in [\,a, b - 1/n\,])(\forall h \in (0, 1/n))(|\,f_k(x_k+h) - f_k(x_k)\,| \leq nh)\,.$$

Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_k \to x_0$, $x_0 \in [\,a, b - 1/n\,]$, čehož lze dosáhnout přechodem k vybrané konvergentní posloupnosti. Nyní budeme odhadovat:

$$\begin{aligned} |\,f(x_0+h) - f(x_0)\,| \leq {} & |\,f(x_0+h) - f(x_k+h)\,| + |\,f(x_k+h) - f_k(x_k+h)\,| + \\ & + |\,f_k(x_k+h) - f_k(x_k)\,| + \\ & + |\,f_k(x_k) - f(x_k)\,| + |\,f(x_k) - f(x_0)\,|\,. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Výraz na druhém řádku (13.7) je shora odhadnut číslem nh, ostatní výrazy v nerovnosti vpravo konvergují pro $k \to \infty$ k 0: první a poslední vzhledem ke spojitosti f v bodech $x_0 + h$ a x_0, druhý a čtvrtý pro všechna $h \in (0, 1/n)$ vzhledem k $f_k \rightrightarrows f$ na $[\,a, b\,]$, neboť konvergence v $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ je stejnoměrná. Proto pro f dostáváme (13.6) s $x = x_0$, takže $f \in A_n$.

3. Nyní stačí podle Lemmatu 13.2.24 dokázat, že komplement $\mathcal{C}([\,a,b\,]) \setminus A_n$ je hustá množina pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zvolme pevně n a popišme, jak ke každé $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ sestrojit v $C := \mathcal{C}([\,a,b\,]) \setminus A_n$ posloupnost funkcí $\{f_k\}$ konvergentní k f. I když je to pro $f \in C$ triviální (stačí volit konstantní posloupnost s $f_k = f$), uděláme to najednou pro jakoukoli $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$. K tomu stačí ukázat, jak k $\varepsilon > 0$ nalézt $g \in C$ tak, že $\|f - g\| < \varepsilon$. Funkci g sestrojíme postupně: nejprve k f sestrojíme „blízko“ funkci ℓ s odhadnutelnou derivací zprava a k této funkci přičteme „malou pilovitou funkci“ s_r tak, abychom dostali $g = \ell + s_r \notin A_n$. Nyní tuto ideu zpřesníme.

K dané funkci f najdeme analogicky jako v Příkladu 13.1.6 po částech lineární funkci ℓ tak, aby $\|\,f - \ell\,\|_\infty < \varepsilon/2$. Funkce ℓ má v každém bodě $x \in [\,a, b)$ vlastní derivaci zprava a existuje $M \in (0, +\infty)$ tak, že pro všechna tato x je $|\,\ell'_+(x)\,| \leq M$. Nyní pro každé $m \in \mathbb{N}$ zvolme ekvidistantní dělení $D \in \mathcal{D}(a, b)$, $D = \{a = t_0 < t_1 \cdots < t_{2m} = b\}$ a v jeho dělicích bodech položme

$$s_m(t_v) := \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - (-1)^v\right), \quad v = 1, 2, \ldots, 2m\,.$$

Funkce s_m mají derivaci zprava ve všech bodech $x \in [\,a, b)$ a absolutní hodnota této derivace je konstantní; je rovna $m\varepsilon/(b-a)$ a pro $m \to \infty$ má limitu $+\infty$. Nyní zvolíme za funkci s_r funkci s_m s tak velkým indexem m, aby

$$(s_m + \ell)'_+(x) > n \quad \text{pro všechna} \quad x \in [\,a, b)\,,$$

Položíme-li $g := \ell + s_r$, je $g \notin A_n$ a zároveň $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Tím je dokázáno, že A_n je řídká množina pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Poznamenejme na závěr, že existují i funkce $f \in \mathcal{C}([a,b])$, které nemají v každém bodě z $[a,b]$ derivaci (tedy ani vlastní, ani nevlastní), ale ty tvoří v $\mathcal{C}([a,b])$ množinu 1. kategorie a jejich konstrukce je velmi složitá. Jak se později ukáže, každá z těch funkcí, kterými jsme se zabývali v tomto příkladu, je i funkcí, která není monotónní na žádném otevřeném intervalu $I \subset [a,b]$; monotónní funkce na I mají vlastní derivaci skoro všude v I.

13.3 Kompaktní prostory

Poznámka 13.3.1. Připomeňme, že jsme se domluvili, že každou $M \subset (P, \varrho)$ lze přirozeným způsobem chápat jako MP. Uveďme nejprve užitečnou charakteristiku pro otevřené a uzavřené množiny v M.

Lemma 13.3.2. *Je-li $A \subset M \subset (P,\varrho)$, pak A je uzavřená v M, právě když existuje uzavřená F v P tak, že $A = M \cap F$. Je-li $A \subset M \subset (P,\varrho)$, pak A je otevřená v M, právě když existuje otevřená G v P tak, že $A = M \cap G$.*

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat pouze jedno z tvrzení, neboť druhé dostaneme jednoduchou úvahou o doplňcích. Dokažme např. tvrzení o uzavřenosti. Budeme pracovat s uzávěry vzhledem k ϱ v M a P, proto je rozlišíme přidáním označení k pruhu, který značí uzávěr. Zřejmě je

$$\overline{A}^{\,M} = M \cap \overline{A}^{\,P},$$

tedy za F lze volit uzávěr $\overline{A}^{\,P}$ množiny A v (P,ϱ). Snadno dokážeme i obrácenou implikaci: je-li F uzavřená v (P,ϱ), tj. $F = \overline{F}^{\,P}$, a $A = M \cap F$, je

$$A \subset M \cap \overline{A}^{\,P} \subset M \cap \overline{F}^{\,P} = A,$$

a je tedy $A = M \cap \overline{A}^{\,P} = \overline{A}^{\,M}$. □

Definice 13.3.3. Budeme říkat, že systém množin $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tvoří *pokrytí* množiny M, jestliže $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$. Jsou-li všechny M_α otevřené množiny, nazýváme takové pokrytí *otevřeným pokrytím* M.

Definice 13.3.4 (Aleksandrov, Uryson 1924*). Budeme říkat, že množina $M \subset P$ je *kompaktní* v prostoru (P,ϱ), jestliže z každého jejího otevřeného pokrytí lze vybrat konečné (pod)pokrytí. Podrobněji: Je-li systém $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ otevřeným pokrytím M, pak existují $\alpha_k \in A$, $k = 1, 2, \ldots, m$ tak, že $M \subset \bigcup_{k=1}^{m} G_{\alpha_k}$.

Poznámka 13.3.5. Lemma 13.3.2 ukazuje, že není podstatné, je-li pokrytí tvořeno otevřenými množinami v M či otevřenými množinami v P. Není obtížné si rozmyslit, že Heine-Borelova věta (Věta 4.3.46) je z hlediska právě zavedené kompaktnosti tvrzením o tom, že interval $[a,b]$ je kompaktní. Konečně poznamenejme, že definice samozřejmě zahrnuje definici *kompaktního prostoru*, stačí volit $M = P$. V plné obecnosti je spojována věta se jménem Lebesgueovým (dříve se pracovalo se „spočetnými pokrytími“).

Je zajímavé, že k tvrzením o kompaktních množinách existují často „duální tvrzení“, která jsou s nimi ekvivalentní: Ukážeme to nejprve na následující větě, která ve skutečnosti úzce souvisí se samotnou definicí kompaktního prostoru.

Věta 13.3.6 (Riesz F. 1908*). *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor a nechť $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je takový systém uzavřených množin, že pro každý* konečný *podsystém $\{F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_m}\}$ je $\bigcap_{k=1}^m F_{\alpha_k} \neq \emptyset$. Potom také*

$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset\,. \tag{13.8}$$

Důkaz. Budeme dokazovat sporem. Neplatí-li (13.8), pak pro $G_\alpha := P \setminus F_\alpha$ je

$$P = P \setminus \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (P \setminus F_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha\,,$$

takže $\{G_\alpha\}$ je otevřeným pokrytím P. Pak by však existoval *konečný podsystém*, pro který

$$\bigcup_{k=1}^m G_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^m (P \setminus F_{\alpha_k}) = P \setminus \bigcap_{k=1}^m F_{\alpha_k} = P\,,$$

což je ve sporu s předpokladem věty a tím je její tvrzení dokázáno. □

Definice 13.3.7 (Fréchet 1906, Hausdorff 1914*). Říkáme, že prostor (P, ϱ) je *totálně omezený*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje *konečná* množina $A_\varepsilon \subset P$ tak, že pro všechna $x \in P$ je $\operatorname{dist}(x, A_\varepsilon) < \varepsilon$. Množině A_ε se někdy říká *ε-síť*, takže definici lze vyjádřit i tak, že (P, ϱ) je totálně omezený, má-li pro každé $\varepsilon > 0$ konečnou ε-síť.

