Kapitola 14

Stejnoměrná konvergence

14.1 Základní pojmy

Se stejnoměrnou konvergencí jsme se již setkali v Kapitolách 12 a 13, když jsme pracovali se supremovou normou na prostoru $\mathcal{C}([a,b])$. Nyní tuto konvergenci prostudujeme podrobněji. Je to pojem *náročný* a jeho dokonalé pochopení činilo v prvé polovině 19. století obtíže i špičkovým matematikům. Z toho důvodu uvedeme větší počet příkladů. Úvodní Příklady 14.1.12 ukazují důležitost tohoto pojmu: ilustrují totiž fakt, že pro (rádo by) „očekávaná“ tvrzení o konvergenci posloupností *funkcí* je jejich konvergence v každém bodě společného definičního oboru předpokladem příliš slabým.

Definice 14.1.1 (Weierstrass 1841). Nechť $A \neq \emptyset$ je libovolná množina a nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, a f jsou reálné nebo komplexní funkce definované na A. Potom říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ *konverguje stejnoměrně na A k funkci f*, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\,. \tag{14.1}$$

Píšeme pak $f_n \rightrightarrows f$ na A. Zápis $f_n \rightrightarrows$ na A znamená, že *existuje* taková f definovaná na A, že $f_n \rightrightarrows f$ na A.

Poznámky 14.1.2. 1. Srovnáním s látkou o MP vidíme, že na lineárním prostoru $\mathcal{M}(A)$ všech omezených funkcí na množině A lze ekvivalentně (14.1) vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|;\, x \in A\} = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0\,,$$

kde norma značí obvyklou supremovou normu, tj. $\|f\|_\infty = \sup\{\,|f(x)|\,;\, x \in A\}$.

2. Jestliže platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro všechna $x \in A$, pak říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ *konverguje* k funkci f, podrobněji *konverguje bodově* k funkci f. Zapíšeme-li tuto definici pomocí logických symbolů, dostaneme

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(|\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon)\,.$$

Srovnáním s (14.1) vidíme, že se definice bodové a stejnoměrné konvergence pevně zvolené posloupnosti funkcí $\{f_n\}$ na A liší pouze *pořadím kvantifikátorů.* Zatímco v definici bodové konvergence závisí číslo $k \in \mathbb{N}$ i na volbě $x \in A$, u stejnoměrné konvergence toto $k \in \mathbb{N}$ závisí pouze na čísle $\varepsilon > 0$, avšak nikoli na $x \in A$.

3. Často používáme tohoto obratu: platí $f_n \rightrightarrows f$ na A, právě když platí $|\, f_n - f \,| \rightrightarrows 0$ na A. To využijeme např. v Tvrzení 14.3.1.

Věta 14.1.3 (Cauchy 1853, Weierstrass 1861). *Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na množině A, právě když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq k)(\forall x \in A)(|\, f_m(x) - f_n(x) \,| < \varepsilon) \,. \tag{14.2}$$

Důkaz. Z (14.2) plyne, že posloupnost $\{f_n(x)\}$ je cauchyovská pro každé $x \in A$, a tedy konvergentní. Lze tedy definovat funkci f vztahem $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in A$ a je $f_n \to f$ na A. Dokážeme, že $f_n \rightrightarrows f$ na A. Při pevně zvoleném $\varepsilon > 0$ a pevně zvoleném n, $n \geq k$, limitním přechodem vzhledem k $m \to \infty$ ze (14.2) dostaneme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(\forall x \in A)(|\, f(x) - f_n(x) \,| \leq \varepsilon) \,,$$

neboli $f_n \rightrightarrows f$ na A. Obráceně, z $f_n \rightrightarrows f$ na A plyne $|\, f_n - f \,| \rightrightarrows 0$ na A. Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu $k \in \mathbb{N}$ tak, aby pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq k$, $n \geq k$, a všechna $x \in A$ bylo

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 \,, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2 \,.$$

Odtud a z nerovnosti

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \,, \quad x \in A \,,$$

která platí pro všechna $m, n \geq k$, plyne zbytek tvrzení. □

Poznámka 14.1.4. Jak se ukáže, význam stejnoměrné konvergence souvisí se záměnou limitních přechodů. Tážeme-li se například, zda limita f konvergentní posloupnosti $\{f_n\}$ spojitých funkcí f_n je spojitá funkce, jde vlastně o to zjistit, zda

$$\lim_{x\to y} f(x) = \lim_{x\to y} \big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \big(\lim_{x\to y} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y) \,.$$

S touto situací jsme se již jednou setkali při zkoumání úplnosti prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ v Lemmatu 13.2.6. Právě díky tomu, že konvergence v $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ je vlastně stejnoměrnou konvergencí, byla záměna limitních procesů možná. Přímým důsledkem pak byla úplnost prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$. Následující tvrzení tuto situaci pouze zobecňuje pro metrické prostory.

Věta 14.1.5 (Cauchy 1853*). *Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na P a f_n jsou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ spojité funkce na metrickém prostoru (P, ρ). Potom je f spojitá funkce na (P, ρ).*

Důkaz. Stačí dokázat spojitost f v každém bodě $y \in P$. Zvolme tedy libovolně $y \in P$. Pro důkaz logicky přepsané definice

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in P,\, \rho(x,y) < \delta)(|\, f(x) - f(y)\,| < \varepsilon)$$

použijeme jako již dříve v důkazu Lemmatu 13.2.6 analogický triviální odhad

$$|\, f(x) - f(y)\,| \le |\, f(x) - f_n(x)\,| + |\, f_n(x) - f_n(y)\,| + |\, f_n(y) - f(y)\,|\,, \qquad (14.3)$$

ve kterém pro dané $\varepsilon > 0$ nejprve ze stejnoměrné konvergence zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby první a třetí sčítanec v předcházející nerovnosti (14.3) byly pro všechna $x \in P$ odhadnuty shora číslem $\varepsilon/3$. Pak ze spojitosti funkce f_n na P nalezneme $\delta > 0$ tak, aby pro všechny body $x \in P$, pro které je $\rho(x,y) < \delta$, byl prostřední sčítanec vpravo v (14.3) odhadnut shora $\varepsilon/3$; pak ale $|\, f(x) - f(y)\,| \le \varepsilon$ pro všechna $x \in P$, pro něž je $\rho(x,y) < \delta$, což již dává spojitost funkce f v bodě y a důkaz je tak dokončen. □

Předcházející větu často užíváme k tomu, abychom dokázali, že posloupnost spojitých funkcí *nekonverguje stejnoměrně*. To ukazuje jednoduchý příklad:

Příklad 14.1.6. Snadno nahlédneme, že při $n \to \infty$ platí $x^n \to 0$ pro $x \in [\,0,1)$ a $x^n \to 1$ pro $x = 1$. Proto nemůže platit $x^n \rightrightarrows$ na $[\,0,1\,]$, neboť mocniny x^n jsou na $[\,0,1\,]$ vesměs spojité a jejich limita je funkce, která na intervalu $[\,0,1\,]$ *není spojitá*. Pro všechna q, $0 < q < 1$, platí však na $[\,0,q\,]$ odhad $x^n \le q^n \to 0$, a tedy $x^n \rightrightarrows 0$ na $[\,0,q\,]$ pro každé $q \in (0,1)$; viz např. Lemma 13.2.6. Přitom *neplatí* $f_n \rightrightarrows 0$ na $[\,0,1)$, protože funkce f_n pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou monotónní a mají Darbouxovu vlastnost, nabývají tedy na intervalu $[\,0,1)$ všech hodnot z $[\,0,1)$, takže $a_n := \sup\{|x^n - 0\,|\,;\, x \in [\,0,1)\} = 1$, a $\{a_n\}$ tedy nekonverguje k 0.

Příklad 14.1.6 ukazuje, že konvergence funkcí $f_n(x) = x^n$, $x \in [\,0,1)$, je „skoro“ stejnoměrná (je zřejmě stejnoměrná na každém intervalu $[\,\alpha,\beta\,] \subset (0,1)$) a každé $c \in (0,1)$ leží uvnitř nějakého takového intervalu (α,β). Analogickou situaci popisuje následující definice.

Definice 14.1.7. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na intervalu (a,b) a nechť ke každému $c \in (a,b)$ existuje okolí $\mathcal{U}(c) \subset (a,b)$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{U}(c)$. Potom říkáme, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje *lokálně stejnoměrně na (a,b) k funkci f*.

Označení 14.1.8. K označení právě zavedeného pojmu lokálně stejnoměrné konvergence budeme používat symbol $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f$ na (a,b). Chceme-li zapsat definici pomocí kvantifikátorů, je to již trochu složitější ($\mathcal{U}(c)$ značí opět okolí bodu c):

$$\begin{aligned}&(\forall c \in (a,b))(\exists \mathcal{U}(c) \subset (a,b))(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})\\ &\qquad\qquad (\forall n \ge k, n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{U}(c))(|\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Čtenář jistě bez obtíží přepíše definici lokálně stejnoměrné konvergence do kontextu metrického prostoru (P,ρ): místo okolí $\mathcal{U}(c)$ v intervalu (a,b) pracujeme s okolími v (P,ρ).

Poznámka 14.1.9. Velmi často se pracuje s *lokálně kompaktními prostory*. Připomeňme, že prostor (P, ρ) se nazývá lokálně kompaktní, jestliže ke každému bodu $x \in P$ existuje okolí $\mathcal{U}(x)$, jehož uzávěr $\overline{\mathcal{U}(x)}$ je kompaktní. V takovém prostoru můžeme lokálně stejnoměrnou konvergenci charakterizovat jiným způsobem:

Věta 14.1.10. *Na lokálně kompaktním prostoru (P, ρ) platí $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f$ na P, právě když pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset P$ platí*

$$f_n \rightrightarrows f \quad \textit{na} \quad K\,. \tag{14.4}$$

Důkaz. Nechť je konvergence stejnoměrná na všech kompaktních podmnožinách $K \subset P$. Zvolme nějaké $x \in P$ a jeho okolí $\mathcal{U}(x)$, jehož uzávěr je kompaktní množina $K \subset P$. Ze stejnoměrné konvergence na K plyne stejnoměrná konvergence na $\mathcal{U}(x)$. Stejnou úvahu lze aplikovat pro každý bod $x \in P$, takže dostáváme $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f$ na P.

Obrácenou implikaci obdržíme z definice kompaktní množiny. K dané kompaktní množině K vybereme ke každému $x \in K$ jeho okolí $\mathcal{U}(x)$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{U}(x)$. Tento systém okolí $\{\,\mathcal{U}(x)\,;\, x \in K\}$ je otevřeným pokrytím K. Z tohoto pokrytí vybereme konečné podpokrytí K okolími $\mathcal{U}(x_1), \dots, \mathcal{U}(x_m)$. K $\varepsilon > 0$ existují čísla $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall x \in \mathcal{U}(x_l))(\forall n \geq k_l)(|\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon)\,, \qquad l \in \{1, \dots, m\}\,,$$

a zvolíme $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Pak pro všechna $x \in K \subset \bigcup_{l=1}^{m} \mathcal{U}(x_l)$ je při $n \geq k$ splněna nerovnost $|\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$. □

Poznámky 14.1.11. 1. Předcházející Věta 14.1.10 osvětluje užívání pojmu *kompaktní konvergence* na (P, ρ) pro případ $\{f_n\}$, která konverguje *stejnoměrně* k funkci f na každé kompaktní množině $K \subset P$. Tento pojem se často užívá v teorii funkcí komplexní proměnné, protože $\mathbb{C}$ je lokálně kompaktním prostorem.

2. Eukleidovské prostory $\mathbb{R}^m$ jsou zřejmě lokálně kompaktní. Množina $\mathbb{Q}$ s metrikou indukovanou z $\mathbb{R}$ *není* lokálně kompaktním prostorem,

Příklady 14.1.12. Všechny bezprostředně následující příklady mají jednu věc společnou. Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ vždy konverguje *bodově* na nějakém intervalu v $\mathbb{R}$ k funkci f a určitá vlastnost, jakou je např. spojitost nebo integrovatelnost apod., kterou každá z funkcí f_n má, se na funkci f nepřenese. Příčinou tohoto efektu je fakt, že se, zhruba řečeno, bodovou konvergencí „příjemné vlastnosti“ funkcí f_n na limitní funkci f obecně nepřenášejí. Doporučujeme čtenáři, aby si při studiu následujících příkladů vždy načrtl obrázek, v tomto případě to často může pomoci objasnit podstatu věci.

1. Jestliže definujeme posloupnost funkcí vztahem $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $x \in \mathbb{R}$, pak snadno nahlédneme, že

$$f_n(x) \to (\pi/2)\operatorname{sgn} x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Tato konvergence však není stejnoměrná, neboť

$$\sup\{|\,(\pi/2)\operatorname{sgn} x - \operatorname{arctg} nx|;\ x \in \mathbb{R},\ n \geq k\} = \pi/2\,,$$

ať zvolíme $k \in \mathbb{N}$ jakkoli. Všimněte si, že limitní funkce $(\pi/2)\operatorname{sgn} x$ *není* spojitá, že však

$$f_n'(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} \to \left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x\right)'$$

všude v $\mathbb{R}$. Skutečně, pro $x = 0$ je tato limita rovna $+\infty$, v ostatních případech je rovna 0. Později uvidíme, že ani za předpokladu $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu I nemusí obecně platit $f_n' \to f'$ na I.

2. Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$. Potom se lehce ukáže, že platí $f_n \to 0$ na intervalu $[0,1]$; k tomu stačí vyšetřit konvergenci řad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pro každé $x \in [0,1]$. Výpočtem dostaneme

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+2}\,, \quad \text{a tedy} \quad \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n^2}{2n+2} \to +\infty\,.$$

Za povšimnutí stojí jiný zápis stejné věci:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq +\infty = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Zaměníme-li v předchozím příkladu koeficient n^2 ve vyjádření funkcí f_n za n, bude limita integrálů konečná a bude rovna $(1/2)$; závada tedy není „v nekonečnosti“. Názornější a tak i zapamatovatelnější příklad sestrojíme takto: nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce f_n definovány jako v Příkladu 12.3.7. Využijeme-li názorného významu integrálu, snadno nahlédneme, že $\int_0^1 f_n = 1/2^{n+1}$. Nyní definujeme posloupnost funkcí $\{g_n\}$: položíme $g_n := 2^{n+1}f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Snadno nahlédneme, že $\int_0^1 g_n = 1$ (tak, jak se v „trojúhelníčcích“ zkracuje základna, roste zároveň jejich výška, proto jejich obsah zůstává konstantní) a $g_n \to 0$; nulová funkce má i nulový integrál a je

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Situace s derivováním je delikátnější. Definujeme-li

$$f_n(x) = (1/n)\operatorname{arctg} x^n\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

pak $\|f_n - 0\|_\infty \le \pi/2n \to 0$ a *nejen* $f_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, ale dokonce i $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Přesto však pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je

$$f_n'(1) = \left.\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}\,,$$

tedy f_n' nekonvergují k derivaci „limitní nulové funkce“ v bodě 1. V bodě -1 nastává jiný efekt, neboť $\lim_{n\to\infty} f_n'(-1)$ dokonce neexistuje. Bližší pohled na derivace f_n' ukazuje, že $f_n'(x) \to 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$; na intervalu $(-1,1)$ platí odhad $|f_n'(x)| \le |x|^{n-1} \to 0$, zatímco pro $|x| > 1$ je $|f_n'(x)| \le (1/|x|)^{n+1} \to 0$. Rozhodně však *neplatí* $f_n' \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.

