Příklady ke cvičení z Míry a integrálu II 2012/13

Většina následujících cvičení je vybrána ze skript J. Lukeš: *Příklady z matematické analýzy I. Příklady k teorii Lebesgueova integrálu* a ze skript I. Netuka, J. Veselý: *Příklady z matematické analýzy. Míra a integrál.* Malá část má „folklorní“ charakter nebo je vybrána z jiných zdrojů. Tam, kde jsem nechtěl zasahovat do původních znění příkladů, se mohou některé jejich části opakovat.

Cvičení 1 : Nechť $A_k \subset X$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Popište všechny prvky σ-algebry generované $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Cvičení 2 : Pro dané a, $0 \leq a < 1$, sestrojte v intervalu $[0, 1]$ dokonalou řídkou podmnožinu Lebesgueovy míry a. Lze takovou podmnožinu sestrojit pro $a = 1$? Lze sestrojit v intervalu $[0, 1]$ podmnožinu 1. kategorie, která by měla Lebesgueovu míru 1?

Cvičení 3 : Dokažte, že pro $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$, platí

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \quad \text{konverguje, právě když} \quad \alpha > 1\,,$$
$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} \quad \text{konverguje, právě když} \quad \alpha < 1\,.$$

Cvičení 4 : Dokažte, že e^{-x^2} je lebesgueovsky integrovatelná na $\mathbb{R}^+$, tj. že platí $\mathrm{e}^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,\infty)}$!

Cvičení 5 : Ukažte několika způsoby, že $\mathrm{e}^{-x} \in \mathcal{L}_{(0,\infty)}$!

Cvičení 6 : U funkcí (integrálů) z následujícího seznamu zkoumejte existenci a konvergenci Lebesgueova integrálu, ev. rozhodněte také, zda integrál existuje jako Riemannův či Newtonův. Pro kontrolu je vždy uveden výsledek ($\mathcal{L}$ užíváme k označení L-integrovatelných funkcí, $\mathcal{L}^*$ označuje systém všech funkcí, jejichž L-integrál existuje).

1. $\mathrm{e}^{-x} \in \mathcal{L}(0,\infty)$
2. $\log x \in \mathcal{L}(0,1)$
3. $\dfrac{\log(1-x)}{x} \in \mathcal{L}(0,1)$
4. $\dfrac{\log(1+x)}{x} \in \mathcal{L}(0,1)$
5. $\dfrac{\log x}{1-x} \in \mathcal{L}(0,1)$
6. $\dfrac{\log x}{1+x^2} \in \mathcal{L}(0,\infty)$
7. $\log \sin x \in \mathcal{L}(0,\pi/2)$
8. $(1-x^4)^{1/4} \in \mathcal{L}(0,1)$
9. $(\log x)^{-1} \in \mathcal{L}^*(0,1) \setminus \mathcal{L}(0,1)$
10. $\big(x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\big)^{-1/3} \in \mathcal{L}(0,1)$
11. $\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$
12. $\int_1^\infty \dfrac{1}{x\big(x^2+1\big)^{1/3}}\,\mathrm{d}x < +\infty$

13. $\dfrac{1}{x^3+x} \in \mathcal{L}(0,\infty)$

14. $\int_0^\infty \dfrac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4+1}$ [konverguje]

15. $\int_0^\infty \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^3+1}$ [konverguje]

16. $\sin^2 \dfrac{1}{x} \in \mathcal{L}(1,\infty)$

17. $\int_0^\pi \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$ [konverguje]

18. $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ [konverguje]

19. $\int_0^1 (\log x)\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ [konverguje]

20. $\int_0^\infty \dfrac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ [konverguje]

21. $\int_0^1 \dfrac{\cos(1/x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ [konverguje]

22. $\int_0^1 \dfrac{\log x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = -\infty$

23. $\int_1^\infty \dfrac{\log x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ [konverguje]

24. $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ [konverguje]

25. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+x^{-2})}\,\mathrm{d}x$ [konverguje]

26. $\int_1^\infty x^{(1/x)}\,\mathrm{d}x = +\infty$

27. $\int_0^2 \dfrac{\log x\,\mathrm{d}x}{2-x} = +\infty$

28. $\int_{-1}^1 \cos\Big[\sin\dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^{1/x}\Big]\,\mathrm{d}x$ [konverguje]

29. $\int_{-1}^1 \left(\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|^{\mathrm{e}^{1/x}}\right)\mathrm{d}x$ [konverguje]

30. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ [konverguje]

31. $\int_0^1 (\log x)\sin(1/x)\,\mathrm{d}x$ [konverguje]

32. $\int_0^1 x^{-1/3}\sin(1/x)\,\mathrm{d}x$ [konverguje]

33. $\int_2^\infty \dfrac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$

34. $\dfrac{1}{x^2(x+1)} \in \mathcal{L}(1,\infty)$

35. $\int_1^\infty \dfrac{x^3+1}{x^4}\,\mathrm{d}x = +\infty$

36. $\int_1^\infty \dfrac{\log(1+x^2)}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$

37. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \in \mathcal{L}(0,1)$

38. $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1}$ [konverguje]

39. $\int_0^1 \dfrac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}$ [konverguje]

40. $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\cos x}$ [diverguje]

41. $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ [konverguje]

42. $\int_1^\infty \dfrac{x+1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = +\infty$

43. $\dfrac{x^2}{1+x^4} \in \mathcal{L}(0,\infty)$

44. $\int_0^\infty \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ [konverguje]

45. $\dfrac{x}{(1+x)^3} \in \mathcal{L}(0,\infty)$

46. $\int_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+5x+3}}$ [konverguje]

47. $\int_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+5\right)^{1/3}}$ [diverguje]

48. $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x\log x}$ [diverguje]

49. $\int_{-1}^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{(x)^{1/3}}$ [konverguje]

50. $\int_{-1}^1 \dfrac{4x^3\,\mathrm{d}x}{x^4-1}$ [diverguje]

Cvičení 7 : Nechť f je měřitelná funkce definovaná na $\mathbb{R}$ a nechť $f^k : x \mapsto \big(f(x)\big)^k$. Rozhodněte v závislosti na $k \in \mathbb{N}$ o měřitelnosti funkce f^k.

Cvičení 8 : Nechť f je funkce definovaná na $\mathbb{R}$ a nechť $f^k : x \mapsto \big(f(x)\big)^k$ je měřitelná. Rozhodněte v závislosti na $k \in \mathbb{N}$ o měřitelnosti funkce f.