Lemma 13.3.8. *Totálně omezený prostor (P, ϱ) je omezený.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ a sestrojme konečnou síť $A_\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$. Potom snadno odhadneme diametr prostoru P

$$\operatorname{diam}(P) \le 2\varepsilon + \max\{\,\varrho(x_j, x_k)\,;\, 1 \le j, k \le n\}\,,$$

takže totálně omezený prostor je omezený. □

Věta 13.3.9. *Každý totálně omezený prostor (P, ϱ) je separabilní.*

Důkaz. Sestrojme postupně konečné ε-sítě A_ε pro $\varepsilon = 1/n, n \in \mathbb{N}$. Potom je však množina $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_{1/n}$ spočetným sjednocením konečných množin. Je to tedy spočetná a zároveň zřejmě hustá podmnožina (P, ϱ). □

Poznámka 13.3.10. V literatuře lze nalézt tuto žertovnou interpretaci: „*Totálně omezený prostor je město, které lze střežit konečným počtem libovolně krátkozrakých strážců.*“ Doporučujeme čtenáři, aby se nad ní zamyslel; je to dobrá pomůcka k snadnému zapamatování definice.

Věta 13.3.11. *Každý kompaktní prostor je totálně omezený, a tedy omezený a separabilní.*

Důkaz. Uvažujme pokrytí prostoru P systémem otevřených koulí $\{B(x, \varepsilon)\,;\, x \in P\}$ s daným $\varepsilon > 0$. Pak vybereme konečné podpokrytí a středy vybraných koulí tvoří konečnou ε-síť prostoru P. Zbytek je důsledkem předcházejících tvrzení. □

Věta 13.3.12. *Je-li $M \subset P$ kompaktní v (P, ϱ), pak je M uzavřená.*

Důkaz. Podle definice stačí dokázat, že $P \backslash M$ je otevřená množina. Je-li $x \in P \backslash M$, pak pro každé $y \in M$ lze nalézt $r_y > 0$ tak, že

$$B(x, r_y) \cap B(y, r_y) = \emptyset\,;$$

stačí např. volit $0 < r_y < \varrho\,(x, y)/2$. Koule $B(y, r_y)$ pro $y \in M$ tvoří otevřené pokrytí M, ke kterému lze najít konečné podpokrytí $\{B(y_k, r_{y_k});\, k = 1, \ldots, n\}$. Potom pro $0 < r < \min\{r_{y_k};\, k = 1, \ldots, n\}$ je $B(x, r) \cap M = \emptyset$ a koule $B(x, r)$ je okolím x, přičemž je $B(x, r) \subset P \setminus M$. □

Poznámka 13.3.13. Velmi důležité jsou věty, které charakterizují kompaktní množiny v konkrétních metrických prostorech. Tak např. podmnožina diskrétního prostoru je kompaktní, právě když je *konečná*. Zpravidla však jsou charakteristiky kompaktnosti v obvykle studovaných prostorech podstatně složitější.

Již víme, že každá kompaktní množina M je omezená a uzavřená, avšak odtud *obecně* kompaktnost M neplyne; viz dále Věta 13.3.26 a Příklady 13.3.27. Nicméně všechny pojmy, které k užitečným obecným charakteristikám kompaktnosti potřebujeme, již máme. Nejprve uvedeme jinou variantu Cantorovy věty.

Věta 13.3.14 (Cantor 1872*). *Nechť (P, ϱ) je kompaktní prostor a $\{A_n\}_1^\infty$ nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v P, tj. $A_{n+1} \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{je } \textit{neprázdná} \text{ množina}\,^{4}).$$

Důkaz. Tvrzení je důsledkem Věty 13.3.6, neboť průnik libovolného konečného podsystému množin A_k je neprázdný. Důkaz lze však provést přímo stejným způsobem jako důkaz Věty 13.3.6. □

Poznámka 13.3.15. Čtenář by si měl povšimnout, že tato verze Cantorovy věty „více navazuje“ na Větu 2.4.1 (princip vložených intervalů). Je zajímavé, že k ní existuje duální tvrzení, jehož autorem je Félix Éduard Justin Émile Borel (1871 – 1956):

---

[4]) O označení a dataci věty viz Poznámku 13.2.12.

Věta 13.3.16 (Borel 1894*). *Nechť (P, ϱ) je kompaktní prostor a $\{G_k\}_1^\infty$ je posloupnost otevřených množin v P taková, že $P = \cup_{k=1}^\infty G_k$. Potom existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že*

$$P = \bigcup_{k=1}^{m} G_k \,. \tag{13.9}$$

Důkaz této věty přenecháme čtenáři: může vyjít jak z Definice 13.3.4, tak i z Věty 13.3.14, důkaz z definice je však velmi jednoduchý.

Lemma 13.3.17. *Každá uzavřená množina $M \subset P$ je v kompaktním prostoru (P, ϱ) rovněž kompaktní.*

Důkaz. Tvoří-li systém $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ v prostoru P otevřené pokrytí množiny M, je $\{G_\alpha; \alpha \in A\} \cup \{P \setminus M\}$ otevřené pokrytí P. Konečné podpokrytí M sestrojíme tak, že vybereme konečné pokrytí P a pak z něj odstraníme $P \setminus M$. □

Následující věta zobecňuje další z „hlubších vět"; porovnejte ji s Větou 4.3.31, kterou z ní obdržíme jako jednoduchý důsledek.

Věta 13.3.18. *Nechť $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je spojité zobrazení a P je kompaktní. Potom je i obraz $f(P)$ kompaktní.*

Důkaz. Zvolme libovolné otevřené pokrytí $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ obrazu $f(P)$. Potom systém $\{f^{-1}(G_\alpha); \alpha \in A\}$ tvoří otevřené pokrytí P a lze vybrat $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tak, že

$$P = \bigcup_1^n f^{-1}(G_{\alpha_k}) \,, \text{ a proto } \; f(P) \subset \bigcup_1^n G_{\alpha_k} \,.$$

Tak jsme našli potřebné konečné pokrytí $f(P)$. □

Důsledek 13.3.19. *Je-li $M \subset P$ kompaktní v prostoru (P, ϱ) a $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá, pak je funkce f omezená a nabývá na M svého maxima a minima.*

Důkaz. Stačí uvážit, že $f(M)$ je kompaktní a tedy je omezenou a uzavřenou množinou v $\mathbb{R}$. Proto je i $\sup f(M) \in f(M)$, $\inf f(M) \in f(M)$ a jsou to reálná čísla. Tím je tvrzení dokázáno. □

Poznámka 13.3.20. Pro prostor s všech posloupností reálných čísel z Příkladu 12.3.41 dokazuje předcházející větu a její důsledek opět již Fréchet v práci [7].

Poznámka 13.3.21. V této souvislosti je zajímavé, že je-li $A \subset (P, \varrho)$ neprázdná kompaktní množina, má každý bod $x \in P \setminus A$ v A „nejbližší bod", tj. takový bod $x_0 \in A$, pro který

$$d_A(x) = \varrho\,(x, x_0)\,.$$

Bod x_0 s touto vlastností však nemusí být jediný. Podobný výsledek lze formulovat pro vzdálenost dvou množin: Je např. lehké sestrojit disjunktní množiny $A, B \in \mathbb{R}^2$ (doporučujeme čtenáři, aby si načrtl obrázky), jejichž vzdálenost je 0 a úloha je jen o trochu těžší, mají-li být tyto množiny uzavřené. Má-li však být navíc alespoň jedna z množin A, B kompaktní, snadno lze ukázat, že úloha již nemá řešení. Je-li např. množina A kompaktní, je

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\, d_B(x)\,;\, x \in A\,\}\,,$$

a jde tedy o infimum spojité funkce na kompaktní množině. Tohoto infima se nabude alespoň v jednom bodě $x_0 \in A$ a jeho hodnota je kladná. Pokud by to byla 0, ležel by bod x_0 i v $\overline{B} = B$ a množiny A, B by nebyly disjunktní.

