Technická univerzita v Liberci

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

Obyčejné (lineární) diferenciální rovnice a jejich systémy

Miroslav Brzezina, Jiří Veselý

(Katedra aplikované matematiky FP TU v Liberci)

Liberec, 2012

ISBN 80 - . . .

Text stále není definitivní a upravuje se!

Tento učební text vznikl jako pomůcka pro přípravu studentů Technické univerzity v Liberci k praktickému řešení lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu a soustav lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Teoretická část textu poskytuje minimální nezbytné zázemí pro řešení konkrétních úloh, důraz je kladen na jejich praktické řešení. Text je rozvinutím starších textů obou autorů a je doplněn řešenými příklady i příklady k samostatnému procvičování. Terminologie a nezbytná tvrzení jsou vždy připomenuta v úvodních částech kapitol.

Část textu je věnována také připomenutí pojmů a výsledků z lineární algebry. Výklad je veden tak, aby vynikly vzájemné souvislosti. Některé početní postupy, a to především hledání vlastních čísel a vlastních vektorů matic, jsou v konkrétních příkladech sice jednoduché, ale časově náročnější. Jejich důkladné procvičení vyžaduje samostatnou domácí práci studentů. K získání početní zručnosti při řešení úloh nestačí pouhé přečtení řešených úloh a cvičení a je proto vhodné ještě použít vhodnou sbírku úloh z matematiky, např. [6].

Liberec, červenec 2012 M. Brzezina a J. Veselý

Obsah

Kapitola 1

Diferenciální rovnice prvního řádu

Tato kapitola má charakter úvodu. Jsou v ní připomenuty základní pojmy a je velmi pravděpodobné, že se s nimi čtenář již setkal. Ukazuje také, že již nejjednodušší diferenciální rovnice mohou popisovat praktické úlohy, jejichž řešení je pro nás nejen zajímavé, ale i užitečné.

1.1 Lineární rovnice – připomenutí

Při zavádění exponenciály jste poznali, že tato funkce vyhovuje na $\mathbb{R}$ rovnici $f' - f = 0$, tj. rovnici

$$f'(x) - f(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.1}$$

Taková rovnice (1.1) se obvykle zapisuje ve tvaru (neznámá funkce se značívá y)

$$y' - y = 0\,. \tag{1.2}$$

Rovnici se snažíme řešit na co největším otevřeném intervalu; v případě rovnice (1.2) je to interval $(-\infty, +\infty)$; někdy ho budeme značit $\mathbb{R}$. Z rovnice (1.2) plyne, že y má ve všech bodech $\mathbb{R}$ konečnou derivaci a proto je spojitá. Snadno nahlédneme, že y má spojité derivace libovolného řádu, tj. že $y \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Dosazením zjistíme, že jedním řešením rovnice (1.2) na $\mathbb{R}$ je funkce exponenciála exp; pro toto řešení je $\exp 0 = 1$. Snadno ověříme, že i každá funkce tvaru $C \cdot \exp$, kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je řešením (1.2). Tato funkce nabývá v bodě 0 hodnoty C.

Najít řešení exp rovnice (1.2) a tím dokázat *existenci* řešení na $\mathbb{R}$ bylo v tomto případě velmi jednoduché, protože je stačilo uhádnout a dosadit do rovnice. Odpověď na *zásadní* [1]) otázku, jestli má rovnice (1.2) kromě uvedených řešení ještě nějaká další řešení, spolu s nalezením podmínky, která by každé takové řešení *určila jednoznačně*, je složitější.

Potřebujeme k tomu větu o přírůstku funkce, resp. její důsledek : *Funkce f, pro kterou je $f'(t) = 0$ pro všechna $t \in (c, d)$, je na (c, d) konstantní.* [Zvolíme-li libovolně $x_0 \in (c, d)$ a pak jakékoli $x \neq x_0$, plyne z věty o přírustku

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\zeta) = 0\,,$$

[1]) Tato otázka je důležitá např. z hlediska aplikací. Představme si, že diferenciální rovnice modeluje nějaký proces, který bychom chtěli popsat jiným vztahem, ve kterém nevystupují derivace. Tento vztah nám poskytne řešení. Pokud není jediné, vybíráme si takové, které je z praktických důvodů nejlepší. K tomu ale potřebujeme znát *všechna* řešení, jinak bychom nemuseli k optimálnímu řešení dospět.

neboli $f(x) = f(x_0)$. Z toho však vyplývá, že taková funkce je konstantní. Čtenář si jistě snadno uvědomí jak je podstatné, že pracujeme s *intervalem.*]

Předpokládejme nyní, že $y \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ je nějaké řešení rovnice (1.2). Protože

$$\left(\frac{y}{\exp}\right)' = \frac{y' \exp - y \exp}{(\exp)^2} = \frac{y' - y}{\exp} = 0\,,$$

je podíl $y/\exp$ konstantní na $\mathbb{R}$, tj. existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ tak, že $y/\exp = C$ na $\mathbb{R}$. Každé řešení rovnice (1.2) na $\mathbb{R}$ má tedy tvar $C \exp$, kde C je *nějaká* konstanta a žádná jiná řešení neexistují.

Funkce $y \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ je řešením rovnice (1.2) na $\mathbb{R}$, právě když má tvar $C \exp$, kde $C \in \mathbb{R}$. Jedinou konstantou C, pro niž má řešení v bodě 0 (předem danou) hodnotu $y_0 \in \mathbb{R}$, je zřejmě $C = y_0$. *Konstantu C lze tedy jednoznačně určit tím, že předepíšeme, jakou hodnotu má řešení nabývat v bodě* 0.

Obecněji: Je-li $[x_0, y_0]$ libovolný bod roviny $\mathbb{R}^2$, existuje zřejmě právě jedna konstanta C tak, že $y_0 = C \exp x_0$; je to konstanta $C = y_0 \exp(-x_0)$. Každým bodem roviny prochází graf právě jednoho řešení rovnice (1.2). Proto *obecnější podmínka, že graf řešení obsahuje (předem daný) bod $[x_0, y_0]$, určuje řešení rovnice* (1.2) *jednoznačně.*

Snadno lze ověřit, že řešením diferenciální rovnice $y'' + y = 0$ na $\mathbb{R}$ je funkce cos. Dalším řešením na $\mathbb{R}$ je funkce sin a také každá funkce tvaru $C_1 \cos x + C_2 \sin x$ s $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ [snadno se o tom přesvědčíme dosazením]. Vůbec však není zřejmé, zda lze *každé řešení rovnice $y'' + y = 0$ vyjádřit v tomto tvaru.* Naznačené otázky patří v teorii diferenciálních rovnic k těm jednodušším. Budeme je postupně řešit, avšak v obecnějším kontextu.

Úmluva 1.1.1. Zatím jsme některé pojmy chápali intuitivně, připomeňme proto terminologii a běžně užívané označení. Neznámá funkce se obvykle značí y a její proměnná se při zápisu zpravidla vynechává. Tak např. píšeme poněkud nelogicky

$$y' = x^{-1}\,, \quad x \in (0, \infty)\,, \tag{1.3}$$

což je rovnice známá z vyšetřování [přirozeného] logaritmu. Často se též vynechává interval, na kterém máme rovnici řešit. Pokud bychom v (1.3) vynechali $x \in (0, \infty)$, rozumí se automaticky, že hledáme řešení na všech intervalech $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tedy na *všech intervalech*, kde má rovnice smysl. Poznamenejme ještě, že ve fyzice a technice se často při derivování funkce závislé na čase užívá k označení derivace místo čárky tečka.

Nejvyšší derivace neznámé funkce, která se v rovnici „efektivně vyskytuje", určuje **řád rovnice**. Objasníme to na příkladech: rovnice $y'' + y' - y = 0$ je diferenciální rovnice *druhého* řádu, rovnice $y'' - y'' + y' - y = 0$ je diferenciální rovnice *prvního* řádu, zatímco rovnici $y' - y' - y = 2x$ za diferenciální rovnici vůbec nepovažujeme. V této kapitole se budeme převážně věnovat zkoumání velmi jednoduchých, pro fyziku však značně důležitých rovnic 1. řádu, které se užívají např. k popisu radioaktivního rozpadu, ale i k popisu růstu populací, atp. Jsou to rovnice tvaru

$$y' + a(x)y = b(x)\,, \quad x \in (c, d)\,, \tag{1.4}$$

kde a, b jsou spojité funkce na intervalu (c, d). [Všechny spojité funkce na intervalu (c, d) tvoří lineární prostor $\mathcal{C}((c, d))$]. S některými rovnicemi tohoto typu jsme se již dříve seznámili.

I když jsme při popisu metod hledání primitivních funkcí výslovně o diferenciálních rovnicích nemluvili, lze úlohu nalézt primitivní funkci k dané funkci f interpretovat jako jednoduchou diferenciální rovnici. Důležitým tvrzením, které budeme velmi často užívat, je věta *o existenci primitivní funkce F k funkci f spojité na* $(c, d) \subset \mathbb{R}$ [Její důkaz je složitější a lze ho založit např. na základních poznatcích z teorie Riemannova integrálu nebo na stejnoměrné aproximaci spojité funkce na uzavřeném intervalu polynomy (Weierstrassova věta)].

Definice 1.1.2. Každou funkci φ definovanou na intervalu $(\gamma, \delta) \subset (c, d)$, pro kterou existuje derivace φ' na (γ, δ) a

$$\varphi'(x) + a(x)\,\varphi(x) = b(x)\,, \quad x \in (\gamma, \delta)\,,$$

nazýváme **řešením rovnice** (1.4).

Poznámky 1.1.3. 1. Protože *předpokládáme spojitost* funkcí a a b v intervalu (c, d) a protože každé řešení y rovnice (1.4) v intervalu $(\gamma, \delta) \subset (c, d)$ je spojité, plyne z identity $y' = b - ay$, že $y \in \mathcal{C}^{(1)}((\gamma, \delta))$ [Lineární prostor všech funkcí f na (γ, δ), které mají spojitou n-tou derivaci (a tedy všechny derivace $f^{(k)}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$), značíme $\mathcal{C}^{(n)}((\gamma, \delta))$]. Vidíme tedy, že stačí hledat řešení *pouze mezi funkcemi z* $\mathcal{C}^{(1)}((\gamma, \delta))$.

2. O rovnici (1.4) říkáme, že je to **lineární diferenciální rovnice 1. řádu s pravou stranou** b [2]). Při řešení této rovnice hraje významnou roli též rovnice

$$y' + a(x)y = 0\,, \quad x \in (c, d)\,, \tag{1.5}$$

kterou z rovnice (1.4) dostaneme volbou $b \equiv 0$. O ní zpravidla mluvíme jako o rovnici s **nulovou pravou stranou** nebo jako o **homogenní rovnici**. Poněkud absurdnímu (ale někdy užívanému) termínu „rovnice bez pravé strany“ se budeme zásadně vyhýbat. Tato úmluva nám umožňuje krátce a jednoduše se o obou rovnicích (1.4) a (1.5) domlouvat. Obecně je nutno dávat pozor na kontext, neboť termín „homogenní“ se v příbuzných matematických disciplínách vyskytuje také v jiných významech.

3. Termín **lineární** v tomto kontextu souvisí s tím, že označíme-li

$$L(y) = y' + a(x)y\,, \quad y \in \mathcal{C}^{(1)}((c, d))\,, \tag{1.6}$$

je L *lineární* zobrazení z $\mathcal{C}^{(1)}((c, d))$ do $\mathcal{C}((c, d))$ (Připomeňme, že předpokládáme spojitost funkce a; jak se ukáže, je to dokonce zobrazení *na* $\mathcal{C}((c, d))$). Zřejmě pro každé dvě funkce $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^{(1)}((c, d))$ a všechna $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ je tedy

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2)\,.$$

Linearita zobrazení na levé straně rovnice značně usnadňuje nalezení všech jejích řešení; později se ukáže, že stejným způsobem lze linearitu využít i za mnohem obecnější situace.

4. Pracujeme s funkcemi jediné reálné proměnné a jejich derivacemi. Protože mluvíme o derivacích a nikoli o *parciálních derivacích*, je zvykem označovat námi studované rovnice jako **obyčejné diferenciální rovnice** (ODR) a tak je odlišovat od **parciálních diferenciálních rovnic** (PDR). Obě zkratky se užívají i v anglicky psané literatuře, přičemž např. ODR zkracuje výraz „ordinary differential equation“.

---

[2]) Hlubší pohled na diferenciální rovnice získá čtenář teprve po přečtení další části textu.

Definice 1.1.4. Nechť φ je pevně zvoleným řešením diferenciální rovnice (1.4) v intervalu (γ,δ). Jestliže pro každé řešení ψ rovnice (1.4) definované na intervalu $(\gamma_1,\delta_1)\supset(\gamma,\delta)$ plyne z rovnosti $\psi|(\gamma,\delta)=\varphi$ i rovnost $(\gamma,\delta)=(\gamma_1,\delta_1)$, nazývá se řešení φ **maximální řešení** (1.4). Jinak řečeno: maximální řešení není *netriviální* restrikcí žádného jiného řešení. Systém *všech maximálních řešení* rovnice (1.4) nazýváme **obecné řešení rovnice** (1.4).

Řešit jakoukoli ODR znamená najít její obecné řešení. Není-li obor vymezen přesně, řešíme rovnici na všech maximálních otevřených intervalech, na nichž má rovnice smysl; to je úmluva, kterou se řídíme při řešení příkladů, u kterých se často specifikace intervalu, vůči němuž obecné řešení hledáme, vynechává. Poznamenejme ještě, že když máme najít např. takové maximální řešení rovnice (1.4), které vyhovuje pro danou dvojici $[\,x_0,y_0\,]\in\mathbb{R}^2$, $x_0\in(c,d)$, podmínce $y(x_0)=y_0$, je to *jiná* úloha, s níž se setkáme později.

Příklad 1.1.5. Množina funkcí $\{\log+C\,;\,C\in\mathbb{R}\}$ je obecným řešením diferenciální rovnice $y'=1/x$, $x\in(0,\infty)$. Funkce log je charakterizována touto diferenciální rovnicí spolu s další podmínkou, např. $y(1)=0$; takovým způsobem se někdy funkce (přirozený) logaritmus definuje. Povšimněte si, že pracujeme s řešeními *vždy na intervalu*, podobný pojem pro obecnější množinu nezavádíme. Pokud by nebyl specifikován interval $(0,\infty)$, museli bychom nalézt též obecné řešení rovnice na intervalu $(-\infty,0)$.

Někdy se setkáte, např. v tabulkách, se vzorcem

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\log|x|+C\,.$$

Ten naznačuje, že všechny primitivní funkce k funkci $1/x$ tvoří systém $\{\,\log|x|+C\,,\,C\in\mathbb{R}\,\}$, to je však špatně. Funkce vlevo i vpravo v této rovnosti jsou definovány na sjednocení dvou *disjunktních* intervalů $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Správně musí být vzorec chápán tak, že všechny primitivní funkce k funkci $1/x$, $x\in(0,+\infty)$, tvoří systém $\{\,\log x+C_1\,;\,C_1\in\mathbb{R}\,\}$, $x\in(0,+\infty)$ a současně všechny primitivní funkce k funkci $1/x$, $x\in(-\infty,0)$, tvoří systém $\{\,\log(-x)+C_2\,;\,C_2\in\mathbb{R}\,\}$, $x\in(-\infty,0)$. Konstanty C_1,C_2 jsou však navzájem *zcela nezávislé* !

Věnujme se nyní rovnici (1.5). Dokážeme, že pro ni je struktura řešení podobná jako u rovnice (1.2). Připomeňme, že přitom podstatně využíváme Poznámky 1.1.3.

Lemma 1.1.6. *Všechna řešení rovnice* (1.5) *definovaná na intervalu* (γ,δ) *tvoří lineární podprostor prostoru* $\mathcal{C}^{(1)}((\gamma,\delta))$. *Dimenze tohoto prostoru je* 1 [3]).

Důkaz. Z linearity operátoru L z (1.6) plyne, že jsou-li y_1, y_2 řešeními rovnice (1.5) na (γ,δ) a $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, je také $c_1y_1+c_2y_2$ řešením rovnice (1.5) na (γ,δ), tj. platí

$$L(c_1y_1+c_2y_2)=0\,.$$

K důkazu, že maximální řešení tvoří jednodimenzionální podprostor prostoru $\mathcal{C}^{(1)}((\gamma,\delta))$, užijeme podobného obratu jako výše. Je-li A primitivní funkce k funkci a, tj. platí $A'=a$, potom se lze dosazením snadno přesvědčit, že funkce

$$y(x)=\exp(-A(x))\,,\quad x\in(\gamma,\delta)\,, \tag{1.7}$$

[3]) Použijeme-li znalostí z lineární algebry, je tento prostor jádrem $\operatorname{Ker}L$ operátoru L.

je řešením (1.5). Z Poznámky 1.1.3 (3) plyne, že pro každé $C \in \mathbb{R}$ je také funkce Cy řešením rovnice (1.5). Nyní dokážeme, že *každé řešení rovnice* (1.5) *je násobkem funkce* $\exp(-A(x))$. K tomu stačí uvážit, že pro *každé* řešení y rovnice (1.5) na (γ,δ) platí

$$\left(\frac{y(x)}{\exp(-A(x))}\right)' = \frac{y'(x)\exp(-A(x)) + y(x)\exp(-A(x))a(x)}{\exp^2(-A(x))} = \\ = \frac{y'(x)+a(x)y(x)}{\exp(-A(x))} = 0\,,$$

takže je tento podíl konstantní funkcí na (γ,δ). Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 1.1.7. Maximální interval, na němž existuje primitivní funkce k funkci a, pomocí které popisujeme řešení (1.5) vztahem (1.7), je interval (c,d) z (1.4).

Lemma 1.1.8. *Je-li y_1 řešení rovnice* (1.4) *na (γ,δ) a y_2 řešení rovnice* (1.5) *na (γ,δ), pak je součet y_1+y_2 řešením rovnice* (1.4) *na (γ,δ). Jsou-li y_1, y_2 dvě řešení rovnice* (1.4) *na intervalu (γ,δ), je jejich rozdíl y_1-y_2 řešením rovnice* (1.5) *na (γ,δ).*

Důkaz. Přímý výpočet dává $L(y_1+y_2) = L(y_1)+L(y_2) = b+0 = b$. Podobně snadno spočteme $L(y_1-y_2) = L(y_1)-L(y_2) = b-b = 0$. □

Teoreticky lze obecné řešení rovnice (1.4) určit dvojím nalezením primitivních funkcí [4]): Je-li y řešení této rovnice a je-li A nějaká primitivní funkce k funkci a v intervalu (c,d), je

$$\big(y(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\big)' = \big(y'(x)+a(x)\,y\big)\mathrm{e}^{A(x)} = b(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = B'(x)\,, \tag{1.8}$$

kde $B = B(x)$ je nějaká primitivní funkce k funkci $b(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}$. Porovnáme-li první a poslední výraz v (1.8), pak z již zmíněného důsledku věty o střední hodnotě plyne pro všechna $x \in (c,d)$ a vhodně zvolenou konstantní funkci C

$$y(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = C + B(x)\,; \tag{1.9}$$

odtud snadno plyne

$$y(x) = \big(C+B(x)\big)\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} + B(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}\,. \tag{1.10}$$

V tomto tvaru lze napsat kterékoli řešení rovnice (1.4). Obráceně: Má-li funkce y na intervalu (c,d) tento tvar s libovolně zvolenou konstantní funkcí C, je

$$y' = \big(B'(x) - a(x)(C+B(x))\big)\exp(-A(x))\,,$$

takže pomocí (1.8) dostáváme

$$y' + a(x)\,y = B'(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \big(b(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\big)\,\mathrm{e}^{-A(x)} = b(x)\,;$$

funkce y popsaná pomocí (1.10) je tedy řešením rovnice (1.4). Shrneme-li předcházející úvahy, můžeme zformulovat výsledek: *Při zavedeném označení je y řešením rovnice* (1.4)*, právě když platí* (1.10)*, kde C je konstantní reálná funkce* [5]). Popsaný postup řešení budeme nazývat **metoda integračního faktoru**. Integračním faktorem je zde funkce $\mathrm{e}^{A(x)}$.

Je vhodné si ještě uvědomit, že je sice existence primitivních funkcí k funkci $a(x)$ a k funkci $b(x)\exp(A(x))$, $x \in (c,d)$, zaručena jejich spojitostí, ale tyto primitivní funkce mohou být jen velmi obtížně popsatelné pomocí tzv. elementárních funkcí, případně je to dokonce nemožné. Výsledky shrneme do následující věty:

---

[4]) V dnes již neužívané terminologii dvojí kvadraturou.

[5]) Zpravidla do zápisu výsledku přidáváme $C \in \mathbb{R}$ a chápeme rovnost (1.10) „bodově“.

Věta 1.1.9. *Je-li y_1 jakékoli maximální řešení rovnice* (1.4)*, je obecné řešení rovnice* (1.4) *identické s množinou všech součtů tvaru $y_1 + y_2$, kde y_2 je nějaké maximální řešení rovnice* (1.5)*. Jinak řečeno: abychom získali obecné řešení rovnice* (1.4)*, stačí ke všem prvkům obecného řešení* (1.5) *přičíst jedno pevně zvolené maximální řešení y_2 rovnice* (1.4) [6]*.*

Důkaz. Zvolme jedno maximální řešení y_1 rovnice (1.4). Je-li y libovolné maximální řešení rovnice (1.4), platí $y = y_1 + (y - y_1)$, z čehož pomocí Lemmatu 1.1.8 plyne tvrzení věty. □

Poznámka 1.1.10. Známe-li tvar řešení rovnice (1.5), lze určení jednoho (partikulárního) řešení rovnice (1.4) do značné míry „zmechanizovat“. Další metoda řešení rovnice, kterou později zobecníme, se nazývá **metoda variace konstant**. V tomto případě jde o jedinou konstantu, takže výpočet je opět jednoduchý. Již víme, že pro každé $C \in \mathbb{R}$ je

$$y(x) = C \exp(-A(x)) , \quad x \in (c, d) ,$$

obecným řešením (1.5), pokud $A' = a$. Budeme nyní hledat řešení rovnice (1.4) ve tvaru

$$y(x) = C(x) \exp(-A(x)) , \quad x \in (c, d) ,$$

kde C je (nějaká) funkce, která má vlastní derivaci pro všechna $x \in (c, d)$. Zderivováním a dosazením do (1.4) dostaneme pro všechna tato x

$$\begin{gathered} C'(x) \exp(-A(x)) + C(x) \exp(-A(x))(-a(x)) + \\ + C(x) \exp(-A(x))\, a(x) = b(x) , \end{gathered}$$

tj. platí (máme i zároveň jakousi kontrolu, členy na druhém a třetím místě na levé straně se *vždy* musí „zrušit“)

$$C'(x) = b(x) \exp(A(x)) . \tag{1.11}$$

Vpravo je funkce z $\mathcal{C}((c, d))$, existuje tedy k ní (alespoň jedna) primitivní funkce a ta po dosazení za $C(x)$ dá vzorec pro partikulární řešení rovnice (1.4). Užitím (1.11) snadno nahlédneme, že funkce C je vždy z $\mathcal{C}^{(1)}((c, d))$. Čtenář si může povšimnout, že při tomto postupu hledáme tytéž dvě primitivní funkce, jejichž *existenci* jsme výše dostali ze spojitosti. Ukázkám praktického řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řadu je věnován např. § 30 učebního textu [10].

Příklad 1.1.11. Pro ilustraci řešme oběma metodami na $\mathbb{R}$ rovnici

$$y' + 2xy = 2x^3 . \tag{1.12}$$

Nejprve řešme pomocí integračního faktoru. Snadno nahlédneme, že $\big(x^2\big)' = 2x$, takže integrační faktor je $\exp(x^2)$. Násobíme jím tedy celou rovnici a obdržíme

$$\big(y \exp(x^2)\big)' = (y' + 2xy) \exp(x^2) = 2x^3 \exp(x^2) = \big(\exp(x^2)(x^2 - 1)\big)' , \tag{1.13}$$

a tedy

$$y \exp(x^2) = \exp(x^2)(x^2 - 1) + C . \tag{1.14}$$

Odtud dostaneme jednoduchou úpravou

$$y = C \exp(-x^2) + x^2 - 1 , \qquad C \in \mathbb{R} . \tag{1.15}$$

[6]) Pro stručnější vyjadřování při popisu procesu řešení diferenciální rovnice (1.4) se zvolené (maximální) řešení y_2 často nazývá *partikulární řešení* rovnice (1.4).

Řešme nyní úlohu metodou variace konstant(y). Rovnice $y' + 2xy = 0$ má pak obecné řešení tvaru $y(x) = C\exp(-x^2)$, o čemž se lze přesvědčit dosazením. Je-li nyní $C \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ a $y(x) = C(x)\exp(-x^2)$, dostaneme po zderivování a dosazení do (1.12)

$$C'(x)\exp(-x^2) - 2xC(x)\exp(-x^2) + 2xC(x)\exp(-x^2) = 2x^3\,, \tag{1.16}$$

z čehož dostaneme po určení (jedné) primitivní funkce k $2x^3\exp(x^2)$ např.

$$C(x) = (x^2 - 1)\exp(x^2)\,.$$

Obecné řešení rovnice (1.12) je tedy podle Věty 1.1.9 tvaru

$$y(x) = C\exp(-x^2) + x^2 - 1\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

1.2 Ukázky použití

Následující tři příklady ukazují jednoduché modely situací, které lze popsat pomocí diferenciálních rovnic. Je užitečné si uvědomit již nyní jistou univerzalitu : často prakticky stejný model popisuje velmi různorodé jevy.

Příklad 1.2.1 (exponenciální růst). Populace bakterií v roztoku závisí na čase; označme $P(t)$ počet bakterií v čase t. Nechť $\Delta P := P(t+\Delta t) - P(t)$ je přírůstek počtu bakterií za (krátkou) dobu Δt; z pozorování je známo, že přírůstek ΔP je úměrný velikosti populace $P(t)$ a době Δt. To zapíšeme ve tvaru

$$\Delta P \approx \alpha P(t)\Delta t\,, \quad \text{resp.} \quad \Delta P/\Delta t \approx \alpha P(t)\,,$$

kde α je kladná konstanta. Je to poznatek podložený zkušeností z experimentů. Symbol $\approx$ má čtenáře upozornit na to, že jde o hypotetickou přibližnou rovnost. Po provedení limitního přechodu pro $\Delta t \to 0_+$ vlevo v posledním vztahu a nahrazení $\approx$ symbolem $=$ dostaneme *matematický model*, popisující jistou *zjednodušenou* situaci. Tento model je popsán jednoduchou diferenciální rovnicí

$$P' - \alpha P = 0\,. \tag{1.17}$$

Jak jsme výše odvodili, obecné řešení této rovnice má tvar

$$P(t) = P_0\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

kde $P_0 > 0$ je velikost populace v čase $t = 0$ [7]). Tento jednoduchý zákon růstu populace není specifický pro populaci bakterií a je aplikovatelný na lidskou populaci, populaci rostlin nebo zvířat určitého druhu.

Známe-li kromě P_0 též $P_1 := P(t_1)$ pro nějaké $t_1 > 0$, můžeme vypočítat konstantu α; zřejmě z rovnosti $P_1 = P_0\exp\alpha t_1$ plyne

$$\alpha = \frac{1}{t_1}\log\frac{P_1}{P_0}\,. \tag{1.18}$$

Označme δ čas, za který se velikost populace zdvojnásobí. Snadno dostaneme

$$2 = \frac{P(t+\delta)}{P(t)} = \frac{P_0\,\mathrm{e}^{\alpha(t+\delta)}}{P_0\,\mathrm{e}^{\alpha t}} = \mathrm{e}^{\alpha\delta}\,,$$

a tedy $\delta = (\log 2)/\alpha$. Je pozoruhodné, že tento růstový zákon *i přes velké zjednodušení reálné situace* dává pro určitá časová období výsledky velmi blízké empiricky získaným datům.

[7]) Zpravidla nás zajímá pouze chování P od jistého okamžiku, jemuž odpovídá v matematickém modelu obvykle $t = 0$.

Poznámka 1.2.2. Statistická data ukazují, že se po dlouhou dobu počet obyvatel na Zemi zdvojnásobuje přibližně každých 35 let. Podle údajů OSN v r. 1986 žilo na Zemi asi 5 miliard lidí. Z těchto údajů snadno určíme potřebné konstanty, takže pro počet lidí na Zemi dostáváme vzorec

$$P(1986+t) \doteq 5 \cdot 10^9 \cdot \mathrm{e}^{0{,}02\,t}\,.$$

Podle něj provedeme výpočet předpokládaného počtu obyvatel Země v budoucnosti; po zaokrouhlení příslušných hodnot dostaneme tabulku [8])

Rok	Obyvatel Země		U.S. Census B.	
1986	5	miliard	4,935	miliard
2000	6,6	miliard	6,081	miliard
2050	18,0	miliard	9,224	miliard
2100	48,9	miliard		
2300	2,7	biliónů		
2501	148,7	biliónů		

To by znamenalo, že v r. 2501 bude mít každý obyvatel Země k dispozici cca $1\,\mathrm{m}^2$. I když model poskytuje v kratších časových intervalech vcelku přijatelné hodnoty, poslední údaj ukazuje, že použití popsaného modelu pro dlouhé časové úseky dává absurdní výsledky. Pro zajímavost: Dne 12.10.1999 symbolicky uvítal generální sekretář OSN *Kofi Annan* prvního občana sedmé miliardy obyvatel Země a první občan osmé miliardy obyvatel Země přišel prý na svět 31. října 2011. Podle našeho jednoduchého vzorce dostaneme $P(2011) = 5 \cdot 10^9 \cdot \mathrm{e}^{0{,}5} \doteq 8{,}244$ miliardy, a to na konci roku 2011.

V dalším příkladu už budeme poněkud stručnější, neboť jde o úvahy podobného typu jako v předcházejícím příkladu.