5. Definujme pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}\,; \tag{14.5}$$

Funkce f_n jsou zřejmě liché. Dále je

$$f_n'(x) = \frac{1 + n^2x^2 - 2xn^2x}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{1 - x^2n^2}{(1 + n^2x^2)^2}$$

a $f_n(0) = \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$, $f_n'(1/n) = 0$. Bod $1/n$ je jediným nulovým bodem f_n' na intervalu $(0, +\infty)$, z čehož vyplývá

$$\sup\{|f_n(x) - 0|;\ x \in \mathbb{R}\} = \sup\{|f_n(x)|;\ x \in [\,0, \infty\,]\} = f_n(1/n) = (1/2n) \to 0\,.$$

Odtud dostáváme *stejnoměrný odhad* vzhledem k x nejen na intervalu $[\,0, +\infty)$, ale i na $\mathbb{R}$, takže $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Čtenář by si měl povšimnout, že i v tomto případě neplatí $f_n' \to 0$, neboť $f_n'(0) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka 14.1.13. Již dříve jsme ve Větě 5.2.14 dokázali, že je-li funkce f na intervalu (a, b) derivací (pro jistotu zdůrazněme, že f nabývá pouze hodnot z $\mathbb{R}$), má Darbouxovu vlastnost. Má však ještě i další vlastnost, která ukazuje, že i *bodová konvergence* spojitých funkcí je důležitá. Je-li funkce F pevně zvolenou primitivní funkci k f a definujeme-li

$$f_n(x) = \begin{cases} n(F(x + 1/n) - F(x))\,, & \text{pro } x \in (a, b - 2/n)\,,\\ n(F(b - 1/n) - F(b - 2/n)\,, & \text{pro } x \in [b - 2/n, b)\,,\end{cases}$$

kde v případě $b = +\infty$ užijeme pouze definiční rovnosti z prvního řádku, jsou f_n spojité funkce na (a, b) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \to f$ na (a, b). Derivace je tedy bodovou limitou spojitých funkcí. Popišme stručně další důležité pojmy: Protože je funkce f na (a, b) limitou spojitých funkcí, říkáme, že je funkcí z *první Baireovy třídy* na (a, b). Bairovy třídy se definují induktivně: Funkce g je z *n-té Baireovy třídy B_n*, je-li bodovou limitou posloupnosti funkcí $\{g_k\}$, $g_k \in B_{n-1}$, přičemž třída B_0 je tvořena všemi spojitými funkcemi (za označením třídy uvádíme eventuálně interval, na kterém se vše odehrává). Tuto klasifikaci zavedl v práci z r. 1899 René Louis Baire (1874 – 1932).

Obě popsané vlastnosti jsou základními vlastnostmi každé derivace. Proto pro každou derivaci f na (a, b) platí $f \in DB_1(a, b)$, což vyjadřuje, že f má současně Darbouxovu vlastnost a je z $B_1(a, b)$. Je např. známo, že funkce z $B_1(a, b)$ musí mít v intervalu (a, b) hustou množinu bodů spojitosti; viz např. [4], str. 115. Zároveň je vhodné si uvědomit, co toto tvrzení vypovídá o existenci primitivní funkce: nutnou podmínkou existence primitivní funkce k funkci f na (a, b) je $f \in DB_1(a, b)$.

Není obtížné ukázat, že Riemannova funkce z Příkladu 4.2.9 je z $B_1(0, 1)$, avšak Dirichletova funkce z Příkladu 4.2.8 není prvkem této třídy, neboť je nespojitá *všude* v intervalu $(0, 1)$. Platí však pro ni

$$\delta(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^n, \quad x \in (0, 1)\,,$$

takže je $\delta \in B_2(0, 1)$; viz např. [4], str. 78.

14.2 Stejnoměrná konvergence řad funkcí

Čtenáře jistě nepřekvapí, že zcela analogickým způsobem zavádíme stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řad funkcí.

Definice 14.2.1. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je řada reálných nebo komplexních funkcí, které jsou vesměs definovány na množině A. Říkáme, že *řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *konverguje stejnoměrně na* A *k funkci* s, jestliže částečné součty $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ konvergují stejnoměrně k s na A.

Poznámka 14.2.2. Ačkoli součet $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, $x \in A$, závisí na *každém* členu řady, její konvergence v daném bodě $x \in A$ nezávisí na konečně mnoha členech $f_k(x)$. Proto se někdy *při zkoumání konvergence* považuje řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ za konvergentní na A, pokud existuje k_0 tak, že konverguje řada $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x)$ pro všechna $x \in A$. My takovou licenci *nebudeme* užívat.

Označení 14.2.3. Pro stejnoměrnou konvergenci řad užíváme opět symbol $\rightrightarrows$ a popis množiny, k níž se limitní přechod vztahuje. Píšeme tedy např.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows s \quad \text{na} \quad (0,1)\,.$$

Při použití symbolu pro stejnoměrnou konvergenci řad lze součet vynechat a psát

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows \text{ na } A \quad \text{stejně jako u} \quad f_n \rightrightarrows \text{ na } A\,,$$

existuje-li funkce, k níž řada na množině A stejnoměrně konverguje.

Příklady 14.2.4. 1. Snadno dokážeme, že pro řadu o členech

$$f_k(x) = \frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

platí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, kde $f(x) = x$, $x \in [0,1]$, neboť na tomto intervalu je

$$\Big| x - \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big) \Big| = \Big| x - \Big(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big) \Big| =$$

$$= \Big| \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0\,.$$

2. Řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, kde

$$f_k(x) = (1-x)x^k, \quad x \in (0,1)\,,$$

konverguje na intervalu $(0,1)$ k funkci $f(x) = x$, $x \in (0,1)$, ale *nekonverguje stejnoměrně* na $(0,1)$. Platí totiž

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-x)x^k = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{(1-x)x}{1-x} = x\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

a je proto $\sum_{k=1}^{n} f_k \to f$, avšak

$$\Big| x - \sum_{k=1}^{n} (1-x)x^k \Big| = \Big| x - x\frac{(1-x)(1-x^n)}{1-x} \Big| = x^{n+1}, \quad x \in (0,1)\,,$$

a $\sup\{x^{n+1}\,;\, x \in (0,1)\} = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, tedy i $\lim_{n\to\infty} \sup\{x^{n+1}\,;\, x \in (0,1)\} \neq 0$; ostatně kdyby řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergovala stejnoměrně na $(0,1)$, dospěli bychom snadno ke sporu s Příkladem 14.1.6.

Definice 14.2.5. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je řada funkcí, které jsou vesměs definovány na metrickém prostoru (P,ρ). Říkáme, že *řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *konverguje lokálně stejnoměrně na* (P,ρ) *k funkci* s, jestliže částečné součty $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ konvergují lokálně stejnoměrně k s na (P,ρ).

Označení 14.2.6. Pro lokálně stejnoměrnou konvergenci řad používáme symbol $\rightrightarrows_{\text{loc}}$ a popis množiny, k níž se limitní přechod vztahuje; metriku vynecháváme, je-li zřejmé, v jakém metrickém prostoru pracujeme. Píšeme tedy např. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows_{\text{loc}} s$ na $(0,1)$, apod. Při použití symbolu $\rightrightarrows_{\text{loc}}$ lze opět součet vynechat a psát

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows_{\text{loc}} \text{ na } (P,\rho) \quad \text{jako u} \quad f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} \text{ na } (P,\rho)\,,$$

existuje-li funkce, k níž řada na prostoru (P,ρ) lokálně stejnoměrně konverguje.

Poznámky 14.2.7. S ohledem na Příklad 14.1.6 je zřejmé, že řada vyšetřovaná v Příkladu 14.2.4 (2) konverguje *lokálně* stejnoměrně na intervalu $(0,1)$.

14.3 Kritéria stejnoměrné konvergence

Na uvedených příkladech jsme viděli, jak lze rozhodnout v některých případech o stejnoměrné konvergenci posloupností nebo řad funkcí podle definice. Předcházející příklady však také ukazují cestu k odvození *velmi jednoduchých* kritérií stejnoměrné konvergence. Je přitom lhostejné, na jaké množině A pracujeme.

Nejjednodušším a často užívaným kritériem pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí je patrně následující upravený „přepis definice“, se kterým jsme se v příkladech již seznámili.

Tvrzení 14.3.1. *Nechť funkce* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *jsou definovány na* A. *Platí* $f_n \rightrightarrows f$ *na* A, *právě když existuje posloupnost nezáporných čísel* $\{\alpha_n\}$ *tak, že* $\alpha_n \to 0$ *a*

$$a_n := \sup\{|\, f_n(t) - f(t)\,|;\, t \in A\,\} \leq \alpha_n\,.$$

Důkaz. Jestliže $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, pak zřejmě $\limsup a_n = a > 0$ a pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ existují $t_n \in A$ tak, že $|\, f_n(t_n) - f(t_n)\,| > a/2 > 0$, tj. $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně k f na A.

Pokud $\alpha_n \to 0$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové $k \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq k$ je $\alpha_n < \varepsilon$. Potom pro všechna $n \geq k$ a všechna $x \in A$ je

$$|\, f_n(x) - f(x)\,| \leq a_n \leq \alpha_n < \varepsilon\,,$$

takže zřejmě je $f_n \rightrightarrows f$ na A. □

Poznámka 14.3.2. Zdůrazňujeme, že Tvrzení 14.3.1 v sobě skrývá jednak *ekvivalenci*

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } A, \text{ právě když } a_n \to 0\,,$$

a také *velmi užitečnou* implikaci $(\alpha_n \to 0) \Rightarrow (f_n \rightrightarrows f$ na $A)$. Čísla a_n totiž často nedokážeme přesně určit, přičemž může být lehké je shora odhadnout pomocí vhodných α_n.

Při vyšetřování stejnoměrné konvergence volíme zpravidla tuto strategii: snažíme se nalézt maxima, resp. suprema a_n funkcí $|\,f_n - f\,|$ na A a dokázat, že tvoří posloupnost konvergující k 0. Někdy je však jednodušší tato maxima odhadnout shora pomocí $\alpha_n \geq 0$ a ukázat, že $\alpha_n \to 0$. Je pochopitelné, že se snažíme vybrat postup, který snáze vede k cíli.

Nyní dokážeme další kritérium stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n\}$, které vyvozuje tuto konvergenci z monotonie posloupnosti $\{f_n\}$ a ze speciálních vlastností funkcí f_n. Vyslovíme ho ve znění pro kompaktní metrický prostor (P, ϱ); čtenář si může představit na místě (P, ϱ) např. interval $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}$.

Věta 14.3.3 (Dini 1878). *Je-li $\{f_n\}$ monotónní posloupnost spojitých funkcí konvergentní bodově na kompaktním metrickém prostoru (P, ϱ) ke spojité funkci f, pak je $f_n \rightrightarrows f$ na P.*

Důkaz. Uvědomme si nejprve, že stačí větu dokázat pro speciální případ posloupnosti nezáporných funkcí g_n konvergující monotónně k 0 a výsledek pak aplikovat na funkce $g_n = f_n - f$, resp. $g_n = f - f_n$. Je-li $\varepsilon > 0$, lze nalézt pro každé $x \in P$ takové $n = n_x$, že platí $g_{n_x}(x) < \varepsilon/2$. Všechny funkce g_{n_x} jsou spojité v P; posloupnost $\{g_n\}$ je nerostoucí. Zvolme ke každému x okolí $\mathcal{U}(x)$ tak, aby platilo $|\,g_{n_x}(y) - g_{n_x}(x)\,| < \varepsilon/2$ pro všechna $y \in \mathcal{U}(x)$. Platí tedy $g_{n_x}(y) < \varepsilon$ na $\mathcal{U}(x)$. Systém okolí $\{\,\mathcal{U}(x);\, x \in P\}$ tvoří pokrytí kompaktního prostoru P. Existuje proto $K \subset P$ konečná, pro kterou *konečný* systém $\{\,\mathcal{U}(x);\, x \in K\}$ rovněž pokrývá P. Je tedy

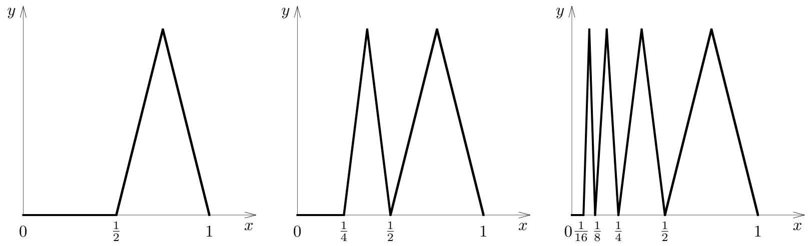
$$P \subset \bigcup \{\,\mathcal{U}(x);\, x \in K\}$$

a ke každému $x \in K$ přísluší ta funkce, pomocí níž bylo okolí definováno, a kterou budeme značit g_x. Nyní položme $k = \max\{n_x;\, x \in K\}$. Pro každé $y \in P$ existuje $x \in K$ tak, že $y \in \mathcal{U}(x)$. Pak pro všechna $n \geq k$ je

$$g_n(y) \leq g_k(y) < g_{n_x}(x) + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,,$$

čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

Příklad 14.3.4. Položme $g_n := f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$, kde f_n jsou funkce definované v Příkladu 12.3.7. Následující obrázek znázorňuje funkce g_1, g_2 a g_4:



Obr. 14. 1.

Funkce g_n jsou spojité a tvoří neklesající posloupnost funkcí z $\mathcal{C}([0,1])$, která konverguje k funkci g (jde o součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$). Řada zřejmě bodově konverguje, neboť v každém bodě je nenulová maximálně jedna z funkcí f_n. Řada však zřejmě nekonverguje stejnoměrně na intervalu $[0,1]$. Podle Věty 14.3.3 nemůže být g spojitá funkce (je nespojitá právě v bodě 0). Funkce g je sice spojitá na intervalu (0, 1], to však není kompaktní množina. Odtud vidíme, že předpoklady spojitosti limitní funkce a také kompaktnosti intervalu v Diniho Větě 14.3.3 jsou podstatné.

Následující tvrzení pro řady je velmi užitečné; v literatuře bývá označováno často jako *Weierstrassův M-test* nebo *majorantní kritérium.* Jak snadno nahlédneme, jde o *postačující podmínku* pro stejnoměrnou konvergenci řady funkcí.

Věta 14.3.5 (o majorantní řadě). *Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *je řada funkcí definovaných na množině* A *a nechť pro (skoro všechna)* $k \in \mathbb{N}$ *je* $\sup\{|f_k(t)|;\, t \in A\} \le \alpha_k$. *Jestliže* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$, *potom řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *konverguje stejnoměrně na* A.