Věta 13.3.22 (Hausdorff 1914). *Prostor (P,ϱ) je kompaktní, právě když je úplný a totálně omezený.*

Důkaz. Dokážeme obě implikace. Nejprve předpokládejme, že P je kompaktní. Pak je podle Věty 13.3.11 totálně omezený. Zbývá tedy dokázat úplnost P. Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Definujme množiny

$$A_n := \overline{\{x_k\,;\, k \geq n\}}\,;$$

pak jsou všechny A_n uzavřené a zřejmě $A_{n+1} \subset A_n \subset P$, $n \in \mathbb{N}$. Proto podle Věty 13.3.14 existuje bod $x \in P$, ležící v průniku $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Ukážeme, že $x_n \to x$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně a zvolme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby pro všechna $m,n \geq k$ platilo $\varrho\,(x_m,x_n) < \varepsilon/2$. Protože $x \in A_k$, lze nyní zvolit bod x_m s $m \geq k$ tak, že $\varrho\,(x_m,x) < \varepsilon/2$, a tedy podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho\,(x_n,x) \leq \varrho\,(x_n,x_m) + \varrho\,(x_m,x) < \varepsilon$$

pro všechna $n \geq k$. Proto je $x_n \to x$ a P je úplný.

Obrácenou implikaci dokážeme sporem. Nechť P je úplný a totálně omezený, avšak nikoli kompaktní. Pak existuje otevřené pokrytí $\{\,G_\gamma; \gamma \in \mathit{\Gamma}\,\}$ prostoru P, z něhož nelze vybrat konečné podpokrytí prostoru P. Z totální omezenosti P vyplývá, že pro každé kladné ε_k z posloupnosti $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \to 0$, existuje *konečná* ε_k-síť. Z ε_k-sítě sestrojíme pro každé $k \in \mathbb{N}$ systém $\mathcal{S}_k$ všech *uzavřených koulí* se středy v bodech ε_k-sítě a o poloměru ε_k. Množiny M z $\mathcal{S}_k$ pokrývají P a pro každou je $\operatorname{diam}(M) \leq 2\varepsilon_k$, přičemž $\varepsilon_k \to 0_+$. Nyní existuje alespoň jedna množina $M \in \mathcal{S}_1$, kterou nelze pokrýt konečně mnoha množinami z $\{\,G_\gamma\,\}$. Označme ji D_1.

Množiny konečného systému $\{D_1 \cap M\,;\, M \in \mathcal{S}_2\}$ pokrývají D_1, jejich průměr nepřevýší $2\varepsilon_2$ a alespoň jedna z nich není opět pokryta žádným konečným podsystémem $\{G_\alpha\}$. Označme ji D_2. Nyní je snad již čtenáři zřejmé, jak induktivně definujeme $\{D_k\}$, přičemž pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $D_{k+1} \subset D_k$, $\operatorname{diam}(D_k) \leq 2\varepsilon_k$, $\varepsilon_k \to 0$, a D_k *nelze* pro žádné $k \in \mathbb{N}$ pokrýt žádným konečným podsystémem $\{\,G_\gamma\,;\, \gamma \in \mathit{\Gamma}\,\}$.

Zvolíme $x_n \in D_n$, $n \in \mathbb{N}$. Protože $\varepsilon_k \to 0$, je posloupnost $\{x_n\}$ cauchyovská, a tedy existuje $x \in P$, $x_n \to x$, neboť P je úplný. Bod x je pokryt alespoň jednou množinou G_γ a ta obsahuje $B(x,r)$ pro vhodné $r > 0$, avšak pro všechna $k \in \mathbb{N}$ s $\operatorname{diam}(D_k) \leq 2\varepsilon_k < r$ je $D_k \subset B(x,r)$ a to je spor, neboť pak je $D_k \subset G_\gamma$. Prostor P je tedy kompaktní. $\square$

Poznámka 13.3.23. Řadu důkazů tvrzení o funkcích z $\mathcal{C}([a,b])$ jsme založili na tom, že z omezené posloupnosti v $\mathbb{R}$ lze vybrat konvergentní posloupnost. Abychom mohli např. snadno modifikovat takové důkazy pro obecné MP, potřebovali bychom mít takovouto vlastnost k dispozici i v MP. To motivuje naše další úsilí o důkaz ekvivalentní podmínky pro kompaktnost $M \subset (P,\varrho)$. Ukazuje se, že to není obtížné.

Definice 13.3.24 (Fréchet 1906*). Je-li $M \subset (P,\varrho)$, pak nazýváme M *sekvenciálně kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\}$ bodů z M lze vybrat posloupnost konvergentní v M.

S ohledem na následující tvrzení není tato terminologie překvapivá. Zřejmě stačí uvedené tvrzení dokázat pouze pro prostor (P,ϱ).

Věta 13.3.25. *Nechť (P,ϱ) je MP. Potom P je sekvenciálně kompaktní, právě když je kompaktní.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že P je sekvenciálně kompaktní. Podle předcházejícího tvrzení stačí dokázat, že pak je P úplný a totálně omezený. Dokažme nejprve úplnost P: je-li $\{x_n\}$ cauchyovská, lze z ní díky sekvenciální kompaktnosti vybrat konvergentní $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $x_{n_k} \to x \in P$ a zřejmě $x_n \to x$: Je-li $\varepsilon > 0$ voleno libovolně, existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m,n \geq k$ je $\varrho(x_m,x_n) < \varepsilon/2$. Zvolíme-li nyní takové x_m, aby platilo $m \geq k$ a $\varrho(x,x_m) < \varepsilon/2$, je zřejmě $\varrho(x,x_n) \leq \varrho(x,x_m) + \varrho(x_m,x_n) < \varepsilon$.

Pro důkaz totální omezenosti P dokažme ekvivalentní tvrzení: není-li P totálně omezený, pak není sekvenciálně kompaktní. Nechť k jistému $\varepsilon > 0$ neexistuje konečná ε-síť. Definujme induktivně $\{x_n\}$ tak, že $\varrho(x_n,x_m) \geq \varepsilon$ pro všechna $n \neq m$, a to takto:

Zvolme libovolně $x_1 \in P$. S ohledem na to, že $\{x_1\}$ nemůže být ε-sítí v P, existuje x_2 tak, že $\varrho(x_1,x_2) \geq \varepsilon$. Obecně, je-li již zvoleno n prvků P, pak existuje $x \in P$ tak, že $\operatorname{dist}(x,\{x_1,\dots,x_n\}) \geq \varepsilon$, a lze definovat $x_{n+1} := x$. Nyní však žádná vybraná posloupnost z $\{x_n\}$ není cauchyovská, a proto neexistuje ani žádná vybraná konvergentní podposloupnost. Dokázali jsme, že prostor není sekvenciálně kompaktní.

Je-li P kompaktní a $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost bodů z P, postupujeme jako při důkazu Tvrzení 13.3.22: Položíme $A_n := \overline{\{x_k\,;\,k \geq n\}}$. Potom je podle Cantorovy Věty 13.3.14 množina

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

neprázdná a snadno k $x \in A$ sestrojíme vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $x_{n_k} \to x$ pro $k \to \infty$: Vybereme $x_{n_1} \in A_1$ tak, aby $\varrho(x_{n_k},x) < 1$ a postupujeme induktivně dále. Pokud jsme naposled vybrali $x_{n_r} \in A_r$ tak, že $\varrho(x_{n_r},x) < 1/r$, vybereme $n_{r+1} > n_r$, pro něž $x_{n_{r+1}} \in A_{r+1}$ a $\varrho(x_{n_{r+1}},x) < 1/(r+1)$. Pak ale $\{x_{n_k}\}$ je hledaná vybraná posloupnost konvergentní k x. $\square$

Věta 13.3.26. *Nechť $m \in \mathbb{N}$. Potom je množina $M \subset \mathbb{R}^m$ kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

Důkaz. Omezenost a uzavřenost každé kompaktní množiny plyne z již dokázaných tvrzení 13.3.11 a 13.3.12. Obráceně, jestliže je $M \subset \mathbb{R}^m$ omezená a uzavřená, pak pro posloupnost $\{x_n\}$ bodů z $\mathbb{R}^m$ (značíme $x_n = [x_n^1, \dots, x_n^m]$) snadno sestrojíme vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{x_n\}$ tak, že konvergují první složky, tj. posloupnost $\{x_{n_k}^1\}_{k=1}^{\infty}$, neboť i $\{x_n^1\}$ je omezená. Z posloupnosti $\{x_{n_k}\}$ vybereme posloupnost tak, aby konvergovaly druhé složky, atd. Po m krocích tak získáme posloupnost $\{y_k\}$ vybranou $\{x_n\}$ konvergentní „po složkách“, tedy konvergentní i v $\mathbb{R}^m$ a také v M, protože M je uzavřená množina. Protože je množina M sekvenciálně kompaktní, je i kompaktní. □

Příklady 13.3.27. 1. V prostoru m všech omezených posloupností reálných čísel se supremovou normou *není* uzavřená jednotková koule kompaktní, neboť z posloupnosti $\{x_n\}$, kde

$$x_n := \{\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots\},$$

nelze vybrat konvergentní podposloupnost. Zřejmě

$$\|x_k - x_l\|_\infty = 1 \quad \text{pro} \quad k \neq l\,,$$

a tedy žádná podposloupnost $\{x_n\}$ není ani cauchyovská.