Příklad 1.2.3 (lineární dietní model). Hmotnost člověka závisí na mnoha věcech, ale v prvním přiblížení je funkcí přísunu energie v potravinách a její „spotřeby“; ta závisí na činnosti, kterou člověk vykonává, ale i na věku a pohlaví jedince, na metabolických faktorech apod. Denní spotřeba jedince činí obvykle 30 až 40 kilokalorií (kcal) na každý kilogram jeho váhy w. Při průměrném energetickém přísunu 35 kcal denně na každý kilogram váhy jedince lze očekávat, že se jeho váha stabilizuje. Z pozorování dospíváme k představě, že změna váhy je přímo úměrná přebytku resp. nedostatku v energetickém přísunu. Podle ní např. člověk o váze 70 kg při denní konzumaci $70 \times 35 = 2450$ kcal nebude na váze ani přibírat, ani ubírat, avšak každých cca 7000 kcal přebytku v celkovém přísunu vyvolá následné zvýšení váhy o 1 kg. Tato představa nás dovádí k modelu, popsanému diferenciální rovnicí

$$w' = \frac{35(c-w)}{7000}\,, \quad \text{tj.} \quad \frac{w'}{w-c} = -\,0{,}005\,,$$

ve které jsme c označili váhu sledovaného člověka, která by odpovídala ustálenému stavu při konstantním denním energetickém přísunu. Řešením této rovnice dostáváme

$$w(t) = c + (w(0) - c)\mathrm{e}^{-0{,}005t}\,.$$

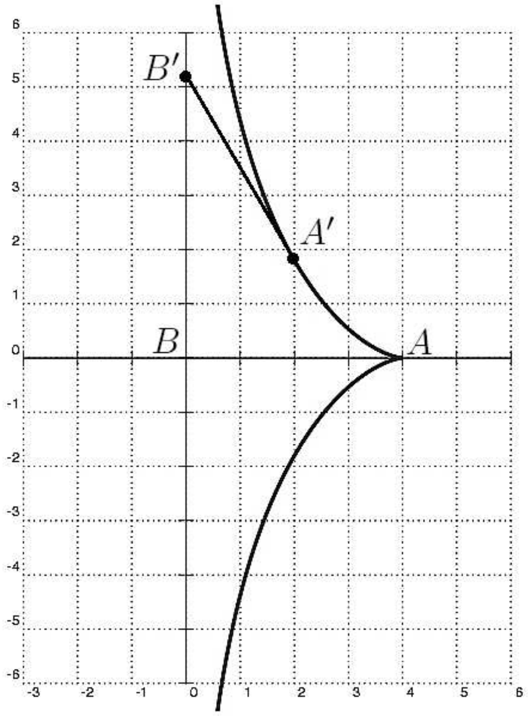
Jestliže pan Tlustý, vážící 95 kg, omezí svůj celkový denní přísun na 2625 kcal, bude jeho váha v závislosti na čase t vyhovovat vztahu

$$w(t) = 75 + 20\exp(-\,0{,}005t)\,.$$

[8]) Poslední sloupec tabulky udává skutečný stav a také předpověď pro r. 2050 tak, jak byla uvedena v mezinárodní databázi U.S. Census Bureau (stav k 26.4.2005). Detailní a aktuální pohled na dnešní stav uvádíme v Kapitole 3.9 v Poznámce 8.2.2. Srov. [34].

V tom případě se podle našeho modelu bude váha pana Tlustého postupně blížit 75 kg (je totiž $2625 = 35 \times 75$), přičemž váhy 80 kg (!) dosáhne teoreticky za 278 dní, tedy za více než tři čtvrtě roku[9]). Proto patrně tolik dobrých předsevzetí končí fiaskem! (Srovnej s [31].) V dalším textu ukážeme, že jednoduchý odvozený model je použitelný i v dalších situacích s praktickým využitím.

Příklad 1.2.4 (traktrix). Přemýšleli jste někdy o tom, po jaké křivce se bude pohybovat vzpírající se pes, kterého táhne na vodítku za sebou jeho pán? Patrně ne. Je to však úloha stará jako infinitesimální počet, řešil ji totiž již Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) (viz Historické poznámky v Kapitole 9). Tato křivka je známa též pod jménem **psí křivka** nebo **stíhací křivka** a v obecnější formulaci popisuje dráhu bodu A, který se pohybuje konstantní rychlostí r_1 vždy ve směru k bodu B, pohybujícímu se konstantní rychlostí r_2 po přímce p. Ač jde zdánlivě o hříčku, je zde souvislost např. s letectvím.



Budeme se zabývat jen případem **traktrix**. Bod $A = [\,a, 0\,]$ je počáteční polohou psa, bod $B = [\,0, 0\,]$ je počáteční polohou jeho pána (na ilustračním obrázku je $a = 4$). Je-li pán při rovnoměrném pohybu „vzhůru" v bodě B', je pes na křivce v bodě A' a vzdálenosti $\bar{A}B$ a $\bar{A'}B'$ jsou rovny a, přičemž směr úsečky $A'B'$ je směrem tečny křivky v bodě A'.

Využitím poznatků elementární geometrie tak dospějeme k rovnici

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,,$$

přičemž je zřejmě $y(0) = 0$. Řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$y' = \int_x^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

což nám po integraci dává (znaménko „$-$" odpovídá pohybu pána „dolů", tj. ve směru záporné poloosy y; tak dostaneme druhou větev křivky)

$$y = \pm\left(a\,\log\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}\right) \tag{1.19}$$

Pokud bychom chtěli traktrix vyjádřit parametricky, pak po substituci $x = a\cos t$ a úpravě dostaneme

$$x(t) = a\,\cos t\,, \quad y(t) = \pm\, a\left(\log\frac{1 + \sin t}{cost} - \sin t\right)$$

Poznámky 1.2.5. Uveďme bez důkazu pár zajímavostí: Systém ortogonálních křivek k traktrix (někdy též **trajektorií**) je popsán diferenciální rovnicí

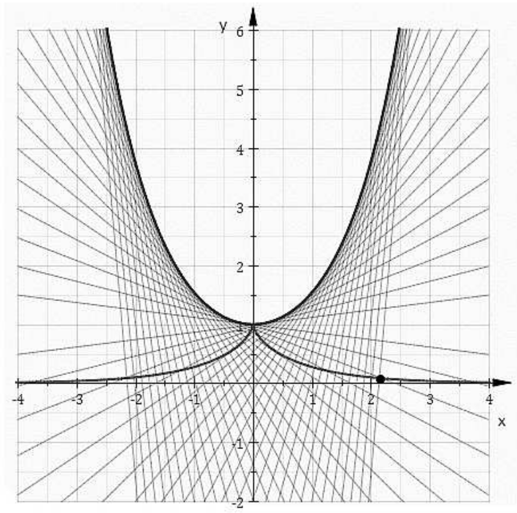
$$y' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,,$$

[9]) Pro milovníky SI soustavy uvádíme převodní vztah 1 kcal = 4,186 kJ. Pro milovníky piva uvádíme ještě další převodní vztah 1 l Gambrinusu 12° $\doteq$ 1860 kJ. Podle tohoto modelu by tedy teoreticky při konzumaci pouze 1 litru Gambrinusu denně dosáhl pan Tlustý váhy 80 kg již za cca 38,5 dne.

je to tedy systém kružnic $x^2 + (y - C)^2 = a^2$. Obálkou tečen traktrix (tzv. **evolutou** této křivky) je řetězovka o rovnici

$$x = a \cosh \frac{y}{a}$$

a obsah neomezeného obrazce mezi traktrix a křivkou s ní symetrickou podle osy y je roven πa^2. Se záměnou os, abychom dostali řetězovku v „přirozené poloze“ a při volbě $a = 1$ vypadá příslušný obrázek takto:



Lze očekávat, že nalezené výsledky o lineárních rovnicích bude možno dále zobecnit, např. pro *lineární rovnice n-tého řádu* a to v dalším textu skutečně uděláme. Na závěr stojí snad za zmínku, že řadu dalších zajímavých příkladů nalezne čtenář v [3], jedné z „nejčtivějších“ učebnic, které pojednávají o diferenciálních rovnicích. Dalšími knihami tohoto typu jsou [1] a [8].

1.3 Cvičení

1. Ukažte, že funkce $y(x) = Cx + C(1 + C^2)^{-1/2}$ je pro každé $C \in \mathbb{R}$ řešením rovnice

$$y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\,!$$

2. Ukažte, že pro každé $C \in \mathbb{R}$ je funkce $y = C^2 + 2\,C(x - C)$ řešením rovnice

$$(y')^2 - 4xy' + 4y = 0\,! \qquad (*)$$

Je to obecné řešení rovnice $(*)$? Je funkce $y = x^2$ řešením $(*)$?

3. Dokažte, že funkce $\big(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\big)/2a + C$ je řešením rovnice

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}\,!$$

4. Řešte rovnici

$$y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,! \quad \big[\, y(x) = (x^2 + C)\,\mathrm{e}^{-x^2} \,\big]\,.$$

5. Řešte rovnici

$$y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4\,! \quad \left[\, y(x) = (x^3 e^{-x^2} + C)\, e^{x^2} = x^3 + C\, e^{x^2} \,\right].$$

6. Řešte rovnici

$$xy' + (1-x)\,y = x\,e^x\,! \quad \left[y(x) = e^x \left(\frac{x}{2} + \frac{C}{x} \right) ; \text{všimněte si } D_y \text{ v závislosti na } C \right]$$

7. Řešte rovnici

$$y' + (y - 2\sin x)\cos x = 0\,! \quad \left[y(x) = 2\sin x - 2 + C e^{-\sin x} \right]$$

8. Řešte rovnici

$$y' + y = \cos x\,! \quad \left[y(x) = \frac{\cos x + \sin x}{2} + C\,e^{-x} \right]$$

9. Řešte rovnici

$$y' - 2xy = x$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 1\,!$ $\left[y(x) = \dfrac{3\,e^{x^2} - 1}{2} \right]$

10. Určete obecné řešení rovnice

$$(1+x^2)y' + xy = (1+x^2)^{5/2}\,!$$

$\left[\text{Rovnici nejprve dělte výrazem } (1+x^2); \quad y(x) = \left(\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2x^3}{3} + x + C \right) \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right]$

11. Řešte rovnici

$$y' + y = e^x$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 2\,!$ $\left[\; y(x) = \dfrac{e^x + 3\,e^{-x}}{2} \right]$

12. Řešte rovnici

$$y' + y = e^{-x}$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 3\,!$ $\left[\; y(x) = (x+1)\,e^{-x} \right]$

13. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}\,y = 1$$

a pak určete maximální řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 1\,!$

$\left[y(x) = (\operatorname{arctg} x + C)\,(1+x^2); \;\; y(x) = (\operatorname{arctg} x + 1)\,(1+x^2) \text{ na } \mathbb{R} \right]$

14. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' + \frac{1}{x^2}\,y = 0$$

a pak určete maximální řešení vyhovující počáteční podmínce $y(-1) = 2\,!$

$\Big[$ obecné řešení: $y(x) = C_1\,e^{1/x}$); $x \in (-\infty, 0)$, $C_1 \neq 0$ a $y(x) = C_2\,e^{1/x}$), $x \in (0 + \infty)$, $C_2 \neq 0$; příslušné maximální řešení je tvaru $y(x) = 2e^{(1+x)/x}$); $x \in (-\infty, 0)$ $\Big]$

15. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' + \frac{1}{1+x}\, y = 0$$

a pak určete maximální řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 1$!

$\Big[$obecné řešení: $y(x) = C_1(1+x)^{-1}$; $x \in (-\infty, -1)$, $C_1 \neq 0$ a $y(x) = C_2(1+x)^{-1}$, $x \in (-1, +\infty)$, $C \neq 0$; příslušné maximální řešení je tvaru $y(x) = (1+x)^{-1}$; $x \in (-1, +\infty)$ $\Big]$

16. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' + y\cos x = \mathrm{e}^{-\sin x}$$

a pak určete maximální řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 1$!

$\Big[$obecné řešení: $y(x) = (x + C)\,\mathrm{e}^{-\sin x}$; příslušné maximální řešení je tvaru $y(x) = (x + \mathrm{e})\,\mathrm{e}^{-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$$\Big]$

Kapitola 2

Základní pojmy

V Kapitole 1 jsme řešili jednoduché diferenciální rovnice. I když jsme potřebné pojmy ve speciálních případech již jednou definovali, uděláme to nyní stručně v obecnější situaci znova. Budeme podstatně využívat základní poznatky z algebry a některé elementární vlastnosti funkcí více proměnných, nebudeme je však dokazovat. Výklad bude mít navíc volnější popisnou formu, neboť striktní formalizace by byla pro naše potřeby příliš náročná a neúčelná. Pokud nebude výslovně řečeno něco jiného, pracujeme v této kapitole pouze s reálnými funkcemi.

2.1 Úvod

Označení 2.1.1. **Obyčejnou diferenciální rovnicí** budeme rozumět rovnici

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{2.1}$$

kde F je funkce definovaná na nějaké oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Nejvyšší řád derivace efektivně vystupující v rovnici nazýváme **řád rovnice**. Je-li F polynom, pak jeho stupeň je **stupněm rovnice**. **Řešením rovnice** (2.1), podrobněji **řešením rovnice** (2.1) **na intervalu** (c, d), nazýváme každou funkci φ definovanou na intervalu (c, d) takovou, že existuje její derivace $\varphi^{(n)}$ na (c, d), je $[\,x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\,] \in G$ pro všechna $x \in (c, d)$ a

$$F\big(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\big) = 0\,, \qquad x \in (c, d)\,.$$

Řešení rovnice (2.1) se nazývá **maximální řešení** (někdy se užívá i termín **úplné řešení**), je-li definováno na maximálním intervalu, tj. není restrikcí řešení rovnice (2.1), definovaného na intervalu (c', d'), pro nějž $(c, d) \subset (c', d') \neq (c, d)$. Množinu všech maximálních řešení rovnice (2.1) nazýváme **obecným řešením** (2.1). Každé řešení rovnice (2.1) je tedy restrikcí nějakého maximálního řešení, tj. jednoho prvku obecného řešení. Nebývá většinou obtížné zjistit, zda je funkce řešením dané diferenciální rovnice. Vyřešit ji, tj. nalézt její obecné řešení, bývá podstatně složitější.

Poznámka 2.1.2. Velmi často pracujeme s rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\,, \tag{2.2}$$

které jsou **rozřešeny vzhledem k nejvyšší derivaci**. Jelikož vlevo stojí derivace $y^{(n)}$ neznámé spojité funkce $y^{(n-1)}$, je tato rovnice řešitelná pouze v případě, že i funkce f na pravé straně v (2.2) je „dostatečně rozumná“. My se v dalším výkladu omezíme na případ *spojité funkce f*.

Budeme nejprve vyšetřovat jednodušší případ diferenciální rovnice prvního řádu se spojitou funkcí f. Uvedeme úlohu s předpoklady, se kterými budeme nadále pracovat.

Úmluva 2.1.3 (důležitá). Řešíme-li diferenciální rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{2.3}$$

s funkcí f spojitou na oblasti (tj. otevřené souvislé množině) $G \subset \mathbb{R}^2$, která je zároveň definičním oborem f, často pro $[x_0, y_0] \in G$ budeme hledat její řešení φ definované na nějakém intervalu $(c, d) \subset \mathbb{R}$ obsahujícím bod x_0, pro něž bude platit

$$\varphi(x_0) = y_0 \,. \tag{2.4}$$

Podrobněji: žádáme, aby řešení vyhovovalo podmínce

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \,, \quad x \in (c, d) \,,$$

(plyne z ní i inkluze $\{[x, \varphi(x)]; x \in (c, d)\} \subset G$) a *současně* splňovalo rovnost (2.4). S ohledem na některé fyzikální aplikace, kde proměnnou x bývá často čas, se tato úloha nazývá **počáteční úlohou** nebo také **Cauchyho úlohou** pro rovnici (2.3) . Obvykle užívaný stručný zápis úlohy je tvaru

$$y' = f(x, y(x)) \,, \quad y(x_0) = y_0 \,,$$

kde rovnost $y(x_0) = y_0$ vyjadřuje tzv. **počáteční podmínku**.

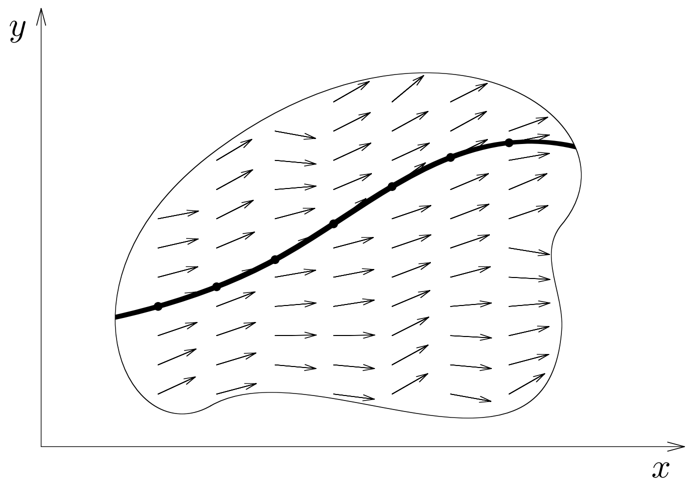
Při geometrické interpretaci řešení jakožto „křivky“ popsané funkcí φ (zde však pracujeme s otevřeným intervalem) hovoříme pak o **řešení, procházejícím bodem** $[x_0, y_0]$. Přirozené otázky, na které budeme hledat odpověď, jsou dvě:

(a) kdy existuje řešení rovnice (2.3) vyhovující počáteční podmínce (2.4) a

(b) kdy ke každým dvěma řešením této úlohy existuje okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0, na kterém tato řešení splývají.

V tomto smyslu také popsaný problém chápeme jednak jako problém **existence řešení** (2.3) **procházejícího bodem** $[x_0, y_0]$ a problém jeho **jednoznačnosti**.

Poznámka 2.1.4. Pro názorné chápání řešení uveďme ještě jednu interpretaci fyzikálně-geometrického charakteru. Diferenciální rovnice (2.3) je jakýmsi „kompasem“, který v bodech $[x, y]$ části roviny zpravidla ukazuje, jakým směrem se z něj máme pohybovat. Vyřešit diferenciální rovnici (2.3) pak znamená „projít částí roviny“ podle tohoto kompasu. Křivka, po níž se pohybujeme, je grafem (nějakého) řešení. Často se v této souvislosti mluví o *směrovém poli* určeném rovnicí (2.3) a to se též graficky znázorňuje. Srovnejte se schematickým náčrtkem na následujícím Obr. 2.1.



Obr. 2.1

Náčrt na obrázku by však neměl vzbudit ve čtenáři představu, že chování řešení v blízkosti „kraje oblasti“ musí být jednoduché, např. že funkce popisující řešení musí mít v krajních bodech svého definičního oboru limitu, nebo že se řešení v nějakém bodě nemůže „rozštěpit“.

2.2 Existenční věty

Nejprve dokážeme jednoduché lemma, jímž počáteční úlohu z předcházející Úmluvy 2.1.3 budeme převádět do jiného tvaru.

Lemma 2.2.1. *Nechť φ je, v kontextu Úmluvy 2.1.3, spojitá funkce na otevřeném intervalu I obsahujícím bod x_0. Potom φ je řešením počáteční úlohy na I, právě když pro všechna $x \in I$ je $[\,x, \varphi(x)\,] \in G$ a φ je řešením tzv.* **integrální rovnice**

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t\ . \tag{2.5}$$

Důkaz. Připomeňme již zavedené označení: máme řešit rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{2.6}$$

spolu s počáteční podmínkou (2.4), tj. $y(x_0) = y_0$. Pokud platí (2.5), pak integrál ze spojité funkce $f(x, \varphi(x))$, $x \in I$ [skládáme spojité funkce] v této rovnici vpravo je primitivní funkcí k integrandu, takže odtud zderivováním [potřebujeme k tomu tvrzení o derivování integrálu podle meze] plyne (2.3). Pro $x = x_0$ dostaneme $\varphi(x_0) = y_0$. Obráceně, z rovnice (2.3) plyne integrací rovnost funkcí

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\ = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t\ , \quad x \in I\,;$$

integrál na levé straně předcházející rovnice je roven $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(x) - y_0$, z čehož již dostaneme (2.5) jednoduchou úpravou. $\square$

Nyní se seznámíme s tvrzením často označovaným jako **Peanova existenční věta**. Na základě práce, v níž bylo toto tvrzení dokázáno, získal r. 1886 italský matematik Giuseppe Peano (1858 – 1932) doktorát. Často se však cituje až jeho práce z r. 1890.

Tvrzení 2.2.2 (Peano 1886). *Předpokládejme, že v rovnici* (2.3)*, tj. rovnici*

$$y' = f(x,y)$$

je funkce f spojitá *na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ a že platí $[\,x_0, y_0\,] \in G$. Potom existuje $\alpha > 0$ a funkce $\varphi : (x_0-\alpha, x_0+\alpha) \to \mathbb{R}$ tak, že pro všechna x z tohoto intervalu $[\,x, \varphi(x)\,] \in G$ a platí*

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = f(x,\varphi(x))\,, \quad x \in (x_0-\alpha, x_0+\alpha)\,, \\ \varphi(x_0) = y_0\,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

tj. počáteční úloha má alespoň jedno *řešení.*

Uvedená Peanova věta *nezaručuje* jednoznačnost řešení rovnice (2.3), a to ani lokálně. To bude dobře patrné z následujícího příkladu, který rovněž pochází od Peana.

Příklad 2.2.3 (Peano 1890). Řešme rovnici

$$y' = 3\,\sqrt[3]{y^2}\,. \tag{2.8}$$

Každé řešení rovnice (2.8) je funkce neklesající, protože pravá strana v (2.8) je nezáporná. Pokud tedy pro nějaké řešení y a $x_1 \le x_2$ nastávají rovnosti $y(x_1) = y(x_2) = 0$, je $y(x) = 0$ pro všechna $x \in [\,x_1, x_2\,]$ [připouštíme i degenerované intervaly, tedy případ, kdy $x_1 = x_2$]. Množina $N(y)$ nulových bodů řešení y je proto buď prázdná, nebo je to interval obsahující své krajní body, pokud je v nich (spojitá) funkce y definována.

Je-li řešení y v intervalu (γ, δ) všude nenulové, je (2.8) v tomto intervalu ekvivalentní s rovností $\bigl(y^{1/3}\bigr)' = 1$, a také, jak zjistíme snadným výpočtem, s rovností

$$y(x) = (x-C)^3\,, \tag{2.9}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ neleží v intervalu (γ, δ). Snadno se přesvědčíme, že rovnost (2.9) pro $x \in \mathbb{R}$ definuje řešení v $\mathbb{R}$; toto řešení je samozřejmě maximální.

Již víme, že $N(y)$ je buď $\emptyset$ (tento případ nenastává), omezený uzavřený interval (to je důsledek spojitosti y), nebo interval neomezený. Je-li interval degenerovaný, označme C jediný nulový bod maximálního řešení y; existují tedy $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, pro něž $y(x) = (x-C_1)^3$, $x \in (-\infty, C)$, a $y(x) = (x-C_2)^3$, $x \in (C, +\infty)$. Ze spojitosti v nulovém bodě C ale vyplývá $C = C_1 = C_2$ a toto maximální řešení jsme již nalezli. Je-li však $C_1 < C_2$, $N(y) = [\,C_1, C_2\,]$, dostáváme řešení [1])

$$y(x) := \begin{cases} (x-C_1)^3 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, C_1\,]\,, \\ 0 & \text{pro} \quad x \in (C_1, C_2)\,, \\ (x-C_2)^3 & \text{pro} \quad x \in [\,C_2, +\infty)\,. \end{cases} \tag{2.10}$$

Tato řešení jsou „nová“, vzorec (2.9) lze mezi ně zahrnout, nahradíme-li na druhém řádku v (2.10) otevřený interval intervalem uzavřeným a připustíme možnost degenerace intervalu. Zbývá však ještě případ, kdy intervaly $N(y)$ nejsou omezené.

Podobnou úvahou dostaneme pro případ $N(y) = (-\infty, C\,]$

$$y(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, C\,]\,, \\ (x-C)^3 & \text{pro} \quad x \in (C, +\infty)\,, \end{cases} \tag{2.11}$$

[1]) Diferencovatelnost tohoto řešení v bodech „lepení“ je zřejmá, obě jednostranné derivace jsou v nich rovny 0.

a pro případ $N(y) = [\,C, +\infty)$

$$y(x) := \begin{cases} (x-C)^3 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, C\,]\,, \\ 0 & \text{pro} \quad x \in (C, +\infty)\,. \end{cases} \tag{2.12}$$

Případ $N(y) = \mathbb{R}$ vede na již nalezené řešení $y \equiv 0$. Protože jsme vyčerpali všechny možné tvary množiny $N(y)$, je již seznam nalezených maximálních řešení rovnice (2.8) úplný. Poznamenejme ještě, že vzorec (2.10) formálně popisuje obecné řešení v závislosti na parametrech $C_1 \le C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^*$ [případům $C_1 > C_2$ a $C_1 = C_2 = \pm\infty$ žádná řešení neodpovídají].

Jestliže budeme zkoumat všechna taková řešení y rovnice (2.8), pro která je $y(1) = 1$, pak tato řešení v nějakém okolí bodu $x_0 = 1$ splynou; v tomto případě je však i takových splývajících *maximálních* řešení nekonečně mnoho. Podobnou vlastnost jako právě zvolený bod $[\,1, 1\,]$ mají všechny body v rovině kromě bodů osy x, tj. bodů, ležících na přímce o rovnici $y = 0$. Těmito body procházejí také grafy nekonečně mnoha maximálních řešení (všechna jsou definována na $\mathbb{R}$), avšak ke každému $x_0 \in \mathbb{R}$ a každému jeho okolí $\mathcal{U}(x_0)$ lze nalézt taková dvě řešení y_1, y_2 na $\mathbb{R}$, která na $\mathcal{U}(x_0)$ nesplývají [např. pro bod $x_0 = 0$ stačí volit $y_1(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ a $y_2(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$; tato dvě řešení nabývají stejné hodnoty *pouze* v bodě $x_0 = 0\,$].

Poznámka 2.2.4. Uvedená Peanova věta *nezaručuje* jednoznačnost řešení rovnice (2.3) ani lokálně. Jestliže si čtenář ještě jednou projde předcházející Příklad 2.2.3, snadno nahlédne, že na libovolně malém otevřeném intervalu obsahujícím bod x_0 mohou existovat dvě různá řešení (dokonce i nekonečně mnoho) rovnice (2.3), splňující podmínku (2.4). Již v r. 1925 byl dokonce sestrojen příklad takové rovnice tvaru (2.3) se spojitou funkcí f, že dokonce každým bodem $[\,x_0, y_0\,] \in G$ procházejí alespoň dvě řešení, která nesplývají v žádném okolí bodu x_0.

Tvrzení 2.2.2 nebudeme dokazovat, popíšeme však v hrubých rysech postup jeho důkazu. Níže zmiňovaná Ascoliho věta patří svojí povahou do výkladu o metrických prostorech.

(K1) Od počáteční úlohy se nejdříve přejde k „lépe zvládnutelné“ ekvivalentní úloze.

(K2) Zavede se pro $\varepsilon > 0$ pojem tzv. ε-přibližného řešení.

(K3) Pak se vytvoří pro $\varepsilon_n \to 0_+$ posloupnost ε_n-přibližných řešení φ_n na vhodném intervalu I obsahujícím bod x_0 z počáteční podmínky.

(K4) Využije se důsledek tzv. Ascoliho věty a z posloupnosti $\{\varphi_n\}$ se vybere podposloupnost stejnoměrně konvergentní na I k φ.

(K5) Dokáže se, že φ je hledaným řešením počáteční úlohy.

Věta 2.2.5 (Picard 1890, Lindelöf 1894). *Nechť $\delta > 0$ a nechť*

$$I = (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \times (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)\,.$$

Předpokládejme, že v rovnici (2.3)

$$y' = f(x, y)\,, \tag{2.3}$$

je funkce f spojitá na intervalu I a že existuje kladné číslo K takové, že pro všechna $x \in (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$ a pro všechna $y_1, y_2 \in (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)$ platí

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le K|y_1 - y_2|$$

$\big($*stručněji říkáme, že $f(x, \cdot\,)$ jsou pro $x \in (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$ (stejně) lipschitzovské v proměnné $y \in (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)$*$\big)$. *Potom platí:*

(a) *Existuje interval* (c,d) *a řešení* φ *rovnice* (2.3) *na intervalu* (c,d) *takové, že je* $x_0 \in (c,d)$ *a* $\varphi(x_0) = y_0$*, tj. řešení vyhovuje* počáteční podmínce (2.4).

(b) *Jestliže řešení* φ_1*,* φ_2 *splňují podmínku* (2.4)*, existuje okolí bodu* x_0*, na kterém tato řešení splývají.*

Toto tvrzení se zpravidla dokazuje jako aplikace tzv. Banachovy věty o pevném bodu, která je jedním z nejdůležitějších tvrzení o *úplných metrických prostorech.* V tomto případě to je prostor všech spojitých funkcí na jistém uzavřeném intervalu.

2.3 Rovnice vyšších řádů

Případ složitější rovnice

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

můžeme formálně upravit. Položíme-li

$$y(x) = y_1(x)\,, \quad y'(x) = y_2(x)\,, \dots, \quad y^{(n-1)}(x) = y_n(x)\,,$$

přejdeme k ekvivalentní úloze řešit **soustavu rovnic 1. řádu**

$$y_1' = y_2\,, \quad y_2' = y_3\,, \dots, \quad y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,.$$

Bez zjevného zvýšení obtížnosti lze vyšetřovat soustavu tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,, \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,, \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,. \end{aligned}$$

Stručnější zápis této soustavy využívá vektorového označení: $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$. Vektorová funkce

$$\boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n)$$

zobrazuje interval I na reálné ose do $\mathbb{R}^n$. Funkce $\boldsymbol{f} = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ je definována na oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a zobrazuje G do $\mathbb{R}^n$. Pro funkci $\boldsymbol{g} = (g^1, g^2, \dots, g^n)$ na I se spojitými složkami g^k definujeme v případě $I = [\,a, b\,]$

$$\|\, \boldsymbol{g} \,\|_\infty = \max\{\, \sup\{|\, g^k(t)\,|\,;\, t \in [\,a, b\,]\},\, k = 1, \dots, n\}\,.$$

Množinu všech takových funkcí označíme $\mathcal{C}_n([\,a, b\,])$; jde tedy vlastně o kartézský součin n prostorů $\mathcal{C}([\,a, b\,])$. Zformulujme větu obdobnou předchozí Větě 2.2.5:

Věta 2.3.1. *Nechť* $\delta > 0$ *a nechť*

$$I = (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \times (y_0^1 - 2\delta, y_0^1 + 2\delta) \times \dots \times (y_0^n - 2\delta, y_0^n + 2\delta)\,.$$

Nechť $\boldsymbol{y} = (y^1, \dots, y^n)$ *a* $\boldsymbol{f} = (f^1, \dots, f^n)$*. Předpokládejme, že v rovnici*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \tag{2.13}$$

je zobrazení $\boldsymbol{f}$ spojité v intervalu I. Dále předpokládáme, že existuje kladné číslo K takové, že pro všechna $(x, \boldsymbol{y}_1), (x, \boldsymbol{y}_2) \in I$ platí [2])

$$\| \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2) \|_\infty \leq K \| \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 \|_\infty ,$$

takže $\boldsymbol{f}$ je (stejně) lipschitzovská vůči $\boldsymbol{y}$ pro všechna x v $(x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$. Potom

(a) *existuje řešení $\boldsymbol{\varphi}$ rovnice (2.13) na intervalu (c, d) obsahujícím x_0 takové, že platí*

$$\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{y}_0, \quad (\textit{po složkách:} \quad \varphi^k(x_0) = y_0^k, \;\; k = 1, \ldots, n), \tag{2.14}$$

tj. řešení $\boldsymbol{\varphi}$ vyhovuje předcházející počáteční podmínce;

(b) *řešení je určeno lokálně jednoznačně, tj. každá dvě taková řešení splývají na nějakém okolí x_0.*

Důkaz tohoto tvrzení se myšlenkově neliší od důkazu předcházející Věty 2.2.5, je však *technicky* složitější. I tento důkaz nebudeme provádět a omezíme se na konstatování, že tyto věty tvoří *teoretický základ* zkoumání obyčejných diferenciálních rovnic. Důkazy lze nalézt např. v [35].

