Kapitola 11

Integrace

Dříve, nežli zavedeme Riemannův a Newtonův integrál a budeme zkoumat jejich vzájemný vztah, dokážeme další větu o funkcích spojitých na uzavřeném intervalu. O funkci $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ jsme dokázali, že je omezená, nabývá své minimální hodnoty $f_{\min}$, maximální hodnoty $f_{\max}$ a také (je-li nekonstantní) všech hodnot z intervalu $[\,f_{\min}, f_{\max}\,]$. Nyní ještě ve Větě 11.1.3 o stejnoměrné spojitosti funkce $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ dokážeme tvrzení, které budeme potřebovat při výkladu Riemannova integrálu.

11.1 Stejnoměrná spojitost

Definice 11.1.1 (Heine 1870). Říkáme, že f je *stejnoměrně spojitá* v intervalu $I \subset \mathbb{R}$, je-li splněna podmínka

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x, y \in I)\,(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,. \tag{11.1}$$

Poznámka 11.1.2. Je-li f spojitá v I, je spojitá v každém bodě $x \in I$ vzhledem k I (v krajních bodech I, pokud leží v I, jde o jednostrannou spojitost); to znamená, že

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall y \in I)\,(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,. \tag{11.2}$$

Je-li f stejnoměrně spojitá v I, platí (11.1). Všimněte si, že při srovnání s definicí (11.2) *spojitosti* v I se v definici (11.1) *stejnoměrné spojitosti* velký kvantifikátor, který vázal proměnnou $x \in I$, „odstěhoval“ doprava. Je-li f stejnoměrně spojitá v I, je zřejmě i spojitá v každém bodě $x \in I$.

Je-li obráceně f spojitá v každém bodě $x \in I$, pak pro každé x a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(x) > 0$ tak, že pro všechna $y \in I$, $|x - y| < \delta$ je $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Toto $\delta(x)$ je tedy obecně závislé na volbě $x \in I$. Stejnoměrná spojitost funkce f v I znamená, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje „univerzální δ“ takové, že je splněna podmínka spojitosti s tímto δ v každém bodě $x \in I$.

Věta 11.1.3 (Heine 1872). *Je-li $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$, je f stejnoměrně spojitá v intervalu $[\,a,b\,]$.*

Důkaz. Předpokládejme, že funkce f *není* stejnoměrně spojitá v $[\,a,b\,]$ a dokažme, že pak není v $[\,a,b\,]$ ani spojitá; v takovém případě existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro *každé* $\delta > 0$ existují $x, y \in [\,a,b\,]$, pro něž je

$$|x-y| < \delta \quad \text{a zároveň} \quad |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon_0\,.$$

Speciálně, k číslům $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, existují body x_n, y_n tak, že

$$|x_n - y_n| < 1/n \quad \text{a} \quad |f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon_0\,.$$

Protože $\{x_n\}$ je omezená posloupnost, existuje *konvergentní* posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybraná z posloupnosti $\{x_n\}$, pro kterou $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ a $x_0 \in [\,a,b\,]$.

Z nerovnosti

$$|\,y_{n_k} - x_0\,| \leq |\,y_{n_k} - x_{n_k}\,| + |\,x_{n_k} - x_0\,|$$

vyplývá, že $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$. Ze spojitosti funkce f v bodě $x_0 \in [\,a,b\,]$ plyne, že

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_0) - f(x_0) = 0\,.$$

Protože však pro všechna k je $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$, dostáváme odtud

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0\,,$$

To však ukazuje, že funkce f není spojitá v bodě x_0. Tím je tvrzení dokázáno. □

Všimněme si ještě blíže stejnoměrné spojitosti, která je užitečná i v jiných souvislostech. Platí např. následující tvrzení:

Věta 11.1.4. *Funkce f je* stejnoměrně *spojitá v omezeném intervalu (a,b), právě když existuje její spojité rozšíření na $[\,a,b\,]$.*

Důkaz. Existuje-li spojité rozšíření f_1 funkce f na $[\,a,b\,]$, je f_1 podle Věty 11.1.3 stejnoměrně spojitá funkce na $[\,a,b\,]$, a tedy i restrikce $f = f_1|(a,b)$ je stejnoměrně spojitá. Je-li f stejnoměrně spojitá v (a,b), je splněna Bolzano-Cauchyho podmínka z Věty 4.3.13 pro existenci vlastních limit

$$f_1(a) := \lim_{x\to a_+} f(x)\,, \quad f_1(b) := \lim_{x\to b_-} f(x)\,; \tag{11.3}$$

definujeme-li rozšíření f_1 v bodech a, b pomocí (11.3), je spojité v $[\,a,b\,]$. □

11.2 Riemannův integrál

Po více než sto let po objevech Isaaca Newtona (1643 – 1727) byla integrace chápána převážně jako inverzní operace k derivování. Vztah k ploše pod grafem funkce byl také znám, ale teprve s vývojem znalostí se ukázalo, že je tuto plochu *jednodušší* definovat pomocí integrálu a nikoli postupovat obráceně: uspokojivé definice plochy se objevily podstatně později. Situace je však složitější, než se na první pohled může zdát.

Prvním, kdo se pokusil o moderní řešení problému integrace, byl Cauchy. Pracoval se *spojitou* funkcí na intervalu $[a, b]$; k popisu Cauchyho definice zavedeme pojem, který využijeme i v dalším výkladu.

Definice 11.2.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $\{x_k; k = 0, 1, \dots, n\}$ je konečná množina bodů z intervalu $[a, b]$ takových, že je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Takovou množinu nazýváme *dělením* intervalu $[a, b]$; budeme pro dělení užívat stručnější zápis [1])

$$D := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}\,. \tag{11.4}$$

Body x_k nazýváme *dělicí body* dělení D, intervaly $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, jsou intervaly dělení D. Číslo

$$\nu(D) := \max\{x_k - x_{k-1}\,;\, k = 1, \dots, n\} \tag{11.5}$$

se nazývá *norma dělení* D.

Historická poznámka 11.2.2. Uvedeme nejprve původní Cauchyho definici integrálu. I když je definice velmi obecná, užíval ji prakticky pouze pro *spojité* funkce.

Definice (Cauchy 1823). Funkce f se nazývá *integrovatelná* (dle Cauchyho) na intervalu $[a, b]$ a hodnota jejího integrálu je rovna číslu $V \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení (11.4) je

$$\nu(D) < \delta \Rightarrow \left| V - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon\,;$$

Je-li splněna tato podmínka, definujeme [2])

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := V\,.$$

Později se začal problémem integrace zabývat Bernhard Riemann (1826 – 1866), kterému vděčíme za jiný zorný úhel pohledu: nepředpokládal a priori, že funkce f, kterou chceme integrovat, je „pěkná“ (např. spojitá); kladl si naopak otázku, jaké „minimální“ vlastnosti funkcí zaručují jejich integrabilitu. Jeho přístup se dále vyvíjel, až dosáhl dnešní, do jisté míry standardizované, podoby. S tou se nyní seznámíme.

---

[1]) Čtenář by si měl uvědomit, že jde o další licenci. Dělení intervalu je jeho konečná podmnožina včetně uspořádání, přičemž její extrémy splývají s krajními body intervalu.

[2]) Dá se ukázat, že pak je číslo V určeno jednoznačně.

Definice 11.2.3. Nechť f je funkce omezená na intervalu $[a, b]$. Označme nejprve $m := \inf\{f(x); x \in [a, b]\}$ a $M := \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$. Analogicky pro dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ nechť

$$m_k := \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad M_k := \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}. \tag{11.6}$$

Definujme

$$s(f; D) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \quad S(f; D) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}). \tag{11.7}$$

Čísla $s(f; D)$ a $S(f; D)$ se nazývají *dolní* a *horní součet* pro funkci f a dělení D.

Lemma 11.2.4. *Pro každou funkci f omezenou na $[a, b]$ a každé dělení D intervalu $[a, b]$ je*

$$m(b-a) \le s(f; D) \le S(f; D) \le M(b-a). \tag{11.8}$$

Důkaz. Pro $k = 1, \ldots, n$ násobme nerovnosti

$$m \le m_k \le M_k \le M \tag{11.9}$$

číslem $(x_k - x_{k-1})$ a těchto n obdržených nerovností sečtěme. Uvážíme-li, že $\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = (b - a)$, dostaneme (11.8). □

Označení 11.2.5. Všechna dělení D intervalu $[a, b]$ tvoří systém, který budeme značit $\mathcal{D}(a, b)$. Je-li $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(a, b)$, píšeme

$$D_1 \prec D_2, \text{ je-li } D_1 \subset D_2.$$

(Dělení D_1, D_2 jsou tedy částečně uspořádána pomocí *inkluze* množin jejich dělicích bodů). Dělení D_2 se nazývá *zjemnění* dělení D_1. Je-li $D_1 \prec D$, $D_2 \prec D$, kde D, D_1, $D_2 \in \mathcal{D}(a, b)$, nazývá se D *společným zjemněním* dělení D_1 a D_2.

Je zřejmé, že každá dvě dělení D_1, D_2 mají společné zjemnění D, za dělicí body D stačí vzít dělicí body obou dělení D_1, D_2.

Lemma 11.2.6. *Je-li $D_1 \prec D_2$, pak pro funkci f omezenou na $[a, b]$ je*

$$s(f; D_1) \le s(f; D_2) \le S(f; D_2) \le S(f; D_1).$$

Důkaz. Nechť $D_1 = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\} \in \mathcal{D}(a, b)$. Je-li $D_2 = D_1 \cup \{x^*\}$ a x^* není dělicím bodem D_1, pak existuje takové k, že $x^* \in (x_{k-1}, x_k)$. Zřejmě pak je

$$\sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x^*]\}\ (x^* - x_{k-1}) + \sup\{f(x); x \in [x^*, x_k]\}\ (x_k - x^*) \le \\ \le M_k(x_k - x_{k-1})$$

a ostatní sčítanci konečných součtů, definujících příslušné horní součty, se nemění. Tvrzení tedy platí, jestliže D_2 vzniklo z D_1 přidáním jediného bodu. Protože přidání konečného počtu bodů lze nahradit postupným přidáváním vždy jednoho bodu, platí tvrzení i pro obecné zjemnění D_2 dělení D_1. Obecně lze přechod od D_1 k D_2 provést postupným přidáváním konečně mnoha bodů z $D_2 \setminus D_1$ a analogickou úvahou jako výše. Stejně se dokáže i nerovnost pro dolní součty; zbytek je důsledkem Lemmatu 11.2.4. □

Lemma 11.2.7. *Pro libovolná dvě dělení $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(a,b)$ a libovolnou omezenou funkci f na $[\,a,b\,]$ platí nerovnost*

$$s(f;D_1) \le S(f;D_2)\,. \tag{11.10}$$

Důkaz. Je-li D společné zjemnění D_1 a D_2, pak je

$$s(f;D_1) \le s(f;D) \le S(f;D) \le S(f;D_2)\,,$$

což dává nerovnost (11.10). □

Označení 11.2.8 (Riemann 1854, Darboux 1875). Pro funkci f omezenou na intervalu $[\,a,b\,]$ označme

$$I_h(f;a,b) = \inf\{S(f;D); D \in \mathcal{D}(a,b)\}\,,$$
$$I_d(f;a,b) = \sup\{s(f;D); D \in \mathcal{D}(a,b)\}\,.$$

Čísla $I_h(f;a,b)$ a $I_d(f;a,b)$ se nazývají *horní* a *dolní Riemannův integrál* funkce funkce f na intervalu $[\,a,b\,]$.

Poznámka 11.2.9. Zřejmě je $I_d(f;a,b) \le I_h(f;a,b)$, což vyplývá z (11.10) přechodem k supremu přes všechna $D \in \mathcal{D}(a,b)$ na levé straně (11.10) a pak přechodem k infimu přes všechna $D \in \mathcal{D}(a,b)$ na pravé straně (11.10).

Definice 11.2.10. Je-li $I_d(f;a,b) = I_h(f;a,b)$, označíme toto číslo

$$(\mathcal{R})\int_a^b f\,. \tag{11.11}$$

a nazveme je *Riemannův integrál funkce f na intervalu* $[\,a,b\,]$. Pokud platí nerovnost $I_h(f;a,b) < I_d(f;a,b)$, říkáme, že Riemannův integrál funkce f na intervalu $[\,a,b\,]$ *neexistuje.* Pro množinu všech (omezených) funkcí f, pro které existuje integrál (11.11), budeme užívat označení $\mathcal{R}(a,b)$ [3]).

Poznámka 11.2.11. V zápisech teoretické povahy dáváme přednost kratšímu označení (11.11) před označením

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ; \tag{11.12}$$

[3]) Nepíšeme $\mathcal{R}([\,a,b\,])$, neboť $\mathcal{R}(a,b)$ je stručnější. Viz také Poznámka 11.2.38.

označení v (11.12), které odpovídá dlouholetým zvyklostem, se však nebudeme v některých případech vyhýbat. Je užitečné, pokud např. integrovaná funkce závisí na nějakém parametru apod. Symbol $\mathrm{d}x$ ukazuje na proměnnou, vzhledem ke které se integruje. V dalším textu budeme v celém tomto oddílu vynechávat $(\mathcal{R})$ před znamením integrálu.

Věta 11.2.12 (Du Bois Reymond 1875, Darboux 1875). *Nechť funkce f je omezená na intervalu $[a,b]$. Potom Riemannův integrál* (11.11) *z funkce f vzhledem k intervalu $[a,b]$ existuje, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathcal{D}(a,b)$ tak, že je*

$$S(f;D) - s(f;D) < \varepsilon\,. \tag{11.13}$$

Důkaz. Existuje-li integrál (11.11), je $I_d(f;a,b) = I_h(f;a,b) =: I$. Z definice suprema a infima plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existují dělení D_1, D_2 tak, že

$$I - \varepsilon/2 < s(f;D_1)\,, \quad S(f;D_2) < I + \varepsilon/2\,. \tag{11.14}$$

Pro jejich společné zjemnění D je

$$I - \varepsilon/2 < s(f;D_1) \le s(f;D) \le S(f;D) \le S(f;D_2) < I + \varepsilon/2\,,$$

a tedy

$$S(f;D) - s(f;D) < I + \varepsilon/2 - (I - \varepsilon/2) = \varepsilon\,. \tag{11.15}$$

Naopak, je-li podmínka (11.13) splněna, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje D tak, že

$$s(f;D) \le I_d(f;a,b) \le I_h(f;a,b) \le S(f;D) < s(f;D) + \varepsilon\,,$$

takže $I_h(f;a,b) - I_d(f;a,b) < \varepsilon$, a tedy $I_d(f;a,b) = I_h(f;a,b)$. □

Historická poznámka 11.2.13. Již jsme se zmínili o tom, že vedeme výklad přes upravenou definici Riemannova integrálu; autorem tohoto postupu je Jean Gaston Darboux (1842 – 1917). Riemannův přístup přiblížíme přímo citátem z jeho habilitační práce *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* z r. 1853 (podrobněji viz např. [8], str. 59).

Neurčitost, která ještě v některých základních bodech teorie určitého integrálu panuje, nás nutí předeslat něco o pojmu určitého integrálu a o rozsahu jeho platnosti.

Tedy za prvé: Co se má rozumět pod $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$?