Důkaz. Pro částečné součty s_n řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ snadno dostaneme při $m > n$ odhad

$$\sup\{|s_m(t) - s_n(t)|; t \in A\} \le \alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_m\,; \tag{14.6}$$

protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ konverguje, existuje k číslu $\varepsilon > 0$ takové $k \in \mathbb{N}$, pro které je součet na pravé straně nerovnosti (14.6) pro jakákoli $m > n \ge k$ odhadnut shora číslem ε. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ tedy splňuje podmínku z Věty 14.1.3, z čehož již tvrzení věty vyplývá. □

Příklad 14.3.6 (Riemann *1861). Definujeme-li funkci g jako součet řady

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{14.7}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\left|\frac{\sin(k^2 x)}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$$

a řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ konverguje. Podle Věty 14.3.5 konverguje proto řada v (14.7) stejnoměrně. Proto je funkce g spojitá na $\mathbb{R}$.

Věta 14.3.5 se dobře pamatuje, neboť de facto říká, že řada funkcí konverguje stejnoměrně, pokud „řada norem konverguje“. Jemnější kritéria pro stejnoměrnou konvergenci řad a další složitější věty o stejnoměrné konvergenci a integraci či derivování probereme v poslední části této kapitoly.

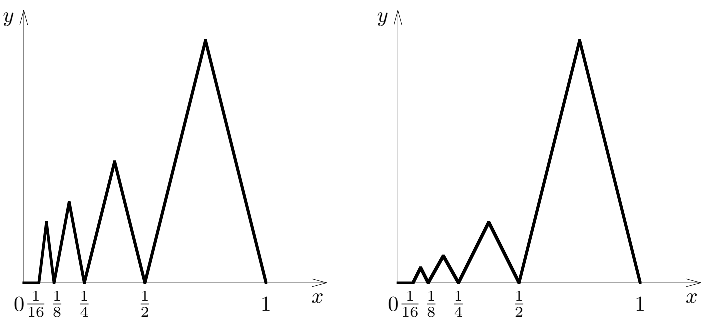
Příklad 14.3.7. Zvolme za A ve Větě 14.3.5 interval $[\,0,1\,]$; nechť funkce h_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou definovány (načrtněte si eventuálně obrázek) *podobně* jako v Příkladu 12.3.7: je $h_n(t) = 0$ pro $t \in [\,0, 2^{-n}\,] \cup [\,2^{-n+1}, 1\,]$. Ve středovém bodě $s_n := 3/2^{n+1}$ intervalu $[\,2^{-n}, 2^{-n+1}\,]$ položíme $h_n(s_n) = 1/n$ a pak na obou intervalech $[\,2^{-n}, s_n\,]$ a $[\,s_n, 2^{-n+1}\,]$ definujeme h_n lineárně. Srovnání s Příkladem 12.3.7 ukazuje, že $h_n = \alpha_n f_n$, kde $\alpha_n = 1/n$. Snadno nahlédneme, jaký je součet h řady $\sum h_k$, neboť v každém bodě $x \in [\,0,1\,]$ je nenulová nejvýše jedna z funkcí h_k. Protože je

$$\sup\{\,|h_k(t)|\,;\; t \in [\,0,1\,]\,\} = \alpha_k\,,$$

zřejmě platí $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = +\infty$, avšak pro $n \to \infty$ je

$$\sup\Big\{\,\Big|\,h(t) - \sum_{k=1}^{n} h_k(t)\Big|,\; t \in [\,0,1\,]\Big\} \le \frac{1}{n+1} \to 0\,.$$

Proto $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \rightrightarrows$ na $[\,0,1\,]$, i když Weierstrassův M-test nám tuto informaci nepřinesl. Zvolíme-li však $\alpha_n = 1/n^2$, dostaneme snadno z Weierstrassova M-testu stejnoměrnou konvergenci takto modifikované řady $\sum h_n$. Následující obrázek znázorňuje pro lepší představu funkci h_4 v obou popsaných případech.



Obr. 14. 2.

Mnohokrát jsme použili funkce f_n z Příkladu 12.3.7, nebo jejich násobky. Na stejném principu lze konstruovat další zajímavé příklady. Pracujme s intervalem $(0,1)$ (kreslete si obrázek). Zvolíme-li např. hodnoty $\alpha_n = n$ a položíme $u_n = \alpha_n f_n$, pak nejenom $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ diverguje, ale dokonce je i $\alpha_n \to +\infty$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ nekonverguje stejnoměrně, avšak součet $u = \sum u_n$ je funkce spojitá na intervalu $(0,1)$.

Při vyšetřování stejnoměrné konvergence řad jsou často užitečná jednoduchá tvrzení, která lze poměrně snadno dokázat. Ta nám v konkrétních situacích ušetří práci, protože nebudeme muset některé standardní úvahy stále opakovat.

Tvrzení 14.3.8. *Nechť $p \in \mathbb{N}$, nechť pro $j = 1, 2, \dots, p$ jsou c_j reálná čísla a nechť řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_{jk}(x)$ pro všechna tato j konvergují stejnoměrně na neprázdné množině M. Položme*

$$f_k(x) = c_1 f_{1k}(x) + c_2 f_{2k}(x) + \cdots + c_p f_{pk}(x)\,, \quad x \in M\,.$$

Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně na M.

Důkaz. Označíme-li $s_{jn}(x) := \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(x)$ a $s_j(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_{jk}(x)$, $x \in M$, pak z předpokladů plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ lze volit indexy r_j tak, že pro všechna $n \geq r_j$, $j = 1, 2, \dots, p$ a $x \in M$ je

$$|s_{jn}(x) - s_j(x)| < \varepsilon\,.$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ zřejmě konverguje na M a označíme-li její součet S, pak pro její částečné součty S_n s $n \geq r := \max\{r_j\,;\, j = 1, 2, \dots, p\}$ dostaneme

$$\begin{aligned}\big|S_n(x) - S(x)\big| &\leq |c_1||s_{1n}(x) - s_1(x)| + \cdots + |c_p||s_{pn}(x) - s_p(x)| \leq \\ &\leq |c_1|\,\varepsilon + \cdots + |c_p|\,\varepsilon \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{p} |c_j|\,, \quad x \in M,\end{aligned}$$

z čehož již plyne dokazované tvrzení. □

Tvrzení 14.3.9. *Nechť řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M. Je-li g omezená funkce na množině M, potom řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(x) f_k(x) \tag{14.8}$$

konverguje stejnoměrně na M.

Důkaz. Řada (14.8) zřejmě konverguje v každém bodě $x \in M$; označme její součet S a její částečné součty $S_n := \sum_{k=1}^{n} g \cdot f_k$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $r \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq r$ je pro $s := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ a $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon\,, \quad x \in M\,.$$

Jestliže pro $K \geq 0$ je $|\,g(x)\,| \leq K$, je pro všechna $n \geq r$ a všechna $x \in M$

$$\big|S_n(x) - S(x)\big| \leq |\,g(x)\,s_n(x) - g(x)\,s(x)\,| \leq K|s_n(x) - s(x)| < K\,\varepsilon\,,$$

takže řada (14.8) konverguje stejnoměrně na M. □

Tvrzení 14.3.10. *Nechť řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} |\,f_k(x)\,|$ konverguje stejnoměrně na množině M. Je-li $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost funkcí na množině M, pro kterou existuje $K > 0$ tak, že $|\,g_k(x)\,| \leq K$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in M$, pak řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) f_k(x) \tag{14.9}$$

konverguje stejnoměrně na M.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ a nelezněme $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq m$ a všechna $x \in I$ je

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\, f_k(z) \,| < \frac{\varepsilon}{K} \,.$$

Potom pro součet S a částečné součty S_n vyšetřované řady (14.9) dostaneme

$$|S(x) - S_n(x)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) f_k(x) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\, g_k(x) \,|\,|\, f_k(x) \,| < K \sum_{k=n+1}^{\infty} |\, f_k(x) \,| < \varepsilon$$

pro všechna $n \geq m$ a všechna $x \in I$, z čehož již vyplývá dokazované tvrzení. □

14.4 Stejnoměrná aproximace polynomy

Jestliže f, g jsou (obecně komplexní) funkce definované na množině A a pro každé $x \in A$ platí $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, říkáme, že *$g$ stejnoměrně aproximuje f na A s přesností menší než ε*. Je to vztah symetrický, zpravidla však aproximujeme funkci „složitější“ nějakou funkcí „jednodušší“. Může být trochu překvapující, že pro každé $\varepsilon > 0$ lze každou funkci f z prostoru $\mathcal{C}([a, b])$ stejnoměrně aproximovat polynomem s přesností menší než ε.

Věta 14.4.1 (Weierstrass, 1885). *Je-li f komplexní funkce spojitá na intervalu $[\,a, b\,]$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom P takový, že*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \textit{pro všechna} \quad x \in [\,a, b\,] \,.$$

Jak uvidíme dále, tento výsledek dostaneme z následující věty:

Věta 14.4.2. *Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$ je komplexní funkce. Potom existují polynomy P_n takové, že $P_n \rightrightarrows f$ na $[\,a, b\,]$. Je-li navíc f reálná funkce, existují polynomy P_n s reálnými koeficienty, pro něž $P_n \rightrightarrows f$ na $[\,a, b\,]$.*

Tuto větu dokážeme pomocí velmi zajímavé (a podstatně mladší) Věty 14.4.4, která bývá označována jako *věta o třech funkcích.* Větu 14.4.2 však dokážeme také přímo, nezávisle na ní.

Poznámka 14.4.3. Připomeňme, že je-li operátor L na lineárním prostoru reálných spojitých funkcí $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ (a) *lineární* (tj. pro všechny funkce $f, g \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$ a všechna čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$) a (b) *nezáporný* (tj. z $f \geq 0$ plyne $Lf \geq 0$), je také *monotónní*: Z $f \leq g$ plyne $Lf \leq Lg$ [1]). Snadno nahlédneme, že

$$Lg - Lf = L\,(g - f) \geq 0 \,.$$

[1]) U lineárních operátorů se obvykle užívá zápisu Lf místo $L(f)$.

Věta 14.4.4 (Korovkin 1953). *Nechť* $L_n\colon \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$, *jsou nezáporné lineární operátory* [2]) *takové, že posloupnost* $\{L_n f\}$ *konverguje stejnoměrně na* $[a,b]$ *k funkci* f *pro* $f = 1, \mathrm{Id}, \mathrm{Id}^2$. *Potom posloupnost* $\{L_n f\}$ *konverguje stejnoměrně na* $[a,b]$ *k funkci* f *pro každou funkci* $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

Důkaz. Pro pochopení věty je užitečné si uvědomit intuitivně přijatelný fakt: každá funkce $f \in \mathcal{C}([a,b])$ je infimem všech kvadratických polynomů, jejichž graf leží nad grafem funkce f. Platí totiž toto tvrzení:

(T) *Nechť* $f \in \mathcal{C}([a,b])$ *a nechť* $\varepsilon > 0$. *Potom existuje* $\alpha > 0$ *takové, že pro každé* $y \in [a,b]$ *je*

$$f(y) - \varepsilon - \alpha(\mathrm{Id} - y)^2 \le f \le f(y) + \varepsilon + \alpha(\mathrm{Id} - y)^2. \tag{14.10}$$

K důkazu tohoto tvrzení se vrátíme, nejprve však ukážeme, jak z něj vyplývá Korovkinova Věta 14.4.4. Zvolme $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $\varepsilon > 0$ a $y \in [a,b]$. Protože jsou operátory L_n lineární a nezáporné, jsou i monotónní, takže z (14.10) plynou pro funkce na $[a,b]$ nerovnosti (pro větší přehlednost užijeme závorky)

$$\begin{aligned} f(y)L_n(1) - \varepsilon L_n(1) - \alpha\big(L_n(\mathrm{Id}^2) - 2yL_n(\mathrm{Id}) + y^2 L_n(1)\big) \le L_n(f) \le \\ \le f(y)L_n(1) + \varepsilon L_n(1) + \alpha\big(L_n(\mathrm{Id}^2) - 2yL_n(\mathrm{Id}) + y^2 L_n(1)\big)\,, \end{aligned}$$

neboli, po jednoduché úpravě

$$\begin{aligned} \big| L_n(f) - f(y)L_n(1) \big| &\le \varepsilon L_n(1) + \alpha\big(L_n(\mathrm{Id}^2) - 2y\, L_n(\mathrm{Id}) + y^2 L_n(1)\big) = \\ &= \varepsilon L_n(1) + \alpha\big((L_n(\mathrm{Id}^2) - y^2) - 2y(L_n(\mathrm{Id}) - y) + y^2(L_n(1) - 1)\big)\,. \end{aligned}$$

Tato nerovnost platí pro všechna $y \in [a,b]$. Protože z trojúhelníkové nerovnosti

$$|\, L_n(f) - f \,| - |\, f - fL_n(1) \,| \le |\, L_n(f) - fL_n(1) \,|$$

vyplývá po elementární úpravě $|\, L_n(f) - f \,| \le |\, fL_n(1) - f \,| + |L_n(f) - fL_n(1)\,|$, dostáváme odtud

$$\begin{aligned} |\, L_n(f) - f \,| \le \|\, f \,\| \, \big|\, L_n(1) - 1 \,\big| + \varepsilon L_n(1) + \\ + \alpha\big(\, |L_n(\mathrm{Id}^2) - \mathrm{Id}^2\,| - 2\,\|\,\mathrm{Id}\,\|\,|L_n(\mathrm{Id}) - \mathrm{Id}\,| + \|\,\mathrm{Id}^2\,\|\,|L_n(1) - 1\,|\,\big)\,, \end{aligned} \tag{14.11}$$

z čehož již plyne $L_n f \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Nyní se vrátíme k důkazu tvrzení (T).

Protože je f stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, existuje takové $\delta > 0$, že

$$\big(\forall x, y \in [a,b], |x - y| \le \delta\big)(|\, f(x) - f(y)\,| \le \varepsilon)\,. \tag{14.12}$$

Dále je

$$\big(\forall x, y \in [a,b], |x - y| > \delta\big)\big(|f(x) - f(y)| \le 2\,\|f\| \le \varepsilon + 2\|f\|\,(x - y)^2\delta^{-2}\big)\,. \tag{14.13}$$

Položíme-li $\alpha = 2\|f\|\,\delta^{-2}$, plyne z (14.12) a z (14.13) tvrzení (T), čímž je důkaz Korovkinovy věty dokončen. $\square$

[2]) Pracujeme tedy zřejmě na prostoru reálných funkcí $\mathcal{C}([a,b])$, kde Id je identita na $[a,b]$. Tradiční označení identity jako „funkce x“ by v tomto případě vedlo k nepřesnostem nebo komplikovanému zápisu.

Vztah Korovkinovy Věty 14.4.4 k Weierstrassově větě je zřejmý: Pokud existují lineární operátory L_n takové, že $L_n f$ jsou polynomy pro každou $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$, jsme s důkazem Weierstrassovy věty pro prostor *reálných* funkcí $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ hotovi.