2. Stejným způsobem dokážeme, že i v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ není uzavřená jednotková koule $K(0,1)$ kompaktní. Konstrukci $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$ s analogickou vlastností provedeme např. takto (kreslete si obrázek): zvolme f_k tak, že

$$f_k(t) = 0 \text{ pro } t \in [\,0,1\,] \setminus (1/(k+1), 1/k)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

V půlícím bodě intervalu $[\,1/(k+1), 1/k\,]$ položme hodnotu f_k rovnu 1 a pak spojitě dodefinujme f_k lineárně na obou zbývajících intervalech. Snadno nahlédneme, že $\|f_k - f_l\| = 1$ pro $f_k \neq f_l$. Avšak z posloupnosti $\{f_n\}$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost, neboť opět žádná podposloupnost nesplňuje Bolzano-Cauchyho podmínku.

Definice 13.3.28. Nechť $M \subset (P, \varrho)$. Říkáme, že zobrazení $f : M \to (Q, \sigma)$ je *stejnoměrně spojité na* M, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x, y \in M\,;\ \varrho\,(x,y) < \delta)\,(\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon)\,. \tag{13.10}$$

Jak vidíme, je to analogická definice (tj. je „stejná jako v $\mathbb{R}^1$“), nicméně zatím víme o MP příliš málo, abychom s ní mohli dobře pracovat; připomeňme, že první věta, kterou jsme o stejnoměrné spojitosti v $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ dokázali, byla o spojitosti na uzavřeném intervalu a sama uzavřenost množiny nestačí (např. funkce x^2 na $\mathbb{R}^1$ *není* stejnoměrně spojitá. Dokonce i při zkoumání spojitosti v bodě MP můžeme mít obtíže, teoreticky jsme však již na vyšetřování spojitosti funkcí na $\mathbb{R}^m$ pro $m > 1$ připraveni. Poznamenejme nakonec, že stejnoměrná spojitost *není* topologická vlastnost.

Tvrzení 13.3.29. *Nechť* $M \subset (P, \varrho)$. *Zobrazení* $f : M \to (Q, \sigma)$ *je* stejnoměrně spojité na M, *právě když*

$$\big(x_k, y_k \in M,\ \varrho\,(x_k, y_k) \to 0\big) \Longrightarrow \big(\sigma(f(x_k), f(y_k)) \to 0\big)\,. \tag{13.11}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že je splněna podmínka (13.10) a $\varrho\,(x_k, y_k) \to 0$; pak k $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta(\varepsilon) > 0$ a k němu $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $\varrho\,(x_k, y_k) < \delta(\varepsilon)$ pro všechna $k \geq n$. Odtud dostaneme $\sigma(f(x_k), f(y_k)) < \varepsilon$ pro všechna $k \geq n$, z čehož již plyne (13.11).

Není-li splněna podmínka (13.10), existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro všechna $\delta > 0$ lze nalézt body $x, y \in M$, pro které $\varrho\,(x, y) < \delta$ a současně $\sigma(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ lze tedy zvolit body $x_k, y_k \in M$, $\varrho\,(x_k, y_k) < k^{-1}$, pro které $\sigma(f(x_k), f(y_k)) \geq \varepsilon_0$. Pak však zřejmě

$$\varrho\,(x_k, y_k) \to 0\,, \quad \text{a současně} \quad \sigma(f(x_k), f(y_k)) \not\to 0\,. \tag{13.12}$$

Tím je důkaz ekvivalence podmínek (13.10) a (13.11) dokončen. □

Věta 13.3.30 (Heine 1872, Fréchet 1906*). *Reálná funkce f spojitá na kompaktní množině $M \subset (P, \varrho)$ je stejnoměrně spojitá na M.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme opět sporem: Stejně jako v důkazu Tvrzení 13.3.29 sestrojíme posloupnosti bodů $x_k, y_k \in M$, pro něž platí (13.12) ($\sigma(x, y)$ je nyní $|x - y|$). Protože M je kompaktní, lze vybrat z $\{x_k\}$ podposloupnost konvergentní k nějakému bodu $x \in M$; lze tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že existuje $\lim x_k = x$. Protože

$$\varrho\,(x, y_k) \leq \varrho\,(x, x_k) + \varrho\,(x_k, y_k) \to 0\,,$$

je také $\lim y_k = x$. Ze spojitosti f v bodě x plyne

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_k) - f(y_k)| = |\,f(x) - f(x)\,| = 0\,,$$

což je ve sporu s (13.12) a tvrzení Věty 13.3.30 je dokázáno. □

Poznámka 13.3.31. Čtenář by měl porovnat předcházející (v podstatě Fréchetův) důkaz s důkazem Heineho Věty 11.1.3, neboť „obecný" důkaz je patrně přehlednější. Je vhodné si uvědomit, že věta platí např. pro libovolný uzavřený interval

$$I = [\,a_1, b_1\,] \times [\,a_2, b_2\,] \times \cdots \times [\,a_m, b_m\,] \subset \mathbb{R}^m\,.$$

To se využívá při důkazu existence „vícerozměrného" Riemannova integrálu ze spojité funkce na I.

Podle Věty 13.3.26 je v $\mathbb{R}^m$ každá omezená a uzavřená množina kompaktní. Analogické tvrzení prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ *neplatí*, a tak vzniká přirozená otázka: Které množiny $M \subset \mathcal{C}([\,a, b\,])$ nebo obecněji $M \subset (P, \varrho)$ jsou kompaktní? K tomu využijeme pojem stejné spojitosti, kterou zavedl Giulio Ascoli (1843 – 1896) v souvislosti se studiem konvergence posloupností spojitých funkcí.

Definice 13.3.32 (Ascoli 1883*). Nechť $M \subset (P, \varrho)$ a nechť $\mathcal{F}(M)$ je systém funkcí $f : M \to \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce z $\mathcal{F}(M)$ jsou *stejně spojité na* M, jestliže je splněna podmínka

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall f \in \mathcal{F}(M))(\forall x_1,\, x_2 \in M)(\varrho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)\,.$$

Poznámka 13.3.33. Z Definice 13.3.32 vyplývá, že všechny funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ jsou (stejně) stejnoměrně spojité na M. Podobně říkáme, že funkce ze systému $\mathcal{F}(M)$ jsou *stejně omezené*, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechny funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ a všechna $x \in M$ je $|f(x)| \le K$. Pro stručnost budeme někdy říkat krátce ve zřejmém významu, že *systém funkcí* $\mathcal{F}(M)$ *je stejně spojitý* nebo *stejně omezený*.

Věta 13.3.34 (Ascoli 1883*). *Nechť $M \subset (P, \varrho)$ je kompaktní. Potom uzavřená podmnožina $\mathcal{F}(M)$ prostoru $\mathcal{C}(M)$ všech spojitých funkcí na M je kompaktní, právě když je systém $\mathcal{F}(M)$ stejně omezený a stejně spojitý.*

Důkaz. Nejprve budeme předpokládat, že $\mathcal{F}(M)$ je kompaktní. Pak je systém $\mathcal{F}(M)$ totálně omezený a tedy (stejně) omezený podle Věty 13.3.11. Musíme ještě ukázat, že je zároveň stejně spojitý. Z totální omezenosti $\mathcal{F}(M)$ plyne, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje konečná $(\varepsilon/3)$-síť $A = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathcal{F}(M)$. Ze stejnoměrné spojitosti funkcí f_k, které je důsledkem Věty 13.3.30, plyne existence $\delta_k > 0$ tak, že pro $k = 1, \dots, m$ je

$$(x, y \in M,\ \varrho(x, y) < \delta_k) \implies (|\, f_k(x) - f_k(y)\,| < \varepsilon/3)\,.$$

Položme $\delta = \min\{\, \delta_k\,;\, k = 1, \dots, m\}$ a zvolme libovolnou $f \in \mathcal{F}(M)$. K f nalezneme $f_{k_0} \in A$, pro kterou je $\|\, f - f_{k_0}\,\| < \varepsilon/3$. Nyní zřejmě

$$(x, y \in M,\ \varrho(x, y) < \delta) \implies |f(x) - f(y)| \le$$
$$\le |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y)| + |f_{k_0}(y) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,,$$

takže systém $\mathcal{F}(M)$ je stejně spojitý.