Abychom toto stanovili, zvolme mezi a a b seřazenou dle velikosti řadu hodnot $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ a označme krátce $x_1 - a$ znakem δ_1, $x_2 - x_1$ znakem $\delta_2, \dots,$ $b - x_{n-1}$ znakem δ_n a buď ε kladný pravý zlomek. Potom bude hodnota součtu

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

záviset na volbě parametrů δ a veličin ε. Bude-li nyní mít (ten součet) *tu vlastnost, že ať jsou zvoleny δ a ε jakkoli, bude se nekonečně blížit pevné hranici A, jakmile budou všechna δ nekonečně malá, pak se tato hodnota* (tj. A) *nazývá $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Když tuto vlastnost nemá, nemá $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ význam.

Srovnáme-li nyní Cauchyho definici a Riemannovu definici, používá Riemann při vytváření součtů hodnoty f nikoli v *počátečních* bodech dělicích intervalů, ale v libovolně zvolených bodech $x_{k-1} + \varepsilon_k \delta_k$ těchto intervalů, a požaduje, aby po jistém „limitním přechodu“ vzhledem k normě dělení výsledná limita existovala a nezávisela navíc na volbě ε_k.

Definice 11.2.14. Položme pro libovolné dělení $D = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ intervalu $[\,a, b\,]$ a libovolnou n-tici $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ bodů $\xi_k \in [\,x_{k-1}, x_k\,]$

$$\sigma(f; D, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Tyto součty budeme nazývat *integrální součty* pro funkci f, dělení D a n-tici *význačných bodů* ξ.

Poznámka 11.2.15. Pro každou omezenou funkci f, dělení $D \in \mathcal{D}(a, b)$ a libovolně zvolené význačné body ξ platí při označení z Definice 11.2.14 pro integrální součty nerovnosti

$$s(f; D) \le \sigma(f; D, \xi) \le S(f; D)\,. \tag{11.16}$$

Přirozeně se nám vnucuje (správná) domněnka, že oba popsané přístupy (tj. původní Riemannův s integrálními součty popsaný v Historické poznámce 11.2.13, i modifikace Darbouxova) vedou k témuž pojmu.

Věta 11.2.16. *Jestliže pro funkci f omezenou na $[\,a, b\,]$ a pro každou posloupnost dělení $D_k \in \mathcal{D}(a, b)$, pro kterou $\lim_{k\to\infty} \nu(D_k) = 0$ existuje vlastní*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f; D_k, \xi) = I \tag{11.17}$$

nezávisle na volbě význačných bodů ξ, potom je $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\int_a^b f = I$.

Důkaz. Zvolme k $\varepsilon > 0$ z posloupnosti $\{D_k\}$ dělení D tak, že pro každou volbu význačných bodů ξ je

$$I - \varepsilon < \sigma(f; D, \xi) < I + \varepsilon\,.$$

Je $s(f; D) = \inf\{\, \sigma(f; D, \xi)\,;\, \xi\}$ a $S(f; D) = \sup\{\, \sigma(f; D, \xi)\,;\, \xi\}$, takže

$$I - \varepsilon \le s(f; D) \le S(f, D) \le I + \varepsilon\,, \tag{11.18}$$

z čehož plyne $S(f; D) - s(f; D) < 3\varepsilon$ a tedy $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Z nerovností

$$I - \varepsilon \le s(f; D) \le \int_a^b f \le S(f, D) \le I + \varepsilon$$

vyplývá rovnost $\int_a^b f = I$. □

Věta 11.2.17. *Je-li $f \in \mathcal{R}(a,b)$, pak pro každou posloupnost dělení $\{D_k\}$, pro kterou $\nu(D_k) \to 0$, je*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f; D_k, \xi) = \int_a^b f\,.$$

Důkaz. Stačí dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ s $\nu(D) < \delta$ je

$$\left| \sigma(f; D, \xi) - \int_a^b f \right| < \varepsilon\,.$$

Využijeme k tomu nerovnosti (11.16). Zvolme nejprve dělení D_1 tak, aby

$$S(f; D_1) - s(f; D_1) < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

z čehož vyplývá

$$S(f; D_1) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \int_a^b f - s(f; D_1) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Položme dále $\delta = \varepsilon/2n\Omega$, kde $n+1$ je počet všech dělicích bodů dělení D_1 a $\Omega = \sup\{f(x) - f(y)\,;\, x, y \in [\,a,b\,]\}$. Zvolme libovolně dělení D s $\nu(D) < \delta$ a označme $D_2 := D \cup D_1$, takže D_2 je společné zjemnění D a D_1. Podle Lemmatu 11.2.6 je

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \le s(f; D_2) \le \int_a^b f \le S(f; D_2) \le \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{11.19}$$

Rozdělme pro D intervaly dělení $[\,x_{k-1}, x_k\,]$, $k = 1, 2, \ldots, m$ do dvou skupin: Do první zařadíme ty intervaly, pro které $(x_{k-1}, x_k) \cap D_1 \neq \emptyset$ a do druhé intervaly zbývající. Intervaly druhé skupiny přispívají k horním součtům $S(f; D)$ a $S(f; D_2)$ stejně a jejich příspěvky k rozdílu $S(f; D) - S(f; D_2)$ se zruší. Analogicky to platí i pro rozdíl $s(f; D_2) - s(f; D)$. V každém z intervalů první skupiny leží alespoň jeden dělicí bod dělení D_1 různý od krajních bodů a, b; takových bodů je $(n-1)$. Každý interval I z této skupiny se rozpadne na několik (alespoň dva) intervalů dělení D_2, avšak součet jejich délek nepřevýší délku I odhadnutou shora číslem δ a rozdíl příspěvků k horním i k dolním součtům je tedy odhadnut číslem $\Omega\,\delta$. Proto je

$$S(f; D) - S(f; D_2) \le (n-1) \cdot \Omega\,\delta < n\Omega\,\frac{\varepsilon}{2n\Omega} = \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{11.20}$$

a analogicky

$$s(f; D_2) - s(f; D) < n\Omega\,\frac{\varepsilon}{2n\Omega} = \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{11.21}$$

Z (11.20) a (11.21) dostaneme s přihlédnutím k (11.16)a (11.19) pro každou volbu ξ

$$\int_a^b f - \varepsilon \leq s(f;D_2) - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f;D) \leq \sigma(f;D,\xi) \leq$$
$$\leq S(f;D) \leq S(f;D_2) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b f + \varepsilon\,,$$

z čehož už vyplývá dokazované tvrzení. □

Poznámka 11.2.18. Pokud bychom neměli ve Větě 11.2.17 zaručenu existenci Riemannova integrálu z funkce f a pracovali pouze s funkcí f omezenou na $[\,a,b\,]$, dospěli bychom analogicky k tvrzení, že pro každou posloupnost dělení $D_k \in \mathcal{D}(a,b)$, pro niž $\nu(D_k) \to 0$ je $S(f;D_k) \to I_h(f;a,b)$. Obdobně lze dokázat za stejných předpokladů $s(f;D_k) \to I_d(f;a,b)$.

Poznámka 11.2.19. Riemannův integrál nám umožňuje definovat funkcionál $P(f;a,b)$ z úlohy o ploše tak, že jsou splněny všechny potřebné podmínky (O1) – (O3) pro P ze začátku Kapitoly 9.

Načrtnete-li si pár ilustrativních obrázků, snadno nahlédnete, že horní a dolní součty jsou *přirozenými* odhady plochy $P(f;a,b)$. Můžeme na ně pohlížet též jako na integrály jistých po částech konstantních funkcí, které shora či zdola omezují funkci f.

Poznamenejme, že poměrně snadno můžeme definovat Riemannův integrál *komplexních* funkcí reálné proměnné: Jestliže pro takovou funkci f položíme $f_1 = \operatorname{Re} f$, $f_2 = \operatorname{Im} f$, definujeme

$$\int_a^b f = \int_a^b f_1 + \mathrm{i}\int_a^b f_2\,,$$

pokud existují oba integrály na pravé straně rovnosti. Odtud je však zřejmé, že se prakticky stačí zabývat pouze reálnými funkcemi reálné proměnné.

Věta 11.2.20. *Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[\,a,b\,]$ a nechť je splněna aspoň jedna z podmínek*

$$(1)\quad f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])\,, \qquad (2)\quad f \text{ je monotónní na } [\,a,b\,]\,.$$

Potom integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

Důkaz. V obou případech je zřejmě f omezená na $[\,a,b\,]$. Je-li $\nu(D)$ norma dělení D (viz Definice 11.2.1, vztah (11.5)) a m_k, M_k jsou definovány jako v (11.6), je

$$S(f;D) - s(f;D) \leq \sum_{k=1}^{n} \nu(D)\cdot(M_k - m_k)\,. \tag{11.22}$$

Je-li nyní f neklesající na $[\,a,b\,]$, je

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) = \sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = f(b) - f(a)$$

a tak je výraz vlevo v (11.22) odhadnout shora číslem $\nu(D)\,(f(b) - f(a))$. Analogickou úvahu provedeme v případě nerostoucí funkce a dostaneme odhad číslem $\nu(D)\,(f(a) - f(b))$, takže pro každou monotónní funkci dostáváme odhad číslem $\nu(D)\,|f(a) - f(b)|$. Protože lze pro libovolné $\varepsilon > 0$ volit $\nu(D)$ tak, že $\nu(D)\,|\,f(b) - f(a)\,| < \varepsilon$, dostaneme existenci integrálu podle Věty 11.2.12.

Uvažujme nyní případ f spojité na $[\,a, b\,]$. Potom je f podle Věty 11.1.3 i stejnoměrně spojitá v $[\,a, b\,]$ a lze k $\varepsilon > 0$ volit $\delta > 0$ tak, že

$$(x, y \in [\,a, b\,]\,, |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Odtud ale plyne, že pro každé dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$, je $M_k - m_k \le \varepsilon$, $k = 1, \ldots, n$, a tedy

$$S(f; D) - s(f; D) \le \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b - a)\,.$$

Odtud opět plyne existence integrálu pomocí Věty 11.2.12. □

Příklad 11.2.21. Nechť $m \in \mathbb{N}$, $A = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset [\,a, b\,]$, nechť f je omezená funkce a $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [\,a, b\,] \setminus A$. Potom je

$$\int_a^b f = 0\,.$$

Zvolme pro každé $n \in \mathbb{N}$ takové dělení $D_n \in \mathcal{D}(a, b)$, aby pro $k = 1, \ldots, n$ platilo $x_k - x_{k-1} = \nu(D_n) = (b-a)/n$; takové dělení, kterému se říká *ekvidistantní dělení*, je jednoznačně určeno. Označme $M = \sup\{|f(x)|;\, x \in [\,a, b\,]\}$. Potom každý z bodů $x_1, \ldots, x_m$ leží nejvýše ve dvou dělicích intervalech dělení D_n, takže

$$\lim_{n\to\infty} s(f; D_n) \ge \lim_{n\to\infty} (-2Mm(b - a)/n) = 0\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} S(f; D_n) \le \lim_{n\to\infty} (2Mm(b - a)/n) = 0\,,$$

a tedy i

$$\lim_{n\to\infty} (S(f; D_n) - s(f; D_n)) = 0\,.$$

Odtud plyne, že zkoumaný integrál existuje a jeho hodnota je rovna 0. Speciálně to platí pro $f = \chi_A$, tj. pro integrál charakteristické funkce konečné $A \subset I$.

Příklady 11.2.22. 1. Je-li δ charakteristická funkce množiny $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$, *neexistuje* Riemannův integrál funkce δ přes interval $[\,0, 1\,]$. Je totiž

$$s(\delta; D) = 0 < 1 = S(\delta; D)$$

pro libovolně zvolené $D \in \mathcal{D}(0, 1)$, a tedy $I_d(\delta; 0, 1) = 0$, $I_h(\delta; 0, 1) = 1$. Jak již víme, funkce δ je známa pod jménem Dirichletova funkce.

2. Nechť ϱ je Riemannova funkce, definovaná v Příkladu 4.2.9. Tvrdíme, že

$$\int_0^1 \varrho = 0\,.$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in [\,0,1\,];\ \varrho(x) > \varepsilon/2\}$ konečná. Přidáme-li k ní body 0 a 1, získáme jisté dělení $D_1 = \{\,0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\,\}$. Doporučujeme, aby si čtenář kreslil obrázek. Každý z těchto dělicích bodů umístíme do jistého intervalu dělení

$$D = \{\,0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n+1} = 1\,\}$$

s vlastnostmi:

$$\begin{aligned} x_{2k} < t_k < x_{2k+1} &\quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, n-1\,,\\ x_{2k+1} - x_{2k} \le \frac{\varepsilon}{2(n+1)} &\quad \text{pro } k = 0, 1, \ldots, n\,; \end{aligned}$$

takové dělení existuje. Je-li $M_k = \sup\big\{\,f(t)\,;\ t \in [\,x_{k-1}, x_k\,]\,\big\}$, uvažme, že v prvním součtu je

$$M_{2k+1} \le 1 \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{n} (x_{2k+1} - x_{2k}) < \varepsilon/2\,,$$

zatímco ve druhém součtu je

$$M_{2k} \le \varepsilon/2 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (x_{2k} - x_{2k-1}) < 1\,.$$

Z toho vyplývá $S(D) < \varepsilon$. Pro všechna $D \in \mathcal{D}(0,1)$ je zřejmě $s(\varrho, D) = 0$. Podle Věty 11.2.12 integrál existuje a je roven 0, což je společná hodnota všech dolních součtů $s(D)$.

3. Na předcházejících dvou příkladech je vhodné povšimnout si, že funkce δ není spojitá v žádném bodě intervalu $[\,0,1\,]$, zatímco ϱ je spojitá ve všech bodech množiny $[\,0,1\,] \setminus \mathbb{Q}$.

Poznámka 11.2.23. Zamysleme se nad Příklady 11.2.22. Množina $A := \mathbb{Q} \cap [\,0,1\,]$ je dosti velká v tom smyslu, že každý (otevřený) interval $I \subset [\,0,1\,]$ obsahuje dokonce nekonečně mnoho bodů množiny A. Je však zároveň v jistém smyslu *malá*, neboť ji lze pokrýt *spočetným* systémem (otevřených) intervalů, součet jejichž délek je libovolně malý. Skutečně, seřadíme-li prvky A do prosté posloupnosti $\{r_n\}$ a zvolíme-li libovolně $\varepsilon > 0$, lze položit pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = (r_n - \varepsilon/2^{n+1}, r_n + \varepsilon/2^{n+1})\,.$$

Systém $\{I_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ zřejmě pokrývá A. Protože délka d_n intervalu I_n je rovna $\varepsilon/2^n$, je

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = \varepsilon\,,$$

takže součet délek všech intervalů I_n může být libovolně malý. To nás vede k tomuto pojmu:

Definice 11.2.24. Je-li možné množinu $A \subset \mathbb{R}$ pro každé $\varepsilon > 0$ pokrýt *spočetně mnoha* otevřenými intervaly s úhrnnou délkou menší než ε, říkáme, že A má *nulovou* (*Lebesgueovu*) *míru.*

Poznámka 11.2.25. Lebesgueova míra λ je zobecněním délky intervalu, protože je $\lambda(I) = b - a$ pro jakýkoli interval o koncových bodech a, b. Je to pojem dosti složitý, zatím však vystačíme pouze s předcházející definicí. Platí následující věta, kterou *nebudeme* dokazovat a která popisuje jinou nutnou a postačující podmínku pro existenci Riemannova integrálu. Věta v podstatě pochází již od Riemanna, i když pojem míry se konstituoval mnohem později. Dokázal ji Henri Louis Lebesgue (1875 – 1941) v práci [6] z r. 1904. Poznamenejme, že zajímavější je pro případ vícerozměrné integrace.