Při praktickém ověření podmínky, že vektorová funkce $\boldsymbol{f}$ je lipschitzovská vzhledem k proměnné $\mathbf{y}$, je užitečné následující tvrzení:

Lemma 2.3.2. *Jestliže existuje konstanta $M > 0$ tak, že pro všechna x z intervalu $(x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$ a $\mathbf{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$, $y^k \in (y_0^k - 2\delta, y_0^k + 2\delta)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ a pro $\mathbf{f} = (f^1, f^2, \ldots, f^n)$ platí pro všechna $i, j = 1, \ldots, n$*

$$\left| \frac{\partial f^i}{\partial y_j}(x, y^1, y^2, \ldots, y^n) \right| \leq M,$$

pak jsou splněny předpoklady Věty 2.3.1 o funkci $\mathbf{f}$ („lipschitzovskost“ vzhledem k proměnné $\mathbf{y}$).

Příklad 2.3.3. Uvažujme soustavu (užijeme tentokrát označení derivace tečkou, které je obvyklejší ve fyzice)

$$\begin{array}{rcrcr} \dot{x}_1 = & 2x_1 & - & x_2 \\ \dot{x}_2 = & x_1 & + & 3x_2 \end{array} . \tag{2.15}$$

Zřejmě je $f_1(t, x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$, $f_2(t, x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$ a tedy

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) = 2, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) = -1, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) = 1, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) = 3, \end{array}$$

tj. $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq 3$ na $\mathbb{R}^3$ pro $i, j = 1, 2$ a tedy vektorová funkce $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ je lipschitzovská vzhledem k $\mathbf{x}$ na $\mathbb{R}^3$. Podle věty o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy má tato úloha pro soustavu (2.15), $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, jediné řešení pro libovolné $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ a $t_0 \in \mathbb{R}$.

---

[2]) Označení $\| \cdot \|_\infty$ značí „supremovou normu“, ale užitá norma není podstatná. Proto se často index ∞ vynechává.

Jako důsledek předcházející věty dostaneme větu pro **počáteční úlohu pro rovnici** n-**tého řádu**; užijeme označení standardního v ODE i za cenu ztráty přímé souvislosti s předcházejícím označením.

Věta 2.3.4. *Nechť* $\delta > 0$, $[\,x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\,] \in \mathbb{R}^{n+1}$, *a nechť*

$$I = (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \times (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta) \times \cdots \times (y_{n-1} - 2\delta, y_{n-1} + 2\delta)\,.$$

Nechť dále je funkce f *v rovnici*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2.16}$$

spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *a (stejně) lipschitzovská pro každé* x *vzhledem k posledním* n *proměnným. Potom platí:*

(a) *Existuje řešení* φ *rovnice* (2.16) *takové, že je*

$$\varphi(x_0) = y_0\,, \quad \varphi'(x_0) = y_1\,, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,,$$

tj. toto řešení vyhovuje počáteční podmínce.

(b) *Jestliže dvě řešení* φ_1, φ_2 *splňují obě počáteční podmínku, shodují se na nějakém okolí bodu* x_0.

Vzniká přirozená otázka, zda existuje nějaké *maximální* řešení, které vyhovuje podmínce (2.4). Odpověď i na tuto otázku je kladná. Řešení, jejichž existenci jsme dokázali, se totiž „dají slepit". Dodejme na vysvětlenou, že předpokládáme, že ke každému bodu $[\,x, \boldsymbol{y}\,] \in G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ existuje interval $I \subset G$, který tento bod obsahuje a na kterém jsou splněny pro tento bod a I předpoklady Věty 2.3.1. Protože se v takovém bodě nemůže řešení „štěpit", je tvrzení intuitivně zřejmé. Ani toto tvrzení nebudeme dokazovat.

Věta 2.3.5. *Nechť* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *je oblast a nechť funkce* $\boldsymbol{f}$ *v rovnici*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})\,, \tag{2.13}$$

je v G *spojitá a lokálně lipschitzovská vůči* $\boldsymbol{y}$. *Potom*

(a) *existuje interval* (c, d) *obsahující bod* x_0 *a na něm definované maximální řešení* $\boldsymbol{\varphi}$ *rovnice* (2.13) *takové, že platí*

$$\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{y}_0\,,$$

tj. toto maximální řešení $\boldsymbol{\varphi}$ *vyhovuje počáteční podmínce* (2.14);

(b) *toto maximální řešení je určeno jednoznačně.*

Jako důsledek Věty 2.3.5 dostaneme tvrzení **o existenci maximálního řešení pro rovnice n-tého řádu**.

Důsledek 2.3.6. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je oblast, $[x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}] \in G$, a nechť funkce f v rovnici*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2.16}$$

je v G spojitá a lokálně lipschitzovská vůči posledním n proměnným. Potom

(a) *existuje interval (c, d) obsahující bod x_0 a na (c, d) definované maximální řešení φ rovnice* (2.16) *takové, že platí*

$$\varphi(x_0) = y_0\,, \quad \varphi'(x_0) = y_1\,, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,,$$

tj. toto maximální řešení φ vyhovuje předcházejícím počátečním podmínkám;

(b) *toto maximální řešení φ je určeno jednoznačně.*

Podali jsme přehled vět, které lze v různé formě nalézt téměř ve všech učebnicích věnovaných ODR, a – jak jsme již několikrát zmínili – též v [35], kde se lze seznámit i s jejich důkazy.

2.4 Separace proměnných

Ukazuje se, že není obtížné *formálně* řešit i složitější (nelineární) rovnice, pokud jsou speciálního tvaru. Tak např. obecně **nelineární rovnici se separovanými proměnnými**, což je rovnice tvaru

$$y' = f_1(x) f_2(y)\,, \quad x \in (a, b),\ y \in (c, d)\,, \tag{2.17}$$

kde f_1, f_2 jsou dané spojité funkce, řešíme *ve speciálních případech* bez větších obtíží. Jednoduchost je však jen zdánlivá; pokusíme se o tom čtenáře přesvědčit.
Formální způsob řešení spočívá v úpravě

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x) f_2(y)\,,$$

vedoucí posléze k rovnosti

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = \int f_1(x)\ \mathrm{d}x\ + C\,; \tag{2.18}$$

zde je primitivní funkce vlevo po záměně y za $y(x)$ funkcí proměnné x a na každém intervalu, na němž rovnici řešíme, se obě funkce liší o konstantní funkci C. Lze-li nalézt explicitně obě primitivní funkce v (2.18), považuje se v některých sbírkách úloh vzniklá rovnice (2.18) za řešení (2.17); řešením v našem smyslu obecně *není*, často z ní neumíme funkci $y = y(x)$ vypočítat.

Potíže nastávají v případě, kdy funkce f_2 má nulové body. Poskytnutý návod je třeba kriticky zhodnotit: pokud podle něj něco spočteme, není zdaleka jasné, zda jsme dostali všechna řešení a při formálních úpravách *je často třeba* se přesvědčit, že jsme dostali (nějaké) řešení dané rovnice, což lze provést derivováním [3]). Jsme tedy zpravidla dost daleko

[3]) Podobná strategie se často uplatňuje na středních školách při řešení rovnic; užívají se „neekvivalentní úpravy“ a pak se ověřuje správnost nalezeného výsledku.

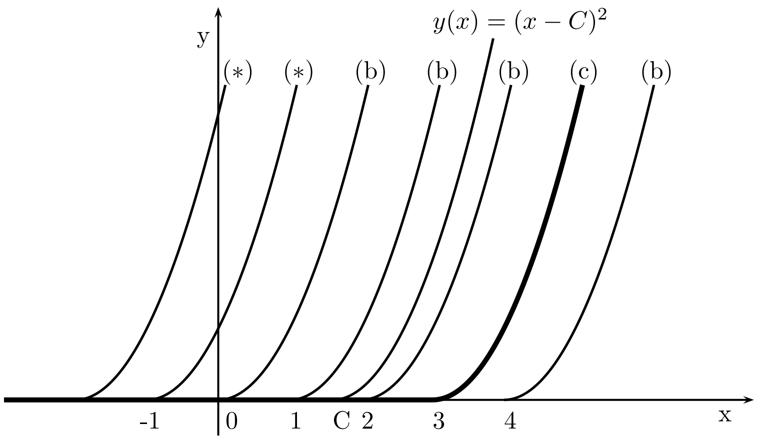
od ideálního stavu, který žádá nalézt *všechna* maximální řešení rovnice, neboť o tom, zda jsme opravdu získali všechna maximální řešení, nic nevíme. Nebezpečí formálního postupu ukazuje následující příklad:

Příklad 2.4.1. Řešte rovnici
$$y' = 2\sqrt{y} \tag{2.19}$$
a nalezněte všechna (maximální) řešení, která splňují podmínku
$$\text{(a) } y(0) = -1; \qquad \text{(b) } y(1) = 0; \qquad \text{(c) } y(4) = 1.$$
Jde tedy o tři Cauchyho úlohy, lišící se počáteční podmínkou.

Řešení, které by vyhovovalo podmínce (a), neexistuje. Obecněji, žádným bodem poloroviny $\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 \,;\, y < 0 \}$ neprochází řešení rovnice (2.19). Všimněte si, že formálně získaná řešení
$$y(x) = (x - C)^2 , \quad C \in \mathbb{R} ,$$
nejsou řešeními na rovnice (2.19) na $\mathbb{R}$, protože řešením musí být vždy *neklesající funkce*. Také zřejmé identicky nulové řešení bychom pro žádné $C \in \mathbb{R}$ odtud nezískali.

Při zvoleném $C \in \mathbb{R}$ je (maximálním) řešením funkce
$$y_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, C) , \\ (x - C)^2 & \text{pro} \quad x \in [C, +\infty) ; \end{cases}$$
viz Obr. 2.2. Dalším maximálním řešením je funkce $y \equiv 0$. Protože je $y'(C) = 0 = 2\sqrt{y(C)}$, musíme dokázat, že pro popsaná řešení skutečně $y'(C) = 0$. Snadno však nahlédneme, že y je spojitá funkce v bodě C a že $y'_-(C) = 0$. Je zřejmě
$$\lim_{x \to C+} y'(x) = \lim_{x \to C+} 2(x - C) = 0 = y'_+(C) ,$$
takže $y'_-(C) = y'_+(C) = 0$, což jsme potřebovali dokázat. Kromě těchto již nalezených (maximálních) řešení žádná další maximální řešení neexistují.

Pro $C = 3$ dostaneme požadované maximální řešení pro které je $y(4) = 1$. Na Obr. 2.2 jsou schematicky znázorněna některá řešení.



Obr. 2.2

Symbolem $(*)$ jsou označena ta řešení rovnice, která *nevyhovují* podmínce (b), všechna ostatní řešení načrtnutá v Obr. 2.2 podmínce (b) vyhovují, ale pouze jediné z nich vyhovuje podmínce (c). To je označeno (c) a jeho graf je zvýrazněn.

Příklad 2.4.2. Řešme rovnici

$$y' = -\frac{x}{y}\,. \tag{2.20}$$

Na každém intervalu (γ,δ), na kterém řešení y rovnice (2.20) nenabývá hodnoty 0, je rovnice (2.20) ekvivalentní s rovnicí $yy' = -\,x$. Odtud dostaneme $(y^2(x))' = (-\,x^2)'$, $x \in (\gamma,\delta)$, z čehož vyplývá

$$y^2(x) = -\,x^2 + C\,, \quad x \in (\gamma,\delta)\,.$$

Z předcházející rovnosti plyne $C \geq 0$; pišme tuto konstantu ve tvaru r^2, kde $r \geq 0$. Jestliže je $r = 0$, dostáváme $x = 0$ a $y(0) = 0$; pro tento případ nemá rovnice (2.20) smysl a ostatní body z $\mathbb{R}$ v definičním oboru y ležet nemohou. Bodem $[\,0,0\,]$ graf žádného řešení rovnice (2.20) tedy neprochází. Pro každé $r > 0$ existují dvě maximální řešení

$$\begin{aligned} y_1(x) &= +\sqrt{r^2 - x^2}\,, \quad x \in (-r,r)\,,\\ y_2(x) &= -\sqrt{r^2 - x^2}\,, \quad x \in (-r,r)\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Čtenář by si měl povšimnout, že existují maximální řešení rovnice s (mnoha) různými definičními obory. Žádným bodem tvaru $[\,x,0\,]$, $x \in \mathbb{R}$, neprochází řešení rovnice (2.20).

Čtenář se v této souvislosti setká ve sbírkách příkladů s tím, že za řešení rovnice $yy' = -x$ (a také dokonce i za řešení rovnice (2.20)!) se považuje soustava kružnic o středu „v počátku“ $\{\,x^2 + y^2 = r^2\,;\, r \in (0,\infty)\,\}$: Každým bodem $[\,x_0,y_0\,] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[\,0,0\,]\}$ prochází právě jedna kružnice, kterou lze *lokálně* popsat jako funkci proměnné x nebo proměnné y, kromě (2.21) tedy ještě pomocí

$$\begin{aligned} x_1(y) &= +\sqrt{r^2 - y^2}\,, \quad y \in (-r,r)\,,\\ x_2(x) &= -\sqrt{r^2 - y^2}\,, \quad y \in (-r,r)\,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

(funkce popsané pomocí (2.22) jsou však řešeními jiné rovnice). S jiným možným popisem soustavy kružnic o středu „v počátku“ $\{\,x^2 + y^2 = r^2\,;\, r \in (0,\infty)\,\}$ se ještě později setkáme.

2.5 Rovnice příbuzné

Řadu diferenciálních rovnic lze vhodným obratem převést na rovnice, se kterými jsme se již setkali. Je-li pro každé $t > 0$ a nějaké $p \in \mathbb{N}_0$

$$f(tx,ty) = t^p f(x,y)\,,$$

nazýváme f *homogenní funkce proměnných* x,y *stupně* p. Tento pojem se nám bude hodit.

Ukážeme na jednoduchých příkladech několik typů takových rovnic, které lze formálními úpravami převést na rovnice se separovanými proměnnými. Že nás to však často přiblíží jen málo k řešení rovnice by mělo být čtenáři alespoň zčásti patrné z předcházejících příkladů. Nejdříve poskytneme čtenáři „kuchařku“, která se často objevuje v různých učebnicích kalkulu.

(P1) Rovnice „s homogenní pravou stranou“, tj. rovnice $y' = f(x,y)$, na jejíž pravé straně je homogenní funkce f proměnných x, y stupně 0. V případě $p = 0$ je $f(tx,ty) = f(x,y)$ a po „dělení rovnice“ proměnnou x (tímto krokem vnášíme do problému dodatečné omezení $x \neq 0$, proto se budeme muset zabývat později existencí řešení na intervalech obsahujících tento bod) má její pravá strana tvar $g(y/x)$. Úpravu na tento tvar nemusíme dělat, stačí jen rozeznat „typ rovnice“ a provést substituci. Položíme $y = ux$. Pak $y' = xu' + u$ a rovnice po dosazení přejde na tvar $xu' + u = f(1, u)$, což je rovnice se separovanými proměnnými. Všimněte si toho, že na intervalu, na kterém je funkce y řešením rovnice, je funkce $u = y/x$ podílem dvou diferencovatelných funkcí a je tedy rovněž (spojitě) diferencovatelná.

(P2) Rovnice „typu $y' = f(ax + by + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$“; pokud $ab = 0$, je to rovnice se separovanými proměnnými. V případě $ab \neq 0$ použijeme substituci $u = ax + by + c$, při níž $u' = a + by'$; úpravou dostaneme opět rovnici se separovanými proměnnými.

(P3) Rovnice „typu $y' = f\Big(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)$, kde a_k, b_k, $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$“; jsou-li vektory (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) lineárně závislé, jde o již řešený případ. Nejsou-li závislé a $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ substituce $u = a_2x + b_2y$ převede úlohu na případ (P1). Jestliže $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, nalezneme bod $[\eta, \zeta]$, který je řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0\,, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

a zavedeme nové proměnné pomocí rovností $x = u + \eta$, $y = v + \zeta$. V nových proměnných u,v je již vyšetřovaná rovnice takového typu, který jsme vyšetřovali v bodě (P1).

Příklady 2.5.1. S popsanými typy rovnic a úskalími jejich řešení se nyní seznámíme při řešení jednoduchých příkladů.

1. Řešme rovnici

$$y' = \frac{x}{y}\,. \tag{2.23}$$

Tato rovnice je typu (P1), tj. má na pravé straně homogenní funkci, typu (P3) s $a_1 = b_2 = 1$ a s $a_2 = c_2 = b_1 = c_1 = 0$ a identitou f. Je to už rovnice se separovanými proměnnými, převod nemusíme tedy dělat. Na intervalu (γ, δ), kde je řešení y všude nenulové rovnici snadno upravíme na tvar $2yy' = 2x$, resp. $\big(y^2\big)' = (x^2)'$. Odtud již snadno dostaneme

$$(y - x)(y + x) = C\,,$$

kde je $C \in \mathbb{R}$. Dvě maximální řešení při $C = 0$ jsou zřejmě $y = \pm x$ na $(-\infty, 0)$ a další $y = \pm x$ na $(0, +\infty)$. Další maximální řešení jsou pro každé $C > 0$ funkce $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$, $x \in \mathbb{R}$, a pro každé $C < 0$ funkce $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$, $|\,x\,| > \sqrt{-C}$, definované na intervalech $(-\infty, -\sqrt{-C})$ a $(\sqrt{-C}, +\infty)$. Uvědomte si rozdíl mezi (2.23) a upravenou rovnicí $2yy' = 2x$.

2. Řešme nyní rovnici

$$y' = \frac{2\,y^2}{(x + y)^2}\,. \tag{2.24}$$

Každé řešení φ rovnice (2.24) je zřejmě neklesající funkce na každém otevřeném intervalu ležícím v definičním oboru D_φ. Funkce $y \equiv 0$ na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ jsou zřejmě maximálními řešeními rovnice, avšak žádné řešení nevyhovuje podmínce $y(0) = 0$. Obecněji: žádným bodem přímky o rovnici $x + y = 0$ neprochází (jakékoli) řešení rovnice (2.24).

Jde o rovnici typu (P1), takže dle návodu položme $y = xz$. Zřejmě pak je $y' = z'x + z$ a rovnice nabude tvaru

$$z'x = \frac{2z^2}{(1 + z)^2} - z = -\frac{z + z^3}{(1 + z)^2}\,, \tag{2.25}$$

ovšem za předpokladu $z \neq -1$, který však odpovídá již vyloučeným bodům přímky $x + y = 0$. Formální úpravou dostaneme rovnici

$$\frac{(1 + z)^2}{z(1 + z^2)}\,z' = -\frac{1}{x}\,,$$

a po rozkladu a přechodu k primitivním funkcím rovnici

$$\log|\,z\,| + 2\,\mathrm{arctg}\,z + \log|\,x\,| = \log C \tag{2.26}$$

s $C > 0$. Upravíme ji na tvar

$$|\,z\,x\,| = C\exp(-2\,\mathrm{arctg}\,z)\,.$$

Vrátíme-li se k původní proměnné y, dostaneme *formální* řešení rovnice (2.24) ve tvaru

$$y = D\exp\big(-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\big)\,, \tag{2.27}$$

kde $D \in \mathbb{R}$ (případ $D = 0$ odpovídá zřejmému identicky nulovému řešení rovnice (2.25)). Odtud je rovněž patrné, že např. maximální řešení $y \equiv 0$ jsou definována na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Z tvaru (2.27) je však málo patrné to, co snadno vyčteme z řešené rovnice (2.24): každým bodem přímky o rovnici $y = -x$ neprochází žádné řešení.

3. Při řešení rovnice

$$y' = 2\Big(\frac{y+1}{x+y-2}\Big)^2\,. \tag{2.28}$$

nejprve najdeme řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} y + 1 &= 0\,,\\ x + y - 2 &= 0\,, \end{aligned}$$

(jsou to čísla $x = 3$ a $y = -1$) a pak substituujeme $z = y + 1$, $u = x - 3$. Dostaneme tak po úpravě rovnici

$$z' = 2\Big(\frac{(z-1)+1}{(u+3)+(z-1)-2}\Big)^2 = \frac{2z^2}{(u+z)^2}\,,$$

kterou jsme již řešili v odlišném značení v předcházejícím příkladu. Použijeme-li výsledek, který jsme nalezli a provedeme zpětnou substituci, dostaneme formální řešení

$$(y+1)\exp\Big(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y+1}{x-3}\Big) = C\,. \tag{2.29}$$

Umíte z (2.29) vypočítat y v závislosti na x?

5. Pro jednoduchou rovnici typu (P3) (funkce f v (P3) je lineární)

$$y' = 2\,\frac{-x+2y-3}{x+y-3} \tag{2.30}$$

popíšeme stručně řešení. Především si uvědomíme, že žádným bodem přímky o rovnici $x + y = 3$ neprochází řešení rovnice (2.30). Čitatel a jmenovatel zlomku na pravé straně (2.30) se anulují pro $x = 1$ a $y = 2$. Položme dále $t = x - 1$ a $u = y - 2$. Jednoduchou úpravou dostaneme rovnici

$$u' = 2\frac{2u-t}{u+t}\,,$$

a po substituci $u = vt$, $u' = v't + v$ a další úpravě rovnici

$$v't = -\frac{v^2-3v+2}{v+1}\,. \tag{2.31}$$

Tato rovnice má dvě konstantní řešení $v \equiv 1$ a $v \equiv 2$, kterým odpovídají v $\mathbb{R}^2$ přímky o rovnicích

$$y = x + 1 \quad \text{a} \quad y = 2x\,. \tag{2.32}$$

Po rozkladu na parciální zlomky a následné integraci obdržíme rovnici

$$t\,\frac{(v-2)^3}{(v-1)^2} = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{2.33}$$

Přepíšeme-li ji v x a y, dospějeme k rovnici implicitně popisující řešení

$$\frac{(y-2x)^3}{(y-x-1)^2} = C\,. \tag{2.34}$$

Funkce, popisující přímky v (2.32), jsou maximálními řešeními na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, +\infty)$, bodem $[\,1, 2\,]$ neprochází žádné řešení. Druhé z těchto řešení popisuje rovnost (2.34) pro $C = 0$, první však rovností (2.34) popsat nelze.

2.6 Cvičení

1. Řešte rovnici

$$yy' = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

a určete to její maximální řešení, které vyhovuje podmínce $y(0) = 1$!

$\Big[\, y(x) = \sqrt{1 + 2\log\frac{\mathrm{e}^x+1}{2}}\,,\ \text{kde } x \in \big(\log(2/\sqrt{\mathrm{e}} - 1), +\infty\big);\ \log(2/\sqrt{\mathrm{e}} - 1) \doteq -1{,}546\ \Big]$

2. Určete diferenciální rovnici, jejímž obecným řešením je $y(x) = \mathrm{e}^{Cx}\,, C \in \mathbb{R}$! $\quad [\, xy' - y\log y = 0\,]$

3. Určete diferenciální rovnici, jejímž obecným řešením je ($C_1\,,\ C_2 \in \mathbb{R}$)

$$y(x) = \frac{C_1 + x}{C_2 + x}\,! \qquad \big[\,(y-1)y'' - 2(y')^2 = 0\,\big]$$

4. Určete obecné řešení rovnice

$$y' + y = 2x + 1\,! \qquad \big[\,y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1\,,\ C \in \mathbb{R}\,\big]$$

5. Určete maximální řešení rovnice

$$y' = -\frac{(1+y^2)\sin x}{y}\,!$$

$\big[\,y(x) = \sqrt{2\exp(-4\sin(x/2))}\,$, kde $x \in (-a, a)\,,\ a = 2\arcsin(\sqrt{\log 2}/2)\big]$

6. Určete maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$

pro něž je $y(0) = -1$.

[Jde o rovnici se separovanými proměnnými. Zde je stručný návod k řešení: Po separaci a integraci dostanete

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C$$

a po použití počáteční podmínky $C = -3/2$. Odtud obdržíte

$$y(x) = -\,\frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}\,,$$

přičemž funkce vpravo se znaménkem „+“ není řešením, neboť nesplňuje počáteční podmínku. Toto řešení je definováno na intervalu $(-\sqrt{5}/2\,,\ \sqrt{5}/2)$.]

7. Řešte rovnici s homogenní pravou stranou

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}\,!$$

[Řešeními jsou funkce, popisující oblouky kružnic ve speciální poloze: $y(x) = C \pm \sqrt{C^2 - x^2}$, $x \in (-C, C)$ s $C > 0$. Dále jsou řešeními funkce $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, 0)$ a $y(x) = 0$, $x \in (0, +\infty)$. Pokud přijmeme „symetričtější pohled“, lze popsat v okolí bodů grafu funkce $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, grafy řešení jako jiné oblouky kružnic o rovnicích $x^2 + (y - C)^2 = C^2$, $C > 0$.]

8. Řešte rovnici s homogenní pravou stranou

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}\,!$$

[Ač se zadání liší pouze ve znaménku a faktoru 2 a rovnice je stejného typu, formální výsledek

$$y = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$

je odlišný.]

9. Řešte rovnici

$$y' \sin x - x \cos x = 0\,!$$

[Snadno se dostanete k vyjádření obecného řešení na intervalu $\big(k\pi,\ (k+1)\pi\big)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$

$$y(x) = \int \frac{x \cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\ + C\,,$$

ale příslušnou primitivní funkci na pravé straně rovnosti nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí (někdy se říká, že ji nelze vyjádřit „v uzavřeném tvaru“).

10. Najděte rovnice křivek, jejichž všechny normály procházejí jediným bodem $[\,x_0,\ y_0\,]$!

[Řešení si snadno představíte. Na příkladu je patrně nejsložitější sestavit příslušnou triviální rovnici

$$y = y_0 + (x - x_0)\,y'$$

jejíž řešením dospějeme k „symetrickému“ vyjádření

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = C\,, \qquad C > 0\,.\,]$$

Kapitola 3

Lineární diferenciální rovnice

V této části se budeme zabývat rovnicemi vyšších řádů, avšak pouze lineárními. To nám umožní poměrně jednoduše popsat strukturu jejich obecného řešení – zobecníme pouze poznatky z Kapitoly 1. Přesto však se kromě speciálních případů konkretní rovnice řešit nenaučíme, takže budeme nuceni sáhnout k dalším zjednodušením.

3.1 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

V dalším se budeme zabývat **lineárními diferenciálními rovnicemi** řádu n. Její jednotlivá řešení budeme odlišovat indexy y_1, y_2, atd., proto změníme označení předepsaných hodnot v počáteční podmínce. Čtenáři doporučujeme, aby si připomenul jednoduchá tvrzení z Kapitoly 1. Budeme pracovat s pevně zvoleným intervalem (c, d); *funkce* $a_1, \dots, a_n, b$ jsou spojité funkce na (c, d). Vyšetřovaná rovnice je tvaru (dále však označení proměnné x budeme vynechávat)

$$L(y) := y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = b(x)\,, \quad x \in (c, d)\,. \tag{3.1}$$

Stejně jako v případě rovnice prvního řádu i zde snadno nahlédneme, že řešením rovnice (3.1) je funkce z prostoru n-krát spojitě diferencovatelných funkcí $\mathcal{C}^{(n)}((c, d))$. Terminologie souvisí s tím, že levá strana rovnice (3.1) je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{C}^{(n)}((c, d))$ do $\mathcal{C}((c, d))$: je zřejmé, že pro y, y_1, y_2 z tohoto prostoru a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)\,, \quad L(\alpha y) = \alpha L(y)\,.$$

Kromě rovnice (3.1) budeme ještě uvažovat rovnici

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = 0\,, \tag{3.2}$$

což je **přiřazená rovnice k** (3.1) **s nulovou pravou stranou**; někdy se užívá i názvu *přiřazená homogenní rovnice.* Náš postup je založen stejně jako v případě rovnice 1. řádu opět na myšlence nalézt všechna řešení rovnice (3.1) pomocí všech řešení rovnice (3.2).

Funkce $a_1, \dots, a_n$ jsou spojité na (c, d) a tedy i lokálně omezené. Pravá strana rovnosti

$$y^{(n)}(x) = b(x) - a_n(x)y(x) - \cdots - a_1(x)y^{(n-1)}(x)$$

uvažovaná jako funkce proměnných x, y, $\dots y^{(n-1)}$, vyhovuje předpokladům Důsledku 2.3.6: Je-li totiž $\mathcal{U}(x)$ okolí bodu x, jehož uzávěr leží v (c, d), pro všechna $t \in \mathcal{U}(x)$ je

$$\begin{aligned} &|b(t) - a_n(t)u_1 - \cdots - a_1(t)u_n - (b(t) - a_n(t)v_1 - \cdots - a_1(t)v_n)| \leq \\ &\leq \sup\{|a_k(t)|\,;\, k = 1, 2, \dots, n,\ t \in \mathcal{U}(x)\}\big(|u_1 - v_1| + \cdots + |u_n - v_n|\big)\,. \end{aligned}$$

Lze dokázat, že maximální řešení rovnice (3.1) jsou definována na intervalu (c, d) a jsou jednoznačně určena počátečními podmínkami (pro rovnici 1. řádu jsme maximální řešení jednoduše přímo spočetli). Zcela analogicky jako v případě rovnice 1. řádu se dokáží následující jednoduchá tvrzení (důkazy vynecháme):

Lemma 3.1.1. *Je-li y_1 řešení rovnice* (3.1) *na (γ, δ) a y_2 řešením rovnice* (3.2) *na (γ, δ), pak je součet $y_1 + y_2$ řešením rovnice* (3.1) *na (γ, δ). Speciálně to platí pro maximální řešení.*

Lemma 3.1.2. *Jsou-li y_1, y_2 dvě řešení rovnice* (3.1) *na intervalu (γ, δ), pak je jejich rozdíl $y_1 - y_2$ řešením rovnice* (3.2) *na (γ, δ). Speciálně to opět platí pro maximální řešení.*

Věta 3.1.3. *Obecné řešení rovnice* (3.1) *obdržíme jako součet jednoho maximálního řešení rovnice* (3.1) *a obecného řešení rovnice* (3.2). *Jinak řečeno, je-li y_1 maximálním řešením rovnice* (3.1), *pak pro každé maximální řešení y rovnice* (3.1) *existuje maximální řešení y_2 rovnice* (3.2) *tak, že platí*

$$y = y_1 + y_2\,.$$

Tvrzení 3.1.4. *Všechna maximální řešení rovnice* (3.2) *tvoří lineární prostor.*

Protože nás tento (jak se ukáže, konečněrozměrný – viz Tvrzeni 3.1.10) lineární prostor (podprostor $\mathcal{C}^{(n)}((c, d))$) zajímá, budeme nejprve studovat lineární nezávislost diferencovatelných funkcí.