Nyní ukážeme, že $\mathcal{F}(M)$ je sekvenciálně kompaktní, je-li stejně omezený a stejně spojitý. Jelikož je $\mathcal{F}(M)$ uzavřený, stačí dokázat, že z každé posloupnosti funkcí $\{f_k\}$ z $\mathcal{F}(M)$ lze vybrat cauchyovskou podposloupnost. Podle Věty13.3.11 je kompaktní prostor totálně omezený a je podle Věty 13.3.9 separabilní, existuje tedy spočetná množina $T \subset M$, která je hustá v M. Všechny její prvky seřadíme do (prosté) posloupnosti $\{t_k\}$. Nyní budeme postupně vytvářet vybrané posloupnosti: $\{f_{11}, f_{12}, f_{13}, \dots\}$ je vybraná posloupnost z $\{f_k\}$, která je konvergentní v bodě t_1, $\{f_{21}, f_{22}, f_{23}, \dots\}$ je vybraná posloupnost z $\{f_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní v bodě t_2, atd. Obecně v m-tém kroku vybereme z posloupnosti $\{f_{(m-1)\,k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost $\{f_{mk}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, aby konvergovala v bodě t_m. Povšimneme si, že $\{f_{mk}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje na množině $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$.

Nyní vytvoříme diagonální posloupnost $\{g_m\} = \{f_{mm}\}_{m=1}^{\infty}$, vybranou z posloupnosti $\{f_k\}$ a ukážeme, že tato diagonální posloupnost je cauchyovská. Využijeme stejné spojitosti funkcí $f \in \mathcal{F}(M)$. Pro $\varepsilon > 0$ zvolíme konečnou množinu $T_\varepsilon \subset T$ tak, že tvoří ε-síť množiny M. Nyní zvolíme $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro posloupnost $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ je

$$(\forall t \in T_\varepsilon)(m, n \geq k \implies |g_m(t) - g_n(t)| < \varepsilon)\,.$$

Nyní pro každé $x \in M$ existuje vhodné $t \in T_\varepsilon$ tak, že

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq |g_m(x) - g_m(t)| + |g_m(t) - g_n(t)| + |g_n(t) - g_n(x)| \leq 3\varepsilon\,.$$

Odtud vyplývá, že je splněna Bolzano-Cauchyho podmínka pro posloupnost $\{g_m\}$ vybranou z $\{f_k\}$, a tedy $g_m \rightrightarrows$ na M. $\square$

Poznámka 13.3.35. Již na samém začátku výkladu o reálných číslech jsme se setkali s kompaktností, aniž jsme o tom hovořili. Vnořili jsme totiž $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^*$ a tak jsme dosáhli sekvenciální kompaktnosti: přidali jsme „chybějící hromadné body“. Ukazuje se tedy, že je $\mathbb{R}^*$ jistým „zkompaktněním“ $\mathbb{R}$, což ještě zpřesníme:

Je-li (P, ϱ) podprostorem (Q, ϱ), $\overline{P} = Q$ a Q je kompaktní, nazývá se (Q, ϱ) *kompaktifikace* (P, ϱ). Je tedy $\mathbb{R}^*$ kompaktifikací $\mathbb{R}$. Stejného efektu bychom dosáhli přidáním „jediného nekonečna“: označme ho ∞^* a definujme $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty^*$, jestliže $\lim_{n\to\infty} |\,x_n\,| = +\infty$. Zkuste si tento příklad rozmyslet dříve, nežli začnete číst další odstavec. Pro nedostatek místa budeme velmi struční, čtenáře odkazujeme např. na [5], str. 744.

V $\mathbb{R}^m$ bychom mohli provést stejnou úvahu a definovat množinu $\overline{\mathbb{R}^m} = \mathbb{R}_m \cup \{\infty\}$, přičemž pro $x^n \in \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$, definujeme $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$, jestliže $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|_2 = \infty$. Doufám, že se čtenář po promyšlení předcházejícího případu s $\mathbb{R}^1$ zorientuje a dvojí význam symbolu ∞ ho nezmate. Právem by se však mohl cítit poškozen, neboť jsme sice de facto použili jako okolí bodu ∞ v $\mathbb{R}^m$ množiny

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\infty) := \{x \in \mathbb{R}^m;\ \|x\| > \varepsilon\}\,,$$

avšak na $\overline{\mathbb{R}^m}$ jsme nedefinovali žádnou metriku. To lze napravit např. tak, že definujeme vzdálenost pomocí *stereografické projekce*; pro jednoduchost to provedeme v $\mathbb{R}^2$. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ sféru S o rovnici $z^2 + u^2 + v^2 = 1$. Bodu $[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2$ přiřaďme bod $[\,x, y, 0\,] \in \mathbb{R}^3$ a určeme průsečík přímky, určené tímto bodem a bodem $[\,0, 0, 1\,]$. Její průsečík s uvažovanou sférou má souřadnice

$$z = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\,, \quad u = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\,, \quad v = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\,.$$

Pomocí těchto vztahů je určeno zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to S$. Zřejmě $v \in [\,-1, 1)$ a zobrazení f je na $S \setminus [\,0, 0, 1\,]$. Definujme ještě $f(\infty) = [\,0, 0, 1\,]$ a pro $[\,r, s\,] \in \overline{\mathbb{R}^2}$ položme vzdálenost $\varrho\,(r, s)$ v $\overline{\mathbb{R}^2}$ rovnou vzdálenosti obrazů $f(r)$ a $f(s)$ v $\mathbb{R}^3$. Pak ϱ je metrika na kompaktifikaci $\overline{\mathbb{R}^2}$.

Daleko lépe se v tomto případě pracuje s topologií. Definice kompaktního prostoru, kterou užíváme, je založena pouze na topologických pojmech, takže se snadno přenese i do topologických prostorů. Existuje-li ke každému bodu prostoru okolí, jehož uzávěr je kompaktní, pak říkáme, že prostor je *lokálně kompaktní.* Pomocí okolí bodů lze snadno popsat topologii τ topologického prostoru (X, τ). Je-li prostor (X, τ) lokálně kompaktní, existuje jeho kompaktifikace (Y, τ') taková, že $Y \setminus X$ je jednobodová množina. Tento bod se obvykle značí ∞ a stačí popsat jeho okolí: ty však definujeme jako rozdíly $Y \setminus K$, kde za K volíme kompaktní množiny v (X, τ).

Věta 13.3.36. *Je-li f prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru (P, ϱ) na metrický prostor (Q, σ), je inverzní zobrazení $g := f^{-1}$ rovněž spojité a oba prostory jsou homeomorfní.*

Důkaz. Je-li $F \subset (P, \varrho)$ uzavřená množina, je podle Lemmatu 13.3.17 kompaktní. Její obraz $H := f(F)$ je podle Věty 13.3.18 kompaktní, a tedy podle Věty 13.3.12 uzavřená množina v (Q, σ). Proto pro inverzní zobrazení g jsou vzory všech uzavřených množin v (Q, σ) uzavřené množiny v (P, ϱ) a g je spojité podle Věty 12.5.7. Zobrazení f je tedy homeomorfismem a oba prostory jsou homeomorfní. □

13.4 Souvislost

Tato partie je užitečná např. při vyšetřování funkcí více proměnných a ještě podstatněji při studiu funkcí komplexní proměnné.

Definice 13.4.1. Říkáme, že prostor (P, ϱ) je *souvislý*, pokud *neexistují* neprázdné disjunktní otevřené množiny G_1, G_2 v P tak, že $P = G_1 \cup G_2$.

Poznámky 13.4.2. 1. Souvislost množiny se definuje pomocí již vícekrát použité úmluvy: množina $M \subset (P, \varrho)$ je souvislá, je-li (M, ϱ) souvislým podprostorem prostoru (P, ϱ).

2. Je zřejmé, že obě množiny G_1, G_2 z předchozí definice jsou i uzavřené, protože jejich komplement v P je otevřená množina. Je-li $\emptyset \neq A \neq P$ obojetná množina, pak volba $G_1 := A$, $G_2 := P \setminus A$, ukazuje, že prostor (P, ϱ) není souvislý. Odtud vidíme, že prostor (P, ϱ) je souvislý, právě když obojetnými množinami v P jsou pouze množiny $\emptyset$ a P.