Věta 11.2.26. *Nechť omezená funkce f je definována na intervalu $[a, b]$. Potom Riemannův integrál z f na $[a, b]$ existuje, právě když má množina D všech bodů nespojitosti funkce f v $[a, b]$ nulovou míru.*

Příklad 11.2.27. Je vcelku zřejmé, že je-li $A \subset [a, b]$ *libovolná spočetná množina*, má nulovou míru. Předvedený důkaz, který jsme použili pro speciální spočetnou množinu A, lze beze změny provést pro *obecnou* spočetnou množinu A.

Snadno lze též definovat funkci f na $[a, b]$ tak, že není spojitá *právě v bodech* množiny A; viz Příklad 4.2.9. Vytvoříme prostou posloupnost $\{x_n\}$ všech bodů množiny A a pro libovolnou nerostoucí posloupnost čísel $a_n > 0$, $a_n \to 0$ definujeme $f(x_n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [a, b] \setminus A$.

Takto definovaná *zobecněná Riemannova funkce* není spojitá právě v bodech množiny A, avšak není obtížné dokázat (podobným způsobem jako pro Riemannovu funkci, dokonce jednodušeji), že takto definovaná funkce má na $[a, b]$ nulový integrál.

Poznámka 11.2.28. V dalších tvrzeních odvodíme jednoduché vlastnosti Riemannova integrálu, které budeme později interpretovat ve formě následujícího jednoduchého tvrzení o funkcionálu, tj. zobrazení

$$A : f \mapsto \int_a^b f\,, \quad f \in \mathcal{R}(a, b)\,. \tag{11.23}$$

Věta 11.2.29. *Riemannův integrál (přesněji: funkcionál A definovaný vztahem (11.23)) je nezáporným lineárním funkcionálem na lineárním prostoru $\mathcal{R}(a, b)$.*

Lemma 11.2.30. *Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $f \geq 0$, je také $A(f) \geq 0$.*

Důkaz. Jelikož jsou pro všechna $D \in \mathcal{D}(a, b)$ všechny dolní součty $s(f; D)$ zřejmě nezáporné, je nezáporné i jejich supremum, tj. $A(f)$. □

Věta 11.2.31. *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$. *Potom je též* $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$ *a*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,. \tag{11.24}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že platí implikace

$$(f, g \in \mathcal{R}(a,b)) \Rightarrow (f+g \in \mathcal{R}(a,b))\,.$$

V každém intervalu dělení $[\, x_{k-1}, x_k\,]$ dělení $D = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ je

$$M_k^{f+g} = \sup\{f(t) + g(t)\,\} \le \sup\{f(t)\} + \sup\{g(t)\} = M_k^f + M_k^g\,,$$

kde supremum bereme přes všechna $t \in [\, x_{k-1}, x_k\,]$. Pro infimum platí nerovnost

$$m_k^f + m_k^g = \inf\{f(t)\} + \inf\{g(t)\} \le \inf\{f(t) + g(t)\} = m_k^{f+g}\,.$$

Z těchto nerovností snadno dostaneme násobením faktorem $(x_k - x_{k-1})$ a sečtením pro všechna $k = 1, \ldots, n$

$$s(f;D) + s(g;D) \le s(f+g;D) \le S(f+g;D) \le S(f;D) + S(g;D)\,, \tag{11.25}$$

z čehož vyplývá odhad

$$S(f+g;D) - s(f+g;D) \le (S(f;D) - s(f;D)) + (S(g;D) - s(g;D))\,.$$

Odtud pomocí Věty 11.2.12 dostaneme dokazovanou implikaci.

Z první nerovnosti v (11.25) plyne přechodem k supremu přes množinu všech dělení $\mathcal{D}(a, b)$ nerovnost

$$I_d(f;a,b) + I_d(g;a,b) \le I_d(f+g;a,b)\,,$$

a ze třetí nerovnosti v (11.25) dostaneme přechodem k infimu přes množinu všech dělení $\mathcal{D}(a, b)$ nerovnost

$$I_h(f;a,b) + I_h(g;a,b) \ge I_h(f+g;a,b)\,.$$

Protože je $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$, plyne odtud rovnost (11.24). □

Věta 11.2.32. *Nechť* $f \in \mathcal{R}(a, b)$. *Potom pro všechna* $c \in \mathbb{R}$ *platí rovnost*

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{11.26}$$

Důkaz. Rovnost zřejmě platí pro $c = 0$ a pro $c > 0$ snadno nahlédneme, že také

$$S(cf;D) = c\,S(f;D)\,, \quad \text{a} \quad s(cf;D) = c\,s(f;D)\,.$$

Je-li $c < 0$, zřejmě platí $S(cf;D) = c\,s(f;D)$ a $s(cf;D) = c\,S(f;D)$. Odtud již snadno obdržíme (11.26). □

Jestliže uvážíme obsah tvrzení Lemmatu 11.2.30, Věty 11.2.31 a Věty 11.2.32, vyplývá z nich tvrzení Věty 11.2.29.

Lemma 11.2.33. *Funkcionál A je* neklesající, *tj. pro $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ platí:*

$$f \le g \Rightarrow A(f) \le A(g)\,.$$

Důkaz. Pokud je $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$, pak z Vět 11.2.31 a 11.2.32 vyplývá pro rozdíl $g - f \in \mathcal{R}(a,b)$. Z $g - f \ge 0$ plyne podle Věty 11.2.30 a Věty 11.2.31 i nerovnost $A(g) - A(f) = A(g - f) \ge 0$, čímž je tvrzení dokázáno. □

Tvrzení platí ve zcela obecném kontextu: Nezáporný lineární funkcionál (na lineárním prostoru X) je ve zřejmém smyslu monotónní. Monotonie funkcionálu A má jeden zajímavý důsledek. Nejprve připomeneme již dříve užívané označení.

Označení 11.2.34. Pro každé číslo $a \in \mathbb{R}$ jsme zavedli v Poznámce 1.3.16 jeho kladnou a zápornou část. Podobně zavádíme *kladnou část funkce f* a *zápornou část funkce f* vztahy

$$f^+ : x \mapsto (f(x))^+\,, \quad f^- : x \mapsto (f(x))^-\,, \quad x \in D_f\,.$$

Snadno nahlédneme, že je

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}\,, \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}\,, \quad f = f^+ - f^-\,, \quad |f| = f^+ + f^-\,.$$

Lemma 11.2.35. *Je-li $f \in \mathcal{R}(a,b)$, leží i funkce f^+, f^- a $|f|$ v $\mathcal{R}(a,b)$.*

Důkaz. Je-li $f \in \mathcal{R}(a,b)$, pak pro libovolné dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ platí

$$\begin{aligned} S(f^+;D) - s(f^+;D) &\le S(f;D) - s(f;D)\,, \\ S(f^-;D) - s(f^-;D) &\le S(f;D) - s(f;D)\,. \end{aligned}$$

První nerovnost je zřejmá pro nezápornou funkci f, nastává totiž rovnost. Pro každý interval $[\,x_{k-1}, x_k\,]$ dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ je

$$\sup\{f^+(t)\} - \inf\{f^+(t)\} \le \sup\{f(t)\} - \inf\{f(t)\} \tag{11.27}$$

kde suprema i infima bereme přes všechna $t \in [\,x_{k-1}, x_k\,]$. Je-li f nezáporná na $[\,x_{k-1}, x_k\,]$, platí v (11.27) rovnost, je-li nekladná, je na levé straně 0, vpravo nezáporné číslo a nerovnost opět platí; pokud f nabývá na $[\,x_{k-1}, x_k\,]$ kladných i záporných hodnot, nastává v (11.27) ostrá nerovnost. Již několikrát prováděným přechodem k horním součtům dostaneme první dokazovanou nerovnost, druhá se dokáže obdobně. S použitím Věty 11.2.12 a předcházející věty o linearitě dostaneme odsud integrabilitu funkcí f^+, f^- a $|f|$. □

Z monotonie integrálu a nerovnosti $-|f| \le f \le |f|$ dostaneme snadno integrací tento důsledek:

Důsledek 11.2.36. *Pro každou $f \in \mathcal{R}(a,b)$ platí nerovnost*

$$\Big| \int_a^b f \Big| \leq \int_a^b |f| \,. \tag{11.28}$$

Speciálně pro $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ platí

$$\Big| \int_a^b f - \int_a^b g \Big| \leq \int_a^b |\, f - g \,| \,. \tag{11.29}$$

Poznámka 11.2.37. K nerovnosti (11.29) se v Kapitole 12 o metrických prostorech v Poznámce 12.5.6 vrátíme. Všimněte si, že jestliže se „integrálně“ *málo liší* funkce f a g, tj. číslo na pravé straně nerovnosti (11.29) je malé, pak je rozdíl jejich Riemannových integrálů rovněž malý. Dále, pokud např. $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in [\,a, b\,]$, lze integrál vlevo v (11.29) odhadnout číslem $\varepsilon(b-a)$.

Poznámka 11.2.38. Nabývá-li f nenulových hodnot jen na *konečné* množině $A \subset [\,a, b\,]$, a je-li $g \in \mathcal{R}(a,b)$, je podle Věty 11.2.31 i $f + g \in \mathcal{R}(a,b)$, přičemž a s přihlédnutím k výsledku Příkladu 11.2.21

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b g \,.$$

Změníme-li tedy funkci $g \in \mathcal{R}(a,b)$ na konečné množině, bude nová funkce opět integrovatelná a její integrál bude roven $\int_a^b g$. Je-li funkce g definována všude v $[\,a,b\,] \setminus A$, kde A je konečná množina a jsou-li h_1, h_2 funkce, definované všude na $[\,a,b\,]$ a rovné g všude v $[\,a,b\,] \setminus A$, jsou obě buď integrovatelné nebo obě nejsou integrovatelné v $[\,a,b\,]$. V prvním případě mají integrály obou funkcí stejnou hodnotu. To umožňuje zobecnit původní definici Riemannova integrálu takto:

Je-li funkce g omezená v $[\,a,b\,] \setminus A$, kde A je konečná množina, a je-li $h : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}$ rovna g všude v $[\,a,b\,] \setminus A$, definujeme Riemannův integrál funkce g na intervalu $[\,a,b\,]$ rovností

$$\int_a^b g := \int_a^b h \,, \quad \text{existuje-li integrál vpravo.}$$

Jinými slovy: Je-li $D_g = [\,a,b\,] \setminus A$, dodefinujeme g nějak na množině A (třeba tak, že ji tam položíme rovnou 0) a zjistíme, zda vzniklá funkce má Riemannův integrál podle původní definice. Pokud ano, nezáleží na tom, jak jsme funkci g dodefinovali; nemusíme ji tam tedy definovat vůbec, a přesto můžeme pracovat s jejím integrálem — ovšem podle nyní uvedené obecnější definice.

Dohodneme se však, že pokud budeme mluvit o Riemannově integrálu $\int_a^b g$, budeme mlčky předpokládat, že g je definována všude v $[\,a,b\,]$.

Při motivačních úvahách před zavedením Newtonova integrálu jsme pracovali s názornými vlastnostmi obsahu „podgrafu kladné spojité funkce“. Ukážeme, že lze tento obsah definovat pomocí Riemannova integrálu. Je zřejmé, že Riemannův integrál je nezáporný (tedy monotónní) funkcionál, který jako obsah množiny pod grafem konstantní kladné funkce c dává očekávaný výsledek $\int_a^b c(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a)$, tedy obsah obdélníku se stranami o délkách $b-a$ a c. Stačí tedy pouze dokázat *aditivitu vůči oboru.*

Lemma 11.2.39. *Je-li* $a \le c < d \le b$, *a je-li* $f \in \mathcal{R}(a,b)$, *je i* $f \in \mathcal{R}(c,d)$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\varepsilon > 0$ a podle Věty 11.2.12 zvolme dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ tak, že pro f a D platí (11.13), tj. $S(f;D) - s(f;D) < \varepsilon$. Potom pro $D_1 \in \mathcal{D}(a,b)$, $D_1 = D \cup \{c,d\}$ zřejmě podle Lemmatu 11.2.6 je rovněž $S(f;D_1) - s(f;D_1) < \varepsilon$. Označme $D_2 = D_1 \cap [\,c,d\,]$. Ze zřejmé nerovnosti

$$S(f;D_2) - s(f;D_2) < S(f;D_1) - s(f;D_1) < \varepsilon$$

(při přechodu od D_1 k D_2 vynecháváme ve vyjádření $S(f;D_1) - s(f;D_1)$ nezáporné sčítance), plyne žádané tvrzení. □

Věta 11.2.40. *Nechť* $a < c < b$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, *a nechť* f *je funkce definovaná na* $[\,a,b\,]$. *Pak je*

$$f \in \mathcal{R}(a,b)\,,\ \textit{právě když je}\ (f \in \mathcal{R}(a,c)) \wedge (f \in \mathcal{R}(c,b))\,, \tag{11.30}$$

načež

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,. \tag{11.31}$$

Důkaz. Existuje-li integrál na levé straně (11.31), existují podle Lemmatu 11.2.39 i oba integrály vpravo. Obráceně: Existují-li integrály vpravo, existují pro každé $\varepsilon > 0$ dělení $D' \in \mathcal{D}(a,c)$, $D'' \in \mathcal{D}(c,b)$ tak, že

$$S(f;D') - s(f;D') < \varepsilon/2 \quad \text{a} \quad S(f;D'') - s(f;D'') < \varepsilon/2\,. \tag{11.32}$$

Označíme-li $D := D' \cup D''$, je $D \in \mathcal{D}(a,b)$ a

$$S(f;D) = S(f;D') + S(f;D'')\,, \quad s(D) = s(f;D') + s(f;D'')\,,$$

takže $S(f;D) - s(f;D) < \varepsilon$. Z toho podle Věty 11.2.12 plyne, že existuje $\int_a^b f$. Ze základní nerovnosti (11.8) a z (11.32) dostaneme

$$s(f;D') \le \int_a^c f \le s(f;D') + \varepsilon/2\,, \quad s(f;D'') \le \int_c^b f \le s(f;D'') + \varepsilon/2\,. \tag{11.33}$$

Jelikož víme, že $s(D) = s(f;D') + s(f;D'')$, obdržíme odtud

$$s(f;D) \le \int_a^b f \le s(f;D) + \varepsilon\,.$$

Je zřejmé, že součet $\int_a^c f + \int_c^b f$ i integrál $\int_a^b f$ leží v intervalu $[\,s(D), s(D) + \varepsilon\,]$ délky ε. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, platí rovnost (11.31). □

Definice 11.2.41. Až dosud jsme vždy integrovali přes interval $[\,a,b\,]$ za předpokladu, že $a<b$. Jeví se účelné definovat

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$$

a také

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

je-li $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Poznámka 11.2.42. Čtenář si může rozmyslit, že díky této úmluvě platí vzorec (11.31) pro libovolnou vzájemnou polohu bodů a,b,c, jakmile existuje Riemannův integrál na nejdelšímu z intervalů, na kterých se ve vzorci integruje.

Z úvahy o ploše na začátku Kapitoly 9, vyplývá, že funkce

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

je pro spojitou nezápornou $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ *primitivní funkcí* k f. Nyní provedeme prakticky stejnou úvahu za obecnějších předpokladů.