Definice 3.1.5. Nechť $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{(n-1)}((c, d))$. Potom funkci [1]) definovanou na (c, d) předpisem

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x), & \dots, & y_n(x) \\ y_1'(x), & & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x), & \dots, & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in (c, d)\,,$$

budeme nazývat podle jejího objevitele Józefa Marii Höne-Wrońskiho (1776 – 1853) **Wrońskiho determinantem** funkcí $y_1, \dots, y_n$, resp. krátce, avšak nespisovně, **wronskiánem** funkcí $y_1, \dots, y_n$.

Platí o něm toto

Tvrzení 3.1.6. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně závislé funkce z $\mathcal{C}^{(n-1)}((c, d))$. Potom*

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) = 0\,,\ \ x \in (c, d)\,,$$

tj. wronskián těchto funkcí je roven identicky 0.

Důkaz. Pokud jsou funkce $y_1, \dots, y_n$ lineárně závislé, existují konstanty $c_1, \dots, c_n$, které nejsou vesměs rovny 0 tak, že platí

$$c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0$$

(jde o rovnost funkcí na (c, d) !). Zderivujeme tuto rovnost $(n-1)$-krát, čímž dostaneme pro všechna $x \in (c, d)$

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x) & + & \cdots & + & c_n y_n(x) & = & 0\,, \\ c_1 y_1'(x) & + & \cdots & + & c_n y_n'(x) & = & 0\,, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x) & = & 0\,. \end{array} \tag{3.3}$$

[1]) Stejně bývá nazýván i determinant v následující rovnosti na pravé straně.

Pro každé x má tato soustava lineárních rovnic s neznámými $c_1, c_2, \dots, c_n$ netriviální řešení, a to dokonce nezávislé na x. Odtud ale plyne, že matice soustavy musí být singulární pro každé $x \in (c, d)$, a proto platí

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) = 0\,, \quad x \in (c, d)\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Připomínáme Důsledek 2.3.6 (pozor na změnu označení!), z něhož plyne existence a jednoznačnost maximálního řešení rovnice (3.2) pro $x_0 \in (c, d)$ a každou počáteční podmínku tvaru

$$y(x_0) = z_0\,,\ \dots\,,\ y^{(n-1)}(x_0) = z_{n-1}\,.$$

Zvolíme-li nyní postupně např.

$$\begin{array}{llll} y(x_0) = 1\,, & y'(x_0) = 0\,, & \dots\,, & y^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \\ y(x_0) = 0\,, & y'(x_0) = 1\,, & \dots\,, & y^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(x_0) = 0\,, & y'(x_0) = 0\,, & \dots\,, & y^{(n-1)}(x_0) = 1\,, \end{array} \tag{3.4}$$

pak tomuto systému n počátečních podmínek odpovídá n lineárně nezávislých řešení $y_1, \dots, y_n$ rovnice (3.2), protože $W[\,y_1, \dots, y_n\,](x_0) \neq 0$.

Tvrzení 3.1.7. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé funkce z $\mathcal{C}^{(n)}((c, d))$, které jsou* řešeními rovnice (3.2). *Potom platí pro všechna $x \in (c, d)$*

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,]\,(x) \neq 0\,.$$

Důkaz. Nechť existuje nějaké $x_0 \in (c, d)$ tak, že

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,]\,(x_0) = 0\,.$$

Potom má soustava (3.3) pro $x = x_0$ netriviální řešení $(c_1, \dots, c_n)$. Položme

$$y^* := c_1 y_1 + \dots + c_n y_n\,.$$

Zřejmě je $y^*(x_0) = 0$. Jestliže však jsou $y_1, \dots, y_n$ řešení (3.2), je i y^* řešením (3.2) a

$$y^*(x_0) = 0\,,\ (y^*)'(x_0) = 0\,, \dots\,, (y^*)^{(n-1)}(x_0) = 0\,;$$

podle věty o jednoznačnosti je $y^*(x) \equiv 0$, tj. y^* je nulové řešení. Je tedy

$$c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \equiv 0$$

a tato rovnost platí všude v (c, d). Odtud plyne, že $W[\,y_1, \dots, y_n\,]$ nemůže nabývat hodnoty 0 v žádném bodě $x \in (c, d)$, pokud jsou řešení $y_1, \dots, y_n$ nezávislá. □

Důsledek 3.1.8. *Není-li wronskián funkcí $y_1, \dots, y_n$ z $\mathcal{C}^{(n-1)}((c, d))$ identicky roven 0, jsou tyto funkce lineárně nezávislé, což plyne z již dříve dokázaného tvrzení. Předchozí tvrzení ukazuje, že pro $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{(n)}((c, d))$, které* jsou řešeními *(3.2), nastává právě jedna z možností:*

1. $W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) = 0$ *pro všechna* $x \in (c, d)$ *, nebo*
2. $W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) \neq 0$ *pro všechna* $x \in (c, d)$ *.*

Poznámka 3.1.9. Tvrzení podstatně závisí na větě o jednoznačnosti: jsou-li $y_1, \dots, y_n$ pouze (dostatečně hladké) funkce, pro které je wronskián nulový, pak *neplyne* z podmínky 1. jejich lineární závislost. Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil nalézt vhodný ilustrativní příklad.

Tvrzení 3.1.10. *Dimenze prostoru všech maximálních řešení obecné rovnice n-tého řádu* (3.2) *je právě n.*

Důkaz. Víme již, jak lze např. pomocí (3.4) nalézt n lineárně nezávislých maximálních řešení rovnice (3.2). Nyní dokážeme, že tato řešení tvoří bázi lineárního prostoru všech maximálních řešení rovnice (3.2): Jestliže je y libovolné řešení rovnice $L(y) = 0$, pak zvolme $x_0 \in (c, d)$ a označíme

$$z_0 := y(x_0)\,,\ z_1 := y'(x_0)\,, \dots\,,\ z_{n-1} := y^{(n-1)}(x_0)\,;$$

Nyní ze soustavy rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n(x_0) & = & z_0\,, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & z_{n-1} \end{array}$$

určíme koeficienty $c_1, \dots, c_n$. Matice soustavy je totiž zřejmě regulární, takže koeficienty $c_1, \dots, c_n$ jsou určeny jednoznačně. Potom je

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)\,, \quad x \in (c, d)\,,$$

protože levá i pravá strana jsou maximálními řešeními (3.2) se shodnými počátečními podmínkami v bodě x_0. □

Rovnice (3.2) má tedy právě n lineárně nezávislých maximálních řešení, která tvoří bázi prostoru všech maximálních řešení (3.2); je vhodné si však uvědomit, že pouze víme, že tato řešení *existují*, ale nemáme obecně žádnou metodu, jak je spočítat.

Definice 3.1.11. Každá n-tice lineárně nezávislých řešení rovnice (3.2) definovaných na intervalu (γ, δ) se nazývá **fundamentální systém řešení** rovnice (3.2) na (γ, δ).

Úlohu řešit rovnici (3.2) jsme převedli na úlohu nalézt její fundamentální systém *maximálních* řešení; potom lze *každé řešení* rovnice (3.2) vyjádřit jako restrikci vhodné lineární kombinace funkcí z tohoto fundamentálního systému. Obecné řešení rovnice (3.2) je tedy tvaru

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n\,,$$

kde $\{\, y_1, \dots, y_n \,\}$ je nějaký fundamentální systém maximálních řešení rovnice (3.2) a $c_1, \dots, c_n$ jsou libovolné (reálné) konstanty.

Při hledání obecného řešení rovnice (3.1) postupujeme analogicky jako v případě rovnice 1. řádu, podle tvrzení z Lemmat 3.1.1, 3.1.2 a Věty 3.1.3. Odtud ihned plyne praktický návod: Obecné řešení rovnice (3.1) je součtem obecného řešení rovnice (3.2) a jednoho libovolně zvoleného řešení rovnice (3.1); tomuto řešení se opět říká **partikulární řešení**.

Poznámka 3.1.12. Určení obecného řešení rovnice (3.2) není v obecném případě lehké. Tak např. pro rovnice prvního řádu umíme úlohu zredukovat na hledání vhodné primitivní funkce. Umíme-li nějaké partikulární řešení rovnice (3.1) uhodnout, lze řešení někdy převést na řešení rovnice nižšího řádu. Někdy je rovnice (3.2) speciálního tvaru, a pak ji lze díky tomu rovněž vyřešit. Tyto metody nebudeme podrobněji rozebírat a čtenáře, pokud by se tyto metody chtěl naučit, odkazujeme např. na [3], [18], [32] a další učebnice.

Známe-li obecné řešení rovnice (3.2), existuje metoda, pomocí níž lze určit potřebné partikulární řešení rovnice (3.1). Je zobecněním metody, se kterou se čtenář setkal v Poznámce 1.1.10

a která je založena na předpokladu, že se toto partikulární řešení dá vyjádřit ve tvaru lineární kombinace fundamentálního systému řešení s koeficienty, které jsou *funkcemi* na (c, d), tj.

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)\,, \quad x \in (c, d)\,. \tag{3.5}$$

Provedeme nyní následující výpočet: derivujeme y ve tvaru (3.5) a ve vyjádření y' položme součet členů obsahujících $c_1', \ldots, c_n'$ roven 0; pak počítáme y'' a postupujme obdobně, atd. Klademe výrazy ve druhé až předposlední rovnici zcela vpravo v závorkách, obsahující derivace $c_1', \ldots, c_n'$, vždy rovny 0, čímž dostaneme $(n-1)$ rovnic pro neznámé $c_1', \ldots, c_n'$. Formální úprava dává dobrou představu o podstatě věci, pro stručnost vynecháváme proměnnou x:

$$\begin{aligned}
y &= c_1y_1 + \cdots + c_ny_n\,, \\
y' &= c_1y_1' + \cdots + c_ny_n' && + \left(c_1'y_1 + \cdots + c_n'y_n\right), \\
y'' &= c_1y_1'' + \cdots + c_ny_n'' && + \left(c_1'y_1' + \cdots + c_n'y_n'\right), \\
&\;\vdots \\
y^{(n-1)} &= c_1y_1^{(n-1)} + \cdots + c_ny_n^{(n-1)} && + \left(c_1'y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-2)}\right), \\
y^{(n)} &= c_1y_1^{(n)} + \cdots + c_ny_n^{(n)} && + \;c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)}\,.
\end{aligned}$$

Upravme předcházejících $(n+1)$ rovnic tak, že vynásobíme prvou rovnici funkcí a_n, druhou rovnici funkcí a_{n-1} atd. Předposlední rovnici násobíme funkcí a_1. Všechny takto získané rovnice včetně poslední neupravované sečteme. Protože $y_1, \ldots, y_n$ jsou řešeními (3.2), dostáváme po snadné úpravě s přihlédnutím k (3.1)

$$L(y) = c_1L(y_1) + \cdots + c_nL(y_n) + c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)} = b\,.$$

Prvých n sčítanců se zřejmě anuluje; dostaneme tak poslední, tj. n-tou rovnici

$$c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)} = b\,.$$

Nalezená soustava

$$\begin{array}{ccccccc}
c_1'y_1 & + & \cdots & + & c_n'y_n & = & 0\,, \\
c_1'y_1' & + & \cdots & + & c_n'y_n' & = & 0\,, \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
c_1'y_1^{(n-1)} & + & \cdots & + & c_n'y_n^{(n-1)} & = & b\,,
\end{array}$$

pro neznámé funkce $c_1', \ldots, c_n'$ má regulární matici, proto se problém redukuje na nalezení n primitivních funkcí k n spojitým funkcím, čímž získáme potřebné partikulární řešení. Podotýkáme, že zde užíváme **Cramerovo pravidlo** známé z algebry, pomocí kterého vyjadřujeme $c_1', \ldots, c_n'$ ve tvaru podílů spojitých funkcí (dělíme wronskiánem fundamentálního systému řešení).

Popsaná metoda se nazývá *metoda variace konstant*. Její aplikace na konkrétní případy může být velmi pracná, zejména pokud ji provádíme „ručně“.

Vraťme se k problému určení fundamentálního systému řešení rovnice (3.2). Ve speciálním případě, kdy má rovnice (3.1), resp. (3.2), za koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ **konstantní funkce** na (c, d), můžeme převést úlohu nalézt fundamentální systém řešení rovnice (3.2) na ryze algebraickou úlohu. Zdůrazněme, že naším cílem je najít pro případ takové rovnice (3.2) s koeficienty $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *reálné funkce* (na $\mathbb{R}$), tvořící fundamentální systém řešení (3.2). To budeme, alespoň v jednoduchých případech, umět.

3.2 Redukce řádu rovnice

Lineární diferenciální rovnice mají ještě jednu zajímavou vlastnost. Jestliže řešíme *algebraickou rovnici* $P_n(x) = 0$, kde P_n je polynom stupně $n \geq 2$, pak znalost jednoho kořene polynomu P_n nám umožňuje převést tuto úlohu na řešení rovnice $P_{n-1}(x) = 0$, tj. snížit řád rovnice o 1. Podobnou vlastnost mají i lineární *diferenciální* rovnice. Řešíme-li rovnici $L(y) = 0$, kde L je lineární diferenciální operátor řádu n a známe jedno (nenulové) řešení rovnice u, položíme $y(x) = v(x)u(x)$ a dosadíme do řešené rovnice. Obdržíme lineární diferenciální rovnici řádu n. Jelikož však $Cu(x)$ je řešením rovnice $L(y) = 0$, musí mít nově vzniklá rovnice řešení $v(x) = C$, takže v ní bude člen řádu 0 chybět. Nově vzniklá rovnice je rovnicí $(n-1)$-ho řádu pro neznámou funkci $v'(x)$. Postup názorně ukazuje následující triviální příklad:

Příklad 3.2.1. Řešte rovnici

$$(2x - 3x^3)y'' + 4y' + 6xy = 0\,, \tag{3.6}$$

víte-li, že jedním řešením rovnice je polynom $P(x) = x^2 - 2$.

Snadno zjistíme, že polynom P je skutečně řešením rovnice (3.6). Podle postupu pro snížení řádu rovnice dosadíme do (3.6) $y = v(x)(x^2 - 2)$ a obdržíme rovnici

$$v''(-3x^5 + 8x^3 - 4x) + v'(-6x^3 + 4x^2 + 4x - 8) + v \cdot 0 = 0\,,$$

která po substituci $v' = z$ přejde v lineární rovnici 1. řádu

$$z'(-3x^5 + 8x^3 - 4x) + z(-6x^3 + 4x^2 + 4x - 8) = 0\,.$$

Tu již řešit umíme; zbývá podotknout, že tímto způsobem najdeme druhé na P lineárně nezávislé řešení, čímž získáme bázi prostoru řešení rovnice (3.6) a že tato lineární nezávislost je zaručena při tomto postupu i v obecnějším případě.

3.3 Rovnice s konstantními koeficienty

Předpokládejme, že rovnice (3.2), $L(y) = 0$, s konstantními koeficienty, tj. rovnice

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n\, y = 0\,,$$

má řešení tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\,, \tag{3.7}$$

a pokusme se nalézt podmínky charakterizující volbu takových α. Po zderivování a dosazení do (3.2) obdržíme

$$L(\mathrm{e}^{\alpha x}) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n\alpha^0\right) = 0\,. \tag{3.8}$$

Jelikož platí $\mathrm{e}^{\alpha x} \neq 0$ pro všechna $\alpha, x \in \mathbb{R}$, musí být roven 0 druhý činitel. Stačí tedy nalézt $\alpha \in \mathbb{R}$, které je kořenem tzv. **charakteristické rovnice** příslušné k (3.2)

$$P(\alpha) = \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{3.9}$$

a máme jedno (reálné) řešení tvaru (3.7). Tímto způsobem přiřazujeme operátoru L **charakteristický polynom** P.

Avšak rovnice (3.9) nemusí vůbec mít *reálné kořeny*: Základní věta algebry o existenci kořene každé algebraické rovnice tvaru $P(x) = 0$, kde P je polynom stupně $\mathrm{st}(P) \geq 1$, nám jako důsledek dává pro rovnici stupně n, $n \geq 1$, existenci *právě n obecně komplexních kořenů*, počítaných včetně jejich násobnosti. Vznikají přirozené otázky:

1. Je-li charakteristická rovnice přiřazená operátoru L z rovnice (3.2) tvaru
$$P(\alpha) = 0\,, \tag{3.10}$$
pak její vícenásobné kořeny dávají pouze jedno „přirozené řešení"; jak lze nalézt celý fundamentální systém řešení rovnice (3.2)?

2. Co dělat s komplexními kořeny rovnice (3.10) v případě, že hledáme fundamentální systém, jehož členy jsou *reálné* funkce (P je polynom s reálnými koeficienty)?

Výsledky jsou průhlednější, interpretujeme-li je z hlediska *komplexních funkcí* reálné proměnné. Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (obecně komplexní) kořeny (3.10) a jsou-li tyto kořeny navzájem různé, jsou funkce
$$\mathrm{e}^{\alpha_1 x},\, \mathrm{e}^{\alpha_2 x},\, \ldots,\, \mathrm{e}^{\alpha_n x}$$
řešeními (3.2) a jsou navzájem nezávislé, tj. tvoří fundamentální systém. Pro jejich wronskián dostaneme snadným výpočtem
$$W[\,\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\alpha_n x}\,] = \mathrm{e}^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \ldots, & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}\,, \tag{3.11}$$
přičemž determinant vpravo je tzv. **Vandermondův determinant**; není těžké dokázat, že jeho hodnota je rovna součinu všech dvojčlenů $(\alpha_j - \alpha_k)$ pro $1 \le j < k \le n$, a je tedy nenulová. Jsou-li tyto kořeny vesměs reálné, získáme tak fundamentální systém složený z n reálných funkcí.

Poznámka 3.3.1 (důležitá). Má-li charakteristický polynom P v (3.9) pouze *reálné* koeficienty $a_1, \ldots, a_n$, pak s každým kořenem α má též kořen $\overline{\alpha}$ (číslo komplexně sdružené). Jestliže totiž je $P(\alpha) = 0$, je také
$$0 = \overline{P(\alpha)} = \overline{\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n} = (\overline{\alpha})^n + a_1(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_n\,, \tag{3.12}$$
protože $a_k = \overline{a_k}$.

Když některé kořeny charakteristické rovnice příslušné k (3.2) nejsou reálné, dostáváme řešení rovnice (3.2) tvaru $\mathrm{e}^{\alpha x}$, která jsou pro komplexní α komplexními funkcemi reálné proměnné. Ta jsou nad $\mathbb{R}$ nezávislá. Je-li totiž $\alpha = \beta + \mathrm{i}\gamma$, je $\overline{\alpha} = \beta - \mathrm{i}\gamma$ a řešení (3.2) jsou tvaru
$$\mathrm{e}^{\beta x}\,(\cos\gamma x + \mathrm{i}\sin\gamma x)\ , \quad \mathrm{e}^{\beta x}\,(\cos\gamma x - \mathrm{i}\sin\gamma x)\ .$$
Přejdeme-li k jejich vhodným lineárním kombinacím, které dají reálnou a imaginární část, dostaneme reálná řešení (3.2)
$$\mathrm{e}^{\beta x}\cos\gamma x\,, \quad \mathrm{e}^{\beta x}\sin\gamma x\,.$$
Z předcházející úvahy nebo přímým výpočtem snadno ověříme, že jsou to lineárně nezávislé funkce: Z rovnosti
$$c_1\mathrm{e}^{\beta x}\cos\gamma x + c_2\mathrm{e}^{\beta x}\sin\gamma x = 0$$
dostaneme dělením $\mathrm{e}^{\beta x} \neq 0$ a pak zderivováním a dělením $\gamma \neq 0$ dvojici rovnic:
$$\begin{aligned} c_1\cos\gamma x + c_2\sin\gamma x &= 0\,, \\ -c_1\sin\gamma x + c_2\cos\gamma x &= 0\,. \end{aligned}$$
Determinant matice této soustavy je roven 1 a tak má tato soustava pouze triviální řešení $c_1 = c_2 = 0$.

Poznámka 3.3.2. Zbývá vyřešit případ vícenásobných kořenů. Motivací nám bude úvaha: Jestliže jsou $\alpha_1 \neq \alpha_2$ reálná čísla, která jsou kořeny (3.10), je

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha_1 x} - \mathrm{e}^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha_2 x}\big(\mathrm{e}^{(\alpha_1-\alpha_2)x} - 1\big)}{(\alpha_1 - \alpha_2)x}\, x$$

rovněž řešení (3.2). Představíme-li si, že dvojnásobný kořen vzniká „splynutím“ dvou kořenů, můžeme provést experiment: Při $\alpha_1 \to \alpha_2$ má zlomek vpravo zřejmě limitu $x\mathrm{e}^{\alpha_2 x}$. To nás vede k *domněnce*, že tato funkce je rovněž řešením (3.2). Skutečně, má-li charakteristická rovnice např. jediný dvojnásobný kořen α_1, je pak možné upravit (3.8) na tvar

$$L(\mathrm{e}^{\alpha x}) = \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha - \alpha_1)^2(\alpha - \alpha_2)\dots(\alpha - \alpha_k)\,.$$

Proto se jak pravá strana rovnosti, tak i její derivace vzhledem k α, anuluje pro $\alpha = \alpha_1$, a je proto i

$$\big[L(\mathrm{e}^{\alpha x})\big]_{\alpha=\alpha_1} = L(\mathrm{e}^{\alpha_1 x}) = 0\,, \qquad \Big[L(\frac{\partial}{\partial\,\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha x})\Big]_{\alpha=\alpha_1} = L(x\mathrm{e}^{\alpha_1 x}) = 0\,.$$

Obecněji, je-li α_1 kořenem násobnosti s_1, jsou řešeními funkce

$$\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, \quad x\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, \quad \dots, \ x^{s_1-1}\mathrm{e}^{\alpha_1 x}$$

a snadno si představíme, jak vypadá situace v případě, že je násobných kořenů více.

Takto nalezená řešení jsou patrně lineárně nezávislá. Ověření správnosti této domněnky není složité, ale je pracnější a *technicky* trochu náročnější. Proto uvedeme pouze výsledné tvrzení (čtenář může najít důkaz ve druhém díle [35]).

Tvrzení 3.3.3. *Jsou-li $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ navzájem různé kořeny rovnice* (3.10) *s násobnostmi $s_1, \dots, s_r$ a je $s_1 + s_2 + \dots + s_r = n$, pak*

$$\begin{array}{llll} \mathrm{e}^{\alpha_1 x}, & x\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, & \dots, & x^{s_1-1}\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, \\ \mathrm{e}^{\alpha_2 x}, & x\mathrm{e}^{\alpha_2 x}, & \dots, & x^{s_2-1}\mathrm{e}^{\alpha_2 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{e}^{\alpha_k x}, & x\mathrm{e}^{\alpha_k x}, & \dots, & x^{s_r-1}\mathrm{e}^{\alpha_r x} \end{array} \tag{3.13}$$

tvoří fundamentální systém řešení (3.2).

Pokud má charakteristický polynom P reálné koeficienty, lze přechodem k vhodným lineárním kombinacím řešení příslušných komplexně sdruženým kořenům dosáhnout toho, že vzniklý fundamentální systém je tvořen pouze reálnými funkcemi.

Příklad 3.3.4. Pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$L_1(y) := y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{3.14}$$

má její charakteristická rovnice tvar $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Jejími různými kořeny jsou čísla 1 a 2, proto je fundamentální systém řešení tvořen funkcemi e^x a e^{2x} a její obecné řešení obvykle zapisujeme ve tvaru

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,,$$

což je popis prvků dvojrozměrného prostoru generovaného funkcemi e^x a e^{2x}.

Podobně v případě dvojnásobného kořene charakteristické rovnice pro rovnici

$$L_2(y) := y'' - 2y' + y = 0 \tag{3.15}$$

je tvořen fundamentální systém řešení funkcemi e^x a $x\,\mathrm{e}^x$ a její obecné řešení je tvaru

$$y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 x \mathrm{e}^x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Konečně pro rovnici

$$L_3(y) := y'' + 4y' + 13y = 0\,, \tag{3.16}$$

jejíž charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $-2+3\mathrm{i}$ a $-2-3\mathrm{i}$, dostaneme jim odpovídající dvě komplexní funkce $\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})x}$ a $\mathrm{e}^{(-2-3\mathrm{i})x}$. Zřejmě je (jde vlastně o dva vzorce: prvnímu odpovídají „horní“ a druhému „dolní“ znaménka)

$$\mathrm{e}^{(-2\pm3\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{-2x}(\cos 3x \pm \mathrm{i}\sin 3x)\,.$$

Obě komplexní funkce reálné proměnné mají (až na znaménko) shodnou reálnou a imaginární část $\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x$ a $\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$; tyto funkce rovněž tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.16). Její obecné (reálné) řešení je proto tvaru

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-2x}\cos 3x + C_2 \mathrm{e}^{-2x}\sin 3x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

O správnosti těchto jednoduchých tvrzení se lze přesvědčit přímým výpočtem.

Existuje „jednoduchý trik“, který umožňuje snadno, bez použití další integrace, kterou bychom prováděli při užití variace konstant, nalézt partikulární řešení rovnice (3.1) pro *speciální pravé strany.* Je vhodné si pamatovat jeho „komplexní verzi“, ze které snadno plyne postup v „reálném případě“.

Jestliže je pravá strana $b(x)$ rovnice (3.1) *tvaru*

$$f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,,$$

kde f je polynom stupně r (*s komplexními koeficienty*) *a* $\lambda \in \mathbb{C}$, *pak klademe* $k = 0$ *pro případ* $P(\lambda) \neq 0$, *respektive* $k =$„násobnost kořenu λ charakteristického polynomu P“, *a rovnice* (3.1)

$$L(y) = f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

má partikulární řešení tvaru

$$x^k\, g(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,,$$

kde g je polynom (*s komplexními koeficienty*) *téhož stupně r jako f.*

Ostatní případy pravých stran typu $f(x)\cos x$, resp. $f(x)\sin x$ apod. jsou v tomto případu zahrnuty, čtenář si je však musí samostatně promyslet. Jelikož při aplikaci metody zároveň ověřujeme, že předpokládané řešení je skutečně partikulárním řešením (3.1), nebudeme tento trik nijak teoreticky zdůvodňovat; viz [18], str. 128, [12], str. 52, nebo [32], str. 244. Praktickou ukázku poskytuje následující příklad.

Příklad 3.3.5. Navážeme na předcházející Příklad 3.3.4. Řešme rovnici

$$L_1(y) = y'' - 3y' + 2y = 2x + 3\,. \tag{3.17}$$

Kořeny příslušné charakteristické rovnice pro (3.14) jsou čísla 1 a 2, pravá strana (3.17) má tvar $\mathrm{e}^{0x}(2x+3)$ a 0 *není* kořenem charakteristické rovnice. Protože $2x+3$ je polynom stupně 1, hledáme partikulární řešení rovnice (3.17) ve tvaru $\mathrm{e}^{0x}(ax+b) = ax+b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Po zderivování a dosazení do (3.17) dostaneme rovnici

$$0 - 3a + 2(ax+b) = 2x + 3\,,$$

ze které snadno spočteme $a = 1$, $b = 3$. Tímto způsobem jsme snadno určili partikulární řešení $y_1 = x + 3$ rovnice (3.17), a proto je její obecné řešení tvaru

$$y = x + 3 + C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x} .$$

Pro rovnici $L_1(y) = x^2 \mathrm{e}^{2x}$ je situace nepatrně složitější, protože 2 je (jednoduchým) kořenem charakteristické rovnice pro (3.14); v tomto případě hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = \mathrm{e}^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx) .$$

Konečně pro rovnici $L_1(y) = \mathrm{e}^x \cos 2x$ uvážíme, že její pravá strana je reálnou částí funkce $\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}$, a protože komplexní číslo $1+2\mathrm{i}$ není kořenem charakteristické rovnice pro (3.14), hledáme v tomto případě partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x ,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Podobně pro rovnici $L_2(y) = \mathrm{e}^x(x + 3)$ hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_1 = \mathrm{e}^x(ax^3 + bx^2)$, protože číslo 1 je *dvojnásobným* kořenem charakteristické rovnice pro (3.15). Konečně pro rovnici $L_3(y) = x^2 \mathrm{e}^{-2x} \sin 3x$ hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = (ax^3 + bx^2 + cx)\,\mathrm{e}^{-2x} \cos 3x + (dx^3 + fx^2 + gx)\,\mathrm{e}^{-2x} \sin 3x ,$$

kde $a, b, c, d, f, g \in \mathbb{R}$, protože komplexní čísla $-2 \pm 3\mathrm{i}$ jsou jednoduchými kořeny charakteristické rovnice pro (3.16).

Poznamenejme, že je pak již jen záležitostí početní praxe odhadnout, zda je výhodnější použít variaci konstant nebo „hádání“ tvaru řešení. Pokud se zbavíme nutnosti hledat primitivní funkce, neznamená to zdaleka, že jiný postup je časově méně výhodný. Podrobný výklad metody nalezne čtenář např. v [18], str. 128.

Příklad 3.3.6. Dostatek praktických příkladů na užití rovnic vyšších řádů poskytuje např. fyzika. Rovnice

$$y'' + 2ay' + \omega^2 y = 0$$

s $\omega > 0$ a s $a = 0$ je rovnice tzv. **harmonického lineárního oscilátoru**. Jejím netriviálním obecným řešením ($c_1^2 + c_2^2 > 0$) jsou funkce

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t , \quad t \in \mathbb{R} . \tag{3.18}$$

Položíme-li $C = (\,c_1^2 + c_2^2\,)^{1/2} > 0$, pak existuje $t_0 \in \mathbb{R}$ tak, že je

$$y(t) = C \sin(\omega t + t_0) .$$

Číslo C je tzv. **amplituda** a t_0 **fáze**. Jestliže je $a > 0$, pak povaha řešení rovnice (3.18) závisí na vztahu ω a a. Řešení popisují **silně tlumené** ($a > \omega$), **kriticky tlumené** ($a = \omega$) či **slabě tlumené** ($a < \omega$) kmity. Viz např. [17], str. 76 a násl. Tam také čtenář nalezne mnoho příkladů aplikací teorie (obyčejných) diferenciálních rovnic.

3.4 Ukázky použití

V této části se nesnažíme budovat hlubší teoretický základ, spíše jen ukazujeme některé typy úloh, které s látkou této kapitoly souvisejí.

Příklad 3.4.1. ODR se často vyskytují jako aparát k popisu různých systémů křivek. Ukážeme si rovnici popisující *všechny kružnice* v rovině $\mathbb{R}^2$. Řešíme tak vlastně obrácenou úlohu: Rovnici neřešíme, ale hledáme její tvar.