Cvičení 9 : Ukažte, že prostor $\mathcal{C}([a,b])$ všech spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ není úplný v „integrální metrice“ $\rho(f,g) = \int_a^b |f-g|$, $f,g \in \mathcal{C}([a,b])$. Zkoumejte zúplnění tohoto metrického prostoru.

Cvičení 10 : Dokažte, že integrál
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$
konverguje, právě když $\alpha \in (1,2)$!

Cvičení 11 : Dokažte, že integrál
$$\int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
konverguje, právě když $s \in (0,\infty)$! Integrál definuje hodnotu funkce $\Gamma(s)$.

Cvičení 12 : Dokažte, že platí

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{px}\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $p > 0$,
2. $x^2\cos ax \in \mathcal{L}(0,2\pi)$ konverguje pro každé $a \in \mathbb{R}$,
3. je-li $a \in (0,\infty)$, pak $\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-ax} \in \mathcal{L}(0,\infty)$
4. $\displaystyle\int_0^\infty x^k\,\mathrm{d}x$ diverguje pro všechna $k \in \mathbb{R}$,
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $n \in (1,2)$.

Cvičení 13 : Proveďte diskusi existence a konvergence integrálu
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,.$$
Pro srovnání proveďte stejnou diskusi pro Newtonův integrál!

Cvičení 14 : Dokažte, že
$$\frac{\sin x}{(1-x^2)^a} \in \mathcal{L}(-1,1) \quad \text{pro} \quad a \in (-\infty,1)\,, \quad \text{a pro} \quad a \geq 1 \quad \text{je}$$
$\dfrac{\sin x}{(1-x^2)^a}$ měřitelná, ale integrál na intervalu $(-1,1)$ neexistuje!

Cvičení 15 : Dokažte, že neexistují Lebesgueovy integrály
$$\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{-\infty}^\pi \cos x\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}\,,$$
a že
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
existuje, avšak je roven $+\infty$!

Cvičení 16 : $(*)$ Vyšetřujte existenci integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x\,|\sin x|^a}$$

v závislosti na reálném parametru a!

Cvičení 17 : Nechť funkce f má na intervalu (a,b) všude vlastní derivaci. Dokažte, že pak je f' bodovou limitou spojitých funkcí (a je tedy měřitelná).

Cvičení 18 : $(*)$ Nechť funkce f je derivací funkce $x \mapsto x^2 \sin \frac{\pi}{x^2}$ na intervalu $(0,1)$. Ukažte, že pak je f na tomto intervalu newtonovsky integrovatelná, ale Lebesgueův integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje.

Cvičení 19 : Sestrojte funkci f s omezenou derivací f' na $[0,1]$, pro kterou Riemannův integrál z f' přes interval $[0,1]$ neexistuje.

Cvičení 20 : Definujme $f(x) = x^{-1/2}\big(1 + |\log x|\big)^{-1}$, $x \in (0,+\infty)$. Ukažte, že $f \in \mathcal{L}^p(0,+\infty)$, právě když je $p = 2$.

Cvičení 21 : Ukažte, že je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big(\frac{x}{1+x^2}\Big)^n \,\mathrm{d}x = 0\,!$$

Cvičení 22 : Ukažte, že je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x = 0\,!$$

Cvičení 23 : Dokažte, že je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = 0\,!$$

Cvičení 24 : Dokažte přímým výpočtem a také pomocí Lebesgueovy věty, že je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = 0\,!$$

Cvičení 25 : Ukažte pomocí Leviho a Lebesgueovy věty, že je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = 0\,!$$

Cvičení 26 : Zjistěte definiční obor funkce F proměnné α, definované vzorcem

$$F(\alpha) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$$

a funkci podrobněji vyšetřete!

Cvičení 27 : Spočtěte limity funkce

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

v krajních bodech „definičního oboru“ $(0, \infty)$!

Cvičení 28 : Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx}\,\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x = 0$$

pro jakékoli $a \in \mathbb{R}$!

Cvičení 29 : Nechť $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ je prostá posloupnost všech čísel z $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ a nechť f_n je charakteristická funkce množiny $\{r_1, \dots r_n\}$, $n = 1, 2, \dots, n$. Ukažte, že f_n tvoří rostoucí posloupnost, konvergující k restrikci Dirichletovy funkce na $(0,1)$. Vyšetřete integrabilitu všech zmíněných funkcí a limitní přechod s ohledem na tvrzení, která znáte.

Cvičení 30 : Nechť $1 \le p < +\infty$. Položme $f_n := n \cdot \chi_{[1/n,\,2/n]}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro posloupnost $\{f_n\}$ potom platí

(a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$;
(b) $\{f_n\}$ nekonverguje v $\mathcal{L}^p$ pro všechna $p \in [1, +\infty)$;
(c) $\{f_n\}$ konverguje podle míry;
(d) $\{f_n\}$ konverguje *skoro stejnoměrně*, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $A \subset \mathbb{R}$, $\lambda^1(A) < \varepsilon$, přičemž $f_n(x) \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R} \setminus A$.

Cvičení 31 : Vyšetřujte oprávněnost limitního přechodu za znamením integrálu, tj. zkoumejte, zda platí

$$\int_M \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n$$

v následujících případech:

(a) $f_n(x) = 1$ pro $x \in [n, \infty)$, $f_n = 0$ na $M \setminus [n, \infty)$, kde $M = \mathbb{R}$;
(b) $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $M = [0, 1]$;
(c) $f_n(x) = n x^{-nx^2}$, $M = (0, 1)$;
(d) $f_n(x) = n x \mathrm{e}^{-nx^2}$, $M = (0, 1)$, $M = (1, \infty)$, $M = (0, \infty)$.

Cvičení 32 : Určete ve všech následujících případech

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda^1$$

a porovnejte výsledky s konvergenčními větami :

(a) $f_n = \chi_{[0,n]}$; (b) $f_n = n^{-1}\chi_{[n,\infty]}$;
(c) $f_n = n^{-1}\chi_{[0,n]}$; (d) $f_n = n\chi_{[1/n,2/n]}$.

Cvičení 33 : Spočítejte limity:

(a) $\lim_{y\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy} \sin x \, \mathrm{d}x$;
(b) $\lim_{y\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy} \cos x \, \mathrm{d}x$;
(c) $\lim_{x\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \, \mathrm{d}t$.

Cvičení 34 : Na posloupnosti $\{f_n\}$ funkcí $f_n := \chi_{[n,+\infty)}$, $n \in \mathbb{N}$, ukažte, že předpoklad konečnosti míry je v Jegorovově větě podstatný.