Věta 11.2.43. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$, $a<c<b$ a nechť c je bod spojitosti funkce f. Označíme-li*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x \in [\,a,b\,]\,, \qquad \textit{je} \qquad F'(c) = f(c)\,.$$

Označíme-li

$$G(x) := \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x \in [\,a,b\,]\,, \qquad \textit{je} \qquad G'(c) = -f(c)\,.$$

Důkaz. Z podmínky $f \in \mathcal{R}(a,b)$ podle Lemmatu 11.2.39 vyplývá, že obě funkce F i G jsou definovány na $[\,a,b\,]$. Je-li $h>0$ a body c, $c+h$ leží v intervalu $[\,a,b\,]$, je podle (11.31)

$$\int_c^{c+h} f = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f$$

Ze spojitosti funkce f v bodě c plyne, že pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ tak, že je $c+\delta \le b$, a pro všechna $x \in [\,c,c+\delta\,]$ je $-\varepsilon \le f(x)-f(c) \le \varepsilon$. Je-li tedy $h \in (0,\delta)$, je podle Lemmatu 11.2.33 a Věty 11.2.31

$$-\varepsilon\, h \le \int_c^{c+h} (f(x)-f(c))\,\mathrm{d}t \;= F(c+h)-F(c)-h\,f(c) \le \varepsilon\, h\,,$$

neboli

$$\Big|\,\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\,\Big| \le \varepsilon\,. \tag{11.34}$$

Z toho je patrné, že $F'_+(c) = f(c)$; analogicky se ukáže, že i $F'_-(c) = f(c)$. Existuje tedy derivace $F'(c)$ a je rovna $f(c)$. Důkaz tvrzení pro funkci G je obdobný. □

Poznámka 11.2.44. Čtenář si snadno rozmyslí, že předcházející tvrzení lze rozšířit i na jednostranné derivace v krajních bodech intervalu $[\,a, b\,]$; princip důkazu je stejný.

Nyní již lze dokázat Větu 9.1.6, kterou jsme dosud užívali bez důkazu:

Věta 11.2.45 (Cauchy 1823). *Nechť $f \in \mathcal{C}(a, b)$, kde $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je libovolný otevřený interval. Potom existuje primitivní funkce F k funkci f na (a, b).*

Důkaz. Zvolme libovolně, ale pevně bod $x_0 \in (a, b)$ a položme (srovnejte s Definicí 11.2.41)

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f\,, \quad x \in (a, b)\,; \tag{11.35}$$

existence integrálu pro všechna $x \in (a, b)$ plyne ze spojitosti funkce f. Je-li $c \in (a, b)$, zvolme $a', b' \in (a, b)$ tak, že body x_0, c leží v (a', b') a definujme funkci G v (a', b') rovností

$$G(x) = \int_{a'}^{x} f\,.$$

Podle Věty 11.2.43 je $G'(c) = f(c)$, a protože se funkce G a

$$F(x) = G(x) + \int_{x_0}^{a'} f\,, \quad x \in (a', b')$$

liší jen o aditivní konstantu, je $F'(c) = G'(c) = f(c)$. Protože $c \in (a, b)$ bylo libovolné číslo, je $F' = f$ v intervalu (a, b), takže funkce F je skutečně primitivní funkcí k f. □

Poznámka 11.2.46. Je užitečné uvědomit si, jak volba bodu x_0 v předcházející větě souvisí s aditivní konstantou, až na kterou je primitivní funkce jednoznačně určena. Pomocí (11.35) definujeme primitivní funkci F k f, pro kterou je $F(x_0) = 0$.

Lemma 11.2.47. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Potom existuje $M < \infty$ tak, že pro libovolné dva body $x, y \in (a, b)$ platí*

$$\Big| \int_{x}^{y} f \Big| \le M|x - y|\,. \tag{11.36}$$

Je-li funkce $f \in \mathcal{C}(a, b)$ omezená v (a, b), je primitivní funkce definovaná vzorcem (11.35) *stejnoměrně spojitá na (a, b).*

Důkaz. Je-li $|f| \le M$ na $[\,a, b\,]$, je odhad (11.36) jednoduchým důsledkem (11.28) z Lemmatu 11.2.36. Je-li f spojitá a $|\,f\,| < M$, zvolíme k $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, aby bylo $M\delta < \varepsilon$. Protože pro $x, y \in (a, b)$ plyne z (Lagrangeovy) Věty 5.2.18 $|\, F(x) - F(y)\,| \le |f(\zeta)||x - y| < M|x - y|$ dostáváme

$$(|\, x - y\,| < \delta) \Rightarrow (|F(x) - F(y)| < \varepsilon)\,,$$

čímž je stejnoměrná spojitost funkce F dokázána. □

Až dosud jsme postupně dokázali, že $\mathcal{R}(a, b)$ tvoří lineární prostor a že Riemannův integrál je na tomto prostoru nezáporným (a tedy monotónním) lineárním funkcionálem. Platí však více:

Věta 11.2.48. *Nechť funkce f, g jsou z prostoru $\mathcal{R}(a, b)$. Potom také funkce*

$$|\, f\,|, \quad f \cdot g \quad a \quad h = \sqrt{f^2 + g^2}$$

leží v prostoru $\mathcal{R}(a, b)$.

Důkaz. Integrovatelnost funkce $|\, f\,|$ jsme již dokázali v Lemmatu 11.2.35. Z podmínky $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ vyplývá omezenost funkcí f, g, existuje tedy $K \in (0, +\infty)$ tak, že $|\, f\,| < K$, $|\, g\,| < K$. Zvolme $D \in \mathcal{D}(a, b)$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ a označme pro $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} l_k &:= \inf\{g(x); x \in [\, x_{k-1}, x_k\,]\}\ , \quad L_k := \sup\{g(x); x \in [\, x_{k-1}, x_k\,]\}\,, \\ m_k &:= \inf\{f(x); x \in [\, x_{k-1}, x_k\,]\}\,, \quad M_k := \sup\{f(x); x \in [\, x_{k-1}, x_k\,]\}\,. \end{aligned}$$

Zřejmě je

$$\inf\{f(x)g(x)\,;\, x \in [\, x_{k-1}, x_k\,]\} \ge m_k l_k\,, \quad \sup\{f(x)g(x)\,;\, x \in [\, x_{k-1}, x_k\,]\} \le M_k L_k\,.$$

Protože je

$$M_k L_k - m_k l_k = (M_k - m_k) L_k + m_k (L_k - l_k) \le K\big((M_k - m_k) + (L_k - l_k)\big)\,,$$

dostaneme násobením výrazy $(x_k - x_{k-1})$ a sečtením přes všechna uvažovaná k

$$S(fg; D) - s(fg; D) \le K\big((S(f; D) - s(f; D)) + (S(g; D) - s(g; D))\big)\,. \tag{11.37}$$

Zvolíme-li nyní k $\varepsilon > 0$ takové $D \in \mathcal{D}(a, b)$, aby

$$S(f; D) - s(f; D) < \frac{\varepsilon}{2K}\,, \quad S(g; D) - s(g; D) < \frac{\varepsilon}{2K}\,,$$

je splněna podmínka z Věty 11.2.12 a tedy $fg \in \mathcal{R}(a, b)$.

V Lemmatu 8.1.4 jsme dokázali trojúhelníkovou nerovnost pro komplexní čísla: Pro každá dvě čísla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|\,.$$

Je-li $z_1 = a_1 + \mathrm{i} b_1$, $z_2 = a_2 + \mathrm{i} b_2$, je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,. \tag{11.38}$$

Dosaďme do (11.38) $a_1 = f(x)$, $a_2 = f(y) - f(x)$, $b_1 = g(x)$, $b_2 = g(y) - g(x)$ a převeďme první člen na pravé straně nerovnosti na její levou stranu. Dostaneme

$$\sqrt{f^2(y) + g^2(y)} - \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} \le \sqrt{(f(y) - f(x))^2 + (g(y) - g(x))^2} \le$$
$$\le \big| f(y) - f(x) \big| + \big| g(y) - g(x) \big| ,$$

kde poslední nerovnost je opět důsledkem trojúhelníkové nerovnosti. Porovnáme-li levou stranu s definicí funkce h, obdrželi jsme

$$h(y) - h(x) \le \big| f(y) - f(x) \big| + \big| g(y) - g(x) \big| .$$

Odvozenou nerovnost použijeme k odhadu (užijeme označení z předcházející části důkazu)

$$\sup\{h(x); x \in [\, x_{k-1}, x_k \,]\} - \inf\{h(x); x \in [\, x_{k-1}, x_k \,]\} \le (M_k - m_k) + (L_k - l_k) .$$

Dále již postupujeme analogicky jako výše a dostaneme nerovnost

$$S(h; D) - s(h; D) \le (S(f; D) - s(f; D)) + (S(g; D) - s(g; D)) , \tag{11.39}$$

ze které již plyne $h \in \mathcal{R}(a, b)$. □

Poznámka 11.2.49. Z algebraického hlediska jsme ukázali, že $\mathcal{R}(a, b)$ tvoří vzhledem k operacím s funkcemi dokonce algebru. Odhad (11.39) souvisí také s tím, že vzorec (11.28) platí i pro komplexní funkci f reálné proměnné v případě, že její reálná i imaginární část leží v $\mathcal{R}(a, b)$.

11.3 Newtonův integrál

Poznámka 11.3.1. Začneme konstatováním, že se budeme snažit terminologicky a pojmově co nejvíce přiblížit řadám. Z tohoto důvodu pracujeme i s integrálem, nabývajícím nevlastních hodnot $\pm\infty$. Zvládnutí terminologie by proto nemělo dělat čtenáři žádné obtíže. Poznamenejme ještě, že budeme pracovat pouze s reálnými funkcemi, příslušná zobecnění na komplexní funkce nejsou obtížná.

Definice 11.3.2. Říkáme, že F je *zobecněná primitivní funkce k funkci f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$*, je-li spojitá a platí-li rovnost $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I \setminus K$, kde $K \subset I$ je nějaká konečná množina. Množinu všech zobecněných primitivních funkcí k funkci f na I budeme značit $\mathrm{zpf}(f; I)$ nebo jen $\mathrm{zpf}(f)$, bude-li interval I zřejmý.

Poznámka 11.3.3. Každá primitivní funkce F k funkci f na otevřeném intervalu I je zároveň zobecněnou primitivní funkcí k funkci f (výjimečná množina K je prázdná). Proto je Definice 11.3.2 rozšířením již dříve uvedené definice primitivní funkce. Na rozdíl od definice primitivní funkce se v definici zobecněné primitivní funkce nepředpokládá, že interval I je otevřený (může být libovolný). Funkce f nemusí být definována všude v I, ale jen všude až na jistou konečnou množinu. Všude tam, kde je to pro nás výhodné, však můžeme předpokládat, že f je definována v I, protože tam, kde definována nebyla, ji můžeme definovat jakkoli (např. jako 0). Souvisí to s platností tohoto jednoduchého tvrzení: *Je-li $f = g$ v $I \setminus K$, kde I je interval a $K \subset I$ nějaká konečná množina, je $F \in \mathrm{zpf}(f; I)$, právě když $F \in \mathrm{zpf}(g; I)$.*

Zobecněné primitivní funkce mají některé společné vlastnosti s primitivními funkcemi, zejména důležitou vlastnost, že rozdíl dvou *zobecněných* primitivních funkcí k téže funkci f na (a, b) je funkce konstantní.

Lemma 11.3.4. *Je-li $f \geq 0$ na intervalu I a $F \in \mathrm{zpf}(f; I)$, je F neklesající na I.*

Důkaz. Jsou-li a, b koncové body intervalu I, sestrojme konečnou posloupnost

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

všech bodů množiny $K \cup \{a, b\}$. Označíme-li

$$I_k := [\, x_{k-1}, x_k \,] \cap I\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,,$$

je funkce F podle Věty 5.2.22 neklesající v každém I_k, protože kromě krajních bodů má v I_k nezápornou derivaci $F' = f$. Pro všechna $k = 1, 2, \ldots, m$ je $I_k \cap I_{k+1} = \{x_k\} \neq \emptyset$, z čehož plyne, že je F neklesající v I. □

Důsledek 11.3.5. *Jsou-li $F, G \in \mathrm{zpf}(f; I)$, je jejich rozdíl $F - G$ konstantní funkce.*

Důkaz. Funkce $F - G$ je spojitá a její derivace je rovna 0 všude v $I \setminus K$, kde K je konečná množina. Podle předcházející věty je nerostoucí i neklesající (a tedy konstantní) v I. □

Definice 11.3.6. Nechť $F \in \mathrm{zpf}(f)$ na intervalu o koncových bodech a, b, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Potom definujeme

$$(\mathcal{N})\!\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)\,,$$

pokud rozdíl limit vpravo má smysl, a říkáme, že *integrál existuje*. Jsou-li navíc obě limity konečné (a tedy i hodnota integrálu je konečná), říkáme, že *integrál konverguje*. Vpravo stojící přírůstek zobecněné primitivní funkce značíme zkráceně

$$F(b-) - F(a+) = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = \big[\, F \,\big]_a^b\,.$$

Poznámky 11.3.7. Důsledek 11.3.5 ukazuje, že Definice 11.3.6 je korektní, tj. nezávislá na volbě zobecněné primitivní funkce F. Někdy je tento integrál nazýván *zobecněný Newtonův integrál* a název Newtonův integrál se užívá pro případ, kdy je interval I v Definici 11.3.6 otevřený a $K = \emptyset$. Často se též v Definici 11.3.6 žádá konečnost integrálu; v tom případě splývá existence integrálu s jeho konvergencí.

Důvod pro zavedení „výjimečné“ množiny K je následující. Funkce sgn má primitivní funkci jak na intervalu $I := (-1, 0)$, tak na intervalu $J := (0, 1)$, ale nemá primitivní funkci na intervalu $L := (-1,1)$, protože každá primitivní funkce na intervalu I má tvar $-x + c_1$ a na intervalu J tvar $x + c_2$, kde c_1, c_2 jsou konstanty. Protože každá primitivní funkce na L by musela být spojitá v bodě 0, bylo by $c_1 = c_2 =: c$. Funkce tvaru $|x| + c$ však *nemá* derivaci v bodě 0, tudíž funkce sgn nemá primitivní funkci na L. Srv. Příklad 9.1.11 [4]).

Připuštění výjimečné množiny K v definici zobecněné primitivní funkce má za následek např. existenci *zobecněné* primitivní funkce k funkci sgn na L. Snadno též ověříme, že spojitá funkce

$$G(x) := \begin{cases} x\,(\log|x| - 1) & \text{pro} \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})\,, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0\,, \end{cases}$$

je zobecněnou primitivní funkcí k funkci $\log|x|$ na $\mathbb{R}$.

Věty o Newtonově integrálu založeném na pojmu zobecněné primitivní funkce mohou být formulovány v elegantnější formě. Pro početní stránku věci však nemá toto relativně jednoduché zobecnění velký smysl.

Na rozdíl od Riemannova integrálu můžeme s Newtonovým integrálem pracovat i s neomezenými funkcemi a na neomezených intervalech. Poznamenejme ještě, že je možné pracovat i se *spočetnou* „výjimečnou množinou“ K, což je založeno na tvrzení, že i rozdíl dvou takto definovaných zobecněných primitivních funkcí je na intervalu konstantní; viz např. [1], str. 32.

Také o Newtonově integrálu dokážeme několik tvrzení, která jsou užitečná při výpočtech. Označme $\mathcal{N}(a,b)$ množinu všech funkcí f definovaných na intervalu I o koncových bodech a, b, $-\infty \le a < b \le +\infty$, pro které *konverguje* Newtonův integrál z f na I. Protože jsou příslušné důkazy velmi jednoduché, uvedeme některá tvrzení bez důkazu. Symbol $(\mathcal{N})$- před integrálem budeme vynechávat.