Každá kružnice v $\mathbb{R}^2$ je určena svým středem $S = [\,a, b\,]$ a poloměrem $r > 0$. Hledáme jejich popis pomocí grafů funkcí, vyhovujících jisté ODR. Systém všech rovnic takových kružnic

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{3.19}$$

je tedy závislý na třech parametrech a, b, c. Rovnici (3.19) třikrát zderivujeme, trochu upravíme a dostaneme (funkce y závisí na x)

$$\begin{aligned} (x-a) + (y-b)y' &= 0\,, \\ 1 + (y-b)y'' + (y')^2 &= 0\,, \\ (y-b)y'' + 3y'y'' &= 0\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že třetí rovnice obsahuje již jen jediný parametr b. Ten vyloučíme tak, že srovnáme výrazy $(y-b)$, které obdržíme ze druhé a ze třetí rovnice. Dostaneme tak hledanou rovnici ve tvaru

$$y''(1 + (y')^2) - 3y'y'' = 0\,.$$

Uvědomte si, že rovnice popisuje pouze „horní“ a „dolní“ oblouky kružnic bez koncových bodů, to však je dáno naší volbou popisu, kdy jsme automaticky předpokládali, že „y“ je funkcí proměnné x.

Příklad 3.4.2. V návaznosti na Příklad 2.4.1 a na předcházející Příklad 3.4.1 zkoumejme systém křivek popsaných rovnicí

$$x(y^2 - 1) + y(x^2 - 1)y' = 0\,.$$

Ukážeme si, jak se obtíž s popisem pomocí funkcí dá obcházet (jde o ilustraci, nebudujeme žádnou teorii !). Často se setkáváme s tím, že derivaci y' zapisujeme jako jakýsi „podíl“ $\mathrm{d}y \,/\, \mathrm{d}x$. Nahradíme derivaci tímto výrazem a upravíme rovnici na tvar :

$$x(y^2 - 1)\,\mathrm{d}x \;+ y(x^2 - 1)\,\mathrm{d}y \;= 0\,. \tag{3.20}$$

Pak rovnici upravíme za předpokladu, že $x \neq \pm 1$ a $y \neq \pm 1$, na tvar

$$\frac{x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x \;+ \frac{y}{y^2 - 1}\,\mathrm{d}y \;= 0\,.$$

Předchozí vyjádření postrádá zatím smysl, je jen formální úpravou. Abychom přešli k něčemu smysluplnějšímu, doplníme znaky integrálu před oba zlomky a integrujeme (v prvním případě vzhledem k x a ve druhém vzhledem k y) :

$$\log|x^2 - 1| + \log|y^2 - 1| = \log|C|\,.$$

Odtud po „odlogaritmování“ dostaneme popis

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C\,.$$

Zde proměnné x a y vystupují symetricky a pro různá C lze odsud vyjádřit x v závislosti na y, nebo y v závislosti na x. Uvědomte si též, že vyloučené hodnoty popisují přímky o rovnicích $x = 1$, $x = -1$ a $y = 1$, $y = -1$, což jsou grafy funkcí dvě jsou funkcemi proměnné x a dvě funkcemi proměnné y), které jsou rovněž řešeními „zesymetrizované“ rovnice (3.20).

3.5 Cvičení

1. Jsou funkce $f(x) = 1+x$, $g(x) = 1-x$ lineárně nezávislé v prostoru všech polynomů (s reálnými koeficienty) stupně nejvýše 2? [ano]

2. Jsou funkce $f(x) = 1$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \cos 2x$ lineárně nezávislé v prostoru všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$? [ano]

3. Jsou funkce $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2 x$, $h(x) = \cos 2x$ lineárně nezávislé v prostoru všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$? [ne]

4. Ukažte, že funkce $f_1(x) = \exp(C_1 x)$ a $f_2(x) = \exp(C_2 x)$ jsou pro $C_1 \neq C_2$ lineárně nezávislé na libovolném intervalu (c, d).

5. Nechť f_1, $f_2 \in \mathcal{C}^{(1)}((c,d))$ jsou lineárně nezávislé funkce na (c,d). Ukažte, že pak též funkce $C_1 f_1 + C_2 f_2$ a $D_1 f_1 + D_2 f_2$ jsou při $C_1 D_2 - C_2 D_1 \neq 0$ lineárně nezávislé funkce na (c,d).

6. Jsou funkce $f_1(x) = x^2$ a $f_1(x) = x\,|x|$ lineárně nezávislé na intervalu $(-1,1)$? Jakých hodnot nabývá wronskián $W[f_1, f_2](x)$ pro $x \in (-1,1)$? [ano, i když se wronskián anuluje]

7. Ukažte, že funkce $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = \cos(x - C)$ jsou řešeními rovnice

$$\left(y'\right)^2 + y^2 = 1$$

a nalezněte alespoň tři její různá maximální řešení, pro něž je $y(0) = 1$! [Takových řešení je nekonečně mnoho (obrázek je velkou pomocí). Příklad ukazuje, že u obecnějších rovnic je často situace složitá.]

8. Určete obecné řešení rovnice

$$y''' - y' = 0! \qquad [\, y = C_1 + C_2 \mathrm{e}^x + C_3 \mathrm{e}^{-x} \,]$$

9. Určete obecné řešení rovnice

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0! \qquad [\, y(x) = C_1 e^x + \mathrm{e}^{2x}\,(C_2 + C_3 x) \,]$$

10. Určete obecné řešení rovnice

$$y'' + 2y' + 5y = 0! \qquad [\, y(x) = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \,]$$

11. Určete obecné řešení rovnice

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0! \qquad [\, y(x) = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x \,]$$

12. Určete obecné řešení rovnice

$$y''' - y = 2x + 1 - 4\cos x + 2\mathrm{e}^x\,!$$

[Uvažujte nejprve postupně případy rovnice s pravými stranami $b(x) = 2x+1$, $b(x) = 4\cos x$ a $b(x) = 2\mathrm{e}^x$ a odtud odvoďte tvar obecného řešení

$$y(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^x + C_3 \mathrm{e}^{-x} - x^2 - x + 2\sin x + x\mathrm{e}^x \,]$$

13. Některé speciální rovnice lze převést na lineární rovnice s konstantními koeficienty. Tak např. pro **Eulerovu rovnici**

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = b(x)$$

stačí použít substituci $x = \mathrm{e}^z$, resp. $z = \log x$. Nebudeme případ této rovnice podrobněji rozvádět, pokuste se však na základě uvedeného návodu řešit rovnici

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2\,!$$

[Rovnici převeďte na tvar $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{2z} + 2$ a transformací jejího řešení

$$y(z) = C_1\mathrm{e}^z + C_2\mathrm{e}^{2z} + z\mathrm{e}^{2z} + 1$$

dostanete

$$y(x) = C_1x + C_2x^2 + x^2\log x + 1\,.]$$

14. Podobně jako v předchozím cvičení řešte diferenciální rovnice závislé na $n \in \mathbb{N}$

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = x^n\,!$$

[Substitucí $x = \mathrm{e}^z$, resp. $z = \log x$ převedeme úlohu na řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 3y = \mathrm{e}^{nz}$$

a po návratu k původní proměnné dostanete $y(x) = C_1x + C_2x^3 + x^n(n^2 - 4n + 3)^{-1}$.]

15. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = 3\,\mathrm{e}^{2x}\,!$$

[$y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + 3x\,\mathrm{e}^{2x}$]

16. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)\,!$$

[$y(x) = \big(C_1 + C_2x\big)\,\mathrm{e}^2x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\big(x + 1\big)$]

17. Najděte obecné řešení rovnice

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$$

[$y(x) = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^x + C_3\mathrm{e}^{2x} - x - 4$]

18. Najděte obecné řešení rovnice

$$y^{(5)} + y^{(3)} = x^2 - 1$$

$\Big[\,y(x) = \dfrac{x^5}{60} - \dfrac{x^3}{2} + C_1x^2 + C_2x + C_3 + C_4\cos x + C_5\sin x\Big]$

19. Najděte obecné řešení rovnice

$$y^{(5)} + y^{(3)} = x^2 - 1$$

$\Big[\,y(x) = \dfrac{x^5}{60} - \dfrac{x^3}{2} + C_1x^2 + C_2x + C_3 + C_4\cos x + C_5\sin x\Big]$

20. Ve vzorci (3.11) jsme se setkali s tzv. Vandermondovým determinantem, jehož výpočet bývá prováděn v učivu z algebry. Spočtěte jeho hodnotu, tj. dokažte, že platí

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \dots, & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<k\le n} (\alpha_j - \alpha_k)$$

[**Návod :** Snadno vidíme, že

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1)\,.$$

K dokončení důkazu postačí matematická indukce a elementární vzorec

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

spolu s metodami výpočtu hodnot determinantů, které je nutno využít při druhém indukčním kroku.]

Kapitola 4

Systémy lineárních diferenciálních rovnic

Mnoho fyzikálních a technických úloh lze popsat **systémem diferenciálních rovnic**. Takové systémy lze relativně snadno sestavit; otázky nalezení řešení jsou podstatně složitější. V této kapitole se budeme zabývat soustavami ODR, tj. soustavami, kdy neznámé funkce závisí pouze na jediné proměnné (v praxi často vyjadřující čas t). Derivace podle proměnné t se často značí tečkou. Dále se budeme zabývat systémy diferenciálních rovnic. V této části budeme užívat další poznatky z algebry. Následující výklad ukazuje jejich využití. Úvodní ilustrativní příklad nám ukáže, že se budeme moci omezit, podobně jako již dříve, na systémy (soustavy) rovnic prvního řádu.

4.1 Motivace

Příklad 4.1.1. Mechanickou konfiguraci, v níž je na pružině o tuhosti k_1 zavěšeno závaží o hmotnosti m_1, na kterém je na pružině o tuhosti k_2 zavěšeno závaží o hmotnosti m_2, popisuje systém

$$\begin{aligned} m_1 y_1'' &= m_1 g - k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)\,, \\ m_2 y_2'' &= m_2 g - k_2(y_2 - y_1)\,. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že kromě gravitační síly nepůsobí na systém žádná další vnější síla. Funkce y_1 a y_2 popisují výchylky závaží od rovnovážného stavu. Pomocí substituce $y_1' = (1/m_1)y_3$, $y_2' = (1/m_2)y_4$ dostaneme systém prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= (1/m_1)y_3\,, \\ y_2' &= (1/m_2)y_4\,, \\ y_3' &= m_1 g - k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)\,, \\ y_4' &= m_2 g - k_2(y_2 - y_1)\,. \end{aligned}$$

Předešlý příklad lze snadno zobecnit: každý podobný systém lze analogicky převést na systém prvního řádu. Dále ukážeme, jak *ve speciálních případech* řešit systém (soustavu) diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,,\\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,,\\ &\vdots\\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,, \end{aligned}$$

který jsme zkráceně zapisovali ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}\,(x, \boldsymbol{y})\,,$$

a pro který máme „lokální“ existenční Větu 2.3.1.

Příklad 4.1.2. Snadno zjistíme, že vektorová funkce $\mathbf{u}(t) = (\cos t,\, \sin^2 t)$,
$t \in (0, \pi)$ je řešením soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2 + y_2 - \sqrt{y_2} - 1\\ y_2' &= 2y_1\sqrt{y_2}\,. \end{aligned}$$

Chceme-li systém prakticky řešit, jsou zjednodušení nutná: omezíme se proto na **lineární systémy**. Obecně jde totiž o složitý problém, avšak, stejně jako výše, pro speciální případy je k dispozici poměrně jednoduchá teorie. Budeme se tedy zabývat systémem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\,y_n + b_1(x)\,,\\ y_2'(x) &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)\,y_n + b_2(x)\,,\\ &\vdots\\ y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x)\,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

který budeme zapisovat „maticově“ ve tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,;$$

zde $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{b}$ chápeme jako *sloupcové n-rozměrné vektory*, $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice typu $n \times n$, jejímiž prvky jsou (reálné) funkce. Přitom budeme předpokládat, že a_{jk} a b_j jsou *spojité* funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. V tomto případě pro každý bod $[\,x_0, \boldsymbol{y}^0\,] \in I \times \mathbb{R}^n$ existuje podle Věty 2.3.5 právě jedno řešení $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ definované na intervalu I, splňující podmínku $\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{y}^0$.

Není příliš překvapující, že budeme uvažovat opět *dva* systémy rovnic, a to jednak systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,, \tag{4.2}$$

a pak systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}\,. \tag{4.3}$$

Postupně odvodíme tvrzení, která budou obdobná jako v případě jediné lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.

Lemma 4.1.3. *Všechna řešení systému* (4.3) *definovaná na tomtéž intervalu tvoří lineární prostor. Speciálně to platí pro všechna maximální řešení.*

Důkaz. Pro řešení $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ systému (4.3) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zřejmě platí

$$(c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2)' = c_1\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{A}(x)\,(c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2)\,,$$

což dokazuje tvrzení. □

Nyní ukážeme, že tento prostor má dimenzi n. Nejprve budeme řešit důležitou otázku, kdy jsou n-rozměrné vektorové funkce $\boldsymbol{g}_k(x) = (g_k^1(x), g_k^2(x), \dots, g_k^n(x))$, $x \in I$, $k = 1, \dots, n$, lineárně nezávislé na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Jsou-li lineárně závislé, pak musí existovat netriviální lineární kombinace těchto vektorů s koeficienty $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ tak, že (vektorová) funkce

$$c_1\boldsymbol{g}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{g}_n(x) \equiv \mathbf{0}\,,$$

tj. tato kombinace je n-rozměrným nulovým vektorem v každém bodě $x \in I$. K tomu je nutné, aby determinant matice, jejíž sloupce tvoří vektorové funkce $\boldsymbol{g}_1(x), \dots, \boldsymbol{g}_n(x)$, $x \in I$, byl na I *nulovou funkcí*. Determinant funkční matice, jejíž sloupce tvoří funkce $\boldsymbol{g}_1(x), \dots, \boldsymbol{g}_n(x)$, $x \in I$, má analogické vlastnosti jako dříve zavedený Wrónskiho determinant. To nám bude vodítkem pro další postup.

Pomocí Věty 2.3.5 o jednoznačnosti najdeme n lineárně nezávislých řešení

$$\boldsymbol{y}_1 = (y_1^1, y_1^2, \dots, y_1^n),\ \dots,\ \boldsymbol{y}_n = (y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^n)\,,$$

která splňují rovnici (4.3) a pro nějaké $x_0 \in I$ podmínku

$$\boldsymbol{y}_k(x_0) = \mathbf{e}^k\,, \quad k = 1, \dots, n\,; \tag{4.4}$$

vektor $\mathbf{e}^k$ je standardní souřadnicový vektor $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, který má k-tou souřadnici rovnou 1, zatímco ostatní jsou rovny 0. Řešení jsou opravdu lineárně nezávislá, protože z $\sum_{k=1}^n c_k\boldsymbol{y}_k = \mathbf{0}$ plyne dosazením x_0 rovnost

$$\sum_{k=1}^n c_k\boldsymbol{y}_k(x_0) = \sum_{k=1}^n c_k\mathbf{e}^k = \mathbf{0}\,.$$

Protože $\mathbf{e}^k$, $k = 1, \dots, n$, jsou lineárně nezávislé, plyne odtud $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Lemma 4.1.4. *Všechna maximální řešení systému* (4.3) *tvoří lineární prostor dimenze n.*

Důkaz. Z předchozí úvahy vyplývá, že dimenze tohoto prostoru je alespoň n. Je-li $\boldsymbol{y}^*$ libovolné řešení systému (4.3), je $\boldsymbol{y}^*(x_0) = \boldsymbol{h} = (h^1, h^2, \dots, h^n)$ a $\boldsymbol{y}^*(x_0) = \sum_{k=1}^n h^k\mathbf{e}^k$. Pak podle věty o jednoznačnosti je $\boldsymbol{y}^*(x) = \sum_{k=1}^n h^k\boldsymbol{y}_k(x)$ pro všechna $x \in I$. □

Jsou-li funkce $\boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_n$, resp. jejich složky g_j^k, $j, k = 1, 2, \dots, n$, funkcemi z $\mathcal{C}^k(I)$, je i jejich determinant funkcí z $\mathcal{C}^k(I)$. Přitom je pro lineárně závislé funkce roven 0 všude v I. Ukážeme, že v případě vektorových funkcí $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n$, které jsou *řešeními systému* (4.3), platí alternativa v „silnější“ podobě: je-li determinant matice $\left(y_j^k\right)$ různý od 0 alespoň v jednom bodě intervalu I, je nenulový ve *všech* bodech I. Je-li totiž nulový v nějakém bodě $x_0 \in I$, existuje netriviální lineární kombinace taková, že $c_1\boldsymbol{y}_1(x_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x_0) = \mathbf{0}$. Pak podle věty o jednoznačnosti je

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = \mathbf{0}$$

pro všechna $x \in I$. Jestliže srovnáme dosud nalezené poznatky s tím, co jsme odvodili pro lineární rovnici n-tého řádu, vidíme, že je účelné i v tomto případě zavést pojem **fundamentálního systému řešení**.

Definice 4.1.5. Množinu každých n lineárně nezávislých řešení systému (4.3) na intervalu (c,d) nazýváme **fundamentální systém řešení soustavy** (4.3) na (c,d). Matici, jejíž *sloupce* tvoří fundamentální systém maximálních řešení soustavy (4.3), nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (4.3). Budeme ji značit $\boldsymbol{Y} := \boldsymbol{Y}(x)$. Je tedy

$$\boldsymbol{Y}(x) := \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \cdots & y_n^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^n & y_2^n & \cdots & y_n^n \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Důsledek 4.1.6. *Determinant fundamentální matice systému* (4.5) *je na I všude různý od* 0.

Příklad 4.1.7. Uvažujme soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic (OLDR)

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\,, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Ověříme, že

$$\boldsymbol{y}^1(x) = \begin{pmatrix} 2\,e^x \\ -2\,e^x \\ 3\,e^x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}^2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x\cos 2x \\ e^x \sin 2x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}^3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \sin 2x \\ -e^x\cos 2x \end{pmatrix}$$

tvoří fundamentální systém řešení soustavy (4.6). Je (z praktických důvodů přejdeme k označení derivací pomocí teček):

$$\dot{\boldsymbol{y}}^1(x) = \begin{pmatrix} 2\,e^x \\ -2\,e^x \\ 3\,e^x \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{y}}^2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x \\ e^x\sin 2x + 2e^x\cos 2x \end{pmatrix},$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}^3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x\sin 2x + 2e^x\cos 2x \\ -e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Po dosazení do (4.6) zjistíme, že $\boldsymbol{y}^k$, $k = 1,\dots,3$, jsou řešeními dané soustavy. Abychom ověřili, že tato řešení tvoří fundamentální systém, stačí spočítat hodnotu determinantu

$$\det \boldsymbol{Y}(0) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2.$$

Protože je determinant $\det \boldsymbol{Y}(0)$ *různý od nuly*, tvoří $\boldsymbol{y}^1$, $\boldsymbol{y}^2$ a $\boldsymbol{y}^3$ fundamentální systém. Fundamentální matice pro soustavu (4.6) má tvar

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} 2\,e^x & 0 & 0 \\ -2\,e^x & e^x\cos 2x & e^x\sin 2x \\ 3\,e^x & e^x\sin 2x & -e^x\cos 2x \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Metodou nalezení fundamentálního systému řešení pro soustavy typu (4.6) se budeme zabývat později v kapitole 5.

Označíme-li $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ *sloupcový* vektor, můžeme zkráceně zapisovat *obecné řešení* jako maticový součin $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}$. Snadno nahlédneme, že i v tomto případě platí analogická tvrzení jako pro lineární rovnici n-tého řádu; jejich důkaz by byl jen opakováním úvah, které jsme již jednou prováděli a které mají elementární charakter. Shrneme tyto poznatky do jediného tvrzení:

Tvrzení 4.1.8. *Obecné řešení systému* (4.3) *obdržíme jako množinu všech lineárních kombinací fundamentálního systému řešení soustavy* (4.3)*; závisí tak na n parametrech, kterými jsou koeficienty této lineární kombinace. Rozdíl každých dvou řešení systému* (4.2) *je řešením* (4.3)*. Proto obecné řešení systému* (4.2) *obdržíme jako* (*množinový*) *součet obecného řešení systému* (4.3) *a* (*jednoho*) *partikulárního řešení systému* (4.2).

4.2 Variace konstant pro systémy

Jestliže známe fundamentální systém řešení systému (4.3), můžeme pro určení partikulárního řešení systému (4.2) užít metodu variace konstant. Při jejím odvození použijeme výhodný maticový zápis. Budeme hledat řešení systému (4.2) ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x)\,,$$

kde sloupcový vektor $\boldsymbol{c}(x)$ je (vektorovou) *funkcí* na intervalu I a $\boldsymbol{Y}(x)$ je fundamentální matice systému (4.3), která je tedy regulární v každém bodě $x \in I$ a jejíž prvky jsou spojité funkce na I. Pro toto řešení dostaneme

$$\boldsymbol{Y}'(x)\,\boldsymbol{c}(x) + \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}'(x) = \big(\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x)\big)' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x) + \boldsymbol{b}(x)\,.$$

Protože $\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{Y}(x)$, porovnáním výrazů stojících vlevo a vpravo vyplývá, že $\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)$, $x \in I$, a tedy

$$\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\,\boldsymbol{b}(x)\,.$$

Inverzní matice $\boldsymbol{Y}^{-1}$ je regulární v každém bodě $x \in I$ a její prvky jsou spojité funkce na I; to plyne z vlastností $\boldsymbol{Y}$ a ze vzorce pro výpočet prvků inverzní matice. Proto na pravé straně předcházející rovnosti stojí spojitá vektorová funkce. Integrací poslední rovnosti (v mezích x_0 a x) dostaneme pro každé $x \in I$ vzorec

$$\boldsymbol{c}(x) = \boldsymbol{c}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Věta 4.2.1. *Jestliže jsou maticová funkce $\boldsymbol{A}$ a vektorová funkce $\boldsymbol{b}$ spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a je-li $x_0 \in I$, má Cauchyho počáteční úloha pro systém*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,, \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0\,,$$

právě jedno řešení na I pro každý bod $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. Toto řešení je popsáno vzorcem

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}^{-1}(x_0)\,\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{Y}(x)\int_{x_0}^{x} \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t\ , \quad x \in I\,. \tag{4.8}$$

Důkaz. Pro důkaz správnosti vzorce si stačí uvědomit, že výraz vpravo je v bodě x_0 roven vektoru $\boldsymbol{y}^0$. □

Příklad 4.2.2. Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici zapsanou v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \cos 2x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Zde je $x_0 = 0$. Porovnáním s Příkladem 4.1.7 vidíme, že řešíme obdobný příklad, tentokrát však s nenulovou vektorovou funkcí $\boldsymbol{b}$. Fundamentální matici homogenní soustavy již známe, je popsána v (4.7). Abychom mohli užít vztah (4.8), musíme vypočítat $\boldsymbol{Y}^{-1}(t)$ a $\boldsymbol{Y}^{-1}(0)$. Po snadném, ale poněkud pracném výpočtu obdržíme

$$\boldsymbol{Y}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x & \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x & \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x},$$

a tedy

$$\boldsymbol{Y}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dosazením do (4.8) máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(x) &= \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{Y}^{-1}(0)\cdot \mathbf{y}^0 + \boldsymbol{Y}(x)\int_0^x \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x + \sin 2x \end{pmatrix} + \mathbf{X}(x)\int_0^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \sin 2t \\ -\cos^2 2t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \\
&= \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x + \sin 2x \end{pmatrix} + \mathbf{X}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8}(1-\cos 4x) \\ -\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x - (1+\frac{1}{2}x)\sin 2x \\ (1+\frac{1}{2}x)\cos 2x + \frac{5}{4}\sin 2x \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Poznámka 4.2.3. Předpokládejme, že jsme nalezli jedno řešení $\boldsymbol{y}_P(x)$, $x \in I$, soustavy

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x). \tag{4.10}$$

Takové řešení budeme zpravidla nazývat **partikulární řešení** (proto užíváme index „P“). Naším cílem je nalézt *všechna řešení* uvedené soustavy na intervalu I, a tak položíme

$$\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{y}_P(x)$$

a dosadíme do (4.10). Postupně dostaneme:

$$\boldsymbol{z}'(x) = \boldsymbol{y}'(x) + \boldsymbol{y}'_P(x) = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}_P(x) + \boldsymbol{b}(x)\,.$$

Odtud plyne, že každé řešení $\boldsymbol{z}(x)$, $x \in I$, soustavy (4.10) je součtem partikulárního řešení $\boldsymbol{y}_P(x)$ a nějakého řešení homogenní soustavy

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}(x).$$

Je-li interval I maximální, tj. pracujeme-li s maximálními řešeními, získáme tímto způsobem všechna **maximální** řešení soustavy (4.10), tj. její **obecné řešení**. Budeme-li chápat symboly „množinově“, pak ve zřejmém smyslu pro obecné řešení $\boldsymbol{y}_{OB}$ platí

$$\boldsymbol{y}_{OB}(x) = \boldsymbol{y}_H(x) + \boldsymbol{y}_P(x)\,, \quad x \in I\,,$$

kde $\boldsymbol{y}_H(x)$ je libovolné řešení homogenní soustavy

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}(x)\,.$$

Strukturou obecného řešení homogenní soustavy jsme se již zabývali.

Příklad 4.2.4. Ukažme si ještě jiné řešení Příkladu 4.2.2. S ohledem na předchozí poznámku lze Cauchyovu úlohu (4.9) řešit následujícím způsobem, který bývá v konkrétních situacích zpravidla jednodušší: Označíme $\boldsymbol{u}^i$, $i = 1, 2, 3$, řešení homogenní soustavy (4.9), tj. sloupce matice $\boldsymbol{Y}(x)$ v (4.7). Hledáme neznámé funkce $c_k = c_k(x)$, $k = 1, 2, 3$ tak, aby

$$\boldsymbol{u}(x) = c_1(x)\,\boldsymbol{u}^1(x) + c_2(x)\,\boldsymbol{u}^2(x) + c_3(x)\,\boldsymbol{u}^3(x)$$

bylo řešením soustavy (4.9). Užijeme „fyzikální“ symboliku a budeme opět derivaci značit tečkou. Snadno zjistíme, že

$$\dot{\mathbf{u}}(x) = \dot{c}_1(x)\,\mathbf{u}^1(x) + \dot{c}_2(x)\,\mathbf{u}^2(x) + \dot{c}_3(x)\,\mathbf{u}^3(x) + c_1(x)\,\dot{\boldsymbol{u}}^1(x) + c_2(x)\,\dot{\boldsymbol{u}}^2(x) + c_3(x)\,\dot{\boldsymbol{u}}^3(x).$$

Dosazením do soustavy (4.9) a využitím faktu, že $\dot{\boldsymbol{u}}^k(x) = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{u}^k(x)$, $k = 1, 2, 3$, dostáváme soustavu (algebraických rovnic) pro neznámé funkce:

$$\dot{c}_1(x)\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^x \\ -2\mathrm{e}^x \\ 3\mathrm{e}^x \end{pmatrix} + \dot{c}_2(x)\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^x\cos 2x \\ \mathrm{e}^x\sin 2x \end{pmatrix} + \dot{c}_3(x)\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^x\sin 2x \\ -\mathrm{e}^x\cos 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^x\cos 2x \end{pmatrix}$$

Celou soustavu vydělíme kladnou funkcí e^x a z první rovnice soustavy máme

$$\dot{c}_1(x) = 0, \quad \text{a tedy} \quad c_1(x) = 0$$

(konstantu lze volit libovolně, pro usnadnění je zpravidla výhodné volit nulu). Další rovnice soustavy pak mají tvar:

$$\begin{aligned} \dot{c}_2(x)\cos 2x + \dot{c}_3(x)\sin 2x &= 0 \\ \dot{c}_2(x)\sin 2x - \dot{c}_3(x)\cos 2x &= \cos 2x. \end{aligned}$$

Jak snadno spočteme, je determinant této soustavy roven -1, a tedy hledaná řešení jsou:

$$\begin{aligned} \dot{c}_2(x) &= \sin 2x \cos 2x \\ \dot{c}_3(x) &= -\cos^2 2x. \end{aligned}$$

Po integrování (integrační konstanty volíme opět nuly) máme:

$$\begin{aligned} \dot{c}_2(x) &= \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) \\ \dot{c}_3(x) &= -\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x. \end{aligned}$$

Partikulární řešení má tedy tvar

$$\boldsymbol{u}_P(x) = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^x\cos 2x \\ \mathrm{e}^x\sin 2x \end{pmatrix} - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^x\sin 2x \\ -\mathrm{e}^x\cos 2x \end{pmatrix}.$$

Z řešení příkladu na str. 46 víme, že libovolné řešení homogenní soustavy (4.7) lze psát ve tvaru

$$\boldsymbol{u}_H(x) = C_1\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^x \\ -2\mathrm{e}^x \\ 3\mathrm{e}^x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^x\cos 2x \\ \mathrm{e}^x\sin 2x \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^x\sin 2x \\ -\mathrm{e}^x\cos 2x \end{pmatrix}$$

kde C_k, $k = 1, 2, 3$, jsou konstanty. Obecné řešení soustavy (4.9) má tvar

$$\boldsymbol{u}_{OB}(x) = \boldsymbol{u}_H(x) + \boldsymbol{u}_P(x).$$

Abychom nalezli řešení Cauchyovy úlohy, musíme určit konstanty C_k, $k = 1, 2, 3$, z počáteční podmínky. Dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$\boldsymbol{u}_{OB}(0) = \quad C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jak snadno zjistíme, má tato soustava (jediné) řešení $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$. Tedy hledané řešení Cauchyovy úlohy je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(x) &= 0 \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^x \\ -2\mathrm{e}^x \\ 3\mathrm{e}^x \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^x \cos 2x \\ \mathrm{e}^x \sin 2x \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^x \sin 2x \\ -\mathrm{e}^x \cos 2x \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^x \cos 2x \\ \mathrm{e}^x \sin 2x \end{pmatrix} - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^x \sin 2x \\ -\mathrm{e}^x \cos 2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme hledané řešení Cauchyovy úlohy:

$$\mathbf{u}(x) = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x - (1 + \frac{1}{2}x) \sin 2x \\ (1 + \frac{1}{2}x) \cos 2x + \frac{5}{4} \sin 2x \end{pmatrix}.$$

4.3 Cvičení

1. Řešte soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic (OLDR)

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\,, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

[Charakteristická rovnice má tvar

$$\det \begin{pmatrix} 1+\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 4+\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda+3)^2 = 0\,.$$

Řešení je pak tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x\,\mathrm{e}^{-3x} \\ (-2x+1)\,\mathrm{e}^{-3x} \\ (x-1)\,\mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ 2\,\mathrm{e}^{-3x} \\ \mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix}.\,]$$

Kapitola 5

Systémy rovnic s konstantními koeficienty

Zařazení této části má poměrně zřejmý charakter. V předchozí části jsme poznali, že jsme schopni nalézt metodou variace konstant obecné řešení soustavy lineárních rovnic, pokud známe její **fundamentální systém řešení**. Ten však *obecně nalézt neumíme*. Ukážeme si, jak je to – alespoň teoreticky – možné v případě, že jde o soustavu lineárních rovnic s konstantními koeficienty.