Pro interval $[\,a,b\,] = [\,0,1\,]$ nyní takto Weierstrassovu větu znovu dokážeme. Použijeme k tomu klasický vzorec, kterým se definují pro $n \in \mathbb{N}$ aproximující (Bernsteinovy) polynomy [3]) $B_n f$:

$$B_n f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\,, \quad x \in [\,0,1\,]\,. \tag{14.14}$$

Z definice (14.14) je zřejmé, že operátory $B_n : f \mapsto B_n f$ jsou na $\mathcal{C}([\,0,1\,])$ lineární, nezáporné a zobrazují tento prostor do prostoru polynomů. Nyní dokážeme následující vlastnost zobrazení B_n:

Lemma 14.4.5. *Posloupnost $\{B_n f\}$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[\,0,1\,]$ k funkci f pro tři funkce $f = 1$, Id, Id^2.*

Důkaz. Označme $f_k = \mathrm{Id}^k$, $k = 0, 1, 2$. Rovnost $B_n f_0 = f_0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ plyne z binomické věty. Uvažme dále, že pro $1 \le k \le n$ je

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}. \tag{14.15}$$

Dosazením f_1 do (14.14) dostaneme pomocí rovnosti (14.15)

$$\begin{aligned} B_n f_1(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} = \\ &= x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = x\cdot 1 = f_1(x)\,, \quad x \in [\,0,1\,]\,, \end{aligned}$$

takže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $B_n f_1 = f_1$. Konečně pomocí (14.15) spočteme pro $1 \le k \le n$

$$\Big(\frac{k}{n}\Big)^2\binom{n}{k} = \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}\,; \tag{14.16}$$

první člen posledního součtu pro $2 \le k \le n$ ještě upravíme:

$$\frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n}\,\frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1} = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\binom{n-2}{k-2}. \tag{14.17}$$

Po dosazení f_2 do (14.14) obdržíme pro všechna $x \in [\,0,1\,]$

$$B_n f_2(x) = \sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

[3]) Užíváme obvyklé transkripce; jde však o ruského, resp. sovětského matematika, takže patrně správnější by bylo užít jména ve formě *Bernštejn.* Bernstein r. 1912 dokázal $B_n f \rightrightarrows f$ na $[\,0,1\,]$ pro každou $f \in \mathcal{C}([\,0,1\,])$.

a pomocí (14.16) a (14.17) jednoduchou úpravou postupně dostaneme

$$B_n f_2(x) = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \Big(1-\frac{1}{n}\Big)x^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^j(1-x)^{(n-2)-j} + \frac{x}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{(n-1)-j} =$$

$$= \Big(1-\frac{1}{n}\Big)x^2 + \frac{x}{n} = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)f_2(x) + \frac{1}{n}f_1(x)\,;$$

Odtud vyplývá $B_n f_2 \rightrightarrows f_2$ na $[0,1]$. □

Z předcházejícího Lemmatu 14.4.5 a z Věty 14.4.4 obdržíme $B_n f \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ při $n\to\infty$ pro všechny reálné funkce $f\in\mathcal{C}([0,1])$, tedy i druhou část Věty 14.4.2. Poznamenejme ještě, že odhad (14.4) v případě užití Bernsteinových polynomů nabude s ohledem na předcházející Lemma 14.4.5 jednoduššího tvaru:

$$|\,B_n f - f\,| \le \varepsilon + \frac{\alpha}{n}\big(\,\|\,\mathrm{Id}-\mathrm{Id}^2\,\|\big)\,. \tag{14.18}$$

V následujících Poznámkách 14.4.6 ukážeme, že z dokázaného tvrzení již snadno vyplývá (zdánlivě) obecnější plné znění Věty 14.4.2.

Poznámky 14.4.6. 1. Nejprve ukážeme, jak se případ aproximace komplexních funkcí převede na případ aproximace reálných funkcí: Je-li f komplexní funkce na intervalu $[a,b]$, $f = f_1 + \mathrm{i}f_2$, kde $f_1(x) = \mathrm{Re}f(x)$, $f_2(x) = \mathrm{Im}\,f(x)$, $x\in[a,b]$, a jsou-li p_1,p_2 polynomy s reálnými koeficienty, pro něž pro $k=1,2$ platí $|f_k - p_k| < \varepsilon$ na $[a,b]$, pak je

$$|(f_1+\mathrm{i}f_2)-(p_1+\mathrm{i}p_2)| = \sqrt{(f_1-p_1)^2+(f_2-p_2)^2} \le \sqrt{2}\cdot\varepsilon < 2\varepsilon\,.$$

Proto pro komplexní funkci $p := p_1 + \mathrm{i}p_2$ platí $|\,f-p\,| < 2\varepsilon$. Přitom je $p_1+\mathrm{i}p_2$ polynom s komplexními koeficienty. Proto stačí tvrzení dokazovat jen pro reálné funkce.

2. Je-li $f\in\mathcal{C}([a,b])$ reálná funkce a $\varphi(t) = a + t(b-a)$ lineární funkce zobrazující interval $[0,1]$ na interval $[a,b]$, definujme $g = f\circ\varphi$. Potom $g\in\mathcal{C}([0,1])$ je spojitá reálná funkce na intervalu $[0,1]$. Je-li q_n polynom s reálnými koeficienty, pro který $|\,g(t)-q_n(t)\,| < 1/n$ pro všechna $t\in[0,1]$, definujme $p_n := q_n\circ\varphi^{-1}$. Potom p_n je polynom s reálnými koeficienty a je-li $x\in[a,b]$, $x=\varphi(t)$, je také

$$\begin{aligned}|\,f(x)-p_n(x)\,| &= |\,(\,g\circ\varphi^{-1})(x) - (\,q_n\circ\varphi^{-1})(x)\,| =\\ &= |\,g(t)-q_n(t)\,| < 1/n\,, \quad x\in[a,b]\,;\end{aligned}$$

je tedy $p_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Odtud je také zřejmé, že z platnosti Věty 14.4.2 pro *jeden* speciálně zvolený uzavřený interval (v našem případě to byl interval $[0,1]$) plyne její platnost pro *každý* interval $[a,b]$.

3. Je-li l lineární funkce a P polynom, pak $|(f-l)-P| = |f-(P+l)|$ a $P+l$ je opět polynom.

Jiný důkaz Věty 14.4.2. S ohledem na Poznámky 14.4.6 stačí tvrzení dokázat pouze pro reálné funkce $f\in\mathcal{C}([0,1])$, pro které platí $f(0)=f(1)=0$. Se zachováním označení této funkce symbolem f rozšíříme f na $\mathbb{R}$ hodnotou 0 mimo $[0,1]$, takže f je *stejnoměrně* spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy i na $\mathbb{R}$.

Definujeme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ polynomy $Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n$, přičemž koeficienty $c_n \in \mathbb{R}$ volíme tak, aby platilo

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 1\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{14.19}$$

Odhadneme velikost c_n pomocí výpočtu

$$(c_n)^{-1} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \ge 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \ge$$
$$\ge 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)\,\mathrm{d}x = 2\Big[x - \frac{nx^3}{3}\Big]_{x=0}^{1/\sqrt{n}} = \frac{4}{3\sqrt{n}} > (\sqrt{n})^{-1}\,,$$

z něhož vyplývá odhad shora

$$c_n < \sqrt{n}\,. \tag{14.20}$$

K odhadu integrované funkce jsme použili Bernoulliho nerovnost, kterou jsme dokázali v Příkladu 1.3.24. Pro libovolné δ, $0 < \delta < 1$, a $x \in [\delta, 1]$ platí

$$0 \le Q_n(x) \le \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n =: a_n\,. \tag{14.21}$$

Protože $a_{n+1}/a_n \to (1-\delta^2) < 1$, řada $\sum a_n$ konverguje, z čehož plyne $a_n \to 0$, a tedy podle Věty 14.3.1 platí $Q_n(x) \rightrightarrows 0$ na $\{x \in \mathbb{R}\,;\, \delta \le |x| \le 1\}$. Nyní budeme definovat aproximující polynomy p_n

$$p_n(x) := \int_{-1}^{1} f(x+t)\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

Využijeme toho, že funkce f se anuluje na $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ a změníme integrační meze a pak pomocí substituce $u = x + t$ dostaneme pro funkce p_n vyjádření

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} f(u)\,Q_n(u-x)\,\mathrm{d}u\,.$$

Z tvaru posledního integrálu vidíme, že p_n je polynom v proměnné x, přičemž je to reálný polynom, protože f je reálná funkce. Nechť $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti funkce f plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in [0,1]$, $|x-y| < \delta$ je

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2\,.$$

Označme $M := \max\{|f(x)|;\, x \in [0,1]\}$ a zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $4Ma_n < \varepsilon/2$ pro všechna $n \ge n_0$. Protože Q_n jsou sudé a nezáporné funkce, dostaneme pro všechna $x \in [-1,1]$ a všechna $n \ge n_0$ s použitím (14.19) – (14.21) postupně

$$|f(x)-p_n(x)| = \Big|\int_{-1}^{1} (f(x)-f(x+t))\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t\Big| \le \int_{-1}^{1} |\,f(x)-f(x+t)\,|\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t \le$$
$$\le 4M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) \le 4Ma_n + \varepsilon/2 < \varepsilon\,;$$

odtud plyne $p_n \rightrightarrows f$ na $[\,0,1\,]$ pro $n \to \infty$, což jsme chtěli dokázat. □

14.5 Zobecnění Weierstrassovy věty

Ukážeme, že Weierstrassova věta připouští dalekosáhlé zobecnění. Je-li X kompaktní metrický prostor a je-li $\mathcal{S}(X)$ systém spojitých funkcí (reálných nebo komplexních) na prostoru X, který je „dostatečně bohatý“ a má určité algebraické vlastnosti, pak je každá spojitá funkce na X limitou stejnoměrně konvergentní posloupnosti funkcí z $\mathcal{S}(X)$.

Nahradit interval $[\,a,b\,]$ ve Větě 14.4.1 kompaktním metrickým prostorem X je vcelku přirozené, narazíme však na překážku: v tvrzení vystupují polynomy. Je proto vhodné si rozmyslet, co to vlastně polynomy z algebraického hlediska jsou. V klasickém případě jsou to reálné nebo komplexní funkce, které jsou lineárními kombinacemi mocnin $1, x, x^2, \ldots$. Tyto funkce jsou mocninami funkce Id, které všechny vzniknou (v systému uzavřeném na násobení) z funkcí $1, \mathrm{Id}$. To nás vede k následujícím jednoduchým definicím.

Definice 14.5.1. Systém funkcí $\mathcal{A}(X)$ na množině X se nazývá *algebra*, je-li (reálným nebo komplexním) lineárním prostorem uzavřeným na násobení, tj.

$$f,\,g \in \mathcal{A}(X) \;\Rightarrow\; f\cdot g \in \mathcal{A}(X)\,.$$

Definice 14.5.2. Systém reálných funkcí $\mathcal{A}(X)$ na množině X se nazývá *svaz*, je-li uzavřený na operace tvoření maxima a minima, tj.

$$f,g \in \mathcal{A}(X) \;\Rightarrow\; \max\{f,g\} \in \mathcal{A}(X) \;\text{ a }\; \min\{f,g\} \in \mathcal{A}(X)\,.$$

Oba tyto systémy hrají při zobecňování Weierstrassovy věty významnou roli. Nejprve se budeme věnovat systémům funkcí, které tvoří svaz; uveďme jednoduché příklady:

Příklady 14.5.3. 1. Lineární prostor reálných funkcí $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ nebo $\mathcal{C}((P,\rho))$ je současně svazem i algebrou. Lineární prostor komplexních funkcí $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ nebo $\mathcal{C}((P,\rho))$ je algebrou.

2. Systém všech reálných nebo komplexních polynomů na intervalu $[\,a,b\,]$ je vlastním podprostorem lineárního prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ a je i algebrou, není to však (ani v reálném případě) svaz. Tato algebra je „nejmenší“ z těch, které obsahují konstantní funkci 1 a identitu Id.

Lemma 14.5.4. *Jestliže je $\mathcal{A}(X)$ vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$) reálných funkcí na množině X a jestliže z $f \in \mathcal{A}(X)$ plyne, že $|f| \in \mathcal{A}(X)$, potom je $\mathcal{A}(X)$ svaz.*

Důkaz. Z $f,\, g \in \mathcal{A}(X)$ plyne, že funkce $f+g$ i $f-g$ leží v $\mathcal{A}(X)$. Zbývá pouze si uvědomit, že z rovností

$$\max\{f,\, g\} = \big((f+g)+|f-g|\big)/2 \quad \text{a} \quad \min\{f,\, g\} = \big((f+g)-|f-g|\big)/2$$

vyplývá, že $\mathcal{A}(X)$ je svaz. □

Definice 14.5.5. Množinu všech funkcí f, pro které existuje posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{A}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, taková, že pro $n \to \infty$ je $f_n \rightrightarrows f$ na X, budeme značit $\operatorname{cl}(\mathcal{A}(X))$ (toto označení pro „stejnoměrný uzávěr“ je odvozeno od anglického termínu *closure*).

Definice 14.5.6. Systém funkcí $\mathcal{B}(X)$ definovaných na X *odděluje body* X, jestliže ke každé dvojici bodů $x, y \in X$, $x \neq y$, existuje funkce $f \in \mathcal{B}(X)$, pro kterou $f(x) \neq f(y)$ (funkce f tedy obecně závisí na volbě dvojice bodů $x, y \in X$).

Věta 14.5.7 (Stone, *1937). *Nechť $\mathcal{S}(X) \neq \emptyset$ je svaz a současně i lineární prostor reálných spojitých funkcí na kompaktní množině $X \subset (P,\rho)$. Nechť $\mathcal{S}(X)$ odděluje body X a obsahuje konstantní funkci 1. Potom* $\operatorname{cl}(\mathcal{S}(X)) = \mathcal{C}(X)$.