Věta 11.3.8. *Newtonův integrál je lineárním funkcionálem na prostoru $\mathcal{N}(a,b)$, tj. pro každou dvojici funkcí $f, g \in \mathcal{N}(a,b)$ a každou dvojici čísel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g\,. \tag{11.40}$$

Důkaz. Jsou-li F, G zobecněné primitivní funkce k funkcím f, g, je $\alpha F + \beta G$ zřejmě zobecněná primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$. Dále je

$$\lim \alpha F(x) + \beta G(x) = \alpha \lim F(x) + \beta \lim G(x)\,,$$

jak při $x \to b-$, tak při $x \to a+$ a všechny tyto limity jsou konečné, z čehož již vyplývá (11.40). □

Lemma 11.3.9. *Platí-li nerovnost $f \le g$ všude na intervalu I až na konečnou množinu K, je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\;,$$

pokud oba integrály existují.

[4]) Mohli jsme se odvolat i na „hlubší“ Větu 5.2.14 o Darbouxově vlastnosti derivace spojité funkce.

Důkaz je velmi jednoduchý. Stačí uvážit, že existuje zobecněná primitivní funkce k $g - f$ na I a použít Větu 11.3.4.

Jako důsledek dostaneme tvrzení pro odhad absolutní hodnoty Newtonova integrálu. Z odhadu $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ vyplývá nerovnost

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \ ,$$

jakmile oba integrály existují.

Definice 11.3.10. Pro každé $a \in \mathbb{R}^*$ a každou funkci f definujeme $\int_a^a f = 0$. Dále klademe

$$\int_b^a f := -\int_a^b f \,,$$

existuje-li integrál na pravé straně rovnosti podle dosavadní definice.

Věta 11.3.11. *Existuje-li (resp. konverguje-li) Newtonův integrál* $\int_a^b f$ *a je-li* $a \le c < d \le b$, *existuje (resp. konverguje) i* $\int_c^d f$. *Je-li* $a < c < b$, *platí rovnost*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \,,$$

konverguje-li buď integrál vlevo nebo oba integrály vpravo.

Důkaz. Je-li $F \in \operatorname{zpf}(f;(a,b))$, existuje $\int_a^b f$, právě když má výraz $F(b-)-F(a+)$ smysl. Kromě triviálního případu $(c,d) = (a,b)$ leží jeden z bodů c, d v (a,b) a limita F je v něm konečná, protože funkce F je v něm spojitá. Proto má rozdíl $F(d-) - F(c+)$ ve všech případech smysl.

Konverguje-li integrál vlevo a $F \in \operatorname{zpf}(f;(a,b))$, je

$$F(b-) - F(a+) = (F(c-) - F(a+)) + (F(b-) - F(c+))\,, \tag{11.41}$$

protože F je spojitá v (a,b). Obráceně: Konvergují-li integrály vpravo, existují $F_1 \in \operatorname{zpf}(f;(a,c))$ a $F_2 \in \operatorname{zpf}(f;(c,b))$ a všechny limity $F_1(a+)$, $F_1(c-)$, $F_2(c+)$, $F_2(b-)$ jsou konečné. Položíme-li

$$F(x) := \begin{cases} F_1(x) & \text{pro} \quad x \in (a,c)\,, \\ F_1(c-) & \text{pro} \quad x = c\,, \\ F_2(x) + F_1(c-) - F_2(c+) & \text{pro} \quad x \in (c,b)\,, \end{cases}$$

zřejmě $F \in \operatorname{zpf}(f;(a,b))$ a

$$\begin{aligned} F(b-) - F(a+) &= (F(c-) - F(a+)) + (F(b-) - F(c+)) = \\ &= (F_1(c-) - F_1(a+)) + (F_2(b-) - F_2(c+))\,, \end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Následující věta je jednoduchým, ale důležitým kritériem konvergence Newtonova integrálu.

Věta 11.3.12. *Je-li f spojitá a omezená funkce na omezeném intervalu (a,b), Newtonův integrál $\int_a^b f$ konverguje.*

Důkaz. Ze spojitosti funkce f plyne, že k ní existuje primitivní funkce na (a,b). Je-li $|f| \le M < \infty$, pak pro primitivní funkci F k f platí podle (Lagrangeovy) Věty 5.2.18 pro libovolná $x, y \in (a,b)$ nerovnost

$$|\,F(x) - F(y)\,| \le M\,|\,x - y\,|\,.$$

Odtud vyplývá, že F je stejnoměrně spojitá na (a,b), a lze ji tedy spojitě rozšířit na $[\,a,b\,]$. Zbytek je zřejmý (srov. s Lemmatem 11.2.47). □

Pro primitivní funkce jsme dokázali větu o integraci per partes a větu o substituci, tj. Věty 9.2.3 a 9.2.6. Po nezbytné modifikaci lze analogická tvrzení dokázat i pro Newtonův integrál.

Věta 11.3.13 (metoda per partes). *Nechť $F \in \mathrm{zpf}(f;(a,b))$, $G \in \mathrm{zpf}(g;(a,b))$ a nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$. Pak je*

$$\int_a^b fG = [\,FG\,]_a^b - \int_a^b Fg\,, \tag{11.42}$$

jsou-li alespoň dva z výrazů v rovnosti (11.42) *konečné.*

Důkaz. Rozlišíme dva případy, což postačí: záměnou funkcí f a g dostaneme ekvivalentní tvrzení.
(1) Nechť $\Phi \in \mathrm{zpf}(fG)$ a $\Psi \in \mathrm{zpf}(Fg)$, přičemž oba přírůstky $[\Phi]_a^b$ a $[\Psi]_a^b$ jsou konečné. Potom platí

$$(FG)' = fG + Fg = \Phi' + \Psi' = (\Phi + \Psi)'$$

všude v $(a,b) \setminus K$, kde K je konečná množina, a protože FG a $\Phi + \Psi$ jsou spojité v (a,b), jsou to zobecněné primitivní funkce k téže funkci $fG + Fg$. Je tedy

$$[\,FG\,]_a^b = [\,\Phi\,]_a^b + [\,\Psi\,]_a^b = \int_a^b fG + \int_a^b Fg\,,$$

což jsme měli dokázat.
(2) Předpokládejme, že výrazy na pravé straně vzorce (11.42), tj. $[\,FG\,]_a^b$ a také $\int_a^b Fg$, jsou konečné. Nechť $\Psi \in \mathrm{zpf}(Fg)$; položme $\Phi = FG - \Psi$. Potom

$$\Phi' = (FG - \Psi)' = fG + Fg - Fg = fG$$

všude až na konečný počet bodů z (a,b), a Φ je spojitá, takže $\Phi \in \mathrm{zpf}(fG)$. Zbytek plyne z konečnosti příslušných přírůstků. □

Věta 11.3.14 (substituční metoda). *Je-li $\varphi : (\alpha, \beta) \overset{\text{na}}{\to} (a, b)$ spojitá ryze monotónní funkce, která má konečnou nenulovou derivaci všude v $(\alpha, \beta) \setminus K$, kde $K \subset (\alpha, \beta)$ je nějaká konečná množina. Potom je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t) \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t\,, \tag{11.43}$$

existuje-li jeden z integrálů.

Důkaz. Nechť existuje integrál vlevo a φ je rostoucí, takže je $|\varphi'(t)| = \varphi'(t)$. Nechť $F'(x) = f(x)$ na $(a, b) \setminus L$, kde L je konečná množina. Označíme-li $G = F \circ \varphi$, pak $G' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'$ platí v $(\alpha, \beta) \setminus M$, kde $M = K \cup \varphi^{-1}(L)$ je konečná množina. Funkce G je spojitá, a tedy $G \in \operatorname{zpf}((f \circ \varphi)\,\varphi'; (\alpha, \beta))$ a je

$$G(\alpha+) = F(a+)\,,\ G(\beta-) = F(b-)$$

podle věty o limitě složené funkce. Odtud plyne existence integrálu vpravo a dokazovaná rovnost.

Existuje-li integrál na pravé straně (11.43), postupujeme podobně, ale s inverzní funkcí φ^{-1} na místě φ:

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = \int_a^b (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1})(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})' = \int_a^b f\,.$$

Součin posledních dvou závorek ve druhém integrálu je roven 1 podle věty o derivování inverzní funkce (Věta 6.4.4).

Podobně probíhá důkaz pro φ klesající, kdy je $|\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$ a zároveň

$$G(\alpha+) = F(b-)\,,\ G(\beta-) = F(a+)\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 11.3.15. Poznamenejme, že při hledání primitivních funkcí jsme neužívali zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{11.44}$$

neboť funkce na obou stranách (11.44) mají obecně různý definiční obor. V (11.43) však jde o rovnost čísel (integrálů), nikoli integrovaných funkcí.

Věta 11.3.16. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $F \in \operatorname{zpf}(f)$. Potom je*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\,F\,]_a^b = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{11.45}$$

Důkaz. Funkce f je omezená, a tak z Lemmatu 11.2.47 plyne, že zobecněná primitivní funkce F je stejnoměrně spojitá na (a, b). Existují tedy konečné limity

$F(a) := F(a+)$ a $F(b) := F(b-)$, a tedy, podle Věty 11.1.4, je F spojitě rozšiřitelná na $[a,b]$.

Dále existuje konečná množina $K \subset [a,b]$ taková, že $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in [a,b] \setminus K$. Zvolme dále libovolné dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ tak, aby toto dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ obsahovalo všechny body z K. Podle Lagrangeovy věty existují body ξ_k, $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tak, že

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Protože poslední součet leží mezi $s(f;D)$ a $S(f;D)$, je

$$s(f;D) \le F(b) - F(a) \le S(f;D)\,.$$

Přechodem k supremu přes všechna dělení vlevo a k infimu přes všechna dělení vpravo dostaneme s přihlédnutím k $f \in \mathcal{R}(a,b)$ rovnost (11.45). □

Poznámka 11.3.17. Právě dokázaná věta má zásadní význam i pro výpočty. Je to tzv. *základní věta integrálního počtu.* Tvrzení analogická k Větě 11.3.16 se dokazují i pro jiné (případně obecnější) integrály. Větě lze dát i tento „symetričtější“ tvar:

Věta 11.3.18. *Má-li funkce f na intervalu $[a,b]$ jak Riemannův tak Newtonův integrál, mají oba integrály stejnou hodnotu.*

Důkaz. Je-li f riemannovsky integrovatelná, je funkce f omezená. Za těchto podmínek lze každou $F \in \mathrm{zpf}(f;(a,b))$ spojitě rozšířit na $[a,b]$ a stačí pak jen aplikovat Větu 11.3.16. □

11.4 Některé aplikace

Začneme tím, že se vrátíme ke kritériím konvergence řad a ukážeme, jak lze při rozhodování o konvergenci řad využít znalostí o integrálu (ale i obráceně).

Věta 11.4.1 (integrální kritérium, Euler 1736). *Nechť $f \in \mathcal{C}([1,\infty))$ je nerostoucí nezáporná funkce. Potom konverguje řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)\,, \quad \textit{právě když konverguje} \quad (\mathcal{N})\!\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{11.46}$$

Důkaz. Částečné součty $s_n := \sum_{k=1}^{n} f(k)$, $n \in \mathbb{N}$, tvoří neklesající posloupnost a funkce

$$F(x) := \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

je zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na intervalu $[1,+\infty)$; konvergence řady i integrálu v (11.46) je proto ekvivalentní s omezeností $\{s_n\}$ a F shora.

Z nerovností

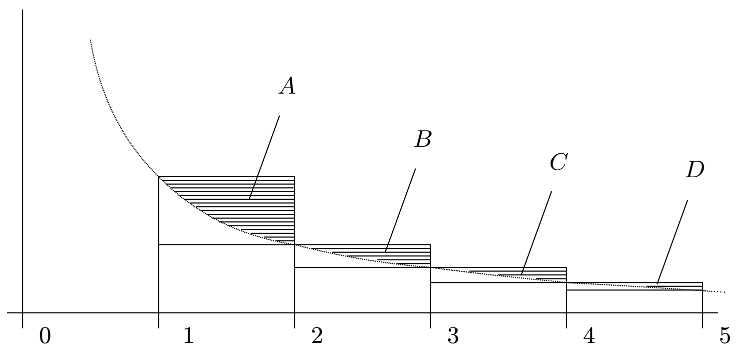
$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq f(k+1)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

dostaneme „sečtením“ pro $k = 1, \ldots, n$ nerovnosti

$$s_n = \sum_1^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(n+1) \geq \sum_{k=1}^n f(k+1) = s_{n+1} - f(1)\,. \quad (11.47)$$

Z nich je patrné, že $\{s_n\}$ je (shora) omezená právě když je (shora) omezená posloupnost $\{F(n+1)\}$, a tedy právě když je (shora) omezená funkce F na intervalu $[1, +\infty)$. Nerovnost (11.47) je užitečná i při odhadech [5]). □

Poznámka 11.4.2. Úvahy z právě provedeného důkazu ilustruje Obr. 1., na kterém je $f(x) = x^{-1}$, $x \in (1, \infty)$. Poznamenáváme, že součet obsahů na obrázku zvýrazněných „křivočarých trojúhelníčků“ $(A + B + C + D + \cdots)$ je roven konstantě γ, definované v Příkladu 6.5.21.



Obr. 1.

Příklad je užitečný i k ilustraci výše zmíněných odhadů pro případ, že integrál v (11.46) diverguje. Není totiž jednoduché najít např. první částečný součet harmonické řady, který je větší než 100, pouhým sčítáním členů řady; členy jsou pro vyšší indexy „malé“, přičemž se sčítá „mnoho“ čísel. Jednoduchý *hrubý* odhad dává pro nejmenší částečný součet s_n harmonické řady, který je větší než 100, nerovnost

$$s_n > \log(n+1) > 100, \quad \text{tedy} \quad n+1 > \exp(100) > 2^{100}\,.$$

Museli bychom tedy sečíst cca 2^{100} členů, abychom dosáhli částečného součtu 100. Doporučujeme čtenáři zkusit výpočet „silou“, tj. sčítáním a testováním velikosti nalezeného součtu vůči danému číslu pomocí personálního počítače, např. jen pro mez 10 místo 100.

Je zajímavé srovnat, jak přesné jsou jednotlivé odhady částečných součtů, které jsme nalezli v prvním díle této knihy v Kapitolách 2 a 3. Prvním je standardní odhad,

[5]) Důkaz je velmi názorný. Nerovnosti v (11.47) lze interpretovat i jako odhad integrálu pomocí dolních a horních součtů pro vhodné dělení D intervalu $[1, n+1]$.

pocházející ze 14. stol., druhý vznikl podobně odhadováním „po desítkách“:

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq (n+1)\,\frac{1}{2} \quad \text{a} \quad s_{10^n-1} = \sum_{k=1}^{10^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{9n}{10}\,. \tag{11.48}$$

Z nich pro mez 10 dostaneme z prvního, že $s_n > 10$ pro $n > 2^{19} \doteq 5{,}2 \cdot 10^5$, ze druhého snáze obdržíme horší odhad, totiž že $s_n > 10$ pro $n > 1{,}2 \cdot 10^{11}$. Pokud uvážíme hodnotu konstanty $\gamma \doteq 0{,}577$ a máme k dispozici hodnoty (přirozených) logaritmů čísel z $\mathbb{N}$, obdržíme mnohem přesnější výsledek: $s_n > 10$ pro $n > 12\,367$; je totiž $\exp(10-\gamma) = 12\,366{,}97$. Ukazuje se tedy, že odhady pro divergenci harmonické řady jsou sice jednoduché, ale velmi nepřesné.