Cvičení 35 : Na $\mathbb{N}$ uvažujte aritmetickou míru μ. Položte

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \qquad x \in \mathbb{N}, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Ukažte, že předpoklad konečnosti míry je v Jegorovově větě podstatný.

Cvičení 36 : Ukažte, že konverguje řada $\sum_{k=1}^\infty k^{-2}$! Její součet je (jak později dokážeme, jde o tzv. Basilejský problém) roven $\pi^2/6$. Ukažte, že odtud vyplývá např.

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{24}, \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{(k)^2} = \frac{\pi^2}{12} \,!$$

Cvičení 37 : Dokažte, že

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}, \quad \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} \, \mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{6} \quad !$$

Cvičení 38 : Rozhodněte, zda platí

$$\int_0^\infty \frac{x \, \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \int_0^\infty \frac{x \, \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{\pi^2}{12} \quad !$$

Cvičení 39 : Dokažte, že platí

$$\int_0^\infty \log\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}, \qquad \int_0^\infty \log\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12} .$$

Cvičení 40 : Dokažte, že

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \cos \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!} \quad .$$

Cvičení 41 : Dokažte, že pro $p > -1$ je

$$\int_0^1 x^p \cdot \log \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{(p+1)^2} \;\; !$$

Cvičení 42 : Dokažte, že pro $p > -1$ je

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \log \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(p+k+1)^2} \;\; !$$

Cvičení 43 : Dokažte, že je

$$\int_0^1 \log x \cdot \log(1-x) \, \mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi^2}{6} \;\; !$$

Cvičení 44 : Dokažte, že je

$$\int_0^1 \log \frac{1+x}{1-x} \, \mathrm{d}x = 2 \log 2 \; !$$

Cvičení 45 : Funkce v_n jsou definovány předpisem

$$v_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n \,, \quad x \in (0,1) \,.$$

Dále definujme na intervalu $(0,1)$ funkci v předpisem $v = \sum_{n=1}^\infty v_n$. Ukažte, že je

$$\int_0^1 v = \int_0^1 1 \cdot \mathrm{d}x = 1 \,, \quad \text{ale} \quad \int_0^1 v_n = 0 \,, \quad \text{a tedy} \quad \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 v_n = 0 \,.$$

Dokažte pak *přímo*, že řada $\sum_{n=1}^\infty v_n$ na intervalu $(0,1)$ nekonverguje stejnoměrně a že *neplatí*

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^1 |\, v_n(x)| \, \mathrm{d}x < \infty \,.$$

Cvičení 46 : Řešte následující úlohy o řadách funkcí:

(1) Zkoumejte, zda lze následující řady integrovat člen po členu, tj. zda platí rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_M u_n = \int_M \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,,$$

kde

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & u_n(x) = a\mathrm{e}^{-nax} - b\mathrm{e}^{-nbx}\,, \quad M = (0,\infty)\,, \\ \text{(b)} & u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{xn^p}\,, \quad p>1,\ M=(0,1)\,, \\ \text{(c)} & u_n(x) = (-1)^n x^n\,, \quad M=(0,1)\,, \\ \text{(d)} & u_n(x) = x^{n-1}(1-x^{2n})\,, \quad M=(0,\infty)\,. \end{array}$$

(2) Dokažte, že platí

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n\,!)} \\ \text{(b)} & \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1-x}\log\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3} - 1\,, \\ \text{(c)} & \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{ax}-1} = +\infty \quad \text{pro všechna} \quad a>0\,, \\ \text{(d)} & \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{ax}+1} = \frac{\log 2}{a} \quad \text{pro všechna} \quad a>0\,,\,. \end{array}$$

Cvičení 47 : Spočtěte dvojrozměrnou Lebesgueovu míru množiny omezené v $\mathbb{R}^2$ křivkami [o rovnicích]

$$x=2\,, \qquad y=x\,, \qquad xy=1\,!$$

Abychom mohli takto (nepřesně) formulovanou úlohu řešit, budeme muset uzavřít určité úmluvy o (obecně velmi často) užívaných formulacích, což při precizaci této úlohy uděláme.

Cvičení 48 : Nechť $M = \big\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\,;\, 1\le x\le 5\,, y\le 3\,, xy\ge 1\big\}$. Spočtěte míru $\lambda_2(M)$ množiny M ! $\quad [\,\lambda_2(M) = 12-\log 5\,]$

Cvičení 49 : Spočtěte vždy míru množiny M omezené křivkami

(a) $2x-y=0\,,\ 2x-y-7=0\,,\ x-4y+7=0\,,\ x-4y+14=0\,,\quad [\,\lambda_2(M)=7\,]$
(b) $x=(y^2+b^2)/2b\,,\ x=(y^2+a^2)/2a\,,\ (0<b<a)\,,\quad [\,\lambda_2(M)=\frac{2}{3}(a-b)\sqrt{ab}\,]$
(c) $y=4-x^2\,,\ 3x-2y-6=0\,,\quad [\,\lambda_2(M)=1331/48\,]$
(d) $M=\{\,[x,y]\in\mathbb{R}^2\,;\, x>2\,,\ 0<y<x^{-2}\,\}\,,\quad [\,\lambda_2(M)=1/2\,]$
(e) $M=\{\,[x,y]\in\mathbb{R}^2\,;\, x>2\,,\ 0<y<x^{-1}\,\}\,,\quad [\,\lambda_2(M)=+\infty\,]$

Cvičení 50 : Dokazujte následující tvrzení (množina M je vždy omezena křivkami):

(a) $\iint_M \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2} = \log(25/24)\,,\quad$ kde $\quad M = [\,3,4\,] \times [\,1,2\,]\,,$

(b) $\iint_M \dfrac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{\pi}{12}\,,\quad$ kde $\quad M = [\,0,1\,] \times [\,0,1\,]\,,$

(c) $\iint_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{1}{3}\,,\quad$ kde $\quad M:\ \ y=0\,,\ y=1-x\,,\ y=1+x\,,$

(d) $\iint_M (x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{33}{140}\,,\quad$ kde $\quad M:\ \ y=x^2\,,\ y^2=x\,,$

(e) $\iint_M y^2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{32}{45}\,R^5\,,\quad$ kde

$$M = \{\,[\,x,y\,] \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2+y^2 \le R^2\}\,, \qquad R>0\,.$$

Cvičení 51 : Následující problém je spojován se jménem Vincenza Vivianiho: Pro $R>0$ označme

$$M = \{\,[\,x,y,z\,] \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+y^2+z^2 \le R^2\,,\ x^2+y^2 \le Rx\,\}\,.$$

Dokažte, že platí $\lambda_3(M) = (4R^3)/3[(\pi/2)-(2/3)]$!