Důkaz. Zvolme $f \in \mathcal{C}(X)$ a $\varepsilon > 0$. Ukážeme, jak se z předpokladů odvodí existence funkce $g \in \mathcal{S}(X)$, pro kterou $\|f-g\| = \sup\{\, |f(t)-g(t)|\,;\, t \in X\} < \varepsilon$, tj.

$$f(t)-\varepsilon \;<\; g(t) \;<\; f(t)+\varepsilon\,, \quad t \in X\,.$$

Zvolme tedy $x \in X$ a pro každé $y \in X \setminus \{x\}$ funkci $g_{x,y} \in \mathcal{S}$ tak, aby

$$g_{x,y}(x) = f(x) \quad \text{a } g_{x,y}(y) = f(y)\,.$$

Takovou funkci snadno sestrojíme: $\mathcal{S}(X)$ obsahuje všechny konstantní funkce a jelikož v $\mathcal{S}(X)$ existuje funkce h, pro kterou $h(x) \neq h(y)$, stačí definovat

$$g_{x,y}(t) = f(x)\,\frac{h(t)-h(y)}{h(x)-h(y)} + f(y)\,\frac{h(t)-h(x)}{h(y)-h(x)}\,, \quad t \in X\,.$$

Dále definujme

$$\mathcal{U}_x(y) := \{\, t \in X\,;\, g_{x,y}(t) < f(t)+\varepsilon\,\}\,.$$

Protože $g_{x,y}$ i f jsou spojité funkce, je $\mathcal{U}_x(y)$ otevřená množina obsahující bod y. Každá z těchto množin obsahuje i bod x. Systém otevřených množin

$$\{\,\mathcal{U}_x(y)\,;\, y \in X \setminus \{x\}\}$$

pokrývá kompaktní prostor X, existuje tedy $m \in \mathbb{N}$ a body $y_1, y_2, \dots, y_m$ tak, že

$$\{\,\mathcal{U}_x(y_1),\, \mathcal{U}_x(y_2),\, \dots,\, \mathcal{U}_x(y_m)\}$$

je pokrytí X. Položíme-li $g_x := \min\{g_{x,y_1}, \dots, g_{x,y_m}\}$, pak na každém z okolí $\mathcal{U}_x(y_k)$ je $g_x \le g_{x,y_k} < f + \varepsilon$. Jelikož je $\mathcal{S}(X)$ svaz, je $g_x \in \mathcal{S}(X)$ a $g_x < f + \varepsilon$ na X. Podobně definujeme

$$\mathcal{V}(x) := \{\, t \in X\,;\, g_x(t) > f(t) - \varepsilon \,\}, \quad x \in X\,.$$

Protože g_x i f jsou spojité funkce, je $\mathcal{V}(x)$ otevřená množina obsahující bod x. Systém $\{\, \mathcal{V}(x)\,;\, x \in X \,\}$ je tedy otevřeným pokrytím kompaktního prostoru X. Z tohoto systému vybereme konečné pokrytí X

$$\{\, \mathcal{V}(x_1),\, \mathcal{V}(x_2),\, \dots,\, \mathcal{V}(x_n) \,\}$$

a sestrojíme funkci $g = \max\{\, g_{x_1},\, g_{x_2},\, \dots,\, g_{x_n} \,\}$. Je zřejmě $g \in \mathcal{S}(X)$ a protože je $g \ge g_{x_k} > f - \varepsilon$ na každém $\mathcal{V}(x_k)$ a zároveň $g \le g_{x,y_k}(t) < f + \varepsilon$ na každém okolí $\mathcal{U}_x(y_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$, plyne odtud

$$f(t) - \varepsilon < g(t) < f(t) + \varepsilon\,, \quad t \in X\,.$$

Odtud vyplývá, že funkce f leží v $\operatorname{cl}(\mathcal{S}(X))$, a tedy $\mathcal{C}(X) \subset \operatorname{cl}(\mathcal{S}(X))$. Protože z Věty 14.1.5 plyne opačná inkluze, dostáváme rovnost $\operatorname{cl}(\mathcal{S}(X)) = \mathcal{C}(X)$. □

Dokázaná Věta 14.5.7 Weierstrassovu větu nezobecňuje, neboť restrikce všech polynomů na interval $[\,a, b\,]$ netvoří svaz. Abychom dostali takovou verzi, ze které Věta 14.4.1 vyplyne jako speciální případ, musíme ještě dokázat některá jednoduchá tvrzení.

Lemma 14.5.8. *Nechť $\mathcal{A}(X)$ je algebra (reálných nebo komplexních) omezených funkcí definovaných na množině X a nechť $\|f\|_\infty = \sup\{\, |f(x)|\,;\, x \in X \,\}$ je norma na X. Potom uzávěr $\operatorname{cl}(\mathcal{A}(X))$ v této normě je opět algebra.*

Důkaz. Pro každou funkci $f \in \mathcal{A}(X)$ odhadneme $|f|$ pomocí jejího suprema $\|f\|_\infty$. Popíšeme podrobněji pouze případ s *reálným* lineárním prostorem, pro komplexní lineární prostor probíhá důkaz analogicky.

Podle Definice 14.5.5 leží funkce f v $\operatorname{cl}(\mathcal{A}(X))$, právě když existují $f_n \in \mathcal{A}(X)$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na X. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takové $k \in \mathbb{N}$, že $\|f_k - f\| < \varepsilon$. Pak je $\|f\| \le \|f_n\| + \|f - f_n\| < \|f_n\| + \varepsilon$, takže funkce f je omezená.

Pro každé dvě funkce $f, g \in \operatorname{cl}(\mathcal{A}(X))$ a každé číslo $c \in \mathbb{R}$ existují posloupnosti funkcí $f_n, g_n \in \mathcal{A}(X)$ tak, že $\|f_n - f\| \to 0$ a $\|g_n - g\| \to 0$. Pak

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\| \le \|f_n - f\| + \|g_n - g\| \quad \text{a} \quad \|cf_n - cf\| \le |c|\, \|f_n - f\|\,,$$

z čehož již lehce plyne, že $\operatorname{cl}(\mathcal{A}(X))$ je lineární prostor. Z nerovnosti

$$\|f_n g_n - fg\| \le \|f_n - f\|\, \|g\| + \|g_n - g\|\, \|f\| + \|f_n - f\|\, \|g_n - g\|\,,$$

pak již snadno vyplývá, že $\operatorname{cl}(\mathcal{A}(X))$ je algebra. □

Lemma 14.5.9. *Nechť $a > 0$. Potom existuje posloupnost polynomů $\{p_n\}$ s reálnými koeficienty taková, že $p_n(0) = 0$ a zároveň $p_n \rightrightarrows |\,\mathrm{Id}\,|$ na $[-a, a]$.*

Důkaz. Weierstrassova Věta 14.4.2 zaručuje existenci reálných polynomů q_n takových, že $q_n \rightrightarrows |\,\mathrm{Id}\,|$ na $[-a, a] \subset \mathbb{R}$. Pak pro $p_n = q_n - q_n(0)$ je $p_n(0) = 0$ a

$$\|\, p_n - |\,\mathrm{Id}\,|\,\| \le \|\, q_n - |\,\mathrm{Id}\,|\,\| + \|\, q_n(0)\,\| \to 0\,,$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Lemma 14.5.10. *Je-li $\mathcal{A}(P)$ uzavřená algebra omezených spojitých funkcí na metrickém prostoru (P, ρ) (vzhledem ke stejnoměrné konvergenci na P), pak*

$$f,\, g \in \mathcal{A}(P) \;\Rightarrow\; \max\{f, g\} \in \mathcal{A}(P) \quad \text{a} \quad \min\{f, g\} \in \mathcal{A}(P)\,.$$

Důkaz. S ohledem na Lemma 14.5.4 stačí dokázat, že z $f \in \mathcal{A}(P)$ plyne $|f| \in \mathcal{A}(P)$, protože $f + g$ i $f - g$ leží v $\mathcal{A}(P)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a $f \in \mathcal{A}(P)$. Dále zvolme $a > \|f\|$. Podle Lemma 14.5.9 existuje polynom p s vlastností $p(0) = 0$ tak, že platí $p(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k t^k$ a

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} a_k t^k - |t| \Big\| < \varepsilon\,, \quad t \in [-a, a]\,.$$

Jelikož $-a \le f(x) \le a$ pro všechna $x \in P$, vyplývá odtud pro funkci f

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} a_k \big(f(x)\big)^k - |\, f(x)\,| \Big\| < \varepsilon\,, \quad x \in P\,,$$

a protože $\mathcal{A}(P)$ je algebra, je funkce $g := \sum_{k=1}^{m} a_k f^k$ z $\mathcal{A}(P)$ a platí $\|\, |f| - g\,\| < \varepsilon$. To již stačí pro konstrukci posloupnosti funkcí $g_n \in \mathcal{A}(P)$, pro kterou je $g_n \rightrightarrows |f|$ na P. Proto $|\,f\,| \in \mathrm{cl}\,(\mathcal{A}(P)) = \mathcal{A}(P)$. □

Důsledek 14.5.11. *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Je-li $\mathcal{A}(P)$ libovolná uzavřená algebra reálných funkcí v $\mathcal{C}(P)$, je $\mathcal{A}(P)$ zároveň (uzavřený) svaz.*

Nyní již můžeme vyslovit tvrzení, které bývá často označováno jako *reálná verze Stone-Weierstrassovy věty.* Čtenář by si měl povšimnout, že jeho předpoklady se odlišují od „svazové verze“ jen v tom, že systém funkcí, se kterým pracujeme, je nyní místo svazem algebrou.

Věta 14.5.12 (Stone *1937). *Nechť $X \subset (P, \rho)$ je kompaktní a nechť $\mathcal{A}(X)$ je algebra reálných funkcí spojitých na X. Odděluje-li algebra $\mathcal{A}(X)$ body X a obsahuje-li i konstantní funkci 1, je $\mathrm{cl}\,(\mathcal{A}(X)) = \mathcal{C}(X)$.*

Důkaz. Případ množiny X obsahující jediný bod je triviální, neboť všechny konstantní funkce na X tvoří již prostor $\mathcal{C}(X)$. Dále platí podle Lemmatu 14.5.8, že $\operatorname{cl}(\mathcal{A}(X))$ je algebra. Ta podle Lemmatu 14.5.10 obsahuje s každou funkcí f také funkci $|f|$, proto je dle Důsledku 14.5.11 svazem (a tedy i lineárním prostorem). Tvrzení pak již plyne ze Stoneovy Věty 14.5.7. Tím je důkaz reálné verze Stone-Weierstrassovy věty dokončen. □

Poznámka 14.5.13. V základním Příkladu 14.5.3 (2) musí existovat polynom p, který podmínku Lemmatu 14.5.4 nesplňuje. To je např. polynom $p(x) = x - (a+b)/2$, $x \in \mathbb{R}$, protože funkce $|p|$ není na $[\,a, b\,]$ restrikcí polynomu.

Příklady 14.5.14. 1. Triviálně platí: Algebra $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ všech spojitých funkcí na intervalu $[\,a, b\,]$ odděluje body intervalu $[\,a, b\,]$, neboť obsahuje např. funkci $f(x) = x$, $x \in [\,a, b\,]$. Uzávěr $\operatorname{cl}(\mathcal{C}([\,a, b\,]))$ je roven $\mathcal{C}([\,a, b\,])$.

2. Také algebra $\mathcal{P}([\,a, b\,])$ všech (restrikcí) polynomů na $[\,a, b\,]$ odděluje body $[\,a, b\,]$, je však vlastní podalgebrou $\mathcal{C}([\,a, b\,])$. Podle Weierstrassovy věty je jejím uzávěrem $\operatorname{cl}(\mathcal{P}([\,a, b\,]))$ algebra $\mathcal{C}([\,a, b\,])$.

3. Systém všech funkcí z $\mathcal{P}([\,a, b\,])$, které se anulují v bodě $(a+b)/2$, odděluje body $[\,a, b\,]$, avšak tato algebra obsahuje jedinou konstantní funkci na $[\,a, b\,]$, a to funkci $f \equiv 0$.

4. Snadno nahlédneme, že systém všech funkcí z $\mathcal{C}([\,a, b\,])$, které se anulují v bodě $(a+b)/2$, odděluje body $[\,a, b\,]$, a je to algebra $\mathcal{A}$, obsahuje však opět jedinou konstantní funkci $f \equiv 0$. Uzávěr této algebry obsahuje pouze funkce z $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ ležící v $\mathcal{A}$.

5. Systém $\mathcal{B}$ všech funkcí z $\mathcal{C}([\,a, b\,])$, které se anulují ve dvou různých bodech $x, y \in [\,a, b\,]$, je algebra, která však neodděluje body intervalu $[\,a, b\,]$.

6. Uzávěr $\operatorname{cl}(\mathcal{B})$ systému $\mathcal{B}$ z bodu 5 obsahuje pouze ty funkce z $\mathcal{C}([\,a, b\,])$, které leží v $\mathcal{B}$. Systém $\mathcal{P}$ všech *polynomů* z $\mathcal{B}$ obsahuje pouze jedinou konstantní funkci $f \equiv 0$, ale snadno lze nahlédnout, že $\operatorname{cl}(\mathcal{P}) = \mathcal{B}$ a je to algebra.

14.6 Další důležitá tvrzení

Ilustrovali jsme jistou nedostatečnost bodové konvergence pro přenášení některých vlastností na limitní funkci. Lepší schopnost přenášet „příjemné vlastnosti" funkcí má však stejnoměrná konvergence. Jedno z tvrzení, které matematicky dokumentuje toto vágní vyjádření, jsme dokázali v Kapitole 13 o metrických prostorech v Lemmatu 13.2.6. Nyní si analogických tvrzení dokážeme více.

Věta 14.6.1. *Nechť funkce f_n mají Riemannův integrál na intervalu $[\,a, b\,]$, nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $[\,a, b\,]$. Potom i funkce f má Riemannův integrál na $[\,a, b\,]$ a platí*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{R})\int_a^b f_n = (\mathcal{R})\int_a^b f\,. \tag{14.22}$$

Důkaz. V důkazu pracujeme pouze s $(\mathcal{R})$-integrály. Z $f_n \rightrightarrows f$ na $[\,a, b\,]$ plyne, že

$$a_n := \sup\big\{|f(x) - f_n(x)|\,;\ x \in [\,a, b\,]\big\} \to 0\,.$$

Proto k $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq k$ je $a_n < \varepsilon$. Zvolme takové $n \in \mathbb{N}$; pak je

$$f_n - \varepsilon \leq f \leq f_n + \varepsilon\,,$$

a tedy pro libovolné dělení $D \in \mathcal{D}([\,a, b\,])$ snadno dostaneme

$$s(f_n; D) - \varepsilon(b-a) \leq s(f; D) \leq S(f; D) \leq S(f_n; D) + \varepsilon(b-a)\,.$$

Odtud jednoduchou úpravou obdržíme

$$S(f; D) - s(f; D) \leq (S(f_n; D) - s(f_n; D)) + 2\varepsilon(b-a)\,.$$

Protože je $f_n \in \mathcal{R}([\,a, b\,])$, lze volit dělení $D \in \mathcal{D}([\,a, b\,])$ tak, že první člen na pravé straně je odhadnut např. číslem $\varepsilon(b-a)$. Z toho, že je $S(f; D) - s(f; D) \leq 3\varepsilon(b-a)$ plyne podle Věty 11.2.12, že i limitní funkce f má Riemannův integrál.

Dále platí

$$\Big|\int_a^b f - \int_a^b f_n\Big| \leq \int_a^b |\,f_n - f\,| \leq \|\,f_n - f\,\|_\infty \cdot (b-a)\,,$$

z čehož plyne vztah (14.22). □

Jádro důkazu Věty 14.1.5 o spojitosti a stejnoměrné konvergenci je patrně nejvíce zřejmé z obecnější věty, kterou si nyní dokážeme v kontextu MP. Připomeňme, že se záměnou limit jsme se setkali již např. při vyšetřování spojitosti „limitní funkce“.

Věta 14.6.2 (Moore 1900, Osgood 1897). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $x_0 \in P$ je jeho hromadný bod. Nechť dále $\{f_n\}$ je posloupnost (komplexních) funkcí na $P \setminus \{x_0\}$ a platí*

(1) $f_n \rightrightarrows f$ *na* $P \setminus \{x_0\}$,

(2) $f_n(x) \to a_n$ *pro* $x \to x_0$.

Potom též existují vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny.*

Důkaz. K $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq k$, $m, n \in \mathbb{N}$, a $x \in P \setminus \{x_0\}$, platí

$$(x \in P \setminus \{x_0\}) \Rightarrow (|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon)\,,$$

a tedy, po limitním přechodu $x \to x_0$, rovněž i $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$. Odtud vyplývá konvergence $\{a_n\}$. Položme $\lim a_n = a$. Dále platí

$$|\,f(x) - a\,| \leq |\,f(x) - f_n(x)\,| + |\,f_n(x) - a_n\,| + |\,a_n - a\,|\,.$$

Nyní lze volbou $n \in \mathbb{N}$ dosáhnout toho, že první a třetí člen na pravé straně nerovnosti je odhadnut pro všechna $x \in P \setminus \{x_0\}$ pomocí $\varepsilon/3$. Potom zvolíme $\delta > 0$ tak, že pro prstencové okolí $\mathcal{P}_\delta$ bodu x_0 v P platí

$$(x \in \mathcal{P}_\delta) \Rightarrow |f_n(x) - a_n| < \varepsilon/3\,,$$

z čehož už lehce dostaneme dokazované tvrzení. □

Důsledek 14.6.3. *Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že*

(1) $f_n \rightrightarrows f$ *na* $(c, c+\delta)$,

(2) $f_n(x) \to a_n$ *pro* $x \to c_+$.