3. Jednobodová podmnožina MP je vždy souvislá, neboť není sjednocením disjunktních neprázdných množin.

4. Žádná alespoň dvoubodová podmnožina diskrétního prostoru *není* souvislá.

Úmluva 13.4.3. Množiny G_1, G_2 z definice, které jsou neprázdné, disjunktní, otevřené a pro které $G_1 \cup G_2 = P$, tvoří rozklad nesouvislého prostoru na obojetné množiny. Pro stručnost ho budeme nazývat *o-rozklad.* V symbolické formě pro tyto množiny je

$$G_1, G_2 \subset P, \quad G_1, G_2 \neq \emptyset, \quad G_1, G_2 \text{ jsou otevřené,}$$
$$G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad G_1 \cup G_2 = P\,.$$

Věta 13.4.4. *Neprázdná množina $M \subset \mathbb{R}^1$ je souvislá, právě když je M interval nebo jednobodová množina.*

Důkaz. Omezíme se na alespoň dvoubodové množiny. Nejprve dokážeme: Není-li množina M interval, existuje její o-rozklad. Nechť tedy existují body a, b, c tak, že $a, b \in M$, $a < c < b$ a $c \notin M$. Pak ale

$$G_1 := M \cap (-\infty, c) \quad \text{a} \quad G_2 := M \cap (c, +\infty)$$

je o-rozklad M a množina M není souvislá.

Předpokládejme nyní, že $M \subset \mathbb{R}^1$ je interval; sporem dokážeme, že M je souvislá množina. Nechť existuje o-rozklad M, tvořený množinami G_1, G_2 a nechť $a \in G_1$, $b \in G_2$, $a < b$. Jelikož je M interval, je $t \in M$ pro všechna $a \leq t \leq b$. Položme

$$c = \sup \{ t \in [a, b] ; t \in G_1 \} .$$

Zřejmě bod c leží v $[a, b]$, a tedy $c \in M$. Je-li $c \in G_1$, existuje $\delta_1 > 0$, pro něž $(c - \delta_1, c + \delta_1) \subset G_1$, neboť G_1 je otevřená. Potom však c nemůže být supremem G_1, čímž dostáváme spor. Je-li $c \in G_2$, je $c > a$ a existuje takové $\delta_2 > 0$, že $(c - \delta_2, c + \delta_2) \subset G_2$, protože G_2 je otevřená. Existuje proto $t \in G_1$ v intervalu $(c - \delta_2, c]$ a $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, což je opět spor. Tím je Věta 13.4.4 dokázána. □

Věta 13.4.5. *Nechť $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je spojité zobrazení a nechť P je souvislý prostor. Potom $f(P)$ je souvislá množina v (Q, σ).*

Důkaz. Pokud by G_1, G_2 tvořily o-rozklad $f(P)$, je $f^{-1}(G_1)$, $f^{-1}(G_2)$ o-rozklad P, což dává potřebný spor. □

Důsledek 13.4.6. *Nekonstantní spojitá reálná funkce f na souvislém prostoru (P, ϱ) má Darbouxovu vlastnost, tj. pro každé dva body $y_1, y_2 \in f(P)$, $y_1 < y_2$, a každé c, $y_1 < c < y_2$, existuje bod $x \in P$, pro který $f(x) = c$.*

Důkaz. Podle Věty 13.4.5 je $f(P)$ souvislá množina v $\mathbb{R}$, a tedy podle Věty 13.4.4 je to interval. Ten spolu s body y_1, y_2 obsahuje i všechna $t \in [y_1, y_2]$, tedy i bod c. Stačí tedy volit $x \in f^{-1}(c) \neq \emptyset$ a dostaneme $f(x) = c$. □

Poznámka 13.4.7. Snadno se ukáže, že Darbouxova vlastnost spojitých funkcí na (P, ϱ) charakterizuje souvislé prostory. Pokud totiž (P, ϱ) *není* souvislý prostor, existuje jeho o-rozklad $P = G_1 \cup G_2$. Definujeme-li funkci f na P tak, že $f(G_1) = 0$, $f(G_2) = 1$, je tato funkce podle Věty 12.5.7 spojitá a nemá Darbouxovu vlastnost.

Připomeňme, že jsou-li x, y body lineárního prostoru X, je úsečka $\overline{xy}$ množina bodů $\{z = tx + (1 - t)y ; t \in [0, 1]\}$ [5]). Je vytvořena pomocí zobrazení $f : t \mapsto X$ intervalu $[0, 1]$, kde

$$f(t) = tx + (1 - t)y , \quad t \in \mathbb{R} . \tag{13.13}$$

Je-li X *normovaný* lineární prostor, je zobrazení f v (13.13) spojité, protože

$$\|f(t) - f(u)\| = \|(tx + (1 - t)y) - (ux + (1 - u)y)\| \leq |t - u| \left(\|x\| + \|y\|\right) .$$

[5]) Je-li $x \neq y$, nazýváme x, y krajními body této úsečky.

Důsledek 13.4.8. *Každá úsečka v normovaném lineárním prostoru je souvislá množina.*

Lemma 13.4.9. *Nechť $\{A_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ je systém souvislých množin v prostoru (P, ϱ) a nechť průnik všech těchto množin je neprázdný. Potom je $A = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ souvislá množina.*

Důkaz. Postupujeme opět sporem: obsahuje-li A jediný bod, tvrzení platí. Je-li G_1, G_2 o-rozklad A, leží společný bod všech A_γ v jedné z těchto množin. Nechť je to G_1. Pak G_2 má neprázdný průnik s alespoň jednou A_γ; označme ji A_{γ_0}. Pak však množiny

$$A_{\gamma_0} \cap G_1 \quad a \quad A_{\gamma_0} \cap G_2$$

tvoří o-rozklad A_{γ_0}, což je spor se souvislostí A_{γ_0}. □

Důsledek 13.4.10. *Jsou-li souvislé množiny $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ takové, že $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, jsou souvislé i množiny $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a také množina $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.*

Důkaz. Podle Lemmatu 13.4.9 jsou souvislé množiny $A_1 \cup A_2$, $(A_1 \cup A_2) \cup A_3, \ldots$; indukcí snadno dokážeme souvislost množin $B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dále je $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, což je souvislá množina, protože $A_1 \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. □

Poznámky 13.4.11. 1. Je-li $A \subset \mathbb{R}^m$ a $x_0 \in A$ takový bod, že pro každý bod $x \in A$ leží úsečka $\overline{x_0 x}$ v A, pak je A podle Lemmatu 13.4.9 souvislá množina. Takové množiny se nazývají *hvězdovité* (vzhledem k x_0).

2. Připomeňme, že $A \subset \mathbb{R}^m$ je konvexní, obsahuje-li s každými dvěma body x, y i úsečku $\overline{xy}$. Konvexní množina A je hvězdovitá vzhledem ke všem svým bodům a je proto souvislá.

3. V Příkladu 13.2.14 jsme sestrojili spojité zobrazení φ intervalu $[0, 1]$ na uzavřený jednotkový čtverec $S := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Toto zobrazení φ *není* prosté. Snadno nahlédneme, že rozdíl $S \setminus E$, kde E je množina všech vrcholů čtverce S, je hvězdovitá množina vzhledem k jeho středu (je to dokonce konvexní množina). Pokud by bylo zobrazení φ prosté, bylo by podle Věty 13.3.36 homeomorfismem a vzor množiny $S \setminus E$ by musel být souvislou množinou, tedy intervalem. Množina $[0, 1] \setminus \varphi^{-1}(E)$ má však alespoň tři komponenty, což dává spor. Je to patrně jednodušší nežli dokazovat, že například

$$\varphi(1/6) = \varphi(1/2) = \varphi(5/6) = [1/2, 1/2].$$

To vede ke zdánlivému paradoxu: bodů intervalu $[0, 1]$ se zdá být „více“ než bodů jednotkového čtverce S.