Cvičení 52 : Integrujte funkci $f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}\sin x$ přes $M = (0,a)\times(0,\infty)$ a ukažte, že

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \cos a \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ay}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y - \sin a \int_0^\infty \frac{y\mathrm{e}^{-ay}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Odtud dokažte, že

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,,$$

a zároveň ukažte, že $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ jakožto Lebesgueův integrál neexistuje.

Cvičení 53 : Pro $R>0$ označme

$$M = \{\,[\,x,y,z\,] \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+y^2+z^2 \le R^2\,,\ x^2+y^2+z^2 \le 2Rz\,\}\,.$$

Potom je

$$\iiint_M z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{59}{480}\pi R^5\,.$$

Cvičení 54 : Dokažte následující tvrzení:

(a) $\iiint_M z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \dfrac{\pi}{4}\,abc^2\,,$ kde

$$M = \left\{[\,x, y, z\,] \in \mathbb{R}^3\,;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\,,\ z \ge 0\right\},$$

(b) $\iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \dfrac{4\pi}{15}\,abc(a^2 + b^2 + c^2)\,,$ kde

$$M = \left\{[\,x, y, z\,] \in \mathbb{R}^3\,;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\},$$

(c) $\iiint_M x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \dfrac{27}{4}\,,\quad M:\quad x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ 2x + 2y + z - 6 = 0$

(d) $\iiint_M xyz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \dfrac{1}{96}\,,\quad M:\quad y = x^2\,,\ x = y^2\,,\ z = xy\,,\ z = 0\,,$

(e) $\iiint_M x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4\,,\quad M:\quad x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ y = 3\,,\ x + z = 2\,.$

Cvičení 55 : Ukažte, že funkce

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$$

je spojitou funkcí na intervalu $[\,0, \infty)\,!$

Cvičení 56 : Ukažte, že funkce

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$$

je spojitou funkcí na intervalu $(0, \infty)\,!$

Cvičení 57 : Vyšetřete spojitost funkce

$$F(\alpha) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x\,!$$

Cvičení 58 : Vyšetřete spojitost funkce

$$F(\alpha) := \int_1^\infty \mathrm{e}^{-\alpha^2 x(x-1)}\,\mathrm{d}x\,!$$

Cvičení 59 : Vyšetřete spojitost funkce

$$F(\alpha) := \int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{x}}{x} \mathrm{e}^{-\alpha^2 x}\,\mathrm{d}x\,!$$

Cvičení 60 : Dokažte, že funkce

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$$

má v intervalu $(0,\infty)$ derivace všech řádů a tyto derivace spočtěte! Dále dokažte, že je

$$F^{(k)}(a) = (-1)^k \int_0^\infty x^k \cdot \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{k\,!}{a^{k+1}} \quad !$$

Cvičení 61 : Ukažte, že funkce Γ, tj.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,, \quad s \in (0,+\infty)\,,$$

je spojitá v intervalu $(0,\infty)$ a že jednostranné limity v obou krajních bodech tohoto intervalu jsou rovny $+\infty$.

Cvičení 62 : Dokažte, že funkce Γ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ na intervalu $(0,\infty)$ a že je na tomto intervalu konvexní.

Cvičení 63 : Ukažte, že je $\Gamma(1) = 1$ a že funkce Γ vyhovuje funkcionální rovnici

$$f(s+1) = s \cdot f(s)\,, \qquad s \in (0,\infty)\,.$$

Připomínáme, že těmto podmínkám vyhovuje jediná logaritmicky konvexní funkce (tj. kladná funkce f taková, že složená funkce $\log\circ f$ je konvexní na uvažovaném intervalu). Tuto větu dokázali H. Bohr a Mollerup a jejich důkaz významně zjednodušil Artin, my ji dokazovat nebudeme.

Cvičení 64 : Dokažte, že je

$$\Gamma^{(n)}(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n\,\mathrm{d}x\,, \quad s \in (0,+\infty)\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Cvičení 65 : Ukažte, že platí

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,.$$

K integrálům závislým na parametru se ještě vrátíme.

Cvičení 66 : (Polární souřadnice) Definujeme zobrazení F z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ předpisem $F(r,\varphi) = [\,x, y\,]$, kde

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\,, \\ y &= r\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Vyšetřete toto zobrazení a ukažte, že to je prosté regulární zobrazení na množině

$$L = \{\,[\,r,\varphi\,] \in \mathbb{R}^2\,;\ r \in (0,\infty)\,, \varphi \in (0, 2\pi)\,\}\,,$$

a že L zobrazuje na množinu $\mathbb{R}^2 \setminus N$, kde

$$N = \{[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2\,;\ x \in [\,0,\infty)\,, y = 0\,\}\,.$$

Množina N má dvourozměrnou Lebesgueovu míru 0. Hodnota jakobiánu zobrazení F je v tomto případě r a F je prosté regulární zobrazení na každé otevřené množině $L_1 \subset L$ (to budeme často používat).

Cvičení 67 : Připomeňte, jak se pomocí věty o substituci spočte $I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Cvičení 68 : (Sférické souřadnice) Definujeme zobrazení F z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ předpisem $F(r,\varphi,\vartheta) = [\,x, y, z\,]$, kde

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta\,, & & x = r\cos\varphi\sin\vartheta\,, \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta\,, & \text{resp.}\quad & y = r\sin\varphi\sin\vartheta\,, \\ z &= r\sin\vartheta\,, & & z = r\cos\vartheta\,. \end{aligned}$$

Vyšetřete obě tato zobrazení (všimněte si rozdílu v hodnotách jakobiánu a oborů) a pro prvé z nich ukažte, že je regulární a prosté na množině

$$L = \{\,[\,r,\varphi,\vartheta\,] \in \mathbb{R}^3\,;\ r \in (0,\infty)\,, \varphi \in (0, 2\pi)\,, \vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)\,\}\,,$$

kterou zobrazuje na množinu $\mathbb{R}^3 \setminus N$, kde

$$N = \{[\,x, y, z\,] \in \mathbb{R}^3\,;\ x \in [\,0,\infty)\,, y = 0\,\}\,.$$

Množina N má trojrozměrnou Lebesgueovu míru 0. Hodnota jakobiánu zobrazení F je v tomto případě $r^2\cos\vartheta$ a F je prosté regulární zobrazení na každé otevřené množině $L_1 \subset L$.