Potom též existují vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to c_+} f(x)$ *a jsou si rovny.*

Poznámka 14.6.4. Obdobná podmínka „funguje“ i pro případ $x \to c_-$, jestliže interval v (1) bude tvaru $(c-\delta, c)$ a obecně s libovolným prstencovým okolím $\mathcal{P}(c)$ bodu c, na němž je $f_n \rightrightarrows f$. To je důležité pro lokální vlastnosti (spojitost, diferencovatelnost apod.), neboť někdy stačí ověřovat stejnoměrnou konvergenci pouze *lokálně*. Promyslete si důkaz Věty 14.1.5, založený na právě dokázané Moore-Osgoodově větě.

Věta 14.6.5 (Weierstrass 1861). *Nechť funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, mají vesměs vlastní derivaci všude v intervalu (a, b), a nechť*

(1) *existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje,*

(2) *pro derivace f_n' platí $f_n' \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na (a, b).*

Potom též $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na (a, b) a označíme-li $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in (a, b)$, má f na (a, b) derivaci f' a platí

$$f_n' \rightrightarrows_{\text{loc}} f' \quad na \quad (a, b)\,.$$

Důkaz. Důkaz využívá zejména Moore-Osgoodovu větu (Věta 14.6.2) a je složitější pouze formálně. Postupně dokážeme, že z předpokladů plyne pro vhodně zvolený interval $[\,c, d\,] \subset (a, b)$

$$f_n \rightrightarrows \text{ na } [\,c, d\,] \quad \text{a potom pro} \quad f := \lim_{n\to\infty} f_n \quad \text{též} \quad f_n' \rightrightarrows_{\text{loc}} f' \text{ na } (a, b)\,.$$

Pro práci s lokálně stejnoměrnou konvergencí využijeme tvrzení Věty 14.1.10 a zvolíme (zatím libovolně) nedegenerovaný interval $[\,c, d\,] \subset (a, b)$. Pro $x, t \in [\,c, d\,]$, $x \neq t$, platí podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.18) pro funkci $(f_m - f_n)$, přičemž v čitateli zlomku ještě přehayujeme pořadí členů

$$\frac{(f_m(t) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_n(x))}{t - x} = (f_m'(\xi) - f_n'(\xi))\,, \tag{14.23}$$

kde ξ leží mezi body t a x, tj. v (c, d). Odtud snadno dostaneme

$$|(f_m(t) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_n(x))| \leq (d - c)\,|f_m'(\xi) - f_n'(\xi)|\,. \tag{14.24}$$

Předpokládejme nyní, že platí $x_0 \in [\,c, d\,]$. Z odhadu (14.24) plyne splnění Bolzano-Cauchyho podmínky pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ na $[\,c, d\,]$, neboť platí

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|\,,$$

a proto je

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le (d-c)|f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \,.$$

Z $f'_n \rightrightarrows$ na $[\,c,d\,]$ a konvergence posloupnosti $\{f_n(x_0)\}$ dostáváme $f_n \rightrightarrows$ na $[\,c,d\,]$; to však platí pro každý interval $[\,c,d\,] \subset (a,b)$ obsahující x_0, a proto podle Věty 14.1.10 je $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ na (a,b). Zvolme nyní pevně interval $[\,c,d\,]$, bod $x \in [\,c,d\,]$ a definujme

$$\Phi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x}\,, \quad \Phi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t-x}$$

pro $t \in [\,c,d\,] \setminus \{x\}$. Použijeme opět rovnost (14.23) a obdržíme z ní

$$\left| \frac{(f_m(t) - f_m(x))}{t-x} - \frac{(f_n(t) - f_n(x))}{t-x} \right| \le |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)|\,;$$

z této nerovnosti dostaneme Bolzano-Cauchyho podmínku pro $\{\Phi_n\}$, takže je

$$\Phi_n(t) \rightrightarrows \text{ na } [\,c,d\,] \setminus \{x\}\,.$$

Nyní se využije Věty 14.6.2 na okolí bodu $\{x\}$ v $[\,c,d\,]$. Zřejmě $\Phi_n(t) \rightrightarrows \Phi(t)$ na $[\,c,d\,] \setminus \{x\}$ a pro $t \in [\,c,d\,] \setminus \{x\}$, $t \to x$ dostaneme

$$\lim_{t\to x} \Phi_n(t) = f'_n(x)\,, \quad f'(x) = \lim_{t\to x} \Phi(t) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Příklad 14.6.6. Předcházející věta ukazuje, že při derivování posloupnosti funkcí „člen po členu“ není situace jednoduchá. Položme

$$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}\,, \qquad g_n(x) = \sin\frac{x}{n^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Potom platí $f_n \to 0$ a $g_n \to 0$ na $\mathbb{R}$. Je však $|f_n(x) - 0| \le 1/n \to 0$, a proto $f_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$, ale zároveň je $|g_n(n^2\pi/2) - 0| = 1$, a tedy *neplatí* $g_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$. Všimněte si, že všechny funkce jsou dokonce z $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Pro derivace f'_n a g'_n dostáváme

$$f'_n(x) = n\cos(n^2 x)\,, \quad g'_n(x) = \frac{1}{n^2}\cos\frac{x}{n^2}\,,$$

a tedy neplatí $f'_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, avšak platí $g'_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Z Věty 14.6.5 snadno dostaneme, že $g_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} 0$ na $\mathbb{R}$, protože $g_n(0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\{g_n(0)\}$ konverguje.

Příklad 14.6.7. Nežli budeme dokazovat následující větu, uvedeme další ilustrativní příklad pro Newtonův integrál. Definujme

$$f(x) := (1 - |x|)^+ = \max(1 - |x|, 0)\,.$$

Pomocí f definujeme posloupnost funkcí $\{g_n\}$

$$g_n(x) := (1/n) f(x/n)\,, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Zřejmě existují Newtonovy integrály z g_n přes $\mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jsou vesměs rovny 1. I když platí $g_n \rightrightarrows 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \neq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lim_{n\to\infty} g_n(x))\,\mathrm{d}x\ .$$

Příklad ukazuje důležitost předpokladu omezenosti intervalu v následující větě, která je analogií Věty 14.6.1.

Věta 14.6.8. *Nechť* $f_n \rightrightarrows f$ *na* omezeném *intervalu* (a,b), *nechť* f_n *mají primitivní funkce na* (a,b) *a nechť* $f_n \in \mathcal{N}(a,b)$, *tj.* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *mají konečný Newtonův integrál na* (a,b). *Potom existuje primitivní funkce k* f *na* (a,b), *Newtonův integrál z* f *přes* (a,b) *konverguje a je*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{N})\!\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\!\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{14.25}$$

Důkaz. Označme F_n primitivní funkce k f_n, přičemž F_n volme tak, aby pro pevně zvolený bod $x_0 \in (a,b)$ platilo $F_n(x_0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Zopakujeme úvahu z důkazu předchozí věty; platí

$$\begin{aligned}|F_m(x) - F_n(x)| &= |(F_m(x) - F_n(x)) - (F_m(x_0) - F_n(x_0))| \leq \\ &\leq |f_m(\xi) - f_n(\xi)| \cdot (b-a)\,,\end{aligned}$$

kde jsme odhadli rozdíl pomocí Lagrangeovy věty (Věta 5.2.18). Bod ξ leží mezi x a x_0, tedy v (a,b) a rozdíl $|x - x_0|$ jsme odhadli délkou (omezeného dle předpokladů!) intervalu (a,b). Použijeme ještě předchozí větu na funkce F_n a obdržíme pro $F := \lim_{n\to\infty} F_n$ rovnost $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$. Na koncové body a, b uvažovaného intervalu aplikujeme Větu 14.6.2, čímž dostaneme pro $x \to a_+$, resp. $x \to b_-$, vztahy

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a+) = \lim_{x\to a+} F(x) = F(a+)\,, \quad \lim_{n\to\infty} F_n(b-) = \lim_{x\to b-} F(x) = F(b-)\,.$$

Odtud snadno dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} (F_n(b-) - F_n(a+)) = F(b-) - F(a+) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

což je žádaná rovnost (14.25). □

Poznámka 14.6.9. Čtenář snadno nahlédne, že i když jsme pro zjednodušení pracovali v předcházejících větách pouze s primitivními funkcemi, jejich tvrzení platí i pro zobecněné primitivní funkce. Věty jsme vyslovili pro posloupnosti. Přihlédneme-li ke vztahu

$$\sum f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} \text{ na } (a,b) \iff s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \rightrightarrows_{\text{loc}} \text{ na } (a,b)\,,$$

dostaneme odtud snadno obdobná tvrzení pro řady funkcí. Proto následující tvrzení dokazovat nebudeme.

Věta 14.6.10. *Nechť $\sum f_k$ je řada funkcí majících vesměs vlastní derivaci na (a, b) a nechť existuje bod $x_0 \in (a, b)$ tak, že $\sum f_k(x_0)$ konverguje. Jestliže platí $\sum f'_k \rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ na (a, b), je rovněž $\sum f_k \rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ na (a, b) a pro $s := \sum f_k$ platí*

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)\,, \quad x \in (a, b)\,.$$

Zkráceně, i když ne zcela přesně, říkáme, že „řadu $\sum f_n$ lze derivovat člen po členu“. Podobná věta platí pro integrál, avšak jako u Riemannova integrálu musíme v případě $(\mathcal{N})$-integrálu pracovat s *omezeným* intervalem (a, b). Vyslovíme ji pro Newtonův integrál.

Věta 14.6.11. *Nechť $\sum f_k$ je řada funkcí newtonovsky integrovatelných na* omezeném *intervalu o koncových bodech a, b, a $\sum f_k \rightrightarrows$ na (a, b). Označíme-li $f := \sum f_k$, je funkce f newtonovsky integrovatelná a je*

$$(\mathcal{N})\int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{N})\int_a^b f_k\,.$$

Poznámka 14.6.12. Analogická věta platí i pro Riemannův integrál.

Je přirozené, že čtenáře může napadnout otázka, jak souvisí absolutní a stejnoměrná konvergence. Pozitivní výsledek ve speciálním případě by mohl čtenáře svést k mylným domněnkám.

Příklad 14.6.13 (Pringsheim 1899). Vyšetřeme funkci f definovanou součtem řady

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)^n\,.$$

Zřejmě pro všechna $x \neq 0$ platí rovnost $f(x) = (1+x^2)^{-1}$, což po vytknutí prvého zlomku dostaneme snadno sečtením geometrické řady. Dosazením též snadno ověříme $f(0) = 0$. Protože jde o řadu s nezápornými členy, konverguje *absolutně* všude v $\mathbb{R}$. Jelikož jde o řadu spojitých funkcí, jejíž součet je evidentně funkce nespojitá v bodě 0, řada *nekonverguje stejnoměrně* na $\mathbb{R}$, ani např. na intervalu $[\,0, 1\,]$. Konvergence je však lokálně stejnoměrná na $(\,0, 1\,]$.

Příklad 14.6.14. Vyšetřeme podrobněji řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^2+n}{n^2}\,.$$

Protože platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \le \frac{x^2+n}{n^2} = \Big|(-1)^{n+1}\frac{x^2+n}{n^2}\Big| =: a_n\,,$$

řada nekonverguje absolutně *v žádném bodě* $x \in \mathbb{R}$. Bodová konvergence řady je však zřejmá z Leibnizova kritéria (viz Věta 3.3.1) a naprosto analogicky jako tam dostáváme pro $m > n$ obecně odhad

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leq a_{n+1}(x)\,.$$

Vidíme tedy, že pro (lokálně) stejnoměrnou konvergenci řady se střídavými znaménky $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n(x)$ stačí dokázat (lokálně) $a_n \rightrightarrows 0$. V našem konkrétním případě platí

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{x^2+n}{n^2}\right| \leq \frac{M^2}{n^2} + \frac{1}{n} \leq \frac{M^2+1}{n}, \quad \text{pro všechna } x,\ |x| \leq M\,,$$

takže řada *konverguje lokálně stejnoměrně* na $\mathbb{R}$.

Předcházející dvojice příkladů dostatečně přesvědčivě ukazuje, že spolu stejnoměrná a absolutní konvergence v obecném případě příliš nesouvisí. To ostatně ilustrují i neabsolutně konvergentní číselné řady; zároveň ukazují další směr postupu.

14.7 Další kritéria

Připomeňme nejprve Abelovu parciální sumaci, se kterou jsme se již setkali.

Lemma 14.7.1 (Abel 1826). *Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti komplexních čísel, $p, q \in \mathbb{Z}$, $-1 \leq p < q$. Označme*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \quad s_{-1} = 0\,. \tag{14.26}$$

Potom

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p+1}^{q} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_q b_{q+1} - s_p b_{p+1}\,. \tag{14.27}$$

Důkaz. Stručně připomínáme: pro $k \geq 0$ je

$$a_k b_k = (s_k - s_{k-1})\, b_k = s_k(b_k - b_{k+1}) + s_k b_{k+1} - s_{k-1} b_k\,,$$

a tyto rovnosti „sečteme“ pro $k = p+1, p+2, \ldots q$, čímž obdržíme dokazovanou rovnost (14.27). □

Věta 14.7.2 (Abel). *Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti omezených komplexních funkcí na množině $X \neq \emptyset$, a nechť s_n jsou definovány pomocí* (14.26). *Potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ konverguje stejnoměrně na X, je-li splněna alespoň jedna z následujících podmínek* (*v případech označených* *) *jsou samozřejmě funkce b_k, $k \in \mathbb{N}_0$, reálné*) *:*

(1) $\{s_n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *je systém stejně omezených funkcí na X a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\, b_k - b_{k+1}\,| \rightrightarrows \text{ na } X, \quad b_k \rightrightarrows 0 \text{ na } X; \tag{14.28}$$

(2) $\{s_n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *je systém stejně omezených funkcí na* X *a*

$$\{b_k\} \text{ je monotónní posloupnost }^{*})\ \text{ a } \quad b_k \rightrightarrows 0 \text{ na } X\,; \tag{14.29}$$

(3) $s_n \rightrightarrows$ *na* X *a systémy* $\bigl\{ \sum_{k=0}^{n} |\, b_k - b_{k+1}\,|\,;\, n \in \mathbb{N}_0 \bigr\}$ *a* $\{b_k\,;\, k \in \mathbb{N}_0\}$ *jsou oba stejně omezené na* X;

(4) $s_n \rightrightarrows$ *na* X, $\{b_k\}$ *je monotónní posloupnost* $^{*})$ *a systém* $\{b_k\,;\, k \in \mathbb{N}_0\}$ *je stejně omezený na* X.