5.1 Úvod

V dalších odstavcích si připomeneme několik pojmů z lineární algebry. Opět doporučujeme čtenáři s hlubším zájmem o tuto partii, aby si příslušnou látku eventuálně prostudoval v [2]. Tento text obsahuje totiž i kapitolu, v níž čtenář nalezne aplikaci teorie na řešení systémů diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty tvaru (4.3).

Definice 5.1.1. Je-li $\boldsymbol{A}$ matice typu $n \times n$, jejímiž prvky jsou reálná čísla, tj.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

nazýváme polynom (symbolem $\boldsymbol{E}$ značíme **jednotkovou matici** typu $n \times n$)

$$P(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

charakteristickým polynomem matice $\boldsymbol{A}$[1]). Jeho kořeny se nazývají **vlastní čísla** nebo **vlastní hodnoty** matice $\boldsymbol{A}$, rovnice $P(\lambda) = 0$ je **charakteristická rovnice příslušná k $\boldsymbol{A}$**. Množinu všech vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$ nazýváme **spektrum** matice $\boldsymbol{A}$ a značíme ji $\sigma(\boldsymbol{A})$.

---

[1]) Pokud se zavádí charakteristický polynom pomocí matice $(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$, dostaneme stejné výsledky; odpovídající teorie se liší jen nepodstatně.

Definice 5.1.2. Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, nazýváme každý *nenulový* vektor $\boldsymbol{v}$ vyhovující rovnici $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ **vlastním vektorem** matice $\boldsymbol{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

Poznámka 5.1.3. Vlastní vektory hrají důležitou roli v mnoha aplikacích. Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, pak pro vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ příslušný k λ je $\boldsymbol{A}\, c\boldsymbol{v} = \lambda\, c\boldsymbol{v}$, takže $\boldsymbol{A}$ transformuje podprostor generovaný $\boldsymbol{v}$ na tentýž podprostor, který je proto invariantní. V předcházející definici vlastního vektoru jsme se omezili na *nenulové* vektory. Pro nulový vektor $\boldsymbol{v}$ je $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ pro *každé* $\lambda \in \mathbb{C}$, což je nezajímavý případ. Na druhé straně připouštíme, že jak vlastní čísla, tak i vlastní vektory mohou být komplexní. Budeme pracovat i s komplexními funkcemi v roli řešení, i když je naším konečným cílem vyjádřit obecné řešení pomocí reálných funkcí.

Příklad 5.1.4. Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

má charakteristický polynom

$$\begin{aligned} P(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 2 + 12 - 8(2-\lambda) + \\ + (1-\lambda) - 3(1+\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) \end{aligned}$$

a její spektrum je tedy $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{1, 3, -2\}$.

Nyní spočteme vlastní vektor [2]) $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$, matice $\boldsymbol{A}$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$, netriviálním řešením soustavy $(\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, neboli v rozepsaném tvaru soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Jejím řešením obdržíme $\boldsymbol{v}_1 = (v^1, v^2, v^3) = c\,(-1, 4, 1)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, což je popis *všech* vlastních vektorů odpovídajících vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$.

Podobně dospějeme k vyjádření všech vlastních vektorů odpovídajících vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$, které jsou tvaru $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{v}_2$, kde $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3) = d\,(1, 2, 1)$, $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, a všech vlastních vektorů, které odpovídají poslednímu vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$ a které jsou tvaru $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3) = e\,(-1, 1, 1)$, $e \in \mathbb{R}$, $e \neq 0$.

5.2 Nalezení nezávislých řešení

Je vhodné si nyní ukázat, k čemu nám vlastní čísla a vlastní vektory budou. Poznamenejme, že u lineární rovnice n-tého řádu jsme hledali řešení ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ a tímto obratem jsme převedli problém na řešení algebraické rovnice stupně n. Nyní budeme hledat řešení ve tvaru $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\, \boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{v}$ je vektor s konstantními složkami (je to tedy vektorová funkce!). Dosazením do vyšetřovaného systému dostaneme

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{A} \mathrm{e}^{\lambda x} \boldsymbol{v}\,,$$

což nás přivádí ke hledání čísel λ a (netriviálních) vektorů $\boldsymbol{v}$, pro které platí $\lambda \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$, a tedy i $\big(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}\big)\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. V případě, že se nám podaří takto najít n lineárně nezávislých řešení, bude tím problém nalezení obecného řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ vyřešen.

[2]) Při výpočtu by se nám dvojí indexy mohly plést, užíváme proto zjednodušené označení a pamatujeme si, že počítáme vektor $\boldsymbol{v}_1$ příslušný k vlastnímu číslu λ_1. Obdobně postupujeme i při výpočtu dalších vlastních vektorů.

Lemma 5.2.1. *Nechť* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$, $1 \le k \le n$, *jsou* nezávislé *vlastní vektory, příslušné* k (*ne nutně různým*) *vlastním číslům* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *matice* $\boldsymbol{A}$. *Potom*

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1\,,\ \boldsymbol{y}_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{v}_2\,, \dots,\ \boldsymbol{y}_k(x) = \mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}_k$$

jsou lineárně nezávislá řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

Důkaz. Ověřme ještě jednou, že takto dostáváme řešení systému: je

$$\boldsymbol{y}_k'(x) = \lambda_k \mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}_k = \mathrm{e}^{\lambda_k x}\lambda_k\boldsymbol{v}_k = \mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k\,.$$

Položme $\sum_{j=1}^k c_j\,\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{0}$. Dosazením $x = 0$ do lineární kombinace řešení $\boldsymbol{y}_j$ dostaneme

$$\sum_{j=1}^k c_j\,\boldsymbol{y}_j(x)\Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^k c_j\,\mathrm{e}^{\lambda_j x}\boldsymbol{v}_j\Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^k c_j\,\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}\,.$$

S ohledem na nezávislost $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ dostáváme $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ a tedy i nezávislost řešení $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k$. □

Příklad 5.2.2. Pro rovnici

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \tag{5.2}$$

má rovnice $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$ kořeny $\lambda_{1,2} = -1$ a $\lambda_3 = 2$. Dvojnásobnému kořeni -1 odpovídá soustava rovnic ekvivalentní s jedinou rovnicí pro (tři) složky vlastního vektoru

$$v^1 + v^2 + v^3 = 0\,,$$

takže lze volit *dva* lineárně nezávislé vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu -1, a to např. $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 0)$ a $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, -1)$. Snadno zjistíme, že k vlastnímu číslu $\lambda_3 = 2$ lze zvolit vlastní vektor $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 1)$ a nalézt tak obecné řešení rovnice (5.2) ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3\,\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\quad C_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, 3,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 5.2.3. Zkusíme-li naproti tomu řešit analogicky jednoduchou rovnici

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}\,,$$

jejíž charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 2$, existuje pouze *jediný* lineárně nezávislý vektor odpovídající tomuto kořeni a který má tvar $\boldsymbol{v} = (c, -c)$, $c \neq 0$. To signalizuje možné obtíže při výskytu vícenásobných vlastních čísel, protože jeden nezávislý vlastní vektor nám poskytne pouze jedno netriviální řešení, které *nevytváří* bázi prostoru všech řešení rovnice.

V předcházejících příkladech bylo možné si povšimneout, že problémy nenastávaly v případě, když vlastní čísla λ_k, $k = 1, \dots, n$, byla navzájem různá. To je zákonité, platí totiž následující

Tvrzení 5.2.4. *Vlastní vektory* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$, $1 \le k \le n$, *příslušné* k různým *vlastním číslům* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *matice* $\boldsymbol{A}$ *jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí. Pro $k = 1$ je platnost tvrzení zřejmá z definice vlastního vektoru. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro $(k-1)$ a odvoďme jeho platnost pro k. Jestliže pro $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ je

$$c_1\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\, \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}\,, \tag{5.3}$$

pak také platí

$$\boldsymbol{A}(\, c_1\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\, \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{0}\,;$$

Protože jsou $\boldsymbol{v}_j$ vlastní vektory příslušné k vlastním číslům λ_j, $j = 1, \dots, k$, plyne odtud

$$c_1\, \lambda_1\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, \lambda_2\, \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\, \lambda_k\, \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.4}$$

Vynásobíme rovnici (5.3) číslem λ_k a vzniklou rovnost odečteme od (5.4). Dostaneme tak vztah

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\, \boldsymbol{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_k)\, \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\, \boldsymbol{v}_{k-1} = \boldsymbol{0}\,.$$

Předpokládali jsme, že jsou vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ lineárně nezávislé; protože jsou vlastní čísla λ_1, λ_2, …, λ_k navzájem vesměs různá, vyplývá z předcházející rovnosti $c_1 = c_2 = \cdots = c_{k-1} = 0$. Odtud dostáváme i $c_k = 0$ a tvrzení je dokázáno. □

Příklad 5.2.5. Navážeme na předcházející Příklad 5.1.4, ve kterém jsme nalezli tvar vlastních vektorů příslušných k jednotlivým vlastním číslům. Zvolme $c = d = e = 1$; pak vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 4, 1)$ přísluší k $\lambda_1 = 1$, vektor $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 1)$ vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ a $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 1)$ vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$.

Máme-li tedy řešit soustavu, zapsanou v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \tag{5.5}$$

ve kterém matici na pravé straně rovnice jsme vyšetřovali v Příkladu 5.1.4, lze její obecné řešení zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\, \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1\, \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\, \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\,. \tag{5.6}$$

K řešení počáteční úlohy pro systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ není třeba další výklad, postup řešení je zřejmý. Uvedeme proto jednoduchý ilustrativní příklad:

Příklad 5.2.6. Řešte rovnici s danou počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Snadno zjistíme, že vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1$ odpovídá např. vlastní vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 1)$ a vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ odpovídá např. vlastní vektor $\boldsymbol{v}_2 = (2, 1)$. Obecné řešení rovnice je tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = C_1\, \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Dosazením 0 za x dospějeme s přihlédnutím k počáteční podmínce k rovnici

$$C_1\, \mathrm{e}^{-1\cdot 0} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, \mathrm{e}^{3\cdot 0} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

jejímž řešením vzhledem k neznámým C_1, C_2 obdržíme hledané řešení počáteční úlohy

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + 2\,\mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Situace je však poněkud složitější, jestliže má charakteristický polynom P obecně komplexní kořeny. Hledáme totiž řešení vyjádřené pomocí *reálných* funkcí. Jsou-li prvky matice $\boldsymbol{A}$ reálná čísla, má i P reálné koeficienty. Postupujeme pak analogicky jako v Poznámce 3.3.1. Kořeny P, které nejsou reálné, se vyskytují v párech a jsou komplexně sdružené. Nechť tedy jsou $\lambda = \beta + \mathrm{i}\gamma$ a $\overline{\lambda} = \beta - \mathrm{i}\gamma$ vlastní čísla matice s reálnými koeficienty $\boldsymbol{A}$. Protože pro vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ příslušný k λ je $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, dostáváme rovnosti [3])

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,,$$

takže $\overline{\boldsymbol{v}}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$. Tyto vektory jsou podle Tvrzení 5.2.4 lineárně nezávislé. Označíme-li $\operatorname{Re}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$, $\operatorname{Im}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2$, má rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ nezávislá řešení

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1(x) &= \mathrm{e}^{\beta x}(\cos\gamma x + \mathrm{i}\sin\gamma x)(\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2)\,,\\ \boldsymbol{y}_2(x) &= \mathrm{e}^{\beta x}(\cos\gamma x - \mathrm{i}\sin\gamma x)(\boldsymbol{v}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2)\,,\end{aligned}$$

a tedy i nezávislá *reálná řešení* $(1/2)(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)$, $(1/2\mathrm{i})(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)$, tj.

$$\mathrm{e}^{\beta x}(\boldsymbol{v}_1\cos\gamma x - \boldsymbol{v}_2\sin\gamma x)\,, \quad \mathrm{e}^{\beta x}(\boldsymbol{v}_1\sin\gamma x + \boldsymbol{v}_2\cos\gamma x)\,. \tag{5.8}$$

Tak můžeme nalézt ke každému páru komplexně sdružených (různých) vlastních čísel dvojici lineárně nezávislých reálných řešení; při výpočtu pak již stačí k jednomu z komplexně sdružených různých vlastních čísel najít vlastní vektor a ze získaného komplexního řešení vzít jeho reálnou a imaginární část.

Příklad 5.2.7. Určete obecné řešení rovnice

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}\,, \tag{5.9}$$

a vyjádřete je jako kombinaci reálných řešení, tvořících bázi prostoru všech řešení soustavy.

Snadno určíme charakteristickou rovnici $(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$ a jejím řešením kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2\mathrm{i}$. Pro λ_1 snadno spočteme, že lze za příslušný vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ volit např. $\boldsymbol{v}_1 = (2, -2, 3)$. Pro $\lambda_2 = 1 + 2\mathrm{i}$ dostaneme

$$\begin{pmatrix}-2\mathrm{i} & 0 & 0\\ 3 & -2\mathrm{i} & -2\\ 2 & 2 & -2\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\\ v^3\end{pmatrix} = 0\,,$$

takže za vektor, příslušný k λ_2 lze volit $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, -\mathrm{i})$. Jemu odpovídá komplexní řešení

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{x}(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x)\big((0,1,0) + \mathrm{i}(0,0,-1)\big)$$

[3]) Proužek zde značí u vektorů přechod ke komplexně sdruženým číslům „po složkách“.

a přechodem k jeho reálné a imaginární části dostaneme dvojici reálných řešení

$$\boldsymbol{y}_2(x) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_3(x) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2x \\ -\cos 2x \end{pmatrix}.$$

Nyní již snadno popíšeme obecné řešení rovnice (5.9):

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^x \left[C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2x \\ -\cos 2x \end{pmatrix} \right], \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.10}$$

kde C_1, C_2, C_3 jsou reálné konstanty (konstantní funkce).

Příklad 5.2.8. Podobně postupujeme při řešení úlohy nalézt všechna (reálná) řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}. \tag{5.11}$$

Charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A}$, $P(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$, má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$ a $\lambda_3 = -\mathrm{i}$. Vlastní vektor odpovídající $\lambda_1 = 1$ je nenulový vektor $\boldsymbol{v}$, který získáme řešením rovnice $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. rovnice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Všechna nenulová řešení soustavy jsou tvaru $c(0,\, 1,\, 0)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$; odpovídající vlastní vektor je tedy např. $\boldsymbol{v} = (0,\, 1,\, 0)$. Řešení odpovídající vlastnímu číslu λ_1 má tvar

$$\boldsymbol{y}_1(x) = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ odpovídající $\lambda_2 = \mathrm{i}$ je nenulovým řešením rovnice $(\boldsymbol{A} - \mathrm{i}\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & 1-\mathrm{i} & -1 \\ -2 & 0 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

což po úpravě dává soustavu

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 2 & -1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Všechna její nenulová řešení jsou tvaru $c\,(-1-\mathrm{i},\, 1+\mathrm{i},\, 2)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Vlastním vektorem je např. vektor $\boldsymbol{v} = (-1,\, 1,\, 2) + \mathrm{i}(-1,\, 1,\, 0) = \boldsymbol{v}^1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}^2$. Využijeme-li (5.8), mají řešení odpovídající vlastnímu číslu λ_2 tvar ($\beta = 0$, $\gamma = 1$):

$$\boldsymbol{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos x - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin x, \quad \boldsymbol{y}_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos x.$$

Sestavme fundamentální matici

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos x + \sin x & -\sin x - \cos x \\ e^x & \cos x - \sin x & \sin x + \cos x \\ 0 & 2\cos x & 2\sin x \end{pmatrix},$$

jejíž sloupce tvoří jednotlivá řešení $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{y}_3$. Snadno ověříme, že $\det \boldsymbol{Y}(0) = -2 \neq 0$. Řešení $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{y}_3$ jsou lineárně nezávislá a $\boldsymbol{Y}(x)$ je fundamentální matice soustavy (5.11). Víme však, že uvedený postup dává vždy lineárně nezávislá řešení, hodnotu $\det \boldsymbol{Y}(x)$ jsme počítali pouze pro kontrolu.

Obecné řešení lze i „vektorově zapsat“: Všechna řešení rovnice (5.11) lze popsat rovností tvaru $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{Y}(x) \cdot \boldsymbol{C}$, kde $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, C_3)$ je vektor libovolných konstant.

Má-li matice $\boldsymbol{A}$ násobná vlastní čísla, je situace často ještě složitější: K jednomu takovému vlastnímu číslu se nám *nemusí podařit* popsaným postupem najít dostatečný počet lineárně nezávislých vlastních vektorů; viz Příklad 5.2.3. Následující postup je motivován řešením jednoduché rovnice $y' = ay$, kde $a \in \mathbb{R}$. Jejím řešením je každá funkce $y(x) = \mathrm{e}^{ax}C$ s $C \in \mathbb{R}$. Vedeni analogií můžeme se pokusit hledat řešení rovnice

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{5.12}$$

ve tvaru $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\,\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{v}$ je nyní vektor z $\mathbb{R}^n$. K tomu však potřebujeme další pojmy.

Definice 5.2.9. Je-li $\boldsymbol{B}$ libovolná matice typu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$, definujeme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{1!}\,\boldsymbol{B} + \frac{1}{2!}\,\boldsymbol{B}^2 + \frac{1}{3!}\,\boldsymbol{B}^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{B}^k}{k!}\,. \tag{5.13}$$

Předchozí definice vyžaduje komentář: nekonečný součet matic chápeme „po prvcích“, jde tedy o matici, jejímiž prvky jsou součty řad. Tyto řady konvergují, protože pro

$$\boldsymbol{B} = \big(\, b_{jk} \,\big)_{j,\,k=1,\dots,n}$$

a takové $M \in (0, \infty)$, že $|b_{jk}| \le M$ pro j, $k = 1, \dots, n$, jsou absolutní hodnoty prvků matice $\boldsymbol{B}^k$ odhadnuty pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ shora číslem $n^{k-1}M^k$. Odtud plyne konvergence řady, která je prvkem matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$ srovnávacím kritériem; řada, se kterou srovnáváme, má tvar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1}M^k}{k\,!}\,,$$

a její konvergenci snadno ověříme např. podílovým kriteriem. Podle definice dostaneme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,\boldsymbol{A} + \frac{x^2}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,\boldsymbol{A}^k\,. \tag{5.14}$$

Povšimněme si, že pracujeme s maticí, jejíž prvky jsou funkce, které jsou součty mocninných řad. Odtud plyne legitimnost následujících úprav.

Derivováním (matice) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ podle proměnné x dostaneme z (5.14)

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\big)' &= \boldsymbol{A} + 2\frac{x}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + 3\frac{x^2}{3!}\,\boldsymbol{A}^3 + 4\frac{x^3}{4!}\,\boldsymbol{A}^4 + \cdots = \\ &= \boldsymbol{A}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,\boldsymbol{A} + \frac{x^2}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + \frac{x^3}{3!}\,\boldsymbol{A}^3 + \cdots\Big) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Odtud vidíme, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ je $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v}$ řešením systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}$. Pro praktické využití tohoto poznatku je však nutné umět nějakým jednoduchým způsobem určit matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. Obecně je těžké matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ v konkretním případě určit, nicméně ve speciálních případech to možné je. Pro náš problém je důležité to, že vždy lze určit n lineárně nezávislých vektorů $\boldsymbol{v}$ tak, že řada (5.14) lze ve vyjádření $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ sečíst. Dále ukážeme, jak můžeme $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ exaktně určit, pokud známe n lineárně nezávislých řešení rovnice (5.12).

Pro matice, jejichž násobení je komutativní, tj. pro něž je $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ [4]), snadno obdržíme (využíváme stejnoměrné konvergence mocninných řad pro záměnu pořadí sčítání)

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\big(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\big)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \boldsymbol{A}^m \boldsymbol{B}^{k-m} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{B}^{k-m}}{m!\,(k-m)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{B}^m}{m!} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\,,$$

takže pro ně dostaneme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\,;$$

odtud vyplývá, že je $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}x} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{E}$, a také rovnost

$$\big(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\big)^{-1} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}x}\,.$$

Tak např. vzorec (4.8) z Věty 4.2.1 pro konstantní matici $\boldsymbol{A}$ nabude přehlednějšího tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-x_0)}\boldsymbol{y}^0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-t)}\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{5.16}$$

Vzhledem k tomu, že již víme, že $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ je řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, lze určit $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ jako fundamentální matici $\boldsymbol{Y}(x)$ ze sloupcových vektorů řešení $\boldsymbol{y}_k(x)$, odpovídajících počátečním podmínkám (4.4). Z věty o jednoznačnosti vyplývá, že tak (poněkud pracně) dostaneme matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. K tomu se ještě vrátíme. Protože

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\,\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{E}x}\boldsymbol{v}$$

a úpravou vyjádření $\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{E}x}\boldsymbol{v}$ snadno obdržíme

$$\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{E}x}\boldsymbol{v} = \Big(\boldsymbol{E} + \frac{\lambda x}{1!}\,\boldsymbol{E} + \frac{\lambda^2x^2}{2!}\,\boldsymbol{E} + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{E}\Big(1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{\lambda^2x^2}{2!} + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}\,,$$

vyplývá odtud $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\,\boldsymbol{v}$, z čehož s přihlédnutím k Definici 5.2.9 obdržíme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) + \frac{x^2}{2!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2 + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v}\,. \tag{5.17}$$

Povšimneme si jednoduché věci, která má pro nás zásadní význam: při $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ pro nějaké pevné $m \in \mathbb{N}$ a $v \in \mathbb{R}^n$ je pak i pro všechna $l \in \mathbb{N}_0$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{m+l}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^l\big[\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v}\,\big] = \boldsymbol{0}\,.$$

Odtud však plyne, že při $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, je součet ve vyjádření (5.17) *konečný*, tj. že v rozvoji

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{m-1}\Big)\,\boldsymbol{v} \tag{5.18}$$

jsou členy, odpovídající mocninám $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^k$ s $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$, vesměs rovny $\boldsymbol{0}$.

[4]) Připomínáme, že násobení matic obecně *není* komutativní.

Vraťme se zpět k řešení rovnice (5.12). Jestliže není možné najít n nezávislých vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$, je situace složitější. To nastává v případě, že násobnost některého vlastního čísla λ je větší, než je dimenze prostoru všech řešení rovnice $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Pak můžeme pracovat s tzv. **zobecněnými vlastními vektory**, kterými doplníme již nalezené nezávislé vlastní vektory na bázi (vlastní vektory považujeme zároveň i za zobecněné vlastní vektory).

Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ násobnosti k, ke kterému je třeba doplnit další zobecněné vlastní vektory, budeme postupovat takto: nalezneme nejprve vlastní vektory $\boldsymbol{v}$, které jsou lineárně nezávislými řešeními rovnice

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\,.$$

Není-li těchto vektorů již k, budeme hledat všechny lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{v}$, pro které platí $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, ale $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, což nám zajistí, že takto nalezený vektor nebude lineárně závislý na předchozích. Potom pro každý takový vektor platí

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}\Big)$$

a tak získáváme další řešení rovnice (5.12). Analogicky pokračujeme dále. Z toho vyplývá tento algoritmus řešení:

1. Nalezneme všechny vlastní čísla a vlastní vektory matice $\boldsymbol{A}$. Jestliže má $\boldsymbol{A}$ celkem n lineárně nezávislých vlastních vektorů, má rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ odpovídajících n lineárně nezávislých řešení tvaru $\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}$, kde za λ postupně dosazujeme jednotlivá vlastní čísla a za $\boldsymbol{v}$ jim odpovídající vlastní vektory. Všimněte si, že pak nekonečná řada v (5.17) pro $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\boldsymbol{v}$ s vlastním číslem λ a vlastním vektorem $\boldsymbol{v}$ obsahuje jediný nenulový člen.

2. Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ má celkem r, $r < n$, lineárně nezávislých vlastních vektorů. Odtud dostaneme pouze r lineárně nezávislých řešení tvaru $\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}$. Vyberme vlastní číslo λ, pro které je počet příslušných vlastních vektorů menší než jeho násobnost a najdeme všechny lineárně nezávislé zobecněné vlastní vektory $\boldsymbol{v}$ takové, že platí $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, ale $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Z nich dostaneme další řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ tvaru

$$\mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}\Big)\,.$$

   To postupně uděláme se všemi odpovídajícími vlastními čísly $\boldsymbol{A}$.

3. Nedostaneme-li tak již všech n potřebných řešení, hledáme dále pro příslušná λ všechny další lineárně nezávislé zobecněné vlastní vektory $\boldsymbol{v}$ takové, že sice je $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, avšak $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Pro každý takový vektor je

$$\mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} + \frac{x^2}{2!}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}\Big)$$

   dalším řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

4. Analogicky postupujeme dále, dokud takto nezískáme očekávaných n lineárně nezávislých řešení $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

Následující „algebraické“ tvrzení, které nebudeme dokazovat, ukazuje, že právě popsaný algoritmus vede k nalezení n lineárně nezávislých řešení vyšetřované rovnice. Zároveň nám poskytuje i horní odhad počtu kroků, které tímto algoritmem musíme udělat, abychom dostali potřebných n lineárně nezávislých řešení vyšetřované rovnice.

Lemma 5.2.10. *Nechť charakteristický polynom P pro rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ má r navzájem různých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ s násobnostmi $k_1, k_2, \dots, k_r$, takže*

$$P(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

kde $c \neq 0$ je reálné číslo. Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ má pro nějaké $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ pouze $\ell_j < k_j$ lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných k λ_j. Potom má rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^2 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ alespoň $\ell_j + 1$ nezávislých řešení.

Obecněji, má-li rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^m \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ celkem $m_j < k_j$ nezávislých řešení, pak má rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^{m+1} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ alespoň $m_j + 1$ nezávislých řešení.

Z Lemmatu 5.2.10 plyne existence takového d_j, $d_j \leq k_j$, pro něž má rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^{d_j} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ alespoň k_j lineárně nezávislých řešení (zobecněných vlastních vektorů). Tak lze ke každému vlastnímu číslu λ_j, $j = 1, 2, \dots, r$ nalézt k_j lineárně nezávislých řešení rovnice (5.12). Všechna tato řešení mají tvar

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda_j x} \Big(\boldsymbol{v} + \frac{x}{1!} (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) \boldsymbol{v} + \cdots + \frac{x^{d_j - 1}}{(d_j - 1)!} (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^{d_j - 1} \boldsymbol{v} \Big).$$

Tímto způsobem lze ke k-násobnému vlastnímu číslu λ nalézt k lineárně nezávislých řešení. Dále lze ukázat, že všechna takto získaná řešení rovnice (5.12), tj. rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, kterých je celkem $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, jsou lineárně nezávislá.

Za zmínku stojí, že v případě **hermitovské matice**, tj. matice, pro kterou transponovaná matice k $\overline{\boldsymbol{A}}$ je rovna $\boldsymbol{A}$, jsou všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ reálná. Speciálně to platí pro **reálné symetrické matice**. Navíc násobnost každého vlastního čísla λ *je rovna* dimenzi prostoru řešení rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, takže taková matice je jednoduchá.

Příklad 5.2.11. Všimneme si nejprve znovu jevu, který nám při řešení systémů působí obtíže. Jestliže řešíme rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ s maticí

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

má charakteristická rovnice této matice jediný trojnásobný nulový bod $\lambda = \lambda_{1,2,3} = -1$. Přitom soustava $(\boldsymbol{A} + 1\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ má matici s hodností 1, a tedy dimenze prostoru řešení je 2 a je ostře menší než násobnost vlastního čísla $\lambda = -1$. Vlastní vektory $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vyhovují jediné rovnici $v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$. Snadno nalezneme dva nezávislé vlastní vektory $(1, 1, 0)$ a $(0, 2, 1)$. Na tomto příkladu může čtenář později porovnat efektivitu jednotlivých postupů nalezení fundamentální matice.

Příklad 5.2.12. Na následujícím jednodušším příkladu ukážeme použití metody zobecněných vlastních vektorů a najdeme obecné řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, kterou tentokrát uvádíme v „rozepsaném“ tvaru:

$$\begin{aligned} (y^1)' &= 17y^1 + 9y^2, \\ (y^2)' &= -25y^1 - 13y^2. \end{aligned}$$

Snadno spočteme, že charakteristická rovnice má tvar

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0,$$

a tedy *dvojnásobný* kořen $\lambda_{1,2} = 2$, Pro vlastní vektory dostaneme rovnici $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -25 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

což rozepsáním upravíme na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 15v_1 + \ \ 9v_2 &= 0\,, \\ -25v_1 - 15v_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Stačí tedy nalézt řešení jedné z rovnic (jsou lineárně závislé): dostaneme tak řešení soustavy ve tvaru $\boldsymbol{v} = (v_1,\, v_2) = (-3c/5,\, c)$ a dosazením $c = 5$ dostaneme vlastní vektor $\boldsymbol{v} = (-3, 5)$; ostatní jsou na něm lineárně závislé. Nyní nalezneme zobecněný vlastní vektor $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)$ řešením rovnice $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -25 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -25 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Násobením dvou matic vlevo dostaneme nulovou matici, takže jedinou podmínkou pro volbu zobecněného vlastního vektoru $\boldsymbol{z}$ je ta, která ve svém důsledku říká, že oba vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{z}$ musí být lineárně nezávislé. Máme tedy značnou volnost pro volbu $\boldsymbol{z}$, a můžeme zvolit např. $\boldsymbol{z} = (0, 1)$.

Fundamentální systém obsahuje řešení

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \mathrm{e}^{2x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a další řešení

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_2(x) &= \mathrm{e}^{2x}\Big[\boldsymbol{z} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{z}\Big] = \mathrm{e}^{2x}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -25 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \\ &= \mathrm{e}^{2x}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 9x \\ -15x + 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

takže obecné řešení $\boldsymbol{y} = (y^1, y^2)$ rozepsané po složkách má tvar

$$\begin{aligned} y^1 &= \mathrm{e}^{2x}\big(-3C_1 + 9xC_2\big) \\ y^2 &= \mathrm{e}^{2x}\big(5C_1 + (1 - 15x)C_2\big)\,. \end{aligned}$$

Poznámka 5.2.13. Všimneme si možnosti, kterou však nebudeme dále rozvíjet: V předcházejícím příkladu jsme v prvním kroku nalezli vlastní vektor $\boldsymbol{v} = (-3, 5)$. Pro nalezení dalšího nezávislého zobecněného vektoru můžeme řešit systém $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}$, tj.

$$\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -25 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Násobením (5.20) maticí $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})$ dostaneme $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\, \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tedy rovnici (5.19). Okamžitě vidíme, že $\boldsymbol{z}$ a takto získaný vektor $\boldsymbol{v}$ budou lineárně nezávislé a $\boldsymbol{v}$ je řešením (5.19). Tudy vede cesta k modifikaci popsané metody.