Cvičení 69 : Zformulujte samostatně analogické tvrzení jako byla ta, která jsme zkoumali v předcházejících dvou cvičeních, pro tzv. válcové souřadnice!

Cvičení 70 : Spočtěte pomocí Fubiniovy věty a pak pomocí věty o substituci integrál

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,, \qquad M = \{[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^2 \le 1\}\,,$$

a dokažte, že jeho hodnota je $2\,\pi$!

Cvičení 71 : Spočtěte integrál
$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad M=\{[\,x,y\,]\in\mathbb{R}^2\,;\; x^2+y^2\le x\}\,,$$
a dokažte, že jeho hodnota je 2 !

Cvičení 72 : Pro $a>0$ položme
$$M=\{[\,x,y\,]\in\mathbb{R}^2\,;\;(x^2+y^2)^2\le 2a^2(x^2-y^2)\}\,.$$
Dokažte, že množina M je měřitelná a že její Lebesgueova míra je $\lambda_2(M)=2a^2$! [Křivka o rovnici $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ se nazývá *lemniskáta* a tak vlastně úloha žádá spočtení „plochy" množiny omezené lemniskátou.]

Cvičení 73 : Spočteme několik příkladů na obsahy obrazců M, kdy bude výhodné užít méně standardní substituce

(a) $M=\{[\,x,y\,]\in\mathbb{R}^2\,;\;2<x+y<3\,,x<y<3x\}$, přičemž zkuste výpočet přímo pomocí Fubiniovy věty, a pak zkuste substituci
$$u=x+y\,,\quad v=y/x\,. \qquad \big[\,\lambda_2(M)=5/8\,\big]$$

(b) Totéž pro $M=\{\,[\,x,y\,]\in\mathbb{R}^2\,;\,py<x^2<qy\,,\;ax<y^2<bx\,\}$, kde je $0<p<q$, $0<a<b$. Zkuste substituci
$$u=\frac{y^2}{x}\,,\quad v=\frac{x^2}{y}\,. \qquad \Big[\,\lambda_2(M)=\frac{1}{3}(b-a)(q-p)\,\Big]$$

(c) $M=\{\,[\,x,y\,]\in\mathbb{R}^2\,;\,a<xy<b\,,\;py<x<qy\,\}$, kde je opět $0<p<q$, $0<a<b$. Zkuste substituci
$$u=xy\,,\quad v=\frac{x}{y}\,. \qquad \Big[\,\lambda_2(M)=\frac{1}{2}(b-a)\log\frac{q}{p}\,\Big]$$

(d) $M=\{\,[\,x,y\,]\in\mathbb{R}^2\,;\,(x^2+y^2)^2\le 2ax^3\,\}$, kde $a>0$. Použijte polární souřadnice a dokažte, že
$$\lambda_2(M)=\frac{5}{8}\,\pi a^2\,.$$

Cvičení 74 : Nechť je funkce f definována na intervalu $I=[\,0,1\,]\times[\,0,1\,]\subset\mathbb{R}^2$ předpisem
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y^2} & \text{pro}\quad 0<x<y<1\,,\\[2mm] -\dfrac{1}{x^2} & \text{pro}\quad 0<y<x<1\,,\\[2mm] 0 & \text{všude jinde v}\ \ I\,.\end{cases}$$
Spočtěte dvojnásobné integrály $\int_0^1\big(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}y$ a $\int_0^1\big(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\big)\,\mathrm{d}x$ a odůvodněte, proč nedostáváme „spor v matematice". Jaká bude hodnota integrálu $\int_0^1\big(\int_0^1 |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}y$? Ověřte to přímým výpočtem ! Jak je to s existencí dvojnásobných integrálů, pokud je budeme chápat v Riemannově smyslu ?

Cvičení 75 : Rozhodněte o existenci (Lebesgueova) integrálu

$$\iint_M \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 - y^2\right)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,,$$

kde $M := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,;\, x, y \in (0,1)\}$. Spočtěte oba dvojnásobné integrály vzniklé použitím mechanické aplikace Fubiniovy věty a porovnejte s přístupem přes větu o substituci.
[Můžete využít poznatku (ověřte!), že

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2 + y^2}\Big) = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 - y^2\right)^2} \,. \quad]$$

Cvičení 76 : Ukažte, že

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \, \mathrm{d}y\Big) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,, \qquad \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \, \mathrm{d}x\Big) \, \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\,.$$

Odtud odvoďte neexistenci příslušného dvojného Lebesgueova integrálu pomocí Fubiniovy věty.

Cvičení 77 : Dokažte, že

$$\int_{-1}^1 \Big(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}y\Big) \, \mathrm{d}x = 0 = \int_{-1}^1 \Big(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}x\Big) \, \mathrm{d}y\,, \text{ a že}$$
$$\iint_{[-1,1]\times[-1,1]} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad \text{neexistuje}\,.$$

Cvičení 78 : Nechť $M = \{\, [x, y] \in \mathbb{R}^2 \,;\, x > 0,\ y > 0 \,\}$. Zkoumejte existenci integrálu $\int_M f$, kde $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)\, \mathrm{e}^{-|x-y|}$. [Zkuste spočítat oba dvojnásobné integrály z f.]

Cvičení 79 : Jaká je hodnota integrálu

$$\iiint_M \frac{xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^{1/2}}\,,$$

kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$? Jak se změní výsledek, nahradíme-li exponent $1/2$ ve jmenovateli exponentem 1?

Cvičení 80 : Nechť je $a > 0$. Položme

$$M = \{\, [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2 + y^2 + z^2 \le 2az\,,\ x^2 + y^2 \le z^2 \,\}\,.$$

Pokuste se načrtnout obrázek množiny M! Odůvodněte, že $M \in \mathfrak{M}_3$ (M je měřitelná podmnožina $\mathbb{R}^3$) a spočtěte $\lambda_3(M) = \pi\, a^3$!

Cvičení 81 : Dokažte, že pro $M = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x^2+y^2+z^2 \le z \}$ je

$$\iiint_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{10}\,!$$

Cvičení 82 : (parabolická úseč) Nechť je $M = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x^2 < y < x+2 \}$. Pak je $M \in \mathfrak{M}_2$ a $\lambda_2(M) = 9/2$. Dokažte.