Poznámka 14.7.3. Předcházející věta je označena jako Abelova, ač její jednotlivé části bývají spojovány se jmény Niels Henrik Abel (1802 - 1829), Pierre Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), Paul David Du Bois-Reymond (1831 – 1889) a Richard Julius Wilhelm Dedekind (1831 – 1916) (viz [13], str. 421, odkud je též převzat důkaz této věty). Označení je přirozené v tom smyslu, že důkazy všech jednotlivých částí jsou založeny na Abelově parciální sumaci.

Důkaz. Využijeme Bolzano-Cauchyho podmínku pro stejnoměrnou konvergenci *funkcí*. Budeme užívat označení $\|\cdot\|$ pro supremovou normu vzhledem k X. V každém z případů (1) – (4) existují $A, B \in \mathbb{R}$ tak, že je

$$|s_k(x)| \le A\,, \quad |b_k(x)| \le B$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a $x \in X$; uvažte, že jsou-li funkce a_k omezené na X, jsou omezené i s_k na X a $s = \lim s_k$ je rovněž omezená na X. Dále platí odhad $\|s_k\| \le \|s - s_k\| + \|s\|$. Z (14.27) dostaneme

$$\Bigl|\sum_{k=p+1}^{q} a_k(x)\, b_k(x)\Bigr| \le A \sum_{k=p+1}^{q} |\, b_k(x) - b_{k+1}(x)| + A\bigl(\, |b_{q+1}(x)\| + \|\, b_{p+1}(x)|\,\bigr)\,, \tag{14.30}$$

pro všechna $x \in X$ a $0 < p < q$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Protože každý ze sčítanců na pravé straně nerovnosti (14.30) lze odhadnout volbou dostatečně velkých $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, shora daným ε, plyne odtud $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \rightrightarrows$ na X v případě (1).

Při splnění podmínek (2) mají všechny rozdíly $b_k - b_{k+1}$ buď kladné znaménko nebo mají všechny záporné znaménko. Pak je ale

$$\begin{aligned}\sum_{k=p+1}^{q} |\, b_k(x) - b_{k+1}(x)\,| &= \Bigl|\sum_{k=p+1}^{q} \bigl(b_k(x) - b_{k+1}(x)\bigr)\Bigr| = \\ &= \bigl|\, b_{q+1} - b_{p+1}\bigr| \le \|\, b_{q+1}\,\| + \|\, b_{p+1}\,\| \le 2B\,,\end{aligned} \tag{14.31}$$

přičemž odtud a z (14.30) vyplyne odhad

$$\Bigl|\sum_{k=p+1}^{q} a_k(x) b_k(x)\Bigr| \le 2A\,\bigl(\|\, b_{q+1}\,\| + \|\, b_{p+1}\,\|\bigr)\,,$$

a tedy i Bolzano-Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady; platí tedy $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \rightrightarrows$ na X i v případě (2).

Jestliže $s_k \rightrightarrows$ na X, položíme $s = \lim s_k$. Výpočtem ověříme rovnost (nyní však již pracujeme s funkcemi, pouze argument x vynecháváme)

$$0 = \sum_{k=p+1}^{q} s(b_k - b_{k+1}) + sb_{q+1} - sb_{p+1} \,,$$

a tuto rovnost „odečteme“ od (14.27). Obdržíme tak

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k = \sum_{p+1}^{q} (s_k - s)(b_k - b_{k+1}) + (s_q - s) b_{q+1} - (s_p - s) b_{p+1} \,. \qquad (14.32)$$

Označme ještě $C_p = \sup\{\|s_k - s\| \,;\, k \geq p\}$; zřejmě $C_p \to 0$ pro $p \to \infty$. Užitím (14.32) dostaneme

$$\Big| \sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k \Big| \leq \sum_{k=p+1}^{q} C_p \,|\, b_k - b_{k+1} \,| + C_p \, B + C_p \, B \leq C_p \,(M + 2B) \to 0 \,,$$

kde M je horní odhad částečných součtů $\sum_{k=0}^{n} |\, b_k - b_{k+1} \,|$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (a všechna $x \in X$). Tak opět dostáváme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \rightrightarrows$ na X v případě (3).

V posledním případě (4) uvážíme, že odhad (14.31) dává „stejnoměrný odhad“ pro částečné součty řady $\sum_{k=0}^{n} |\, b_k - b_{k+1} \,|$ hodnotou $2B$, čímž se tento případ převede na případ předcházející. $\square$

Poznámky 14.7.4. 1. V předcházející větě vystupují dvě posloupnosti funkcí, avšak jedna či obě tyto posloupnosti mohou mít vesměs konstantní členy. Je proto použitelná i na řady typu $\sum f_k \, g_k$, $\sum c_k \, f_k$, $\sum c_k \, d_k$, kde f_k, g_k jsou funkce a c_k, d_k jsou z $\mathbb{C}$ či $\mathbb{R}$.

2. Každou řadu typu $\sum u_k$ lze vyjádřit ve tvaru $\sum a_k b_k$ mnoha způsoby. Potenciálně lze tedy užít Větu 14.7.2 na *jakoukoli* řadu, ale věta nedává žádný návod, jak takovou vhodnou faktorizaci obecně získat.

3. Sama Věta 14.7.2 je složitější, je proto zbytečné ji užívat v případech, kdy k cíli vedou prostředky mnohem jednodušší, např. Weierstrassův M-test.

Příklady 14.7.5. 1. Je-li $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ monotónní posloupnost reálných čísel, $b_k \to 0$, pak pro každé $0 < \delta < 2$ mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ konverguje stejnoměrně na množině $X_\delta = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| \leq 1, \, |z-1| \geq \delta\}$. Položíme-li totiž $a_k(z) = z^k$, potom pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $z \in X_\delta$ je

$$|\, s_n(z) \,| = \Big| \sum_{k=0}^{n} z^k \Big| = \Big| \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \Big| \leq \frac{2}{|\, z - 1 \,|} \leq \frac{2}{\delta} \,,$$

a můžeme tedy použít Větu 14.7.2, (2), ze které vyplyne tvrzení.

2. Pro $|z| = 1$, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ je $|z-1| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| \cdot \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}\right| = 2|\sin(t/2)|$. Proto pro $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ je $|z-1| \geq 2|\sin(\delta/2)|$, a tedy řady (reálná a imaginární část řady z předcházejícího příkladu pro $|z| = 1$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(kx)\,, \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

konvergují stejnoměrně na intervalu $[\delta, 2\pi - \delta]$. S analogickými řadami budeme ještě dále pracovat.

3. Doporučujeme čtenáři k samostatnému rozmyšlení, že podobně i řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k \cos(kx)\,, \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k \sin(kx)$$

konvergují stejnoměrně na intervalu $[-\pi + \delta, \pi - \delta]$.

4. Zacházíme-li s mocninnými řadami, je přirozené si všimnout speciálního případu řady z předcházejícího příkladu. Řada s $b_n = 1/n$, tj.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

konverguje pro $z \in (-1, 1)$ k funkci $-\log(1-z)$ a zřejmě konverguje stejnoměrně na každé množině X_δ z předcházejícího příkladu. Je proto její součet přirozené považovat za „komplexní logaritmus“ definovaný na této množině. Odtud dostaneme např. rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2\,.$$

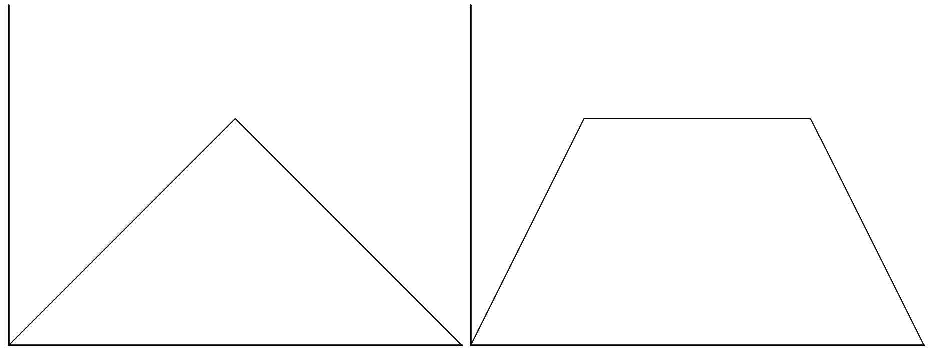
Příklad 14.7.6. V Příkladu 11.5.1 jsme sestrojili „pilovitou funkci“ f, která je lineární na každém intervalu $[k-1, k]$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Funkce f je 2-periodická a spojitá na $\mathbb{R}$, přičemž platí $0 \leq f \leq 1$. Pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ je $f'(x) = \pm 1$. Položme $f_k(x) = f(2^k x)/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, a definujme

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Každá z funkcí f_k je spojitá a řada $\sum f_k$ konverguje stejnoměrně podle Věty 14.3.5, neboť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$|f_k(x)| \leq 2^{-k} \quad \text{a platí} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty\,.$$

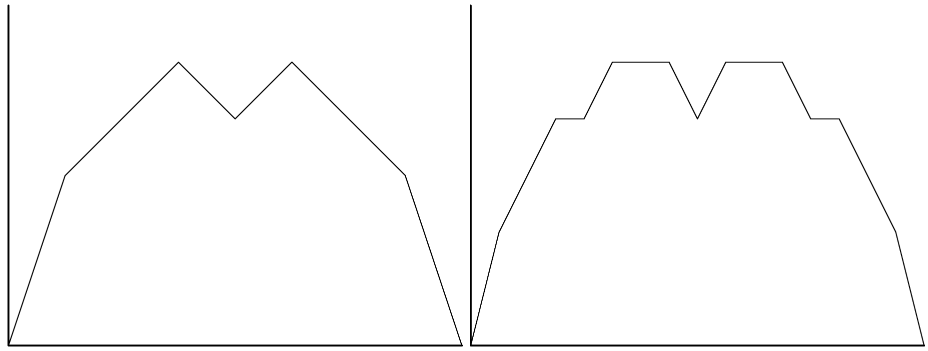
Obrázky Obr. 14.3 – 14.5 zachycují prvních sedm částečných součtů řady na intervalu $[0, 1]$; funkce g je zřejmě 1-periodická funkce, obrázky proto dávají dobrou představu o chování řady na $\mathbb{R}$.



Obr. 14. 3.

Funkce g je tedy spojitá na $\mathbb{R}$ podle Věty 14.1.5. Pro $k \in \mathbb{N}$ je funkce f_k lineární na intervalech $[\,(s-1)/2^k, s/2^k\,]$ pro každé $s \in \mathbb{Z}$ a uvnitř těchto intervalů, kterým budeme říkat intervaly řádu k, platí $f_k'(x) = \pm 1$; zároveň je funkce f_k periodická s periodou 2^{1-k}. Zvolme libovolně $x \in \mathbb{R}$. Dokážeme, že $g'(x)$ není vlastní, tj. že neexistuje vlastní limita

$$\lim_{y \to x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \,.$$



Obr. 14. 4.

Protože x leží vždy alespoň v jednom z intervalů I_n řádu n, lze zvolit posloupnost do sebe zařazených intervalů $I_{n+1} \subset I_n$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že $x \in I_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. V každém z intervalů I_n o délce 2^{-n} existuje bod x_n tak, že $|x_n - x| = 2^{-(n+1)}$. Zřejmě platí $x_n \to x$ a

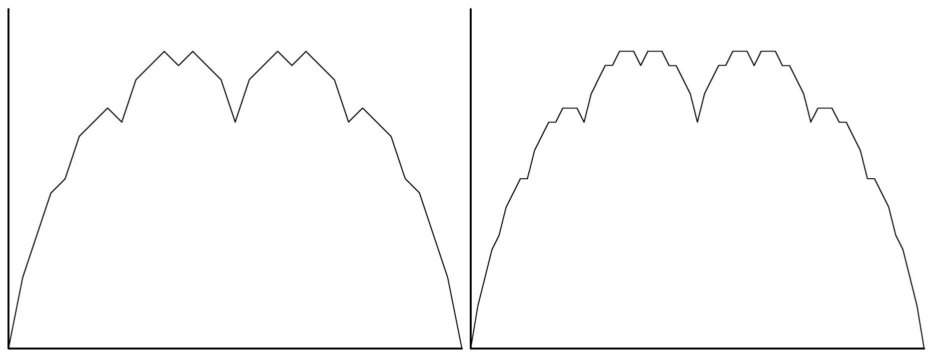
$$\frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = 0$$

pro všechna $k > n + 1$. Proto je

$$\frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \sum_{k=1}^{n+1} (\pm 1)\,,$$

kde sčítáme $(n+1)$ nenulových hodnot, z nichž každá je rovna $+1$ nebo -1. Hodnota posledního součtu je tedy liché číslo pro n sudé a sudé číslo pro n liché, zruší se vždy jen sudý počet sčítanců. Proto posloupnost čísel $(g(x_n) - g(x))/(x_n - x)$ obsahuje pouze celá čísla a *není cauchyovská*, nemůže tedy pro $n \to \infty$ konvergovat.

Vzhledem k volbě x jsme tak sestrojili funkci $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, která nemá vlastní derivaci v žádném bodě z $\mathbb{R}$. Popsaný důkaz je modifikací postupu, který se v literatuře označuje jako *Waerdenův příklad spojité funkce bez derivace.* Funkci tohoto typu vyšetřoval již r. 1903 TEIJI TAKAGI (1875 – 1960); viz též [13], str. 174. Ač se Waerdenův příklad liší od Takagiho jen nepodstatně, metoda důkazu je založena na triku, který v případě vyšetřované funkce nelze použít.



Obr. 14. 5.

Sčítáním vhodně volených funkcí lze sestrojit zajímavé příklady; vyložený aparát umožňuje užívat i nekonečné součty (řady) funkcí a tak „kumulovat“ body zvláštního charakteru.

Příklad 14.7.7. Označme $\{r_n\}$ *prostou* posloupnost *všech* racionálních čísel z intervalu $(0,1)$ a položme $h_n(x) = \operatorname{sgn}(x - r_n)$, $x \in (0,1)$. Pak je funkce

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, h_n(x)\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

součtem neklesajících funkcí, a je tedy rovněž neklesající. Řada je podle Weierstrassova M-testu stejnoměrně konvergentní. Proto pro všechna $y \in (0,1)$ platí

$$\lim_{x\to y+} h(x) = \lim_{x\to y+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, h_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to y+} \frac{1}{2^n}\, h_n(x)$$

a podobně i pro $\lim_{x\to y-} h(x)$. Je zřejmé, že funkce h je spojitá v každém iracionálním bodě $y \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$, neboť každá funkce h_n má v těchto bodech stejné jednostranné limity. V každém bodě $y \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ je nespojitá, neboť v součtu existuje *právě jedna* funkce h_l, pro kterou je $\lim_{x\to y-} h_l < \lim_{x\to y+} h_l$. Protože mezi každými dvěma body $u, v \in (0,1)$, $u < v$, existuje alespoň jedno racionální číslo, je h rostoucí funkce na $(0,1)$, která je nespojitá ve všech bodech nekonečné spočetné množiny $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ husté v $(0,1)$.