Příklad 5.2.14. Nalezněme tři lineárně nezávislá řešení soustavy

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y}\,. \tag{5.21}$$

Charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A}$, $P(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = -(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)$, má jednoduchý kořen $\lambda_1 = -2$ a *dvojnásobný* kořen $\lambda_{2,3} = -1$. Všechny vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu λ_1 jsou tvaru $\boldsymbol{v} = c\,(0,\,1,\,1)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ (získáme je řešením rovnice $(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$). Řešení odpovídající vlastnímu číslu λ_1 má tvar

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Všechny vlastní vektory, které odpovídají dvojnásobnému kořeni $\lambda_{2,3} = -1$ jsou tvaru $\boldsymbol{v}_2 = d\,(1,\,1,\,0)$, $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$ (získáme je řešením soustavy $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$). Řešení odpovídající vlastnímu číslu λ_2 má tvar

$$\boldsymbol{y}_2(x) = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Třetí lineárně nezávislé řešení budeme hledat pomocí zobecněného vlastního vektoru. Musíme nalézt vektor $\boldsymbol{v}$ tak, aby $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, ale $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq 0$. Je

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Všechna řešení této soustavy jsou tvaru $(c,\,c,\,d)$, $c,\,d \in \mathbb{R}$. Zvolíme-li např. $c = 0$ a $d = 1$, je $\boldsymbol{v} = (0,\,0,\,1)$ a máme splněnu i podmínku $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Tedy další řešení je tvaru

$$\boldsymbol{y}_3(x) = \mathrm{e}^{-x}\,(\boldsymbol{v} + x(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{v}) = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} x \\ x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že nalezená řešení $\boldsymbol{y}^1$, $\boldsymbol{y}^2$ a $\boldsymbol{y}^3$ jsou lineárně nezávislá!

Příklad 5.2.15. Řešte počáteční problém

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Charakteristický polynom matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je $P(\lambda) = (2-\lambda)^3$, takže jediným vlastním číslem matice $\boldsymbol{A}$ násobnosti 3 je $\lambda_1 = 2$. Každý vlastní vektor $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$ matice $\boldsymbol{A}$ příslušný k $\lambda_1 = 2$ vyhovuje rovnici

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\,.$$

Odtud vyplývá, že $v^2 = v^3 = 0$ a za v^1 lze volit libovolné nenulové číslo. Proto

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je jedním netriviálním řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Matice $\boldsymbol{A}$ tak má jediný lineárně nezávislý vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 2$. Hledejme proto řešení rovnice

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme $v^3 = 0$, přičemž v^1 a v^2 lze volit libovolně. Vektor $\boldsymbol{v} = (0,\,1,\,0)$ vyhovuje rovnici $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ a přitom $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Proto

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_2(x) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x}\left[\boldsymbol{E} + x\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Tak jsme získali druhé řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, avšak rovnice $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ má pouze dvě lineárně nezávislá řešení; budeme tedy postupovat podle výše uvedeného algoritmu dále. Budeme hledat všechna řešení rovnice

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Každý vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ je řešením nalezené rovnice. Jestliže zvolíme např. $\boldsymbol{v} = (0, 0, 1)$, pak je $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Proto

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_3(x) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x}\left(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}) + \frac{x^2}{2!}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 3x - \frac{1}{2}\,x^2 \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

je třetí lineárně nezávislé řešení. Obecné řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ je popsáno rovností

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{2x}\left[c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 3x - \frac{1}{2}\,x^2 \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}\right],$$

kde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Užitím počáteční podmínky určíme hodnoty c_1, c_2, c_3 dosazením do předcházející rovnice a obdržíme tak rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

jejím řešením dostaneme $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ a $c_3 = 1$. Řešení počáteční úlohy je tedy tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 + 5x - \frac{1}{2}\,x^2 \\ 2 - x \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Poznámka 5.2.16. Všimněte si, že při procesu hledání zobecněných vlastních vektorů v Příkladech 5.2.12 a 5.2.15 jsme při „umocňování“ matic $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})$ skončili v obou případech s nulovou maticí. Je to náhoda nebo jde o nějakou zákonitost? V Příkladu 5.2.15 byl charakteristický polynom $P(\lambda) = (2-\lambda)^3$, přičemž je $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^3 = \boldsymbol{0}$. Platí tato věta:

Věta 5.2.17 (Cayley, Hamilton). *Je-li $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + (-1)^n\lambda^n$ charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A}$, pak platí rovnost*

$$P(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{E} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + (-1)^n\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{0}$$

Je-li fundamentální matice pro rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ klíčem k řešení rovnice, dá se očekávat, že znalost řešení, případně fundamentální matice, kterou jsme zavedli v Definici 4.1.5, nám může pomoci k určení matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. K důkazu tvrzení o jejich souvislosti budeme potřebovat několik jednoduchých lemmat:

Lemma 5.2.18. *Matice $\boldsymbol{Y}$ je fundamentální maticí soustavy $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, právě když je*

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x) \quad \text{a} \quad \det\bigl(\boldsymbol{Y}(0)\bigr) \neq 0\,.$$

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ jsou sloupcové vektory matice $\boldsymbol{Y}$. Zřejmě je

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \bigl(\boldsymbol{y}_1'(x), \boldsymbol{y}_2'(x), \ldots, \boldsymbol{y}_n'(x)\bigr)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

a také

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x) = \bigl(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_2(x), \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_n(x)\bigr)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{5.23}$$

Vidíme, že splnění n rovnic $\boldsymbol{y}_k'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$ a $k = 1, 2, \ldots, n$, je ekvivalentní se splněním jediné „maticové“ rovnice $\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x)$. První část podmínky tedy zajišťuje, že sloupce matice $\boldsymbol{Y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, jsou tvořeny řešeními rovnice. Druhá část zajišťuje jejich nezávislost: podle Důsledku 4.1.6 je podmínka $\det\bigl(\boldsymbol{Y}(0)\bigr) \neq 0$ ekvivalentní s podmínkou $\det\bigl(\boldsymbol{Y}(x)\bigr) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, a tedy i s nezávislostí sloupců matice $\boldsymbol{Y}$. □

Lemma 5.2.19. *Maticová funkce $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ je fundamentální maticí soustavy rovnic popsané rovnicí $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.*

Důkaz. Tvrzení popisuje obsah rovnosti (5.15), kterou jsme již dokázali. □

Lemma 5.2.20. *Nechť $\boldsymbol{Y}$ a $\boldsymbol{Y}^*$ jsou fundamentální matice soustavy popsané rovnicí $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Potom existuje konstantní matice $\boldsymbol{C}$, pro kterou je*

$$\boldsymbol{Y}^*(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{C}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Důkaz. Sloupce $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ matice $\boldsymbol{Y}$ jsou nezávislá řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Proto každé z řešení $\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \ldots, \boldsymbol{y}_n^*$ je lineární kombinací

$$\boldsymbol{y}_j^* = c_{j1}\boldsymbol{y}_1 + c_{j2}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + c_{jn}\boldsymbol{y}_n\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{5.24}$$

Nechť $\boldsymbol{C}$ je matice $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$, kde

$$\boldsymbol{c}_j = \begin{pmatrix} c_{j1} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{pmatrix} ;$$

pak n rovnic (5.24) je ekvivalentních maticové rovnici $\boldsymbol{Y}^*(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{C}$, $x \in \mathbb{R}$, čímž je lemma dokázáno. □

Věta 5.2.21. *Jestliže označíme* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(x)$ *fundamentální matici systému popsaného rovnicí* $\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *potom*

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}^{-1}(0)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{5.25}$$

tj. součin libovolné fundamentální matice $\boldsymbol{Y}$ *rovnice* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ *s maticí k ní inverzní vyčíslené v bodě* 0 *dává vždy matici* $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$.

Důkaz. Označme $\boldsymbol{Y}$ fundamentální matici rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Potom existuje podle Lemmat 5.2.19 a 5.2.20 konstantní matice $\boldsymbol{C}$ tak, že je

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{C}\,.$$

Dosaďme do této rovnosti $x = 0$. Z $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Y}(0)\,\boldsymbol{C}$ vyplývá, že $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Y}^{-1}(0)$, což již dává dokazovanou rovnost. □

Další metody pro výpočet matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ nalezne čtenář např. v knize [12]. Ukážeme si aplikaci dokázaného tvrzení.

Příklad 5.2.22. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nejprve určíme charakteristickou rovnici soustavy:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0\,.$$

Řešením rovnice pro vlastní vektor

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\,,$$

kterou snadno upravíme na ekvivalentní systém dvou nezávislých rovnic

$$\begin{aligned} -2\,v^1 + v^2 - v^3 &= 0\,, \\ 3\,v^2 + v^3 &= 0\,, \end{aligned}$$

určíme jeden (nezávislý) vlastní vektor $\boldsymbol{v} = (v^1,\, v^2,\, v^3)$ příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$: je to vektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 = (2,\, 1\,, -3)$. Pro dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{2,3} = 2$ dostaneme rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\,,$$

ze které získáme ekvivalentní systém rovnic

$$\begin{aligned} -v^1 + v^2 - v^3 &= 0\,, \\ -v^1 \qquad - v^3 &= 0 \end{aligned}$$

s jediným dalším lineárně nezávislým řešením $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 = (1,\,0\,,-1)$. Musíme tedy sáhnout k hledání zobecněného vlastního řešení: budeme řešit rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

S touto rovnicí ekvivalentní soustava se redukuje na jedinou lineární rovnici

$$v^1 \qquad + v^3 = 0$$

s dalším lineárně nezávislým řešením $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_3 = (1\,,1\,,-1)$. Přejdeme od nezávislých zobecněných vlastních vektorů k lineárně nezávislým řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Dostáváme

$$\boldsymbol{y}_1 = \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}_2 = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_3 &= \mathrm{e}^{2x} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1-x & x & -x \\ -x & 1 & -x \\ 2x & -x & 1+2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1+x \\ 1 \\ -1-x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fundamentální matice má tvar

$$\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} & (1+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{3x} & 0 & \mathrm{e}^{2x} \\ -3\,\mathrm{e}^{3x} & -\mathrm{e}^{2x} & -(1+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Vypočteme její hodnotu v bodě 0 a k takto vzniklé matici spočteme matici inverzní $\left[\boldsymbol{Y}(0)\right]^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dosadíme do vzorce (5.25), čímž dostaneme $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ v „uzavřeném tvaru“, tedy nikoli ve formě nekonečné řady:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{3x} + (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} & -2\,\mathrm{e}^{3x} + (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} \\ 3\,\mathrm{e}^{3x} - (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & -x\mathrm{e}^{2x} & 3\,\mathrm{e}^{3x} - (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Toho můžeme využít k dořešení úlohy (srovnejte s prvním členem ve vzorci (5.16)): hledané řešení $\boldsymbol{y}$ vyhovující dané počáteční podmínce je popsáno rovností

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{2x} \\ -x\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

K tomuto příkladu se ještě jednou vrátíme; pro srovnání ho spočteme jinou metodou.

Poznámka 5.2.23. Protože jsme převáděli řešení lineární rovnice n-tého řádu na řešení speciálního systému 1. řádu, lze tušit, že mezi oběma problémy je úzká souvislost. To lze využít i při výpočtu fundamentální matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. Výsledek uvedeme pro informaci (bez důkazu):

Věta 5.2.24. *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $n \times n$ a nechť*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

je její charakteristická rovnice. Nechť y je řešení diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

splňující počáteční podmínky

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1\,.$$

Potom platí

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = z_1(x)\boldsymbol{E} + z_2(x)\boldsymbol{A} + \cdots + z_n(x)\boldsymbol{A}^{n-1}\,,$$

kde $z_k = z_k(x)$ obdržíme z řešení $y = y(x)$ transformací

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Stačí tedy umět řešit jen rovnice n-tého řádu a znát tuto větu. U systému rovnic je situace v případě násobných kořenů charakteristické rovnice často komplikovanější než u jediné rovnice vyššího řádu, kde je výsledek relativně jednoduchý.

Pro řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ lze užít také **Jordanova kanonického tvaru** matice $\boldsymbol{A}$. To je často *výhodné* vzhledem ke znalostem získaným eventuálně již dříve v rámci studia algebry. Jak bylo již zmíněno, tato partie je s množstvím příkladů zpracována v [2], omezíme se proto jen na základní popis metody, která je tam detailně popsána. Poznamenejme, že trochu odlišný tvar Jordanových buněk (s jedničkami „pod diagonálou") není podstatný. Připomeňme, že dvě čtvercové matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ se nazývají *podobné*, existuje-li regulární matice $\boldsymbol{C}$ tak, že platí

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\,.$$

Mezi všemi maticemi podobnými matici $\boldsymbol{A}$ hraje významnou roli její Jordanův kanonický tvar. Připomeňme, že čtvercová matice tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

se nazývá **Jordanova buňka**. Diagonální bloková matice, bloky na jejíž diagonále jsou Jordanovy buňky, se nazývá **Jordanova matice**. Je známo, že každá matice s reálnými prvky je podobná jisté Jordanově matici, avšak nad tělesem komplexních čísel. Tato Jordanova matice je určena až na pořadí Jordanových buněk na diagonále jednoznačně. Zkráceně říkáme, že každá taková matice má Jordanův kanonický tvar.

Řešíme-li rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, nalezneme Jordanův kanonický tvar $\boldsymbol{J}$ matice $\boldsymbol{A}$ spolu s maticí $\boldsymbol{C}$, pro kterou $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, resp. $\boldsymbol{C}\boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{A}$. Položíme-li $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$, je pak rovnost $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ ekvivalentní s rovností

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}\,,$$

a tedy s rovností $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}$. Rovnice se tak rozpadne na menší systémy, které odpovídají jednotlivým Jordanovým buňkám. Tyto soustavy již snadno řešíme. Tak např. Jordanově buňce

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

odpovídá systém rovnic

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda z_1 + z_2\,, \\ z_2' &= \qquad \lambda z_2 + \ z_3\,, \\ z_3' &= \qquad\qquad \lambda z_3 + \ z_4\,, \\ z_4' &= \qquad\qquad\qquad \lambda z_4\,, \end{aligned}$$

jehož řešení je, jak se snadno přesvědčíme přímým výpočtem, tvaru (řešíme zde „odzadu“)

$$\begin{aligned} z_4 &= a\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_3 &= (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_2 &= \Big(\frac{ax^2}{2} + bx + c\Big)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_1 &= \Big(\frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d\Big)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \end{aligned}$$

kde a, b, c, d jsou reálné konstanty. Pro obecnou Jordanovu buňku si čtenář snadno řešení představí. Tak postupně nalezneme řešení, odpovídající všem Jordanovým buňkám a sestrojíme takto řešení $\boldsymbol{z}$. Tím ovšem řešení systému nekončí, musíme ještě provést „zpětnou transformaci“ a přejít tak od řešení systému $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}$ k řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Protože $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$, je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$.

Příklad 5.2.25. Vrátíme se nyní k úloze, kterou jsme řešili v Příkladu 5.2.22 a spočteme matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ jinak, pomocí převodu na Jordanův tvar. Připomeňme, že matice $\boldsymbol{A}$ byla dána ve tvaru

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a že jsme určili její vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ s násobností 1 a $\lambda_{2,3} = 2$ s násobností 2; vlastnímu číslu 2 odpovídá jediný nezávislý vlastní vektor. Jordanův tvar $\boldsymbol{J}$ matice $\boldsymbol{A}$ pak je (pořadí buněk na diagonále si můžeme zvolit, avšak to ovlivní transformační matici $\boldsymbol{C}$, kterou musíme určit [5])

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

[5]) Pokud známe vlastní čísla matice, nelze z nich u rozměrnějších matic určit tvar matice $\boldsymbol{J}$. Proto je dobré transformační matici určovat souběžně s převodem na Jordanův tvar.

Tento tvar jsme určili snadno též díky rozměru matice (viz [2]), potřebujeme však ještě transformační matici $\boldsymbol{C}$ a také i $\boldsymbol{C}^{-1}$. Z rovnice

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

určíme úpravami známými z algebry

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Protože je

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}x} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & x\,\mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix},$$

plyne odtud

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & x\,\mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{3x} + (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} & -2\,\mathrm{e}^{3x} + (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} \\ 3\,\mathrm{e}^{3x} - (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & -x\mathrm{e}^{2x} & 3\,\mathrm{e}^{3x} - (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Čtenář si může jen stěží udělat obrázek o pracnosti jednotlivých uvedených postupů z těch několika málo příkladů, které jsme uvedli. Volba těchto postupů je vždy podmíněna tím, co řešitel úlohy lépe ovládá. Řadu řešených příkladů lze nalézt např. v [28].

Vyřešili jsme systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$ pro speciální případ $\boldsymbol{b}(x) \equiv \boldsymbol{0}$ a máme k dispozici metodu variace konstant, pomocí níž můžeme řešit systém i v případě obecné vektorové funkce $\boldsymbol{b}$ spojité na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Avšak tento postup může být velmi pracný; v případě lineární rovnice n-tého řádu jsme pro speciální tvar „pravé strany“ rovnice $\boldsymbol{b}(x)$ použili často méně pracnou metodu porovnávání koeficientů, která navíc „obcházela“ integraci.

Podobný postup je možný i v případě systémů, které nyní řešíme. Je analogický, avšak nepatrně složitější. Platí toto tvrzení: *Jestliže jsou složky vektoru $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(x)$ polynomy stupně nejvýše r-tého a jestliže 0 je k-násobným kořenem charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{A}$, pak existuje partikulární řešení systému*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x), \tag{5.26}$$

jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše $(r+k)$-tého. Poznamenejme, že $k = 0$, právě když determinant $\det(\boldsymbol{A})$ matice $\boldsymbol{A}$ není roven 0. Proti případu jedné lineární rovnice n-tého řádu se mohou ve složkách řešení vyskytovat s nenulovými koeficienty i mocniny stupně *menšího než k*. Rovněž není bez zajímavosti, že tvrzení platí i pro „komplexní případ“.

Nebudeme uvádět speciální tvar partikulárního řešení pro případ, že složky vektoru $\boldsymbol{b}$ obsahují polynomiální násobky goniometrických funkcí a zformulujeme výsledek jen pro „komplexní případ“: *Nechť v rovnici* (5.26) *je vektor $\boldsymbol{b}$ tvaru $\boldsymbol{b}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{Q}_r(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, kde složky vektoru $\boldsymbol{Q}_r$ jsou* (*obecně komplexní*) *polynomy stupně nejvýše r-tého. Potom existuje řešení $\boldsymbol{y}$ systému* (5.26) *tvaru*

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{R}_{r+k}(x),$$

kde $\boldsymbol{R}_{r+k}$ je matice, jejímiž prvky jsou polynomy stupně nejvýše $(r+k)$-tého a kde k je násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu matice $\boldsymbol{A}$. Poznamenejme konečně na závěr této části, že i v tomto případě můžeme využít princip superpozice k rozkladu $\boldsymbol{b}$ na takové vektory, na které lze aplikovat předcházející tvrzení na každý zvlášť. Postup hledání partikulárního řešení touto metodou si ukážeme na následujících dvou příkladech :

Příklad 5.2.26. Nalezněte *partikulární řešení* soustavy, tj. libovolné řešení soustavy,

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} -t^2 \\ 2t \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

Řešení soustavy (nehomogenní) budeme hledat ve tvaru

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} at^2 + bt + c \\ dt^2 + et + f \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Dosazením do (5.27) dostáváme

$$\begin{pmatrix} 2at + b \\ 2dt + e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at^2 + bt + c \\ dt^2 + et + f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^2 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Po roznásobení a porovnání koeficientů u stejných mocnin t dostaneme soustavu šesti rovnic o šesti neznámých

$$\begin{array}{rclrcl} a - d & = & 1, & a + 3d & = & 0, \\ b - e & = & 2a, & b + 3e & = & 2d - 2\,, \\ c - f & = & b, & c + 3f & = & e\,, \end{array}$$

která má řešení $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{8}$, $d = -\frac{1}{4}$, $e = -1$ a $f = -\frac{3}{8}$. Po dosazení do (5.28) dostáváme partikulární řešení

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4}t^2 - t - \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Příklad 5.2.27. Nalezněte partikulární řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t. \tag{5.29}$$

Označme $\boldsymbol{A}$ matici a $\boldsymbol{b}$ vektor v soustavě (5.29). Řešení této nehomogenní soustavy budeme hledat ve tvaru

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{q}e^t. \tag{5.30}$$

Dosazením do (5.29) dostáváme

$$\boldsymbol{q}e^t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}e^t + \boldsymbol{b}e^t.$$

Odtud máme

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Po nalezení matice $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ dostáváme

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a tedy partikulární řešení soustavy (5.29) je

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Poznámka 5.2.28. Řešení soustavy (5.12) lze v případě násobných kořenů hledat také jinými metodami. Velice stručně jsme se zmínili o postupu, založeném na hledání Jordanova kanonického tvaru matice. S jinou, tzv. Putzerovou metoda se čtenář může seznámit v [21]. Postup, kterému jsme věnovali největší pozornost, je převzat z monografie [3].

5.3 Kvalitativní vlastnosti řešení soustav ODR

V tomto odstavci se budeme krátce zabývat stabilitou řešení, prakticky však pouze pro tzv. **autonomní systémy**. Jsou to systémy tvaru (2.13), v nichž pravá strana nezávisí na proměnné x. Základní otázky můžeme formulovat pro obecnější rovnice; i v případě, že je neumíme řešit, existují možnosti, jak se o chování jejich řešení alespoň ve speciálních případech některé věci dozvědět.

Budeme tedy nejprve studovat systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}). \tag{5.31}$$

Pro potřeby tohoto závěrečného odstavce dále předpokládáme, že všechna řešení, se kterými pracujeme, jsou spojitě rozšířena do bodu 0 a jsou to tedy funkce definované na neomezeném intervalu $[0, +\infty)$. Popišme otázky, které nás zajímají:

(A) Existuje konstantní řešení, které reprezentuje **rovnovážný stav** systému, tj. takové $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$, pro které je $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$ pro všechna $x > 0$?

(B) Nechť $\boldsymbol{y}_1$ je řešením rovnice (5.31) a nechť $\boldsymbol{y}_2$ je takové řešení (5.31), pro které je v bodě 0 norma rozdílu $\|\boldsymbol{y}_1(0) - \boldsymbol{y}_2(0)\|$ „malá“. Bude $\boldsymbol{y}_2(x)$ také „blízko“ $\boldsymbol{y}_1(x)$ i pro všechna $x > 0$?

(C) Pokud řešení (5.31) existuje na nějakém intervalu $(0, +\infty)$, jaké je jeho chování pro $x \to +\infty$? Existuje např. nějaký rovnovážný stav $\boldsymbol{y}^0$ tak, že pro všechna řešení $\boldsymbol{y}$ systému rovnic (5.31) je $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$?

Rovnovážný stav

Otázka (A) není těžká. Má-li $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$ být řešením systému (5.31), pak je $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{0}$, a lze zformulovat jednoduchý výsledek: $\boldsymbol{y}^0$ *je rovnovážným stavem systému* (5.31)*, právě když je*

$$\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}^0) = \boldsymbol{0},$$

tj. pro všechna x z intervalu, na kterém je definována vektorová funkce $\boldsymbol{f}$, je $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}^0) = 0$. Takové konstantní řešení budeme nazývat **rovnovážné řešení**.

Příklad 5.3.1. Najděte všechna rovnovážná řešení systému rovnic

$$\dot{x} = (x-4)(y+5),$$
$$\dot{y} = (x-7)(y-3).$$

I když jde o systém nelineárních rovnic, který není ani autonomní, snadno úlohu vyřešíme. Je totiž třeba řešit soustavu rovnic

$$0 = (x-4)(y+5)\,,$$
$$0 = (x-7)(y-3)\,,$$

jejíž řešení je zřejmé: První rovnice je splněna, právě když je $x = 4$ nebo $y = -5$, a druhá rovnice je splněna, právě když je $x = 7$ nebo $y = 3$. Odtud vyplývá, že jedinými rovnovážnými řešeními systému rovnic jsou konstantní vektorové funkce $(4,3)$ a $(7,-5)$.

Poznámka 5.3.2. Pro velmi speciální případ rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ (systém s konstantními koeficienty) vyplývá z vět o řešení systémů lineárních rovnic jedna z následujících dvou možností: v případě, že $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, je jediným rovnovážným řešením nulové řešení, zatímco v případě, že $\det \boldsymbol{A} = 0$, vyplní rovnovážná řešení natriviální lineární podprostor, jehož dimenze závisí na hodnosti matice $\boldsymbol{A}$.

Další jednoduché tvrzení se týká obecné autonomní rovnice

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \tag{5.32}$$

Lemma 5.3.3. *Nechť pro řešení $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ autonomního systému* (5.32) *platí*

$$\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}^0\,.$$

Potom $\boldsymbol{y}^0$ je rovnovážným řešením (5.32).

Důkaz. Jestliže $\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}^0$, pak při označení $\boldsymbol{y} = (y_1,\, y_2\, \dots, y_n)$ pro složky y_k je

$$\lim_{t\to+\infty} y_k(t) = y_k^0\,, \quad k = 1,2,\dots,n\,.$$

Speciálně pro libovolná $t_1 < t_2$ je $|y_k(t_1) - y_k(t_2)| \to 0$ při $t_1 \to +\infty$. Položíme-li pro $h > 0$ $t_1 = t$, $t_2 = t + h$, je $|y_k(t) - y_k(t+h)| \to 0$ pro $t \to +\infty$. Pak ale je

$$y_k(t+h) - y_k(t) = h y_k'(\tau_t) = h f_k\big(y_1(\tau_t), y_2(\tau_t), \dots, y_n(\tau_t)\big)\,,$$

kde $\tau_t \in (t, t+h)$. Při limitním přechodu $t \to +\infty$ levá strana rovnosti konverguje k 0 a pravá k $h f_k\big(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0\big)$, což ukazuje, že $\boldsymbol{y}^0$ je rovnovážným řešením (5.32). □

Stabilita řešení

Otázka (B) je složitější. Vyžaduje především *přesnější popis* problému, který poskytuje následující definice:

Definice 5.3.4. Řekneme, že řešení $\boldsymbol{y}^*$ systému (5.31) je **stabilní**, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna řešení $\boldsymbol{y}$ systému (5.31) a všechna $x > 0$ platí

$$(\|\,\boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{y}^*(0)\,\| < \delta) \implies (\|\,\boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{y}^*(x)\,\| < \varepsilon)\,.$$

Řešení, které není stabilní, se nazývá *nestabilní*.

Pro *autonomní systém*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{5.33}$$

s konstantní maticí $\boldsymbol{A}$ lze dokázat následující výsledky (viz např. [22]):

Věta 5.3.5. (1) *Jsou-li reálné části všech vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$ záporné, je každé řešení autonomního systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ stabilní.*

(2) *Má-li alespoň jedno vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ kladnou reálnou část, je každé řešení systému* (5.33) *nestabilní.*

(3) *Nechť mají všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ zápornou nebo nulovou reálnou část a nechť $\lambda_j = \mathrm{i}\gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$, jsou všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ s nulovou reálnou částí. Nechť vlastní čísla λ_j mají násobnost k_j, $j = 1, \ldots, m$. Potom je každé řešení systému* (5.33) *stabilní, má-li matice $\boldsymbol{A}$ pro každé j celkem k_j lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných k λ_j.*

Podstatné je, že existují metody, jak jednoduše zjistit, že popsaná situace nastává, aniž je nutno hledat vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$; stačí pouze znát její charakteristický polynom. Např. tzv. **Hurwitzovo kritérium** (viz dále) umožňuje relativně jednoduše zjistit, zda všechny kořeny charakteristického polynomu mají *záporné* reálné části.

Asymptotická stabilita řešení

Také pro (C) uvedeme jednu potřebnou definici. Otázka (C) je pro řešení systému (5.31) složitější nežli pro systém (5.33), ale definici podáme i pro systém (5.31).

Definice 5.3.6. Budeme říkat, že řešení $\boldsymbol{y}^*$ systému (5.31) je **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní, tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna řešení $\boldsymbol{y}$ systému (5.31) a všechna $x > 0$ platí

$$(\| \boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{y}^*(0) \| < \delta) \implies (\| \boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{y}^*(x) \| < \varepsilon)$$

a zároveň je $\| \boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{y}^*(x) \| \to 0$ pro $x \to +\infty$.

Mají-li v případě systému (5.33) všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ zápornou reálnou část, „blíží se“ zřejmě všechna řešení k 0, tj. platí tvrzení (viz např. [22]):

Věta 5.3.7. *Řešení systému* (5.33) *je asymptoticky stabilní, právě když mají všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ zápornou reálnou část.*

Nežli uvedeme několik příkladů, ukážeme si, jak můžeme zjistit, zda mají všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ záporné reálné části, aniž bychom přímo vlastní čísla znali, a to pomocí již zmíněného Hurwitzova kriteria.

Hurwitzovo kritérium

je obsaženo v následujícím tvrzení, které používá pojmu **Hurwitzova matice**. Její definice je v tomto tvrzení zahrnuta.

Tvrzení 5.3.8. *Nechť $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ je polynom alespoň prvého stupně s reálnými koeficienty, $a_0 > 0$, $a_n \neq 0$. Přiřaďme polynomu P_n jeho tzv. Hurwitzovu matici* (*pro větší názornost ji popíšeme schematicky*)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & & & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

kde klademe $a_s = 0$ pro $s < 0$ a $s > n$.

Potom mají všechny kořeny polynomu P_n záporné reálné části právě tehdy, jsou-li všechny hlavní diagonální minory Hurwitzovy matice polynomu P_n kladné.

K nalezení potřebných informací může být užitečné v některých případech toto tvrzení, které obsahuje definici tzv. **stopy čtvercové matice**.

Tvrzení 5.3.9. *Nechť stopa čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je kladná, tj. součet prvků matice na hlavní diagonále $\sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ je kladný* nebo *je pro její determinant splněna nerovnost* $(-1)^n \det \boldsymbol{A} < 0$. *Potom* alespoň jedno *vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ má kladnou reálnou část.*

Příklad 5.3.10. Vyšetřete, zda jsou všechna řešení soustavy $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ stabilní, asymptoticky stabilní či nestabilní, je-li

$$\text{(a)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Protože stopa matice $\boldsymbol{A}$ je $3+0+3 = 6 > 0$, má alespoň jedno vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ kladnou reálnou část a tedy všechna řešení jsou nestabilní.
(b) Charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A}$ je

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = -(\lambda+1)^2(\lambda+2),$$

a tak pro spektrum dostáváme $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{-1, -2\}$. Protože jsou všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ záporná, je každé řešení asymptoticky stabilní.
Pokud bychom neuměli nalézt všechny kořeny charakteristického polynomu, můžeme užít Hurwitzova kritéria. Hurwitzova matice příslušná polynomu $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2$ je

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože $D_1 = 5 > 0$, $D_2 = 18 > 0$ a $D_3 = 18 > 0$ (hlavní diagonální minory kladné), mají podle Hurwitzova kritéria všechny kořeny charakteristického polynomu záporné reálné části a tedy všechna řešení jsou asymptoticky stabilní.