Cvičení 83 : Určete míru množiny $M \subset \mathbb{R}^3$ omezené plochami určenými vztahy

(a) $x = 0\,,\ x = a\,,\ y = 0\,,\ y = b\,,\ z = 0\,,\ z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$, kde a, b, p, q, z jsou vesměs kladná čísla $\quad \Big[\, \lambda_3(M) = \dfrac{ab}{6}\Big(\dfrac{a^2}{p} + \dfrac{b^2}{q}\Big) \Big]$;

(b) $x^2+y^2+z^2 = R^2\,,\ x^2+y^2 \le r^2\,,\ 0 < r < R$
$\big[\, \lambda_3(M) = \frac{4}{3}\pi\big(R^3 - (R^2-r^2)^{3/2}\big) \,\big]$;

(c) $x^2+y^2+z^2 = 16\,,\ x^2+y^2+z^2-8z = 0 \qquad \Big[\, \lambda_3(M) = \dfrac{80}{3}\,\pi \Big]$;

(d) $x^2+y^2 = R^2\,,\ x^2+y^2 = z\,,\ z = 0 \qquad \Big[\, \lambda_3(M) = \dfrac{\pi R^4}{2} \Big]$;

(e) (∗) $\big(x^2+y^2\big)^2 + z^4 = y \qquad \Big[\, \lambda_3(M) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{3} \Big]$.

Cvičení 84 : (∗) Určete objem tělesa $M \setminus N$, kde $R > 0$ a

$$M = \{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \, x^2+y^2+z^2 \le R^2 \}\,,$$
$$N = \{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \, ; \, (2x-R)^2 + 4y^2 \le R^2 \}\,.$$

Připomeňte si již probírané ukázky funkcí, závislých na parametru (cvičení 55 – 62). Začneme látkou, související s Fubiniovou větou (tzv. „integrace podle parametru“).

Cvičení 85 : Spočtěte pro $0 < b < a$ (jednorozměrný) integrál

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,\mathrm{d}x$$

a zvažte, že při $a \le 0\,,\ b > 0$ tento integrál diverguje (podobně při $a > 0\,,\ b \le 0$).

Cvičení 86 : Dokažte, že pro $a > -1\,,\ b > -1$, platí rovnost

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x = \log \frac{b+1}{a+1}\,.$$

Jsou ještě jiné hodnoty a a b, pro které vyšetřovaný integrál konverguje ?

Cvičení 87 : Dokažte následující tvrzení:

(a) Pro $a \geq 0$, $b \geq 0$ je (užijte výsledek o Laplaceově integrálu)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}\,.$$

(b) Pro $a > 0$, $b > 0$ je

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \log \frac{b}{a}\,.$$

(c) Pro $a > 0$, $b > 0$ je

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\, \mathrm{d}x = \log \frac{b}{a}\,.$$

(d) Pro $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$\int_0^\infty \frac{\log(1 + a^2x^2) - \log(1 + b^2x^2)}{x^2}\, \mathrm{d}x = \pi(a - b)\,.$$

(e) Pro $a > 0$, $b \geq 0$ je

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} \operatorname{arctg} \frac{b \sin x}{a}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \log \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{a}\,.$$

[Nápověda: použijte rovnost

$$\frac{1}{\sin x} \operatorname{arctg} \frac{b \sin x}{a}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{ab}{a^2 + b^2y^2 \sin^2 x}\, \mathrm{d}y \Big]\,.$$

Cvičení 88 : Je-li $I = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ a

$$f(t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t(x^2+1)}}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}x\,, \quad t \in [0, +\infty)\,, \quad \text{ukažte, že}$$

(a) $f'(t) = -It^{-1/2}\mathrm{e}^{-t}$ pro $t \in (0, \infty)\,.$
(b) $f(t) = 2I \int_{\sqrt{t}}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x\,, \quad t \in (0, \infty);$
(c) $\pi = f(0) = I^2\,.$

Cvičení 89 : Dokažte, že funkce $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ je rostoucí na intervalu $(0, +\infty)$. Nalezněte diferenciální rovnici prvního řádu, které f vyhovuje a určete příslušnou počáteční podmínku.

Cvičení 90 : Pro

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-(x^2+1)\,t^2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

odvoďte derivováním za integračním znamením, že $I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,.$

Cvičení 91 : Spočtěte $I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$ podle tohoto návodu: je

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2-t^2}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} y\,\mathrm{e}^{-y^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y$$

[substituce $t = yx$]; aplikujte Fubiniovu větu.

Cvičení 92 : Pro každé $a > 0$ vypočtěte hodnotu integrálů

$$\text{(a)} \quad C(b) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \cos bx\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{(b)} \quad S(b) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \sin bx\,\mathrm{d}x\,;$$

[Pro (a) derivujte podle parametru b a integrujte per partes, čímž obdržíte diferenciální rovnici

$$C'(b) = -\frac{b}{2a}\,.$$

Po jejím vyřešení užijte hodnoty C(0) k určení integrační konstanty. Je

$$C(b) = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}\,\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}\,. \quad]$$

Cvičení 93 $(*)$**:** Zdánlivě stejně vyhlížející integrál v 92 (b) vyjde složitěji. Je

$$S(b) = \frac{1}{2a}\,\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}} \int_0^b \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4a}}\,\mathrm{d}t\,.$$

[Blíže viz Jarník: Integrální počet II, kap. VII, §8]

Cvičení 94 : Dokažte, že následující integrál konverguje pro $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a že je

$$K(a,b) := \int_0^\infty \frac{\log(a^2+x^2)}{b^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{|\,b\,|}\,\log\big(|\,a\,| + |\,b\,|\big)\,.$$

Cvičení 95 : Nechť je $M =: \{\,[\,x,y\,]\,;\; x^2{+}y^2 \le 1\,\}$. Zkoumejte konvergenci integrálů

$$\text{(a)}\quad \iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\bigl(2x^2+3y^2\bigr)^{\alpha}}\,, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\bigl(x^2+xy+y^2\bigr)^{\alpha}}$$

v závislosti na parametru α. Dokažte, že integrál v (a) a stejně tak integrál v (b) konverguje, právě když je $\alpha < 1$. Ve druhém případě je výhodné použít rovnost

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\bigl(x^2+xy+y^2\bigr)^{\alpha}} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\sin\varphi\,\cos\varphi)^{\alpha}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{r^{2\alpha-1}}\,.$$

Cvičení 96 : $(*)$ Označme pro $M := \{[\,t,x\,] \in \mathbb{R}^2\,;\; t \in (0,\infty)\,,\; x \in (0,\infty)\,\}$ a

$$I := \iint_M \frac{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x}{(\,1+t\,)(\,1+tx^2)}\,.$$

Je jednak (jednodušší část)

$$I = \int_0^{\infty} \Bigl(\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\,1+t\,)(\,1+tx^2)}\Bigr)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2}\,,$$

ale také (trochu pracnější vzhledem k rozkladu na parciální zlomky)

$$I = \int_0^{\infty} \Bigl(\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\,1+t\,)(\,1+tx^2)}\Bigr)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pak se využije vztahu k integrálu, který jsme počítali ve Cvičení 37; dostaneme tak řešení Basilejského problému.
[Upravte

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\log x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \cdots \quad\text{a také}\quad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cdots + \int_1^{\infty} \cdots\,.]$$

Můžete zkusit i podobným způsobem postupovat s integrálem

$$I := \iint_M \frac{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x}{(\,1+tx\,)(\,1+tx^2)}\,,$$

kde $M := \{[\,t,x\,] \in \mathbb{R}^2\,;\; t \in (0,\infty)\,,\; x \in (1,\infty)\,\}$. Využijte pak vztahu k integrálu ze Cvičení 37.