Příklad 11.4.3. Jednoduchý výpočet

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}} = \Big[\, \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \,\Big]_{x=1}^{\infty} = \begin{cases} 1/(\alpha-1) & \text{pro } \alpha > 1\,, \\ +\infty & \text{pro } \alpha \leq 1\,, \end{cases}$$

ukazuje, že integrál konverguje, právě když $\alpha > 1$. Totéž tedy podle Věty 11.4.1 platí pro řadu $\sum n^{-\alpha}$. Současně jsme dokázali jiným způsobem konvergenci řady $\sum 1/k^2$ a z (11.47) dostali již v Příkladu 3.2.3 odvozený hrubý odhad jejího součtu s, $s \leq \int_1^{\infty} x^{-1}\,\mathrm{d}x < s - f(1)$, který tak zřejmě leží v intervalu $(1, 2)$.

Je-li g *spojitá* vektorová funkce, tj. $g = (g_1, \dots, g_m)$, a *složky* g_k jsou spojité funkce pro všechna $k = 1, 2, \dots, m$, pak je přirozené graf tohoto zobrazení považovat za křivku v $\mathbb{R}^m$. Často bývá přímo *toto zobrazení* nazýváno *křivkou* v $\mathbb{R}^m$. Tím se vyhneme tomu, že bychom museli dokazovat nezávislost vlastností křivky na popisující funkci (tzv. parametrizaci) g. Pak je např. $g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^2$ *rovinná křivka*, nebo $g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^3$ *křivka prostorová*. Jak lze definovat pro takovou křivku její délku? Definice by měla být v souladu se známými výsledky např. pro oblouk kružnice nebo paraboly.

Příklad 11.4.4. Pro křivku $g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^m$ a pro dělení $D \in \mathcal{D}(a, b)$, pro které je $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, položme

$$\ell\,(g; D) := \sum_{k=1}^{n} \operatorname{dist}\big(\, g(x_{k-1}), g(x_k)\big) \tag{11.49}$$

kde dist značí vzdálenost bodů v eukleidovském prostoru. Význam tohoto čísla je názorný: mezi dělicími body x_k, $k = 0, \dots, n$, jsme g nahradili lineárním zobrazením a sečtením zjistili délku vepsané „lomené čáry“. Z trojúhelníkové nerovnosti [6]) vyplývá, že jsou-li $D, D' \in \mathcal{D}(a, b)$, a D' je zjemněním dělení D, je

$$\ell\,(g; D) \leq \ell\,(g; D')\,, \tag{11.50}$$

[6]) Máme na mysli její geometrickou formu, známou ze středoškolské látky: součet délek dvou stran trojúhelníku je větší nebo roven délce jeho třetí strany, přičemž rovnost nastane v případě, že trojúhelník přejde v úsečku.

a tak se *intuitivně* můžeme zjemňováním dělení intervalu $[a, b]$ k délce křivky (nevíme zatím, co to je!) s libovolnou přesností přibližovat. Již u Archimeda nacházíme myšlenku určit co nejpřesněji délku kružnice pomocí obvodů pravidelných vepsaných n-úhelníků zdvojnásobováním počtu stran; srov. s výkladem v Úvodu tohoto textu. Na této myšlence je, zhruba řečeno, založena i moderní definice délky křivky.

Úvahy z předcházejícího příkladu nás vedou k definici:

Definice 11.4.5. Znamená-li dist vzdálenost v $\mathbb{R}^m$ a je-li $g : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ zobrazení se spojitými složkami, $D := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ a $\ell(g; D)$ je dáno vzorcem (11.49), definujeme *délku* $L(g)$ *křivky* g na $[a, b]$ vzorcem

$$L(g) := \sup\{\ell(g; D);\ D \in \mathcal{D}(a, b)\}\ . \tag{11.51}$$

Příklad 11.4.6. Položme $g(x) := (x, f(x))$, $x \in (0, 1]$, kde $f(x) = x^2 \cos(\pi/x^2)$, $g(0) := [0, 0]$. Potom dostaneme pro $D := \{\, 0 < 1/\sqrt{n} < 1/\sqrt{n-1} < \cdots < 1 \,\}$ podle Pythagorovy věty

$$\begin{aligned}\ell(g; D) &\ge \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)^2 + \left(f\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Big) - f\Big(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) \right)^2 \right)^{1/2} \ge \\ &\ge \sum_{k=1}^{n-1} \left| f\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Big) - f\Big(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) \right| = \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\cos k\pi}{k} + \frac{\cos(k+1)\pi}{k+1} \right| \ge \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\,,\end{aligned}$$

a odtud je již snadno vidět, že $L(g) = +\infty$.

Příklad 11.4.7 (důležitý). Graf funkce f (tj. množina $\big\{(x, f(x))\,;\, x \in [a, b]\big\}$) je identický s grafem zobrazení $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, kde $g : x \mapsto [x, f(x)]$, $x \in [a, b]$. Zřejmě je

$$\begin{aligned}\ell(f; D) &:= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2}\quad .\end{aligned}$$

Pokud je funkce f spojitá a má v (a, b) všude derivaci, existují uvnitř dělicích intervalů dělení D body ξ_k tak, že lze součet vyjádřit podle Lagrangeovy věty ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,.$$

Označme $h = \sqrt{1 + (f')^2}$ na (a, b) a předpokládejme, že $h \in \mathcal{R}(a, b)$. Pak pro posloupnost dělení $\{D_n\}$, $D_n \prec D_{n+1}$, s $\nu(D_n) \to 0$ je

$$s(h; D_n) \le \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \le S(h; D_n)\,,$$

přičemž prostřední výraz je tvaru $\sigma(h; D_n, \xi)$ pro vhodnou volbu ξ. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ obdržíme pro délku grafu $L(f)$ funkce f vzorec

$$L(f) = (\mathcal{R})\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \,. \tag{11.52}$$

Tak jsme dokázali následující tvrzení:

Tvrzení 11.4.8. *Je-li $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a f' existuje v (a, b), platí vzorec* (11.52) *pokud integrál vpravo existuje.*

Vzorec (11.52) není ideální: nespočteme jím ani délku jednotkové půlkružnice popsané funkcí $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Derivace $f'(x) = -x/\sqrt{1 - x^2}$ není omezená na intervalu $(-1, 1)$ a Riemannův integrál je definován pouze pro omezené funkce. Proto dokážeme ještě další tvrzení, které nám umožní použít Newtonův integrál.

Tvrzení 11.4.9. *Je-li $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a derivace f' je spojitá v (a, b), je*

$$L(f) = (\mathcal{N})\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \,. \tag{11.53}$$

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že pro každý interval $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ lze délku grafu restrikce $L(f|[\alpha, \beta])$ spočíst oběma vzorci (11.52) a (11.53) (s mezemi α a β). Za uvedených předpokladů Riemannův integrál v (11.52) existuje a je roven Newtonovu integrálu. Přitom primitivní funkce H k $h = \sqrt{1 + (f')^2}$ je neklesající.

Je-li D dělení intervalu $[\alpha, \beta]$ a $D' = D \cup \{a, b\}$, je zřejmě

$$L(f; D) \le L(f; D') \quad \text{a tedy} \quad L(f|[\alpha, \beta]) \le L(f) \,.$$

Odtud dostáváme $H(\beta) - H(\alpha) = \int_\alpha^\beta h \le L(f)$ a také $H(b-) - H(a+) \le L(f)$. Pokud $H(b-) - H(a+) = \int_a^b h = +\infty$, je i $L(f) = +\infty$. Je-li $L(f) < +\infty$, zvolme nejprve $\varepsilon > 0$ a pak s využitím spojitosti f v krajních bodech $[a, b]$ zvolme $\delta > 0$ tak, že

$$\Delta_1(x) := \left((x - a)^2 + (f(x) - f(a))^2\right)^{1/2} < \varepsilon/3 \quad \text{pro všechna } x \in (a, a + \delta) \,,$$

$$\Delta_2(x) := \left((b - x)^2 + (f(b) - f(x))^2\right)^{1/2} < \varepsilon/3 \quad \text{pro všechna } x \in (b - \delta, b) \,.$$

Dále volme $D' \in \mathcal{D}(a, b)$ tak, aby $\ell(f; D') > L(f) - \varepsilon$. S ohledem na (11.50) lze předpokládat, že pro $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ je $x_1 \in (a, a + \delta)$ a $x_{n-1} \in (b - \delta, b)$. Položme ještě $[\alpha, \beta] = [x_1, x_{n-1}]$. Dále volme $D \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ tak, aby $\ell(f; D) \ge L(f|[\alpha, \beta]) - \varepsilon/3$. Potom je

$$\begin{aligned}\int_a^b h \ge \int_\alpha^\beta h = L(f|[\alpha, \beta]) \ge \ell(f; D) = \ell(f; D') - \Delta_1(x_1) - \Delta_2(x_{n-1}) \ge \\ \ge \ell(f; D') - 2\varepsilon/3 \ge L(f) - \varepsilon \,.\end{aligned}$$

Tím je však vzorec (11.53) pro výpočet $L(f)$ dokázán. □

Poznámka 11.4.10. Analogicky jako jsme při vyšetření délky křivky dospěli ke vzorci

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \ ,$$

lze definovat *povrch* P a *objem* V rotačního tělesa $Tf_{\mathrm{rot}} \subset \mathbb{R}^3$, vzniklého rotací „podgrafu“ spojité kladné funkce f na $[\,a,b\,]$ s derivací f' spojitou na (a,b) „kolem osy x“. Těleso Tf_{rot} je definováno pomocí vztahu

$$Tf_{\mathrm{rot}} := \big\{[\,x,y,z\,] \in \mathbb{R}^3;\ y^2+z^2 \le f^2(x),\ x \in [\,a,b\,]\big\} \ .$$

Definujeme

$$V(Tf_{\mathrm{rot}}) := \pi \int_a^b f^2\,, \quad \text{a} \quad P(Tf_{\mathrm{rot}}) := 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+(f')^2}\,,$$

pokud existuje integrál na pravé straně definiční rovnosti, ať již v Riemannově či Newtonově smyslu.

Tak lze eventuálně určit např. délku polokružnice, či povrch a objem speciálně položené koule v $\mathbb{R}^3$. Na rozdíl od délky křivky chápeme vzorce jako definice. Pokud bychom se opřeli o názor a pracovali např. s konečným sjednocením válečků či částí kuželových ploch, které tělesu opíšeme nebo vepíšeme, dospěli bychom ke shodě vzorečků s „intuitivní představou“.

Příklad 11.4.11 (délka polokružnice). Nechť $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$, $x \in [\,-r,r\,]$. Pak platí

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\,, \quad 1+(f'(x))^2 = 1+\frac{x^2}{r^2-x^2} = \frac{r^2}{r^2-x^2}\,.$$

Proto pro délka polokružnice o rovnici $y = \sqrt{r^2-x^2}$ platí

$$L(f) = \int_{-r}^{r} \frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}} = \Big[\,r\arcsin\frac{x}{r}\,\Big]_{x=-r}^{r} = \pi r\,.$$

Příklad 11.4.12. Rotací podgrafu funkce f z předcházejícího příkladu vznikne koule $K := Tf_{\mathrm{rot}}$ o rovnici $x^2+y^2+z^2 \le r^2$. Spočteme její objem

$$V(K) = \pi \int_{-r}^{r} (r^2-x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[\,r^2x - \frac{x^3}{3}\,\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

Příklad 11.4.13. Výpočet pro povrch koule K dává

$$P(K) = 2\pi \int_{-r}^{r} \frac{r\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}} = 2\pi r[x]_{x=-r}^{x=r} = 4\pi r^2\,.$$

Příklad 11.4.14. V úvodní kapitole jsme se zmínili o tom, že to byl již ARCHIMEDES (287 – 212 před n. l.), který jako první dokázal, že konstanty úměrnosti, vyskytující se ve vzorcích pro obvod a obsah kruhu, splývají (čtenář to nemusí shledávat jako zajímavé, když ví, že se v obou těchto vzorcích vyskytuje jako konstanta úměrnosti π). Imitujte tento důkaz tím, že dokážete rovnost $r \cdot$ „délka půlkružnice“ $= 2 \cdot$ „obsah půlkruhu“, tj. (využíváme částečně Příklad 11.4.11) rovnost

$$r \cdot \int_{-r}^{r} \frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}} = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Již dříve jsme se několikrát setkali s číslem π. Ukážeme si jednu „teoretickou aplikaci".

Příklad 11.4.15. Definujeme-li

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x \ , \quad n \in \mathbb{N}_0 \, ,$$

je

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, \mathrm{d}x \ = \pi/2 \, , \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x \ = -\big[\cos x \big]_{x=0}^{\pi/2} = 1 \, .$$

Je-li $n > 1$, užijeme Větu 11.3.13; položíme-li

$$F(x) = \sin^{n-1} x \, , \quad g(x) = \sin x \, ,$$
$$f(x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, , \quad G(x) = -\cos x \, ,$$

bude

$$I_n = -[\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, \mathrm{d}x \ =$$
$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, \mathrm{d}x \ = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \, ,$$

a je tedy

$$n I_n = (n-1) \, I_{n-2} \, , \quad I_n = \frac{n-1}{n} \, I_{n-2} \, .$$

Z této rekurentní formule plyne ihned pro sudá $n \in \mathbb{N}$ ($n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$) rovnost

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{1}{2} \, I_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} \cdot \frac{\pi}{2} \, , \tag{11.54}$$

a pro lichá n, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ ($n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$)

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{2}{3} \, I_1 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)} \, . \tag{11.55}$$

Poznámka 11.4.16. Příklad 11.4.15 vede k zajímavému vyjádření čísla π. V intervalu $[\,0, \pi/2\,]$ je $0 \le \sin \le 1$, a tedy je $(\sin)^n \ge (\sin)^{n+1}$, a např. Lemma 11.3.9 dává pro $m \in \mathbb{N}$ nerovnosti $I_{2m} \ge I_{2m+1} \ge I_{2m+2}$, tj. podle (11.54), (11.55)

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m)} \, \frac{\pi}{2} \ge \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2m+1)} \ge \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)(2m+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m)(2m+2)} \, \frac{\pi}{2} \, .$$

Odtud snadno dostaneme

$$\frac{\pi}{2} \ge \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2m+1} \ge \frac{2m+1}{2m+2} \cdot \frac{\pi}{2} \, .$$

Limitním přechodem pro $m \to \infty$ z toho podle Věty 2.3.2 plyne, že

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2m+1} =$$
$$= \lim_{m \to \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots (2m) \cdot (2m)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m-1) \cdot (2m+1)} \, . \tag{11.56}$$

Násobíme-li zlomek vpravo výrazem $(2m+2)/(2m+1)$, který má pro $m \to \infty$ limitu 1, dostaneme

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad 2m \quad \cdot \quad 2m \quad \cdot (2m+2)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \quad \cdots \quad \cdot (2m-1)\cdot (2m+1)\cdot (2m+1)} \tag{11.57}$$

Oba tyto vzorce (11.56), (11.57) dávají tzv. *Wallisovu formuli.*

Historická poznámka 11.4.17. Vzorec odvodil John Wallis (1616 – 1703) r. 1655, avšak podstatně jiným způsobem než my v předchozí poznámce. Několik generací matematiků poválečného období se učilo analýzu převážně z učebnic Vojtěcha Jarníka (1897 – 1970). Jarník byl velmi zručný počtář a tak není divu, že početní partie jeho učebnic jsou skvěle napsány. Předcházející příklad a poznámka jsou nepatrně upraveny krácením textu jeho učebnice [4], str. 73.