Věta 13.4.12. *Je-li množina $A \subset (P, \varrho)$ souvislá, je také souvislá každá množina B, pro kterou je $A \subset B \subset \overline{A}$. Speciálně: uzávěr souvislé množiny je souvislá množina.*

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Je-li A jednobodová, tvrzení platí. Nechť G_1, G_2 tvoří o-rozklad množiny B. Protože množina A je souvislá, musí být částí jedné z množin $G_1 \cap A$ nebo $G_2 \cap A$; pokud by obě množiny byly neprázdné, byly by množiny $G_1 \cap A$, $G_2 \cap A$ o-rozkladem A a dostali bychom spor. Nechť tedy např. $A \subset G_1$ a $A \cap G_2 = \emptyset$. Pak však i $\overline{A} \cap G_2 = \emptyset$ a protože $B \subset \overline{A}$, je také $B \cap G_2 = \emptyset$; proto G_1, G_2 není o-rozkladem B. Nalezený spor dokazuje tvrzení lemmatu. $\square$

Příklad 13.4.13. Funkce $f(x) = \sin(x^{-1})$ je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sjednocení jejího grafu G_f s libovolnou neprázdnou podmnožinou A úsečky S s koncovými body $[\,0,-1\,]$ a $[\,0,1\,]$ je souvislou podmnožinou $\mathbb{R}^2$. Graf G_{f_1} restrikce $f_1 = f|(0,\infty)$ je obrazem intervalu a je tedy souvislý. Každý bod úsečky S leží v uzávěru množiny G_{f_1}. Podle Věty 13.4.12 je $G_{f_1} \cup A$ souvislá množina. Analogické tvrzení platí i pro restrikci $f_2 := f|(-\infty,0)$. Sjednocení souvislých množin s neprázdným průnikem je souvislá množina, z čehož již vyplývá dokazované tvrzení. Pokud by byla množina A prázdná, tvrzení by neplatilo, protože G_{f_1}, G_{f_2} by tvořily o-rozklad G_f.

Definice 13.4.14. Je-li $\{\, a = x_0, x_1, \dots, x_n = b \,\} \subset \mathbb{R}^m$, pak sjednocení úseček $\overline{x_0\, x_1}, \overline{x_1\, x_2}, \dots, \overline{x_{n-1}\, x_n}$ nazýváme *lomená čára* v $\mathbb{R}^m$, spojující body a, b.

V teorii funkcí komplexní proměnné nebo při práci s funkcemi více (reálných) proměnných se často pracuje se speciálními množinami. Uvedeme jednoduchou definici:

Definice 13.4.15. Neprázdná otevřená souvislá množina v $\mathbb{R}^m$ se nazývá *oblast.*

Věta 13.4.16. *Je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ oblast, lze každé dva body množiny G spojit lomenou čarou, která leží v G.*

Důkaz. Zvolme $x_0 \in G$ libovolně. Pak množina A těch bodů $x \in G$, které lze spojit v G lomenou čarou s x_0, je zřejmě neprázdná: leží v ní např. všechny body koule $B(x_0, r)$ s dostatečně malým $r > 0$. Je také otevřená, protože pro $x \in A$ existuje lomená čára L v G spojující x_0 s x a pro každé $y \in B(x,r) \subset G$ lze spojení lomenou čarou bodů x_0 a y získat sjednocením L s úsečkou $\overline{xy}$. Rovněž doplněk $G \setminus A$ je otevřený, protože pro jeho libovolný bod z nemůže v okolí $B(z,r)$ s dostatečně malým $r > 0$ ležet bod z A, jinak by totiž platilo $z \in A$. Protože G je souvislá, musí být $G \setminus A = \emptyset$, jinak by množiny A a $G \setminus A$ tvořily o-rozklad množiny G. $\square$

Definice 13.4.17. Maximální (ve smyslu inkluze) souvislou podmnožinu prostoru (P, ϱ) nazýváme *komponenta souvislosti* prostoru (P, ϱ), krátce jen *komponenta* prostoru P. Podrobněji: Je-li A komponenta prostoru P a $A \subset A_1 \subset P$, kde A_1 je souvislá, je $A_1 = A$.

Poznámka 13.4.18. Komponenty množiny $A \subset (P, \varrho)$ jsou ve smyslu naší úmluvy opět komponenty podprostoru $(A, \varrho|(A \times A))$.

Lemma 13.4.19. *Komponenta prostoru (P, ϱ) je uzavřenou podmnožinou (P, ϱ).*

Důkaz. Je-li A komponenta (P, ϱ), je podle Věty 13.4.12 i $\overline{A}$ souvislá množina. Zřejmě je $A \subset \overline{A}$ a vzhledem k maximalitě komponent $A = \overline{A}$, takže A je uzavřená množina. □

Lemma 13.4.20. *Komponenty prostoru (P, ϱ) jsou totožné nebo disjunktní.*

Důkaz. Jsou-li A_1, A_2 komponenty P, pak při $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ je $A_1 \cup A_2$ souvislá množina obsahující A_1 i A_2. Komponenty jsou *maximální* souvislé podmnožiny P, z čehož již vyplývají rovnosti $A_1 = A_1 \cup A_2 = A_2$. □

Důsledek 13.4.21. *Každý bod prostoru (P, ϱ) jednoznačně určuje komponentu prostoru P, ve které leží. Každá neprázdná souvislá podmnožina $A \subset (P, \varrho)$ leží v jediné komponentě prostoru P.*

Věta 13.4.22. *Komponentami otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^m$ jsou oblasti.*

Důkaz. Nechť A je komponenta množiny G; stačí dokázat, že A je otevřená množina. Je-li $x \in A \subset G$, je $B(x, r) \subset G$ pro nějaké $r > 0$, přičemž $B(x, r)$ je konvexní a tedy souvislá množina. Proto je $A \cup B(x, r)$ souvislá množina, takže $A \cup B(x, r) = A$, neboli $B(x, r) \subset A$. Množina A je tedy otevřená a důkaz je dokončen. □

Věta 13.4.23. *Každá otevřená množina G v prostoru $\mathbb{R}^m$ nebo v Gaussově rovině $\mathbb{C}$ je sjednocením spočetně mnoha disjunktních oblastí.*

Důkaz. Komponenty G jsou oblasti, stačí tedy dokázat, že disjunktních komponent je pouze spočetně. Každé komponentě přiřadíme jeden její bod, který má všechny souřadnice racionální. Získáme tak prosté zobrazení na (spočetnou) podmnožinu $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$, tj. množinu všech m-tic racionálních čísel, z čehož již vyplývá dokazované tvrzení. □

Historická poznámka 13.4.24. Jak již bylo patrno z předcházejících kapitol, přesunul se v 19. stol. zájem matematiků od jednotlivých funkcí k jejich množinám či třídám. Byly vyšetřovány *funkcionály*, neboli funkce definované na množinách funkcí. Jako příklad připomeňme zmínku o Riemannově integrálu: Ten je podle Věty 11.23 *lineárním funkcionálem* na $\mathcal{C}([a, b])$, který je podle Poznámky 12.5.6 na tomto normovaném lineárním prostoru spojitý, pokud tento prostor opatříme supremovou metrikou. Poznamenejme, že např. již r. 1903 nalezl Jacques Hadamard (1865 – 1963) poněkud komplikovaný předpis popisující obecný tvar spojitého lineárního funkcionálu na prostoru $\mathcal{C}([a, b])$; viz [9], Vol. I, str. 405 – 408. Elegantní řešení tohoto problému nalezl Frederic Riesz (1880 – 1956) r. 1909. V jiné práci z r. 1910 poprvé použil termín *prostor funkcí* (Funktionenraum); viz též [15].

Metrické prostory zavedl Maurice René Fréchet (1878 – 1973) r. 1906 v práci [7]; byla to jeho doktorská disertační práce. Tam je také zavedena většina obecných pojmů, které byly vyloženy v této kapitole.

Uvedeme několik historických ukázek. Fréchet nejprve studuje obecnější množiny: *Pokud pečlivě studujeme různé klasické definice limity posloupnosti čísel, posloupnosti* *bodů nebo posloupnosti funkcí apod., ihned zjistíme, že všechny vyhovují podmínkám* I *a* II*, které nezávisí na povaze uvažovaných prvků posloupností. Jsou to ty podmínky, které nám postačí k zobecnění jistých tvrzení z teorie funkcí.*

Dále se omezíme na podmnožiny třídy (L) *prvků libovolné povahy, vyhovující následujícím podmínkám: je možné rozlišit, zda jsou prvky třídy různé či nikoli. Navíc lze definovat limitu posloupnosti prvků třídy* (L)*. Předpokládáme tudíž, že pro libovolně zvolenou nekonečnou posloupnost* (*ne nutně různých*) *prvků třídy* (L) *lze s jistotou říci, zda tato posloupnost* $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ *má či nemá limitu* A (*jednoznačně určenou*)*. Postup, který umožní nalézt odpověď,* (*jinak řečeno definice limity*)*, ať je jakýkoli, musí splňovat podmínky* I *a* II*, o nichž jsme se zmínili, a které jsou následující:*

I) *Pokud jsou všechny prvky nekonečné posloupnosti* $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ *rovny témuž prvku* A*, má posloupnost limitu, kterou je* A*.*

II) *Pokud má nekonečná posloupnost* $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ *limitu* A*, každá posloupnost členů předchozí posloupnosti ve stejném pořadí* $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_p}, \dots$ (*celá čísla* $n_1, n_2, \dots, n_p$ *tedy rostou*) *má opět limitu rovnou* A*.*

Fréchetova definice metrického prostoru se jen formálně odlišovala od Definice 12.1.1 z minulé kapitoly (srovnej s Historickou poznámkou 12.6.3). Mezi příklady uvádí lineární prostor s všech posloupností reálných čísel $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ se vzdáleností (l'écart) definovanou vzorcem (užíváme jeho označení)

$$(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

a pro tuto metriku dokazuje i trojúhelníkovou nerovnost.