Cvičení 97 : Nechť

$$F(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\lambda^2\,\mathrm{tg}^2\,x}\,;$$

Ukažte postupně, že integrál existuje jako Riemannův pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$, funkce F je sudá a pomocí substituce $\mathrm{tg}\,x = t$ odvoďte pro všechna $\lambda \ne \pm 1$ rovnost $F(\lambda) = (\pi/2)\cdot(1+|\lambda|)^{-1}$. Využijte spojité závislosti integrálu na parametru; spočtěte $F(1)$ a $F(-1)$ také přímo.

Cvičení 98 : Dokažte, že je

$$\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\lambda}{1+\lambda^2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2}\,\log 2\,,$$

kde $M = \{\,[\,x,\lambda\,] \in \mathbb{R}^2\,;\ x \in (0,\pi/2),\ \lambda \in (0,1)\,\}$.

Cvičení 99 : Dokažte, že platí

$$\lim_{\alpha\to 1-} \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\log(\alpha - \sin x)} = -\,\infty\ \ !$$

$\big[$ Je příklad na Leviho větu: Pomocí ní dokažte, že

$$\lim_{\alpha\to 1-} \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\log(\alpha - \sin x)} = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\log(1 - \sin x)}$$

a integrál na pravé straně rovnosti spočtěte! (Horní mez $\pi/4$ je v pořádku.) $\big]$

Cvičení 100 : Dokažte, že funkce

$$F(a) = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,,$$

je spojitá v $\mathbb{R}$. Všimněte si, že integrál existuje jako Riemannův pro každé $a \in \mathbb{R}$. Funkce F je sudá – spočtěte její hodnoty!

Cvičení 101 : Dokažte, že funkce

$$F(a) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,,$$

je konečná v $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Všimněte si, že integrál opět (viz předcházející cvičení) existuje jako Riemannův pro každé $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ a definuje sudou funkci spojitou v $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Cvičení 102 : Vyšetřujte spojitost funkcí

(a) $F(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(0,\infty)$,
(b) $F(a) = \int_0^2 x^2 \cos ax\,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$,
(c) $F(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(0,\infty)$.

Cvičení 103 : Ukažte, že funkce

$$C(y) = \int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad S(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

jsou spojité na $\mathbb{R}$!

Pro další cvičení je vhodné si zopakovat „derivování podle parametru“. Tímto postupem se řeší některé následující úlohy.

Cvičení 104 : Dokažte, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \log(1 + |\, a|) \operatorname{sgn} a \ !$$

Cvičení 105 : Položte

$$K(a) = \int_0^\infty \frac{1 - \mathrm{e}^{-ax}}{x \mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x$$

a dokažte, že tento integrál konverguje pro $a \in (-1, \infty)$ a že $K(a) = -\infty$ pro $a \in (-\infty, -1\,]$. Potom pomocí věty o derivování podle parametru odvoďte rovnost $K(a) = \log(1 + a)$ pro všechna $a \in (-1, +\infty)$.

Cvičení 106 : Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \log \frac{b}{a}$$

pomocí derivování podle parametru! [viz Cvičení 87 (b)]

Cvičení 107 : Dokažte, že následující funkce jsou nekonečněkrát diferencovatelné na uvedených oborech a odvoďte odtud uvedené vzorce

(a) $F(a) = \int_0^1 x^a \, \mathrm{d}x$ na intervalu $(-1, \infty)$, a je

$$\int_0^1 x^a (\log x)^n \, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n\,!}{(a+1)^{n+1}} \ ; \Big(\text{je též} \int_1^\infty x^{-a} (\log x)^n \, \mathrm{d}x = \frac{n\,!}{(a-1)^{n+1}}\Big) .$$

(b) $F(a) = \int_{-\infty}^\infty (a + x^2)^{-1} \, \mathrm{d}x$ na intervalu $(0, \infty)$,

(c) $F(a) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \, \mathrm{d}x$ na intervalu $(0, \infty)$.

Cvičení 108 : Spočtěte integrál

$$J(a) = \int_0^\pi \frac{\log(1 + a \cos x)}{\cos x} \, \mathrm{d}x = \pi \arcsin a \,, \quad a \in [-1, 1\,] \,,$$

pomocí derivování podle parametru!

[Platí

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \,, \quad \text{a tedy} \quad J(a) = \pi \arcsin a \,.]$$

Cvičení 109 : Spočtěte

$$J(a) = \int_0^{\pi/2} \log \Big(\frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \Big) \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

[Upravte $J'(a)$ na tvar (substituce $\operatorname{tg} x = t$)

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \,, \quad \text{a tedy opět} \quad J(a) = \pi \arcsin a \,.]$$

Cvičení 110 : Spočtěte

$$F(a,b) = \int_0^{\pi/2} \log(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)\, \mathrm{d}x\,.$$

$\Big[$ Je $F(a,b) = \pi \log \dfrac{a+b}{2}$; vyjděte z $F'_a(a,b) = \int_0^{\pi/2} \dfrac{2}{a} \dfrac{a^2 \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}\, \mathrm{d}x \Big]$

Cvičení 111 : Dokažte, že pro všechna $a, b > 0$ a $k \in \mathbb{R}$ je

$$I(a,b,k) := \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \sin kx\, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} \frac{b}{k} - \operatorname{arctg} \frac{a}{k}\,, \quad k \neq 0, \quad \text{resp.}$$

$$I(a,b,0) = 0\ .$$

Cvičení 112 : Dokažte, že pro všechna $a, b > 0$ a $k \in \mathbb{R}$ je

$$J(a,b,k) := \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \cos kx\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \log \frac{b^2 + k^2}{a^2 + k^2} \quad !$$

Cvičení 113 : Dokažte, že pro všechna $a > 0$ a $b, c \in \mathbb{R}$ je

$$F(a,b,c) := \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cdot \frac{\sin bx - \sin cx}{x}\, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{c}{a} \quad !$$

Cvičení 114 : Dokažte, že pro všechna $b \in \mathbb{R}$ je

$$J(b) := \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos 2bx\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \mathrm{e}^{-b^2} \qquad !$$

Cvičení 115 : Položme

$$F(x) := \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\,.$$

Ukažte, že tento integrál konverguje pro všechna $x \geq 0$ a že funkce F vyhovuje na intervalu $(0, \infty)$ diferenciální rovnici

$$y'' + y = \frac{1}{x}\,.$$

Cvičení 116 : Vyšetřete průběh funkce F z předcházejícího příkladu a dokažte:

(a) Funkce F je definována a je spojitá na intervalu $[\,0, \infty)$.