11.5 Technika „slepování“

Poměrně často se setkáváme s případem, kdy nám existenční věta zajišťuje existenci primitivní funkce ke zkoumané funkci, ale početní metoda nám ji přímo neposkytuje. Pomineme-li případy, kdy tuto primitivní funkci neumíme pomocí nám známých funkcí vyjádřit (např. k funkcím $\exp(-x^2)$ či $(\log x)^{-1}$), zbudou ještě např. důležité případy vyžadující „lepení“. Tuto techniku jsme již použili při důkazu Věty 11.3.11 k vytvoření zobecněné primitivní funkce F z funkcí F_1 a F_2. Nyní si „vícenásobné lepení“ primitivních funkcí objasníme na jednoduchém příkladě.

Příklad 11.5.1. Označme

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, \{2k; k \in \mathbb{Z}\}),$$

kde vzdálenost dist bodu x od množiny M je definována vzorcem

$$\operatorname{dist}(x, M) = \inf\{|x-y|; y \in M\}.$$

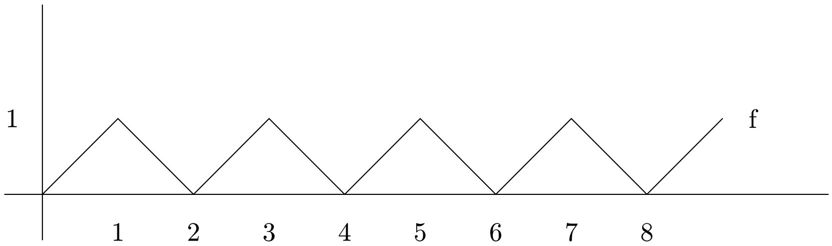
Snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & x &\in [0,1], & f(x) &= 2-x, & x &\in [1,2],\\ f(x) &= x-2, & x &\in [2,3], & f(x) &= 4-x, & x &\in [3,4], \dots \end{aligned}$$

a že f je 2-periodická funkce na $\mathbb{R}$, jejíž graf je znázorněn na Obr. 1. Bez obtíží spočteme, že $F(x) = x^2/2$ je zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na intervalu $[0,1]$, a $\lim_{x\to 1_-} F(x) = 1/2$. Položíme-li $G(x) = 2x - x^2/2$, je $G \in \operatorname{zpf}(f; [1,2]$ a $\lim_{x\to 1_+} G(x) = 3/2$.

Abychom vyrovnali rozdíl mezi $F(1)$ a $G(1)$, definujeme ještě další funkci $G_1(x) = G(x) - 1$, pro kterou je $G_1(1) = 1/2$, a definujme

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & x \in [0,1],\\ G_1(x), & x \in [1,2]. \end{cases}$$



Obr. 1.

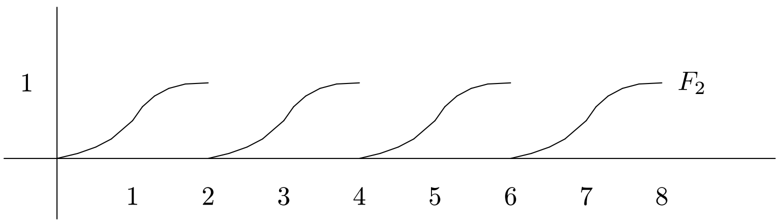
Potom $F_1 \in \operatorname{zpf}(f; [\,0,2\,])$ a protože $F_1'(1) = (G_1)'_+(1) = G'_+(1) = 1 = f(1)$, je na intervalu $(0,2)$ primitivní funkcí k f. Kromě toho

$$F_1(0) = 0\,, \quad F_1(2) = 1\,, \quad F_1'(0+) = F_1(2-) = 0\,. \tag{11.58}$$

Vytvoříme 2-periodické rozšíření F_2 funkce F_1 z intervalu $[\,0,2)$ na $\mathbb{R}$:

$$F_2(x) := F_1(x - 2k)\,, \quad x \in [\,2k, 2(k+1)),\;\; k \in \mathbb{Z}\,. \tag{11.59}$$

Funkce F_2 má v bodech tvaru $2k$, $k \in \mathbb{Z}$, hodnotu 0 a limitu zleva rovnou 1. Graf této funkce je znázorněn na Obr. 2. Tato funkce není spojitá, avšak pro všechna $x \in (\mathbb{R} \setminus \{2k; k \in \mathbb{Z}\})$ je $F_1'(x) = f(x)$.



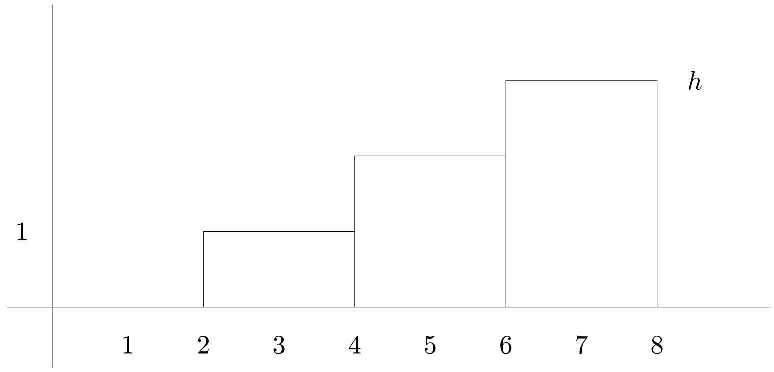
Obr. 2.

Z toho je patrné, že funkce

$$H(x) := F_2(x) + k\,, \quad x \in [\,2k, 2(k+1)),\;\; k \in \mathbb{Z} \tag{11.60}$$

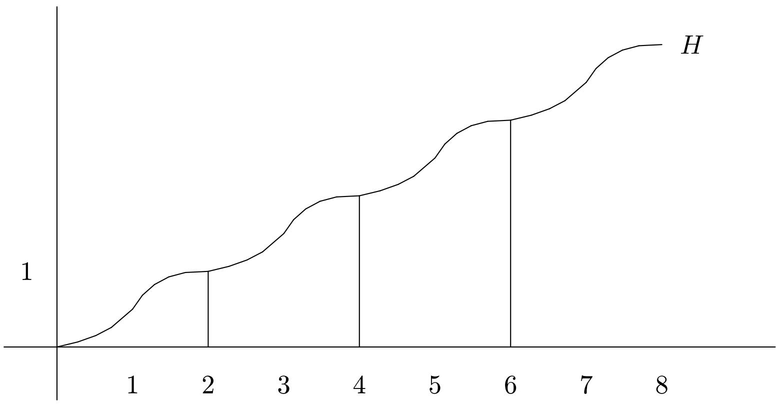
pro kterou je $H(2k) = H(2k-) = 2k$, bude spojitá na $\mathbb{R}$. Dále je $H'_+(2k) = 0$ a ze spojitosti H a $H'(2k-) = 0$ dostaneme podle Věty 7.1.2 také $H'_-(2k) = 0$, takže existuje oboustranná derivace $H'(2k) = f(2k) = 0$. Odtud vyplývá, že H je primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$. Definujeme-li $h(x) := [\,x/2\,]$, kde $[\,\centerdot\,]$ značí funkci celá část, je zápis (11.60) ekvivalentní se zápisem

$$H(x) = F_2(x) + \bigl[\,x/2\,\bigr]\,. \tag{11.61}$$



Obr. 3.

Graf funkce h je na Obr. 3, výsledná hledaná funkce H je zobrazena na Obr. 4. Zde „slepováním“ rozumíme nalezení funkce h takové, aby po přičtení h k F_2 byla tato funkce spojitá na $\mathbb{R}$.



Obr. 4.

Poznámka 11.5.2. Často lze zápis řešení příkladů analogických k Příkladu 11.5.1 zkrátit tím, že hodnoty v bodech „slepení“ explicitně nepočítáme. V Příkladu 11.5.1 bychom tak definovali F_2 pouze na množině $\mathbb{R} \setminus \{ 2k ; k \in \mathbb{Z} \}$ a popsali H jako spojité rozšíření F_2 na $\mathbb{R}$.

Obraťme se nyní k technicky složitějšímu příkladu, jehož řešení jsme odložili na pozdější dobu (srovnej s Příkladem 9.3.19). Poznamenejme, že s příklady tohoto typu se zpravidla programy typu *Mathematica*, nebo *Maple* [7]) (programy pro

[7]) Zde je nutno poznamenat, že relativně méně komplexní a nepoměrně lacinější *Derive* je zvládá.

„computer algebra", což je nevhodný, nicméně standardizovaný název, který proto raději nepřeložíme) neumějí vyrovnat.

Příklad 11.5.3. Hledejme primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + 2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{11.62}$$

V Kapitole 8 v Příkladu 9.3.19 jsme se dostali až k vyjádření

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + 2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}} =: F(x) \tag{11.63}$$

pro $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Nyní postupujeme dále jako v Příkladu 11.5.1. Spočteme limity

$$\lim_{x \to -\pi_+} F(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,, \qquad \lim_{x \to \pi_-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Odtud plyne, že (zobecněný) přírůstek funkce F na intervalu $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$ činí $2\pi/\sqrt{3}$. Sestrojíme funkci h

$$h(x) := \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right],$$

jejímž přičtením k nalezené funkci F získáme funkci H na $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, která mimo tyto body má za derivaci funkci f a která je *spojitě rozšiřitelná* na $\mathbb{R}$. Na libovolném omezeném intervalu (a, b) je toto spojité rozšíření H zobecněnou primitivní funkcí k funkci f, a tedy i primitivní funkcí k f. V bodech „lepení" to proto nemusíme ani ověřovat výpočtem, je $H'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Funkce H je tak popsána jako spojité rozšíření funkce

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right], \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

na $\mathbb{R}$ a každá jiná primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ se od H liší jen o aditivní konstantu.

11.6 Konvergence Newtonova integrálu

Příklad 11.6.1. Ukažme *elementárně*, že konverguje integrál

$$(\mathcal{N})\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože integrovanou funkci lze spojitě rozšířit na interval $[\,0, 1\,]$ tím, že ji položíme rovnu 1 v bodě 0, její integrál od 0 do 1 konverguje. Stačí proto dokázat konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,, \tag{11.64}$$

která je podle Věty 11.3.14 o substituci ekvivalentní s konvergencí integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \; .$$

Je totiž

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \; = \int_1^0 \frac{\sin(1/u)}{1/u} \left(-u^{-2}\right) \, \mathrm{d}u \; = \int_0^1 \frac{1}{u} \sin \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u \; .$$

Metodou per partes spočteme

$$\int_0^1 \cos \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \; = \left[x \cos \frac{1}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \; ,$$

a protože první člen na pravé straně rovnosti je konečný a $\cos(1/x)$ je spojitá omezená funkce na intervalu $(0,1)$, konverguje i integrál na pravé straně rovnosti.

Nyní dokážeme, že je

$$(\mathcal{N})\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} \, \mathrm{d}x \; = +\infty \, .$$

Protože integrál od 0 do π z integrované funkce je konečný, stačí dokázat, že limita *neklesající* primitivní funkce $G(x) := \int_\pi^x (|\sin t|/t) \, \mathrm{d}t$ má v $+\infty$ limitu $+\infty$, což je ekvivalentní s $\int_\pi^\infty \left(|\sin t|/t\right) \mathrm{d}t \; = +\infty$. Na intervalu $[\, k\pi, (k+1)\pi \,]$ pro $k \in \mathbb{N}$ je

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} \qquad \text{a} \qquad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \, \mathrm{d}x \; = 2 \, ,$$

z čehož dostáváme

$$G((n+1)\pi) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \, .$$

Odtud však již plyne, že $\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$.

Vidíme, že pro Newtonův integrál může nastat případ, kdy

$$\int_a^b f \;\; \text{konverguje} \;\; \text{a} \;\; \int_a^b |f| = +\infty \, . \tag{11.65}$$

Definice 11.6.2. Jestliže oba integrály v (11.65) konvergují, říkáme, že

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \quad \textit{konverguje absolutně.}$$

Za situace (11.65) říkáme, že

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \quad \textit{konverguje neabsolutně.}$$

(Srovnejte s analogickou terminologií u absolutní a neabsolutní konvergence řad).

V praktických příkladech se zpravidla dá interval, přes který se integruje, rozdělit na konečný počet intervalů, v nichž se existence integrálu vyšetřuje snadněji. Někdy lze srovnáním rozhodnout o absolutní konvergenci poměrně jednoduše:

Věta 11.6.3. *Nechť $-\infty < a < b \le +\infty$ a nechť f je spojitá v $[\,a, b)$. Nechť existuje funkce g taková, že $|f| \le g$ (na $[\,a, b)$) a že Newtonův integrál $\int_a^b g$ konverguje. Potom konvergují i integrály*

$$\int_a^b f \quad a \quad \int_a^b |f| \,. \tag{11.66}$$

Analogická věta platí i pro interval $(a, b\,]$.

Důkaz. Protože ze spojitosti f plyne spojitost $|f|$ a protože $\int_a^b g$ konverguje, konvergují pro každé $x \in (a, b)$ integrály

$$F_1(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \,, \quad F_2(x) := \int_a^x \bigl|\, f(t) \bigr|\,\mathrm{d}t \,, \quad G(x) := \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \,,$$

které jsou zároveň zobecněnými primitivními funkcemi k f, $|f|$ a g v (a, b). Konvergence integrálů od a do b funkcí f, $|f|$ a g je ekvivalentní s existencí konečných limit $F_1(b-)$, $F_2(b-)$ a $G(b-)$, tedy s platností příslušných Bolzano-Cauchyho podmínek. Pro funkci G je tato podmínka splněna, pro funkce F_1 a F_2 ji dokážeme.

Víme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje b', $a < b' < b$ tak, že

$$(b' < x < y < b) \implies (0 \le G(y) - G(x) < \varepsilon) \,. \tag{11.67}$$

Funkce G je neklesající, protože g je nezáporná, takže $|G(y) - G(x)| = G(y) - G(x)$ a pro zobecněnou primitivní funkci F_1 k f na (a, b) je

$$|F_1(y) - F_1(x)| = \Bigl| \int_x^y f \Bigr| \le \int_x^y |f| \le \int_x^y g = G(y) - G(x) < \varepsilon \,,$$

přičemž $\int_x^y |f| = F_2(y) - F_2(x)$; z toho je patrné, že Bolzano-Cauchyho podmínka pro existenci konečných limit $F_1(b-)$ a $F_2(b-)$ je skutečně splněna. $\square$

Poznámky 11.6.4. 1. Pracujeme-li s nezápornými funkcemi f, g, které jsou spojité na $[\,a, b)$, lze vyslovit větu ještě podobnější srovnávacímu kritériu pro řady: nechť

$$0 \le f \le g \ \text{ na } \ [\,a, b) \,.$$

Potom

$$\int_a^b g \text{ konverguje} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \text{ konverguje}$$

a také

$$\int_a^b f = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g = +\infty \,.$$

Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil zformulovat a dokázat obdobnou větu pro případ, že

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \qquad A \in (0,\infty)\,.$$

Tak se dostane užitečný nástroj pro praktické výpočty.

2. Podle Věty 11.6.3 s ohledem na nerovnost

$$\Big|\,\frac{\sin x}{x^2}\,\Big| \le \frac{1}{x^2}\,, \quad x \in [\,1,\infty)\,, \qquad \text{a} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^\infty = 1$$

dostaneme existenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Analogický přístup k integrálu (srovnej Příklad 11.6.1)

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

však selže. Tak jako Leibnizovo kritérium umožňovalo rozhodnout o konvergenci některých neabsolutně konvergentních řad, existují též kritéria pro existenci neabsolutně konvergentních integrálů. Je již pak věcí praxe při studiu konkrétních příkladů nalézt způsob, jak eventuálně rozdělit integrační obor na části, na nichž můžeme nalezená kritéria použít. Vyslovíme proto příslušná kritéria ve velmi jednoduché podobě. Dříve však dokážeme tzv. *věty o střední hodnotě integrálního počtu*, které budeme k dalšímu důkazu potřebovat.