Separabilní prostor je například zaveden takto: *třídu prvků* nazýváme *separabilní*, pokud ji lze alespoň jedním způsobem vyjádřit jako derivaci [6]) spočetné množiny svých prvků. Z dosavadních ukázek by mohl čtenář nabýt dojmu, že práce je psána v abstraktní rovině, avšak téměř *polovina práce* je věnována aplikacím obecné teorie.

Fréchetovu definici úplného prostoru jsme uvedli v Historické poznámce 13.2.4; poznamenejme, že termíny *úplnost, úplný prostor* apod. jsou patrně pozdějšího data.

Dodnes je patrně největší nejednotnost v terminologii související s kompaktností. Fréchet zavedl v r. 1906 pojem (sekvenciální) kompaktnosti s označením „kompaktní“. Použil následující definici: *Říkáme, že množina je* kompaktní*, jestliže je konečná nebo má-li každá její nekonečná podmnožina alespoň jeden hromadný bod* [7])*. Jestliže je množina zároveň uzavřená, nazýváme ji* extremální; (...).

Pavel Sergejevič Alexandrov (1896 – 1982) spolu s Pavlem Samujlovičem Urysonem (1898 – 1924) zavedli r. 1924 kompaktnost tak, jako jsme ji zavedli v Definici 13.3.4, ovšem pro *topologické* prostory. Použili pro ni termín *bikompaktnost*, který se stále ještě v rusky psané starší literatuře vyskytuje. Všeobecně se takto zavedené „pokrývací kompaktnosti“ začalo říkat jen kompaktnost. Množiny, jejichž *uzávěr* je kompaktní (tedy ne nutně uzavřené!), se nazývají *relativně kompaktní*; pro ty užíval Fréchet termín kompaktní. Jde o pojem, který jsme nahradili *totální omezeností.* Použijeme-li našeho označení a Fréchetovy terminologie, pak mj. dokázal tvrzení: *Aby pro každé* $\varepsilon > 0$ *existovala* konečná *ε-síť* $K_\varepsilon \subset E$*, je nutné a stačí, aby* E *byla kompaktní.* Fréchetovy extremální množiny jsou v našem smyslu sekvenciálně kompaktní. Proto např. Fréchet před-

---

[6]) Autor má na mysli množinu hromadných bodů.

[7]) Pro hromadné body užívá Fréchet termín „limitní body“.

pokládá ve Větě 13.3.30, že příslušná množina je extremální. Větu o ekvivalentních podmínkách pro kompaktnost dokázal v plném znění jako první patrně FELIX HAUSDORFF (1868 – 1942) v [10]. Tam je zaveden i termín *totální omezenost*; viz str. 311. Borelova pokrývací věta pro spočetné systémy je z r. 1894, pro obecná pokrytí ji dokázal Lebesgue. Borel ji pak v r. 1903 zobecnil pro případ prostorů $\mathbb{R}^m$ s $m > 1$. Řada dalších vět byla dokázána nejprve pro speciální MP, nejčastěji pro $\mathbb{R}^m$. Patrně první dospěl k obecné definici kompaktního prostoru Vietoris v r. 1921, jehož práci Aleksandrov s Urysonem neznali.

Souvislost prostoru je pojmem velmi názorným. My jsme dokázali pouze její základní vlastnosti. Ukazuje se, že velmi užitečné jsou často „lokalizované" pojmy. *Lokálně kompaktní prostory* zavedl Aleksandrov v práci z r. 1923. Větší pozornost jsme věnovali lokální kompaktnosti, existuje však i tzv. lokální souvislost, která se uplatňuje např. při studiu křivek. *Prostor je* lokálně souvislý, *pokud ke každému jeho bodu x a každému jeho okolí $\mathcal{U}(x)$ existuje* souvislé *okolí $\mathcal{V}(x)$ bodu x, pro něž je $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{U}(x)$.* Čtenáře může překvapit, že MP může být lokálně souvislý aniž by byl souvislý, není však obtížné sestrojit příklad typu $A := (0,1) \cup (2,3) \subset \mathbb{R}$. Složitější je si uvědomit, že souvislý prostor nemusí být lokálně souvislý. Příklad 13.4.13 nám ještě jednou poslouží: Uvažovaný graf funkce $x \mapsto \sin(1/x)$ v $\mathbb{R}^2$, doplněný o úsečku S, má potřebné vlastnosti, neboť body „přidané úsečky" *nemají* libovolně malá souvislá okolí.

Věta 13.3.34 bývá v různých modifikacích nazývána Arzelá-Ascoliho věta. Fréchet ve své fundamentální práci z r. 1906 vytvořením „funkcionálního počtu" završil teorii, ke které významně přispěli Georg Cantor (1845 – 1918), Vito Volterra (1860 – 1940), Cesare Arzelá (1847 – 1912), Giulio Ascoli (1843 – 1896), Jacques Hadamard (1865 – 1963) a další; plný seznam by obsahoval podstatně více jmen. Protože se zde již dotýkáme historie *funkcionální analýzy*, omezíme se na odkaz na historické monografie [6] a [13].

Uveďme ještě krátkou informaci, týkající se *topologických prostorů*. Mnoho topologických pojmů vzniklo opět nejprve v kontextu speciálních prostorů. Zrod obecné topologie souvisí s Cantorovými pracemi z let 1879 – 1884, rozhodující krok v přechodu od $\mathbb{R}^m$ k abstraktním prostorům lze však stopovat až k Riemannovi (1854). I zde je lépe doporučit čtenáři kvalifikované studie, přinášející podstatně více informací o vzniku a vývoji topologie, např. [16] nebo [17].

Literatura:

[1] Aleksandrov, P. S., Urysohn, P. S.: *Zur Theorie der topologischen Räume*, Math. Ann. **92** (1924), str. 258 – 266.

[2] Banach, S.: *Théorie des opérations linéaires*, série Monografie matematzcyne sv. I, Warszawa, 1932.

[3] Bourbaki, S.: *Očerki po istorii matěmatiki*, Izdatělstvo IL, Moskva, 1963, (překlad z francouzštiny).

[4] Čech, E.: *Bodové množiny*, Academia, Praha, 1974.

[5] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[6] Dieudonné, J.: *History of functional analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1981.

[7] Fréchet, M.: *Sur quelques points du Calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Math. Palermo **22** (1906), str. 1 – 74.

[8] Gelbaum, B. R., Olmsted, J. M. H.: *Counterexamples in analysis*, Holden-Day, San Francisko, 1964.

[9] Hadamard, J.: *Oeuvres*, Ed. du C.N.R.S., Paris, 1968, (ve čtyřech svazcích).

[10] Hausdorff, F.: *Grundzüge der Mengenlehre*, von Veit & Comp., Leipzig, 1914.

[11] Hausdorff, F.: *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig, 1927.

[12] Hewitt, E., Stromberg, K.: *Real and abstract analysis*, Springer, Berlin, 1969.

[13] Kline, M.: *Mathematical thought from ancient to modern time*, Oxford university press, New York, 1972, 1990.

[14] Kuratovski, K.: *Wstęmp do teorii mnogości i topologii*, Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1955.

[15] Netuka, I., Veselý, J.: *F. Riesz a matematika 20. století*, Pokroky MFA **25** (1980), str. 128 – 138.

[16] Rosenthal, A., Zoretti, L.: *Die Punktmengen*, obsaženo v : *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften,* Band II., C 9a, Leipzig, 1924.

[17] Tietze, H., Vietoris, L.: *Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie*, obsaženo v : *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften,* Band III., AB 13, Leipzig, 1930.