Příklad 14.7.8. Je-li $\{r_n\}$ opět prostá posloupnost všech racionálních čísel z intervalu $(0,1)$, $g_n(x) = |x - r_n|$, $x \in (0,1)$, pak je funkce

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, g_n(x)\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

konvexní, avšak v každém bodě r_n, $n \in \mathbb{N}$, je $g'(r_n-) < g'(r_n+)$, a tedy $g''(x)$ neexistuje pro žádné $x \in (0,1)$. Snadno zjistíme, že g je součtem stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí, a je tedy spojitá. Je konvexní, neboť je součtem konvexních funkcí a má v každém bodě jednostranné derivace. Protože

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, \frac{g_n(x) - g_n(y)}{x - y}$$

a řada vpravo přitom opět konverguje stejnoměrně, lze jednostranné derivace funkce g spočítat jako součty jednostranných derivací funkcí g_n. Označíme-li

$$h_n^r(y) := \lim_{x\to y+} \operatorname{sgn}(\, x - r_n\,)\,, \quad h_n^l(y) := \lim_{x\to y-} \operatorname{sgn}(\, x - r_n\,)\,, \quad y \in (0,1)\,,$$

pak je

$$g'_+(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, h_n^r(x)\,, \quad g'_-(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, h_n^l(x)\,, \quad x \in (0,1)\,.$$

a je $g'_-(x) < g'_+(x)$ pro všechna $x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$; v ostatních bodech $g'(x)$ existuje.

Příklad 14.7.9 (Lerch 1888). Je-li $\{r_n\}$ opět prostá posloupnost všech racionálních čísel z intervalu $(0,1)$,

$$f_n(x) := (x - r_n)^2 \sin \frac{1}{x - r_n}\,, \quad f_n(r_n) = 0\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

pak funkce

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

je součtem stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí (používáme Weierstrassův M-test), a proto je spojitá na intervalu $(0,1)$. Pro derivace platí

$$f_n'(x) = 2(x - r_n) \sin \frac{1}{x - r_n} - \cos \frac{1}{x - r_n}\,, \quad f_n'(r_n) = 0\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

tedy sčítanci mají všude na intervalu $(0,1)$ vlastní derivaci, tyto derivace jsou omezené, a proto rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n' \rightrightarrows$ na $(0,1)$; použili jsme opět M-test, z něhož stejnoměrná konvergence vyplývá. V každém bodě $x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ jsou vesměs všechny f_n' spojité, a tedy i f' je spojitá v x. Stejnou úvahu lze aplikovat na $f' - f_n'$ v bodě r_n, avšak f_n' *není spojitá* v bodě r_n. Tak jsme získali spojitou funkci f s *velmi nespojitou* derivací f' (je nespojitá ve všech bodech množiny $\mathbb{Q} \cap (0,1)$).

Příkladů podobného typu lze nalézt mnohem více, uvedli jsme jen některé pro pochopení principu.

Historické poznámky 14.7.10. Pojem stejnoměrné konvergence byl obtížně zvládnutelný i pro špičkové matematiky minulého století. Tak např. Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) „dokázal“, že součet konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá funkce (protipříklad podal Abel v r. 1826). Někteří historikové interpretují Cauchyho důkazy jako použití metod nestandardní analýzy a tak dokazují, že Cauchyho nelze ze záměny bodové a stejnoměrné konvergence vinit. Odhlédneme-li od práce z r. 1841 o funkcích komplexní proměnné, kterou napsal Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) (otištěna 1894) ještě jako gymnaziální profesor, publikovali r. 1848 nezávisle poměrně cenné, ne však zcela jasné, příspěvky k problému spojitosti součtu řady spojitých funkcí Philipp L. Seidel (1821 – 1896) a George Gabriel Stokes (1819 – 1903). Cauchy později svou práci z r. 1821 opravil a současně r. 1857 definoval stejnoměrnou konvergenci. Weierstrass pak r. 1861 dokázal tentýž výsledek o spojitosti limity posloupnosti spojitých funkcí spolu s Větou 14.6.5 o derivování (za vcelku nepodstatně silnějších předpokladů).

Jak již bylo jednou zmíněno, vyvíjely se představy o derivaci relativně pomalu; při jejich studiu je nutné vždy pečlivě zkoumat i soudobé představy o jiných pojmech (např. o funkci, její spojitosti apod.). Je známo, že Bernhard Riemann (1826 – 1866) již v roce 1854 uváděl na přednáškách jako příklad funkci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{nx\}}{n^2}$$

(zde $\{\dots\}$ značí funkci „lomená (zlomková) část“, tj. $\{x\} = x - [x]$; příklad byl publikován v roce 1867). Tato funkce je *nespojitá* na husté podmnožině $\mathbb{R}$, má však Riemannův integrál např. přes interval $[0,1]$. Nejpozději kolem roku 1861 rovněž na přednáškách uváděl příklad funkce

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}\,, \tag{14.33}$$

která neměla mít v žádném bodě vlastní derivaci (všimněte si, že přitom sčítáme funkce třídy $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$).

Weierstrass ještě v roce 1872 napsal, že i přední matematici jako např. Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Cauchy i Pierre Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) patrně plně akceptovali soudobou představu, že derivace spojité funkce nemusí existovat (nebo být nevlastní) jen na izolované množině bodů. Když se Weierstrass snažil dokázat, že Riemannem definovaná funkce g z (14.33), resp. (14.7), nemá nikde derivaci, ztroskotal. Posléze však přesto dokázal sestrojit jinou *spojitou funkci h na $\mathbb{R}$, která nemá v žádném bodě vlastní derivaci.* Definoval ji podobným způsobem jako Riemann, a to jako součet řady

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)\,,$$

kde b je liché číslo, $b > 1$ a $0 < a < 1$; přitom předpokládal, že platí $ab > 1 + (3/2)\pi$ [4]).

Jádro věty o spojitosti a dalších vět o záměně limit popsal William Fogg Osgood (1864 – 1943) v práci z r. 1897. Tím patrně završil cestu k chápání pojmu stejnoměrné konvergence a jejího významu pro věty, které v sobě skrývají „záměnnost“. U nás je užíván obvykle název *Moore-Osgoodova věta*.

Weierstrassův příklad funkce h publikoval v r. 1875 Paul David Du Bois Reymond (1831 – 1889). Weierstrass o příkladu referoval již 18. 7. 1872, ale publikoval ho až r. 1880. Je poučné se u této problematiky ještě zastavit. Teprve v r. 1918 se podařilo Hardymu dokázat, že Riemannem definovaná funkce g z (14.33), *nemá* derivaci ve všech iracionálních násobcích čísla π a taktéž i v *některých* racionálních násobcích π. Avšak v r. 1970 (!) ukázal J. Gerver, že existují body, v nichž g *má* vlastní derivaci (!) a o rok později podal jejich úplnou charakteristiku; viz [6].

Weierstrassův příklad byl přijímán s rozpaky. Je znám například výrok, jehož autorem je Charles Hermite (1822 – 1901), který v dopise Thomasovi-Janu Stieltjesovi (1856 – 1894) napsal o spojitých funkcích, které nemají nikde derivaci: *Ale tyto vývody, jakkoli jsou elegantní, jsou postiženy klatbou* (...)*. Se zděšením a hrůzou se odvracím od té politováníhodné rány, kterou nám zasadily tyto spojité funkce* (...). K funkcím podobných vlastností dospěli Charles Cellérier (1818 – 1889) kolem r. 1860 a ne později než r. 1834 Bernard Bolzano (1781 – 1848). Bolzanova konstrukce je geometrické povahy, Cellérier pracoval s řadou funkcí. Je vcelku pochopitelné, že přesné vyšetření (ne)diferencovatelnosti pro tyto funkce bylo provedeno až později. Objev Bolzanovy funkce byl značně stimulující pro české matematiky; učinil ho středoškolský profesor Martin Jašek (1879 – 1945), který ve třicátých letech vytvořil fotodokumentaci těch Bolzanových rukopisů, které byly uloženy ve vídeňském archívu; srovnej [7].

Již jsme se zmínili o konstrukci složitých funkcí pomocí řad a o prioritě Bernarda Bolzana, který si nejen jako první uvědomil, že spojité funkce mohou mít mnoho bodů,

---

[4]) Později v r. 1916 dokázal Gotfried Harold Hardy (1877 – 1947), že stačí předpokládat $0 < a < 1$ a $ab \geq 1$.

ve kterých derivace neexistuje, ale funkci tohoto typu i jako první popsal. Viděli jsme, jak lze metodou kategorií existenci „spojitých funkcí bez derivace“ dokázat, příklady konkrétních funkcí této vlastnosti jsou však vždy nutně netriviální. Patrně nejjednodušší příklad, který je v současné době znám, je spojován se jménem BARTEL LEENDERT VAN DER WAERDEN (1903 – 1996), i když Waerden pouze reprodukoval řešení úlohy o nediferencovatelných funkcích, které podali HEYTING a BUSEMAN. Již před jeho objevením na konci 30. let tohoto století existovaly „tovární“ postupy na konstrukci funkcí tohoto typu, bylo jich více a byly považovány za vcelku standardní. Příklad 14.7.6 je modifikovaným příkladem Waerdenovým, náleží však zřejmě Takagimu; viz např. [13], str. 174. Protože platí tvrzení, že *monotónní funkce na intervalu* $(0,1)$ *má v tomto intervalu derivaci všude až na množinu Lebesgueovy míry 0*, je každý příklad spojité funkce bez derivace na intervalu $(0,1)$ i příkladem funkce, která není monotónní v žádném intervalu $(a,b) \subset (0,1)$.

Další příklady ilustrují metodu, které se někdy říká *metoda kondenzace singularit.* Pochází od HERMANA HANKELA (1839 – 1873); k dokonalosti ji dovedl ULISSE DINI (1845 – 1918). Příklad 14.7.9 pochází od MATYÁŠE LERCHA (1860 – 1922) z r. 1888; viz [9]. Za zmínku stojí i fakt, že i před Jaškovým objevem byla tato problematika u nás populární. Jeden z prvních přehledných článků s touto problematikou je [5].

Dá se dokázat, že spojitých funkcí, které nemají v žádném bodě vlastní derivaci, je v jistém smyslu v prostoru $\mathcal{C}([a,b])$ většina: ty, které mají alespoň v jednom bodě vlastní derivaci, tvoří množinu 1. kategorie v Baireově smyslu (viz Kapitola 13). Důkaz existence spojité nikde nediferencovatelné funkce metodou kategorií pochází od STEFANA BANACHA (1892 – 1945) z r. 1931; viz [1].

R. 1827 pozoroval ROBERT BROWN (1773 – 1858) částečky pylu ve vodě a popsal tzv. *Brownův pohyb.* Ten hraje důležitou roli ve fyzice. Jeho matematický popis je podstatně mladší, zde se však opět spojité funkce bez derivace uplatňují při popisu trajektorií Brownovských částic. Je patrné, že *monstra* lze použít k popisu jevů, která mají pro fyziku značnou důležitost. Poznamenejme ještě, že tudy vede cesta k souvislostem mezi analytickým popisem a pravděpodobnostním popisem objektů matematické teorie potenciálu.

Elegantní větu o monotonii a stejnoměrné konvergenci (Věta 14.3.3) dokázal již r. 1878 Dini. Jednou z nejdůležitějších vět v této kapitole byla věta Weierstrassova o polynomiální aproximaci (Věta 14.4.1). Ve stejném roce jako Weierstrass (1885) ji nezávisle dokázal CARL DAVID TOLMÉ RUNGE (1856 – 1927). Další zjednodušující důkazy podali např. HENRI LEÓN LEBESGUE (1875 – 1941) r. 1898 a mj. též r. 1892 a 1893 MATYÁŠ LERCH (1860 – 1922). Důkaz, který jsme použili, pochází od EDMUNDA GEORGA HERMANNA LANDAUA (1877 – 1938). Jiný velmi známý a používaný důkaz Weierstrassovy věty publikoval r. 1911, resp. r. 1912 SERGEJ NATANOVIČ BERNSTEIN[5]) (1880 – 1968). Tento důkaz je založen na explicitním vzorci (14.14) pro aproximující polynomy, který neobsahuje integrál.

V dnešní době je známo zhruba asi 100 více či méně odlišných důkazů Weierstrassovy věty. Další výše zmíněný výsledek (*věta o třech funkcích*) publikoval PAVEL PETROVIČ KOROVKIN (1913 – 1985). Zvídavému čtenáři doporučuji náhled do článku [2].

Zobecnění, z nichž může Věta 14.4.1 při šikovném postupu vyplynout (jako ne zcela triviální důsledek), je závislé na stejnoměrné aproximaci polynomy pro funkci $f(x) = |x|$,

---

[5]) Užíváme obvyklé transkripce; jde však o ruského, resp. sovětského matematika, takže patrně správnější by bylo užít jména ve formě *Bernštejn.*

$x \in [-1, 1]$. Ukazuje se však, že tím se důkaz klasické Weierstrassovy věty již *podstatně* nezjednoduší; viz např. [13].

Čtenáře by mohla napadnout následující cesta k důkazu Weierstrassovy věty. K reálné funkci $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a posloupnosti ekvidistantních dělení $D_n \in \mathcal{D}([0, 1])$ s normou $\nu(D_n) = n^{-1}$ sestrojíme interpolační polynomy p_n (viz Historická poznámka 7.4.17), které v dělících bodech D_n nabývají stejných hodnot jako f; pak dokážeme $p_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$. Tak se však *nedá důkaz provést* z principiálních důvodů, nemusí totiž platit ani $p_n \to f$ na $[0, 1]$.

Poznamenejme, že Weierstrass větu o polynomiální aproximaci spojitých funkcí dokázal i pro vícerozměrný případ. Tento výsledek vzbudil značnou pozornost a vedl v poslední čtvrtině 19. stol. k intenzivnímu vyšetřování polynomiální aproximace komplexních funkcí komplexní proměnné a aproximace racionálními funkcemi.

Literatura :

[1] Banach, S.: *Über die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math. **3** (1931), str. 174 – 179.

[2] Bauer, H.: *Aproximace a abstraktní hranice*, Pokroky MFA **26** (1981), str. 305 – 326.

[3] Bernštejn, N. S.: *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*, Communications of the Charkov Math. Society 1912. .

[4] Boas, R. P. jr.: *A primer of real functions*, The Mathematical Association of America, 1981, (3. vydání).

[5] Čupr, K.: *O funkcích anorthoidních*, Druhá výroční zpráva II. české stát. reálky v Brně (1912), 27 str.

[6] Gerver, J.: *More on the differentiability of the Riemann function*, Amer. J. Math. **93** (1971), str. 33 – 41.

[7] Jarník, V.: *Bolzano a základy matematické analýzy*, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1981.

[8] Korovkin, P. P.: *O schodimosti linějnych položitělnych operatorov v prostranstve něpreryvnych funkcij*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **90** (1953), str. 961 – 964.

[9] Lerch, M.: *Über die Nicht-differenzierbarkeit gewisser Funktionen*, Crelle Journ. für Math. **103** (1888), str. 126 – 138.

[10] Pinkus, A.: *Weierstrass and approximation theory*, J. Approx. Theory **107** (2000), str. 1 – 66.

[11] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 1977.

[12] Runge, C.: *Über die Darstellung willkürlicher Funktionen* (*Auszug eines Briefes an Herrn G. Mittag-Leffler*), Acta Math. **7** (1885), str. 387–392.

[13] Stromberg, K. R.: *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

[14] Weierstrass, K.: *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente.* (Aus dem Sitzungbericht der Königl. Akademie der Wischenschaften vom 9. und 30. Juli 1885.), Mathematische Werke von Karl Weierstrass, Mayer & Müller, Berlin 1903, str. 1 – 37.