Věta 11.6.5 (1. věta o střední hodnotě, Cauchy 1821). *Nechť funkce f, g jsou z $\mathcal{C}([\,a,b\,])$, $g \ge 0$. Potom existuje $\zeta \in [\,a,b\,]$ tak, že*

$$\int_a^b fg = f(\zeta)\int_a^b g\,.$$

Důkaz. Pro $g \equiv 0$ v $[\,a,b\,]$ věta platí s libovolným $\zeta \in [\,a,b\,]$. Není-li $g \equiv 0$, existuje bod $c \in (a,b)$ tak, že $g(c) > 0$. Ze spojitosti funkce g plyne existence intervalu $(\gamma,\delta) \subset (a,b)$, obsahujícího bod c, v němž je všude $g > g(c)/2$. Z toho plyne, že

$$\int_a^b g = \int_a^\gamma g + \int_\gamma^\delta g + \int_\delta^b g \ge 0 + g(c)(\delta-\gamma)/2 + 0 > 0\,. \tag{11.68}$$

Jsou-li m, M minimum a maximum f na $[\,a,b\,]$, je

$$mg \le fg \le Mg\,,$$

a tedy též

$$m\int_a^b g \le \int_a^b fg \le M\int_a^b g\,, \quad \text{tj.} \quad m \le \int_a^b fg\Big(\int_a^b g\Big)^{-1} \le M\,.$$

Z Darbouxovy věty plyne existence $\zeta \in [\,a, b\,]$, pro něž je

$$f(\zeta) = \int_a^b fg \left(\int_a^b g\right)^{-1},$$

což dává žádanou rovnost. □

Věta 11.6.6 (2. věta o střední hodnotě). *Nechť f, g jsou spojité funkce na $[\,a, b\,]$, nechť g je monotónní na $[\,a, b\,]$ a g' je spojitá na (a, b). Potom existuje $\zeta \in [\,a, b\,]$ tak, že*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^\zeta f + g(b) \int_\zeta^b f\,. \tag{11.69}$$

Důkaz. Je-li $g' \geq 0$, a F primitivní funkce k f, pak dostáváme integrací per partes

$$\int_a^b fg = \Big[\,Fg\,\Big]_a^b - \int_a^b Fg' \tag{11.70}$$

a podle 1. věty o střední hodnotě rovnost

$$\int_a^b Fg' = F(\zeta) \int_a^b g' = F(\zeta)\Big[\,g(b) - g(a)\,\Big]\,. \tag{11.71}$$

Rozepíšeme-li první člen v (11.70) a užijeme-li (11.71), dostaneme

$$\int_a^b fg = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\zeta)g(b) + F(\zeta)g(a)\,,$$

což je jen jiný tvar (11.69).

Obdobně lze postupovat v případě, že g je nerostoucí; jednodušší ale je aplikovat (11.69) na funkci $-g$. □

Věta 11.6.7 (Abel, Dirichlet). *Nechť funkce f a g' jsou spojité v $[\,a, b)$ a nechť g je monotónní. Potom integrál*

$$(\mathcal{N})\int_a^b fg \quad \textit{konverguje}\,,$$

je-li splněna některá z následujících podmínek:

(1) *(Abel) konverguje $(\mathcal{N})\int_a^b f$ a g je omezená v $[\,a, b)$;*

(2) *(Dirichlet) funkce f má v $[\,a, b)$ omezenou zobecněnou primitivní funkci a $g(x) \to 0$ pro $x \to b_-$.*

Obdobné tvrzení platí i pro intervaly $(a, b\,]$.

Důkaz. Protože předpoklady zaručují existenci $\Phi \in \mathrm{zpf}(fg;(a,b))$, zbývá dokázat existenci konečné limity $\Phi(b-)$. Užijeme k tomu příslušnou Bolzano-Cauchyho podmínku spolu s 2. větou o střední hodnotě.

Nechť platí (1) a nechť $F \in \mathrm{zpf}(f;(a,b))$. Protože F má konečnou limitu $F(b-)$ a protože $|g| \le M$ pro vhodné $M \in (0,\infty)$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ bod $b' \in (a,b)$ tak, že $x,y \in (b',b) \implies (|F(y)-F(x)| < \varepsilon/2M)$, takže pro vhodné $\zeta \in (x,y)$ je

$$|\Phi(y)-\Phi(x)| = \Big|\int_x^y fg\Big| \le$$
$$\le |g(x)||F(\zeta)-F(x)| + |g(y)||F(y)-F(\zeta)| < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\,. \tag{11.72}$$

Platí-li podmínka (2), nechť $F \in \mathrm{zpf}(f;(a,b))$ vyhovuje podmínce $|F| \le M$ s vhodným $M \in (0,\infty)$, a tedy i podmínce $x',y' \in (a,b) \Rightarrow |F(y')-F(x')| < 2M$. Protože $g(b-) \in \mathbb{R}$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ bod $b' \in (a,b)$ tak, že $|g| < \varepsilon/4M$ v intervalu (b',b), načež podobně jako v (11.6) můžeme odhadnout s vhodným $\zeta \in (x,y)$

$$b' < x < y < b \implies |\Phi(y)-\Phi(x)| =$$
$$= |g(x)||F(\zeta)-F(x)| + |g(y)||F(y)-F(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{4M}(2M+2M) = \varepsilon\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 11.6.8. Jak ukážeme v poslední kapitole, platí analogická tvrzení i pro řady.

Příklady 11.6.9. 1. Pomocí Vět 11.6.3 a 11.6.7 dokážeme pro všechna $\alpha > 0$ konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,. \tag{11.73}$$

Je-li $\alpha > 1$, stačí integrand odhadnout funkcí $1/x^\alpha$, protože $\int_1^\infty 1/x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje. Podle Věty 11.6.3 je v tomto případě konvergence integrálu v (11.73) absolutní. Je-li $0 < \alpha \le 1$, stačí vzít v úvahu, že funkce $\sin x$ má omezenou primitivní funkci $(-\cos x)$ a že funkce $1/x^\alpha$ je klesající a má v $+\infty$ limitu 0. V tomto případě snadno nahlédneme (srov. s Příkladem 11.6.1), že konvergence je neabsolutní.

2. Pomocí Věty 11.6.3 a analogie Věty 11.6.7 pro intervaly tvaru $(a,b\,]$ ukažme, že integrál

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\exp x^2}{1+\exp x^2}\,\frac{\cos x}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x \tag{11.74}$$

konverguje neabsolutně. Označme $f(x) := \cos x/\sqrt{|x|}$. Protože funkce $\cos x$ má na intervalu $(-\infty,0)$ omezenou primitivní funkci $\sin x$ a protože funkce $1/\sqrt{|x|}$ je rostoucí a omezená v $(-\infty,-1\,]$, integrál $\int_{-\infty}^{-1} f$ konverguje neabsolutně. V intervalu $(-1,0)$ je $0 < f(x) \le 1/\sqrt{|x|} =: g(x)$, přičemž $\int_{-1}^0 g = 2$ a tedy tento integrál konverguje. Podle Věty 11.6.3 konverguje i $\int_{-1}^0 f$, a to absolutně. Tím je dokázána neabsolutní konvergence integrálu $\int_{-\infty}^0 f$.

Jak snadno nahlédneme, funkce $h(x) := \big(\exp x^2\big)/(\exp x^2+1)$ je v intervalu $(-\infty, 0)$ klesající a omezená (je $1/2 \le h(x) \le 1$), takže podle Abelova kritéria konverguje neabsolutně nejen $\int_{-\infty}^{0} f$, ale i integrál v (11.74).

Historické poznámky 11.6.10. K větám, které jsme pouze připomněli, se vrátíme jen velmi stručně. Věta 2.1.19, resp. její modifikace (Věta 2.2.12) souvisejí se základní vlastností $\mathbb{R}$, obsaženou v axiomu (13). Také Věta 2.4.1 je jen jinou variantou Věty 2.1.19. Patrně pro svůj velmi názorný charakter byla pokládána za „samozřejmou“ dávno před tím, než si Bernard Bolzano (1781 – 1848) uvědomil, že je nutno ji dokázat, a než matematici nastoupili cestu k reformě, spočívající v položení lepších základů pro budování matematických teorií. Ta nebyla dílem jedince, ale mnoha těch, kteří různou měrou přispěli k procesu, započatému Bolzanem, Cauchym, a Nielsem Henrikem Abelem (1802 – 1829) a završenému později Carlem Theodorem Wilhelmem Weierstrassem (1815 – 1897), Georgem Cantorem (1845 – 1918) a dalšími.

Věta 2.4.1 byla dokázána teprve Weierstrassem, ale tak jako u ostatních tvrzení šlo o dovršení dlouhého vývoje, který byl podrobněji popsán již v předcházejících komentářích. Věta 5.2.26 nemá zásadní praktický význam. Je ukázkou jiné cesty k řešení rovnice $y' = 0$ *na intervalu* bez použití věty o střední hodnotě. Ukázali jsme její použití při důkazu Lemmatu 11.3.4.

Větu 2.4.4 dokázal Weierstrass r. 1874, věty s ní související jsou zpravidla jen jejími variacemi. I pojmy $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ znal v podstatě již dlouho před Cauchym (1800) Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) a Abel (nepublikováno). Jsou připisovány Cauchymu (1821), označení pochází patrně od Moritze Pasche (1843 – 1930).

Věty o spojitých funkcích na uzavřeném intervalu tvoří jeden z vrcholů základů analýzy. Větu 4.3.31 uváděl Weierstrass ve svých přednáškách již r. 1861, publikoval ji však Cantor (1870). Věta 4.3.32 byla intuitivně dlouhou dobu „geometricky zřejmá“. Užíval ji např. již r. 1594 Simon Stevin (1548 – 1620). Bolzano a Cauchy byli patrně první, kteří si uvědomili, že takové tvrzení není zřejmé a je nutné ho dokazovat. Zobecnění pro funkce více proměnných dokázal Darboux r. 1872.

Skutečně zásadní význam Věty 4.3.46 o pokrývání pro další vývoj matematiky bude čtenáři zřejmější až po přečtení Kapitol 12 a 13 o metrických prostorech. U nás bývá často nazývána po Emilu Borelovi (1871 – 1956) a Lebesgueovi . Borel ji však dokázal r. 1895 pro *spočetná* otevřená pokrytí a teprve Lebesgue dokázal verzi s *libovolným* otevřeným pokrytím. Ještě dříve dokázal Eduard Heinrich Heine (1821 – 1881) tvrzení, které někteří autoři považují za rozhodující krok pro důkaz Věty 4.3.46. Proto užívají pro Větu 4.3.46 označení *Věta Heine-Borelova* (je to např. běžné v rusky psané literatuře).

Větu 11.1.3 o stejnoměrné spojitosti dokázal podle jiných pramenů již r. 1854 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859). Přínos Heineho je zde nepopiratelný, často však nová metoda důkazu ovlivní i terminologii. Jean Gaston Darboux (1842 – 1917) se nejen velmi zasloužil o prozkoumání vlastnosti nabývání mezihodnot, ale patří mu i myšlenka užití horního a dolního Riemannova integrálu. S ohledem na to, že jsme v této kapitole zavedli množiny nulové Lebesgueovy míry, doplňme ještě jednu informaci o vlastnostech funkcí, které mají Darbouxovu vlastnost. Dá se dokázat, že *k jakékoli funkci* f definované na $\mathbb{R}$ existuje funkce s Darbouxovou vlastností g tak, že

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq g(x)\}) = 0\,,$$

tj. že g se liší od f nejvýše na množině Lebesgueovy míry 0 (viz Definici 11.2.24).

Náš přístup k Riemannovu integrálu je poplatný dalšímu vývoji v 19. století, o nějž se zasloužil mimo Darbouxe i Paul Du Bois Reymond (1831 – 1899). Několik poznámek k vývoji pojmu integrálu jsme uvedli již v textu této kapitoly. Přesto to zajímavější, tedy další vývoj integrálu v tomto století, nebylo možné popsat, neboť to značně přesahuje rámec této knihy.

Moderní partie matematiky i jejich aplikace jsou založeny na daleko obecnějším Lebesgueově integrálu, který má navíc ve srovnání s Riemannovým integrálem podstatně jednodušší vlastnosti. Zájemce o bližší poznání historie teorie integrálu odkazujeme na knížku [8].

Cesta k důkazu existence primitivní funkce ke spojité funkci přes Riemannův integrál není jediná možná. Zabývali jsme se jím mj. proto, že jsme pomocí něj dokázali Větu 11.2.45. Početní význam má však spíše integrál Newtonův, s trochou nadsázky je totiž jediným integrálem, který umíme počítat. Výpočet integrálu Riemannova se na výpočet Newtonova integrálu převádí. V tom má zásadní význam Věta 11.3.16.

První větu o střední hodnotě integrálního počtu lze nalézt opět již u Cauchyho (1821), ale i ona prošla určitým vývojem. Cauchy současně dokázal nejprve verzi s $g \equiv 1$, která ukazuje do jisté míry souvislost integrálu a obecněji chápaného *průměru*: je-li $f \in \mathcal{C}([a,b])$, existuje bod $\zeta \in [a,b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\zeta)(b-a)\,.$$

Někdy bývá Věta 11.6.5 připisována, stejně jako věta Lagrangeova, Ossianu Bonnetovi (1819 – 1892) (1849). Větu 11.6.6 dokázal první patrně Du Bois Reymond.

Poslední poznámku věnujme 20. století. Lebesgue vytvořil nyní všeobecně používanou teorii integrálu, který nese jeho jméno, r. 1902. I tento integrál však má své nedostatky. Je potěšitelné, že integrál, který zobecňuje Riemannův postup, nese jméno českého matematika. Definoval jej totiž Jaroslav Kurzweil (1926 –) a nezávisle též Ralph Henstock (1923 –). Jejich definice je založena na součtech podobných $\sigma(f; D, \xi)$ dává však mnohem širší třídu integrovatelných funkcí. Pro její pochopení je však předchozí seznámení s Riemannovým integrálem velmi výhodné.

I další čeští matematici přispěli významně k propagaci užívání tohoto integrálu. U nás je snadno dostupná kniha [7], která ja věnována teorii tohoto integrálu.

Literatura:

[1] Bourbaki, N.: *Funkcii dějstvitělnogo peremennogo*, Nauka, Moskva, 1965, (část Encyklopedie moderní matematiky, překlad z francouzského originálu: *Fonctions d'une variable réele* (*Théorie élémentaire*), Herrmann, Paris).

[2] Černý, I., Rokyta, M.: *Differential and integral calculus of one real variable*, Karolinum, Praha, 1998.

[3] Flett, T. M.: *Some historical notes and speculations concerning the mean value theorems of the differential calculus*, The Institute of Mathematics and its Applications, 1974.

[4] Jarník, V.: *Diferenciální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1963.

[5] Jarník, V.: *Integrální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, 1963.

[6] Lebesgue, H.: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au College de France*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[7] Schwabik, Š.: *Integrace v* $\mathbb{R}$ (*Kurzweilova teorie*), Karolinum, Praha, 1999.

[8] Schwabik, Š., Šarmanová P.: *Malý průvodce historií integrálu*, Prometheus, Praha, 1996, (Dějiny matematiky, Svazek 6).