(b) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.

(c) Funkce F je klesající na intervalu $[\,0, \infty)$.

(d) Oborem hodnot funkce F je interval $H_F = (0, \pi/2\,]$.

(e) Funkce F je konvexní na intervalu $(0, \infty)$.

Zde je ještě několik různorodých příkladů k samostatnému procvičování:

Cvičení 117 : Dokažte, že pro $p \in (0, \infty)$ platí :

$$\int_0^1 \frac{\log(1 - x^p)}{x} \, \mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6p} \,, \qquad \int_0^1 \frac{\log(1 + x^p)}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12p} \,.$$

Derivováním podle parametru odtud odvoďte

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 - x^p} \log \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6p^2} \,, \qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 + x^p} \log \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12p^2} \,.$$

Cvičení 118 : Zopakujte si výpočet ze Cvičení 86. Pomocí výsledku odvoďte

$$\int_0^1 \frac{x - 1}{\log x} \, \mathrm{d}x = \log 2 \,, \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x} - 1}{\log x} \, \mathrm{d}x = \log \frac{3}{2} \,.$$

Cvičení 119 : Pro $a > 0$ položme

$$\begin{aligned} M^+ &:= \big\{ \, [x, y] \in \mathbb{R}^2 \,;\, (x + y)^4 < a x^2 y \,,\, x > 0 \big\} \,, \\ M^- &:= \big\{ \, [x, y] \in \mathbb{R}^2 \,;\, (x + y)^4 < a x^2 y \,,\, x < 0 \big\} \,. \end{aligned}$$

Dokažte, že obě množiny M^+ a M^- jsou lebesgueovsky měřitelné, a že je

$$\lambda_2(M^+) = \frac{a^2}{210} \,, \qquad \lambda_2(M^-) = +\infty \,.$$

Cvičení 120 : Spočtěte pro všechna a, b, pro něž integrál konverguje, jeho hodnotu:

$$K(a, b) := \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-a^2/x^2} - \mathrm{e}^{-b^2/x^2} \right) \mathrm{d}x \qquad \left[\sqrt{\pi}(b - a) \right]$$

Cvičení 121 : Dokažte, že pro všechna $p \in (0, \infty)$ platí

$$\int_0^1 \frac{1 - x^{p-1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{k + 1} - \frac{1}{k + p} \right) !$$

Cvičení 122 : $(*)$ Dokažte, že pro (tzv. Fresnelův) integrál platí

$$I := \int_0^\infty \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, !$$

$\big[$Pro Newtonův integrál dostaneme substitucí $I = (1/2) \int_0^\infty (\sin t)/\sqrt{t} \, \mathrm{d}t$ a užijeme rovnost

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t y^2} \, \mathrm{d}y \,;$$

je nutno postupovat opatrně, funkce $f(t, y) = \mathrm{e}^{-t y^2} \sin t$ není lebesgueovsky integrovatelná přes první kvadrant, je nutno aplikovat Fubiniovu větu pro rovnost

$$\int_0^A \left(\int_0^\infty f(t, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\int_0^A f(t, y) \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y$$

a pak provést limitní přechod pro $A \to +\infty \big]$

Cvičení 123 : Určete $\lambda_2(M)$ pro

$$M := \{\, [\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2\,;\, x(x^2+y^2) < x^2 - y^2\,,\, x > 0\,\} \quad \text{resp. pro}$$

$$M := \{\, [\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2\,;\, x^3 + y^3 < xy\,,\, x > 0\,, y > 0\,\}$$

[$(4-\pi)/2$, resp. $1/6$]

Cvičení 124 : Spočtěte pro $a > 0$ (jako Newtonovy integrály)

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \sin bx \,\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2}\,, \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2}\,,$$

a odtud odvoďte

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax} \sin bx \,\mathrm{d}x = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}\,, \quad \text{a} \quad \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax} \cos bx \,\mathrm{d}x = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}\,.$$

Cvičení 125 : Pro $a > 0$, $\alpha > 0$ a $b, \beta \in \mathbb{R}$ spočtěte

$$F(a,\, b,\, \alpha,\, \beta) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}\cos bx - \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos \beta x}{x}\,\mathrm{d}x$$

[Spočtěte derivaci F podle a a podle b a ukažte, že

$$F(a,\, b,\, \alpha,\, \beta) = -\frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + C(\alpha, \beta)\,.$$

Pak ukažte, že

$$F(a,\, b,\, \alpha,\, \beta) = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^2+b^2}\right) \quad a, \alpha > 0,\ b, \beta \in \mathbb{R}\,.$$]

Cvičení 126 : Dokažte, že těleso ohraničené plochami (je $a, b, c > 0$) o rovnicích

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,\ x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,$$

má objem $\pi^2 abc/16$.

Cvičení 127 : Dokažte, že těleso ohraničené plochami (je $a, b, c > 0$) o rovnicích

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\,.$$

má objem $\frac{2}{9}\, abc\,(3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$.

Cvičení 128 : Odvoďte pro $a > 0$

$$\int_0^\infty x^{2k}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^{k+1}}\,\sqrt{\pi}a^{-(2k+1)/2}\,.$$

Cvičení 129 : $(*)$ Dokažte, že pro každé $r \in \mathbb{R}$ je

$$I(r) = \int_0^\pi \log(1 + 2r\cos x + r^2)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad |r| \le 1, \\ 2\pi \log r & \text{pro} \quad |r| > 1. \end{cases}$$

Cvičení 130 : Ukažte, že pro $M := \{\, [\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2\,;\, y \le x^2 \le 4y\,,\, 2x \le y^2 \le 3x\,\}$ je míra množiny $\lambda_2(M) = 1$.