(c) Charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A}$ je $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = -\lambda(\lambda+1)^2$, tj. $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{0, -1\}$. Všechna řešení jsou tedy stabilní, ale nejsou asymptoticky stabilní.

Příklad 5.3.11. Ukažte, že každé řešení soustavy ODR $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ s

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

je nestabilní.

Charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A}$ je $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = -\lambda^2(\lambda+7)$, tj. $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{-7, 0\}$. Vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ matice $\boldsymbol{A}$ příslušný k $\boldsymbol{0}$ musí splňovat soustavu

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj. $v_1 = \frac{3}{2} v_2$ a $v_3 = -3v_2$. Každý vlastní vektor příslušný matici $\boldsymbol{A}$ a vlastnímu číslu 0 je tvaru $\boldsymbol{v} = k(3, 2, -6)$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Tedy každé řešení $\boldsymbol{u}(t)$ soustavy $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ je nestabilní, neboť $\lambda = 0$ je vlastní číslo násobnosti dvě a matice $\boldsymbol{A}$ má pouze jediný lineárně nezávislý vektor odpovídající vlastnímu číslu 0.

Poznámka 5.3.12. Někdy se užívá také označení **ljapunovovská stabilita**, resp. **ljapunovovská asymptotická stabilita**, místo stability, resp. asymptotické stability. Další kritéria stability pro obecnější soustavy lze nalézt v [22].

5.4 Cvičení

1. Řešte rovnici

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,,$$

[Obecné řešení je tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} \,]$$

2. Řešte rovnici

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,,$$

[Obecné řešení je tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos 3x \\ \cos 3x + 3\sin 3x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3x \\ \sin 3x - 3\cos 3x \end{pmatrix} .$$

Pokud bychom pracovali s komplexní exponenciálou, nalezli bychom řešení ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} \,. \,]$$

3. Řešte rovnici

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,,$$

[Obecné řešení je tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 + x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} . \,]$$

4. Řešte Cauchyho úlohu

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} !$$

[Užijeme-li kratšího zápisu s komplexní exponenciálou, je obecné řešení systému tvaru

$$\boldsymbol{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ \mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} \,;$$

Po dosazení počáteční podmínky a přechodu k „reálnému“ tvaru řešení dostaneme po rozepsání po složkách $\boldsymbol{y} = (y^1,\, y^2,\, y^3)$

$$y^1(t) = -4\mathrm{e}^{-2t} - 2\sin 4t\,, \quad y^2(t) = \mathrm{e}^{-2t} - \cos 4t\,, \quad y^3(t) = \mathrm{e}^{-2t} - 2\sin 4t\,.\,]$$

5. Zkuste řešit soustavu (je trochu pracnější)

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,!$$

[Po rozepsání $\boldsymbol{y} = (y^1,\, y^2,\, y^3,\, y^4)$ po složkách a úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} y^1(t) &= C_1(1 + 2t + 2t^2) + 2C_2 t + C_3 + C_4\,, \\ y^2(t) &= -2C_1 - C2 + C_4\,, \\ y^3(t) &= 2C_1 t + C_2 + C_3\,, \\ y^4(t) &= -4C_1 t^2 - 4C_2 t - 2C_3\,] \end{aligned}$$

6. Řešte Cauchyho úlohu pro rovnici

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}\,, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,!$$

[Řešení je tvaru

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} (t+1)\,\mathrm{e}^{-t} & (t+1)\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \\ -t\,\mathrm{e}^{-t} & -t\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t} \\ t\,\mathrm{e}^{-t} & t\,\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}\,.\,]$$

7. Řešte Cauchyho úlohu

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} t \\ 3\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,!$$

[Řešení je tvaru

$$\boldsymbol{y}(t) = -\frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t}\,]\,.$$

Kapitola 6

Laplaceova transformace

V této části si všimneme další možné metody řešení diferenciálních rovnic, zejména pak Cauchyho úlohy. Princip, který se při jejím použití užívá, připomíná dávné využívání logaritmů: složité násobení lze převést na mnohem jednodušší sčítání. Laplaceova (integrální) transformace umožňuje např. převést řešení diferenciálních rovnic na řešení rovnic algebraických. Laplaceova transformace se používala často k řešení problémů o oscilátorech, má však uplatnění i jinde, např. v teorii pravděpodobnosti a dodnes je důležitým nástrojem k řešení obyčejných diferenciálních rovnic a jejich soustav, integrodiferenciálních rovnic apod.

6.1 Motivace

Úmluva 6.1.1. Budeme řešit lineární diferenciální rovnice a jejich soustavy. Začneme s lineárními rovnicemi řádu n s konstantními koeficienty, které se často vyskytují v aplikacích. Hledané řešení budeme značit $y = y(t)$, počáteční podmínky pak $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, atd.; budeme tedy řešit úlohy, se kterými jsme se již setkali, tentokrát však jiným způsobem.

Motivace 6.1.2. Uvažujme například rovnici

$$y' + 2y = \mathrm{e}^{at}\,, \quad y(0) = 1\,. \tag{6.1}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je zatím neurčený parametr. Postup, se kterým jsme se již seznámili, spočívá nejprve v určení obecného řešení rovnice

$$y' + 2y = 0\,,$$

pak v nalezení partikulárního řešení rovnice z (6.1), určení jejího obecného řešení a pak ve vybrání toho (maximálního) řešení, které vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 1$.

Nyní se pokusíme „objevit“ jiný způsob řešení diferenciálních rovnic a jejich soustav. Jakkoli není pro začátečníka zřejmé, proč s danou rovnicí zacházíme následujícím způsobem, dospějeme tak k výsledku, z něhož bude vcelku dobře patrné, proč je dobré se s tzv. Laplaceovou transformací seznámit.

Zkusme danou rovnici vynásobit faktorem e^{-st}, kde s je zatím nespecifikovaný parametr a potom výrazy na pravé i levé straně takto upravené rovnice integrovat přes interval $(0, \infty)$. Dostaneme tak rovnici

$$\int_0^\infty y'(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \,+ 2\int_0^\infty y(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \,= \int_0^\infty \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pokud bude konvergovat první z integrálů na levé straně, upravíme ho pomocí metody per partes na jiný tvar:

$$\int_0^\infty y'(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \Big[y(t)\,\mathrm{e}^{-st}\Big]_{t=0}^{\infty} + s\int_0^\infty y(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\ . \tag{6.2}$$

Platí-li

$$\lim_{t\to\infty}\big(y(t)\,\mathrm{e}^{-st}\big) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t\to 0_+} y(t) = y_0\,,$$

je přírůstek funkce v hranaté závorce vzhledem k rovnosti $y(0_+) = y_0 = 1$ roven -1, a tak dostáváme pro funkci $Y(s) := \int_0^\infty y(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ parametru s

$$Y(s)(s+2) - 1 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t\ . \tag{6.3}$$

Pro $s > a$ dostaneme integrací výrazu na pravé straně předchozí rovnice

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{\mathrm{e}^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\Big]_{s=0}^{\infty} = \frac{1}{s-a}\,. \tag{6.4}$$

Označíme nyní pro funkci $f = f(t)$ definovanou na intervalu $(0,\infty)$

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = F(s)\,. \tag{6.5}$$

Funkci $F = \mathcal{L}(f)$ budeme nazývat **Laplaceovým obrazem** funkce f. Trochu nelogicky, abychom zdůraznili příslušné proměnné, budeme často užívat i označení $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$, případně též $\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = f(t)$. S takto zavedeným označením můžeme přepsat rovnici (6.3) ve tvaru

$$Y(s)(s+2) = \frac{1}{s-a} + 1 = \frac{1+s-a}{s-a}\,, \tag{6.6}$$

který ještě dále upravíme pomocí rozkladu na parciální zlomky:

$$Y(s) = \frac{1+s-a}{(s+2)(s-a)} = \frac{a+1}{a+2}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{1}{a+2}\cdot\frac{1}{s-a}\,.$$

Pokud budeme předpokládat, že zobrazení $\mathcal{L}$, definující Laplaceovu transformaci, je lineární a prosté, můžeme ještě tuto rovnici přepsat do tvaru

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{a+1}{a+2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s+2}\Big] + \frac{1}{a+2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s-a}\Big]\,,$$

a vzhledem k definici Laplaceovy transformace (6.6) a výpočtu, který jsme provedli v (6.4), tak obdržíme

$$y(t) = \frac{a+1}{a+2}\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{a+2}\,\mathrm{e}^{at} \tag{6.7}$$

Snadno zjistíme, že $y(0) = 1$ a dosazením do rovnice v (6.1) též to, že y je jejím řešením.

Náš postup, kterým jsme řešení nalezli, nebyl sice korektně zdůvodněn a např. pro případ $a = -2$ by ani řešení z (6.7) nemělo smysl, avšak ukazuje možnou cestu pro vybudování teorie, která nám umožní řešit diferenciální rovnice jiným způsobem. Poznamenejme, že jsme došli k řešení Cauchyho úlohy *přímo*, nikoli přes (mnohdy zbytečné) hledání obecného řešení. Abychom však takový postup mohli používat, je třeba vybudovat alespoň částečně teoretický základ pro užívání Laplaceovy transformace. Jak jsme již zmínili, je to nástroj s daleko širším použitím než pouze pro řešení diferenciálních rovnic a jejich soustav a příslušná teorie je obsáhlá, pro naše potřeby však vystačíme pouze s několika základními vlastnostmi této integrální transformace.

6.2 Rozklad na parciální zlomky

Protože budeme v další části rozklad na parciální zlomky velmi často potřebovat, *připomeneme si ho* na několika praktických příkladech.

Jestliže je R racionální funkce, která je podílem polynomů P, Q,

$$R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}\,, \tag{6.8}$$

pak v případě, že $Q \equiv 0$, má R triviální definiční obor $D_R = \emptyset$. V případě, že $Q \equiv k \neq 0$ je R polynom. V netriviálních případech je stupeň $\mathrm{st}(Q)$ polynomu Q nejméně 1.

Bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat, že $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$, jinak můžeme známým algoritmem pro dělení polynomů upravit R na součet polynomu a racionální funkce, která tuto podmínku splňuje.

Příklad 6.2.1. Skutečně, tak např.

$$\begin{aligned}\frac{t^3 - 5t^2 + 7t}{t^2 + 2t - 8} &= (t-7) + \frac{29t - 56}{t^2 + 2t - 8} = \\ &= (t-7) + \frac{29t - 56}{(t-2)(t+4)} = \\ &= (t-7) + \frac{1}{3}\frac{1}{t-2} + \frac{86}{3}\frac{1}{t+4}\,.\end{aligned}$$

Zpravidla není získání rozkladu problémem a jeho řešení lze i uhodnout, někdy je to však pracné.

Příklad 6.2.2. Tak např. jsou-li kořeny polynomu Q ve vyjádření (6.8) vesměs jednoduché, dostaneme po rozkladu jmenovatele

$$\frac{3t^2 - 5t + 2}{t^3 + 2t^2 - 8t} = \frac{3t^2 - 5t + 2}{t(t-2)(t+4)}\,,$$

a je třeba určit $A, B, C \in \mathbb{R}$, aby pro všechna $t \in \{0, 2, -4\}$ platila rovnost

$$\frac{3t^2 - 5t + 2}{t^3 + 2t^2 - 8t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{t+4}\,. \tag{6.9}$$

Dosazením nevyloučených hodnot t získáme rovnice pro výpočet konstant A, B, C. Např. pro $t = 5$ obdržíme nepříliš zajímavou rovnici

$$52 = 27A + 45B + 15C\,.$$

Vynásobíme-li rovnici (6.9) polynomem $Q(t) = t(t-2)(t+4)$, dostaneme rovnost platnou pro *všechna* $t \in \mathbb{R}$

$$3t^2 - 5t + 2 = A\,(t-2)(t+4) + B\,t(t+4) + C\,t(t-2)\,,$$

a odtud postupným dosazením $t = 0$, $t = 2$ a $t = -4$ velmi snadno spočteme

$$\frac{3t^2 - 5t + 2}{t^3 + 2t^2 - 8t} = -\frac{1}{4}\frac{1}{t} + \frac{1}{3}\frac{1}{t-2} - \frac{35}{72}\frac{1}{t+4}\,. \tag{6.10}$$

V některých případech můžeme uplatnit postup, který vede k hledanému výsledku rychleji a pohodlněji. K tomu nám poslouží toto *pozorování*:

Jestliže je třeba rozložit na parciální zlomky racionální funkci $R(t) = P(t)/Q(t)$, kde P, Q jsou *nesoudělné* polynomy, $1 \le \mathrm{st}(Q)$ a $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$, přičemž Q má jednoduchý kořen α_1, je rozklad tvaru

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{A_1}{t-\alpha_1} + \frac{P_1(t)}{Q_1(t)}\,. \tag{6.11}$$

Rovnost, platnou pro všechna $t \notin \{\alpha_1\} \cup \{\alpha\,;\, Q_1(\alpha) = 0\}$ upravíme na tvar

$$P(t)\frac{t-\alpha_1}{Q(t)-Q(\alpha_1)} = A_1 + \frac{P_1(t)(t-\alpha_k)}{Q_1(t)}$$

a limitním přechodem odtud dostaneme

$$\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} = A_1\,.$$

Odtud plyne, že má-li Q celkem n navzájem různých kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, má rozklad speciální tvar

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\,\frac{1}{t-\alpha_k}\,. \tag{6.12}$$

Neznáme-li kořeny polynomu ve jmenovateli, je situace složitější. Neselhávajícím prostředkem je zde možnost upravit polynomy na obou stranách rovnice do základního tvaru a porovnat koeficienty u stejných mocnin t. Řešením nalezené soustavy lineárních rovnic po snadné námaze opět určíme konstanty A, B, C.

Příklad 6.2.3. V dalším případě rozklad pro racionální funkci proběhne podobně, avšak s malou modifikací. Budeme postupovat zkráceně: Nyní je třeba určit konstanty $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tak, aby pro všechna $t \in \{0, 2, -4\}$ platila rovnost

$$\frac{3t^2-5t+2}{t(t-2)^2(t+4)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{(t-2)^2} + \frac{D}{t+4}\,.$$

Vynásobíme-li tuto rovnici polynomem $Q(t) = t(t-2)^2(t+4)$, dostaneme rovnost platnou pro všechna $t \in \mathbb{R}$

$$3t^2-5t+2 = A\,(t-2)^2(t+4) + B\,t(t-2)(t+4) + C\,t(t+4) + D\,t(t-2)^2 \tag{6.13}$$

a dosazením $t = 0$, $t = 2$ a $t = -4$ snadno spočteme $A = 1/8$, $C = 1/3$ a $D = -35/72$. Dosazením $t = 1$ dostaneme snadno $B = 13/24$.

Kromě metody srovnání koeficientů lze postupovat ještě dalšími způsoby. Můžeme např. rovnost typu (6.13) derivovat a vícenásobné kořeny opakovaně dosazovat, postupy tohoto typu však připomínat nebudeme.

Trochu odlišnou situaci přináší přítomnost nerozložitelného kvadratického trojčlenu ve jmenovateli, ale i pro tento případ není postup obtížný.

Příklad 6.2.4. Tak např. je třeba určit $A, B, C \in \mathbb{R}$ tak, aby rovnost

$$\frac{t-3}{(t-2)(t^2+2t+5)} = \frac{A}{t-3} + \frac{Bt+C}{t^2+2t+5}$$

byla splněna pro všechna $t \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, resp. rovnost

$$t-3 = A\,(t^2+2t+5) + (Bt+C)\,(t-2)$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Dosazením $t = 2$ snadno určíme $A = -1/13$. Další „význačné“ hodnoty proměnné t (reálné nulové body polynomu $Q(t) = (t-2)(t^2+2t+5)$) již nemáme k dispozici. Mohli bychom sice dosadit např. jeden z komplexně sdružených kořenů $\alpha_{1,2} = -1/2 \pm$ i trojčlenu $t^2 + 2t + 5$ a porovnat reálné a imaginární části polynomů na obou stranách rovnosti, dáme však přednost dosazení vhodných reálných hodnot t. Pro $t = 0$ dostaneme pomocí již vypočtené hodnoty A hodnotu $C = 17/13$ a podobně dosazením $t = 1$ dopočteme $C = -35/13$.

Příklad 6.2.5. Popíšeme ještě jeden o trochu složitější příklad. Rozklad racionální funkce $R(x) = t^4/(t^4+1)$ započneme dělením polynomu polynomem. Přičtením a odečtením 1 v čitateli dostaneme po úpravě

$$R(t) = \frac{t^4}{t^4+1} = 1 - \frac{1}{t^4+1}\,.$$

Vidíme, že jmenovatel *nemá* reálné kořeny; musíme proto nalézt rozklad jmenovatele na součin dvou kvadratických trojčlenů. Užijeme triku spočívajícího v jednoduché úpravě: platí

$$t^4 + 1 = (t^2+1)^2 - 2t^2 = (t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)\,.$$

Oba kvadratické trojčleny $Q_{1,2}(t) = t^2 \pm \sqrt{2}t + 1$ nemají reálné kořeny, proto hledáme rozklad ve tvaru

$$\frac{1}{t^4+1} = \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

a je třeba určit $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tak, aby pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platilo

$$1 = (At+B)(t^2 - \sqrt{2}t + 1) + (Ct+D)(t^2 + \sqrt{2}t + 1)\,. \tag{6.14}$$

Užijeme porovnání koeficientů a dostaneme nejprve

$$\begin{aligned} 1 &= B + D\,, & 0 &= A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D\,,\\ 0 &= B - \sqrt{2}A + D + \sqrt{2}C\,, & 0 &= A + C\,, \end{aligned}$$

z čehož po dosazení a úpravě bez obtíží spočteme

$$\frac{1}{t^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right).$$

Tím jsme na příkladech dostatečně připomněli postupy užívané k rozkladu racionální funkce na parciální zlomky. Pro získání potřebné početní praxe je však nutné samostatně propočítat takových příkladů větší počet.

6.3 Laplaceova transformace

Nejprve prozkoumáme alespoň postačující podmínky pro existenci integrálu, kterým je Laplaceova transformace definována, tj. co musíme předpokládat, aby v rovnosti

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,. \tag{6.15}$$

byl integrál na pravé straně rovnosti definován. Parametr s, tj. proměnná ve funkci F, bude z $\mathbb{R}$, případně též i z $\mathbb{C}$, na to však vždy upozorníme. Budeme se zabývat transformacemi funkcí, které budou definovány na intervalu $[\,0, \infty)$, případně $(0, \infty)$; ve druhém případě omezíme chování funkce f v okolí bodu 0 ještě další podmínkou. Pokud bude mít transformovaná funkce f pro každé $K > 0$ v intervalu $(0, K)$ pouze konečně mnoho bodů nespojitosti x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, přičemž bude platit $0 < x_1 < \cdots < x_n < +\infty$, a tyto nespojitosti přitom budou tzv. **nespojitostmi 1. druhu**, vystačíme téměř jen s jednoduchým integrálem ze spojité funkce. [Bod x je bodem nespojitosti 1. druhu, pokud existují konečné jednostranné a navzájem různé limity

$$\lim_{t \to x_+} f(t) \quad \text{a} \quad \lim_{t \to x_-} f(t)\,.]$$

Pro stručnost budeme říkat, že funkce f je **po částech spojitá**, i když to referuje pouze k části předpokládaných vlastností f.

V uvažovaném případě existují pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ integrály

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\ .$$

Ač to není zdaleka nutné, budeme dále předpokládat, že funkce f má konečnou limitu zprava v bodě 0, což zaručí existenci integrálu

$$\int_0^{x_1} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\ .$$

Všechny tyto integrály můžeme spočítat např. jako přírůstek primitivní funkce vzhledem k integračnímu oboru, pokud ovšem tuto primitivní funkci dokážeme určit (ta sice jistě existuje, avšak v mnoha případech ji nedokážeme pomocí nám známých funkcí vyjádřit). Zbývá ještě poslední interval $(x_n, +\infty)$. Předpokládat existenci konečné limity funkce f v bodě ∞ by však bylo pro naše potřeby příliš omezující a nemohli bychom pracovat obecně ani s polynomy, spokojíme se však s předpokladem, že funkce f „u ∞“ příliš rychle neroste, tj. že např. existují k funkci f takové M, $0 < M < \infty$, takové α, $0 < \alpha < \infty$, a takové t_0, $0 \le t_0 < \infty$, že pro všechna $t \ge t_0$ je

$$|f(t)| \le M\mathrm{e}^{\alpha t}\,;$$

o funkci f pak říkáme, že je (u ∞) **exponenciálního řádu** α. Potom na intervalu (x_n, ∞) pro všechna $s > \alpha$, resp. $\operatorname{Re} s > \alpha$ platí

$$\Big|\int_{x_n}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,\Big| \le M \int_{x_n}^{\infty} \mathrm{e}^{-(s-\alpha)t}\,\mathrm{d}t\ < \infty\,.$$

Integrál přes interval $(0, \infty)$ pak chápeme jako zobecněný Newtonův integrál (tj. přírůstek zobecněné primitivní funkce k funkci $f(t)\,\mathrm{e}^{-st}$), nebo jako (konečný) součet Riemannových integrálů

$$\int_0^{x_1} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\ , \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\ , \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

a nevlastního Riemannova integrálu

$$\int_{x_n}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\ = \lim_{K \to \infty} \int_{x_n}^{K} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\ .$$

I když z matematického hlediska je důležité znát pro funkci její definiční obor (který je nedílnou součástí její definice), pro naše potřeby to v této chvíli nebude podstatné; proto se touto otázkou nebudeme podrobněji zabývat. Jednou z nejpodstatnějších vlastností Laplaceovy transformace je její linearita. To znamená, že platí

Pravidlo A (linearita $\mathcal{L}$) : Pro každé dvě funkce f_1, f_2, definované na intervalu $(0, \infty)$ a konstanty $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ je

$$\int_0^\infty \big(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\big)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \;= c_1 \int_0^\infty f_1(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \;+ c_2 \int_0^\infty f_2(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\;, \tag{6.16}$$

jakmile jsou všechny integrály definovány, neboli

$$\mathcal{L}\big(c_1 f_1 + c_2 f_2\big) = c_1 \mathcal{L}\big(f_1\big) + c_2 \mathcal{L}\big(f_2\big)\,. \tag{6.17}$$

Užitečný je i vzorec, který popisuje, jak se chová Laplaceova transformace vzhledem k posunutí.

Pravidlo B (posun v obraze) : Je-li $a > 0$ a

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)\,,$$

potom je

$$F(s-a) = \mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{-at} f(t)\big)\,. \tag{6.18}$$

Zřejmě totiž je

$$F(s-a) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t \;= \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \;= \mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{-at} f(t)\big)\,.$$

Často budeme používat chování Laplaceovy transformace při derivování. Podrobněji:

Pravidlo C (derivování obrazu) : Je-li opět

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\;,$$

potom platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \;= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \;= \int_0^\infty -t f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\;,$$

neboli

$$\mathcal{L}(-t f(t)) = F'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) \tag{6.19}$$

Podobně pro vyšší derivace dostaneme

$$\mathcal{L}\big((-1)^n t^n f(t)\big) = F^{(n)}(s) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s) \tag{6.20}$$

Pravidlo D (integrování obrazu) : Je-li f po částech spojitá exponenciálního řádu α a

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\;,$$

a jestliže existuje $\lim_{t\to 0_+} f(t)/t$, potom platí

$$\int_s^\infty F(s) = \mathcal{L}\Big[\,\frac{f(t)}{t}\,\Big]\,. \tag{6.21}$$

Pravidlo odvodíme jen formálně, neboť k němu nemáme v tomto textu dostatečně probránu možnost záměny pořadí integrace. Je

$$\int_s^\infty F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{w\to\infty}\int_s^w \Big(\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x = \lim_{w\to\infty}\int_0^\infty \Big(\int_s^w f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{w\to\infty}\int_0^\infty \Big[\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-t}f(t)\Big]_{x=s}^w \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t - \lim_{w\to\infty}\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-wt}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}\Big[\frac{f(t)}{t}\Big].$$

Poznamenáváme, že v tomto případě je záměna pořadí integrace možná.

Někdy se setkáme se situací, že v transformované funkci, jejíž obraz hledáme, vystupují speciálním způsobem „jednodušší funkce", jejichž obrazy známe. Spočteme

$$F(s)G(s) = \Big(\int_0^\infty f(u)\,\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u\Big)\Big(\int_0^\infty g(v)\,\mathrm{e}^{-sv}\,\mathrm{d}v\Big),$$

přičemž budeme předpokládat, že výraz vpravo vznikl převodem dvojného integrálu na integrál dvojnásobný, který ještě upravíme:

$$\Big(\int_0^\infty f(u)\,\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u\Big)\Big(\int_0^\infty g(v)\,\mathrm{e}^{-sv}\,\mathrm{d}v\Big) = \int_0^\infty \big(\int_0^\infty f(u)g(v)\mathrm{e}^{-s(u+v)}\,\mathrm{d}u\big)\,\mathrm{d}v =$$
$$= \int_0^\infty g(v)\Big[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s(u+v)}f(u)\,\mathrm{d}u\Big]\,\mathrm{d}v\,.$$

Položíme-li nyní $v = t - u$, lze upravit integrál v závorce

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s(u+v)}f(u)\,\mathrm{d}u = \int_v^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t-v)\,\mathrm{d}t\,,$$

a tak dostaneme

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \big(\int_v^\infty g(v)f(t-v)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\big)\,\mathrm{d}v = \int_0^\infty \big(\int_0^t g(v)f(t-v)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}v\big)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\infty \big(\int_0^t g(v)f(t-v)\,\mathrm{d}v\big)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}\Big[\int_0^t g(v)f(t-v)\,\mathrm{d}v\Big].$$

To, co jsme postupně odvodili, shrneme do dalšího pravidla pro zacházení s Laplaceovou transformací:

Pravidlo E (zobrazení konvoluce) : Definujeme-li **konvoluci funkcí** f, g vztahem

$$(f * g)(t) = \int_0^t g(v)f(t-v)\,\mathrm{d}v\,,$$

a je-li $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, $\mathcal{L}\big(g(t)\big) = G(s)$, pak pro Laplaceův obraz $\mathcal{L}\big(f * g)(t)\big)$ platí vztah

$$\mathcal{L}\big(f * g)(t)\big) = \mathcal{L}\Big(\int_0^t g(v)f(t-v)\,\mathrm{d}v\Big) =$$
$$= \Big(\int_0^\infty f(u)\,\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u\Big)\Big(\int_0^\infty g(v)\,\mathrm{e}^{-sv}\,\mathrm{d}v\Big) = F(s)G(s)\,.$$

Pro úplnost uvedeme ještě jedno poměrně jednoduché pravidlo:

Pravidlo F (změna měřítka) : Pro každé $c > 0$ je

$$\mathcal{L}\big(f(ct)\big) = \frac{1}{c}F\Big(\frac{s}{c}\Big)\,. \tag{6.22}$$

Zřejmě je
$$\mathcal{L}\big(f(ct)\big) = \int_0^\infty f(ct)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(u)\mathrm{e}^{-su/c}\frac{\mathrm{d}u}{c} = \frac{1}{c}F\Big(\frac{s}{c}\Big),$$
což však je již dokazovaná rovnost (6.22).

Jaká pravidla platí pro posunutí? Dokázali jsne si již Pravidlo B se vzorcem (6.18) : Jestliže je $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$, $s > 0$ (resp. $\operatorname{Re} s > 0$), pak
$$F(s-a) = \mathrm{e}^{-sa}F(s) = \mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{at}f(t)\big)\,, \qquad a \in \mathbb{R},\ s > a\ \ (\text{resp. } \operatorname{Re} s > a)\,.$$
Všimneme si, že jde o „posunutí v obraze“. Nyní si uvedeme další pravidlo, které se týká „posunutí ve vzoru“ :

Pravidlo G (posun ve vzoru) : Jestliže je $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$, pak
$$\mathcal{L}\big(H_a(t)\,f(t-a)\big) = \mathrm{e}^{-as}F(s)\,, \qquad a \in [\,0,\infty)\,. \tag{6.23}$$

I toto pravidlo odvodíme jednoduše pomocí lineární substituce:
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(H_a(t)\,f(t-a)\big) &= \int_0^\infty \big(H_a(t)f(t-a)\big)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_a^\infty f(t-a)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(u)\,\mathrm{e}^{-s(u+a)}\,\mathrm{d}u = \\ &= \int_0^\infty f(u)\,\mathrm{e}^{-sa}\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-sa}\,F(s)\,. \end{aligned} \tag{6.24}$$
Např. vzhledem k tomu, že $\mathcal{L}(t) = 1/s^2$, dostaneme odtud již zmíněný vzorec
$$\mathcal{L}\big(t\,\mathrm{e}^{at}\big) = \frac{1}{(s-a)^2}\,.$$
Analogicky lze odvodit obecnější vzorec
$$\mathcal{L}\big(t^n\,\mathrm{e}^{at}\big) = \frac{n\,!}{(s-a)^{n+1}}\,; \tag{6.25}$$
doporučujeme čtenáři, aby se vzorec matematickou indukci pokusil dokázat.

Vzorec (6.25) není patrně sám tak zajímavý jako vzorec pro inverzní Laplaceovu transformaci, který z něj vyplývá:
$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\,\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\,\Big] = \frac{1}{n\,!}\,t^n\mathrm{e}^{at}\,. \tag{6.26}$$
Toto lze samozřejmě opět používat při řešení rovnic, což si ukážeme v dalším textu na příkladech.

Dále uvádíme tabulku, která umožňuje snadno nalézt tvar obrazu $\mathcal{L}(f)$ funkce f při Laplaceově transformaci. Ukažme si, jak lze některé položky v této tabulce obdržet.

Příklad 6.3.1. Tak např. pro funkci $f \equiv 1$ dostáváme přímou integrací
$$\int_0^\infty 1\cdot\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \Big[\,\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\,\Big]_{s=0}^{\infty} = \frac{1}{s}\,. \tag{6.27}$$
Při aplikaci na diferenciální rovnice je důležité znát Laplaceovy obrazy derivací hledaného řešení. Již dříve jsme odvodili pomocí metody per partes vzorec (6.2), tj.
$$\int_0^\infty y'(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \Big[\,y(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\Big]_{t=0}^{\infty} + s\int_0^\infty y(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\ ,$$

neboli
$$\mathcal{L}(y'(t)) = s\mathcal{L}(y(t)) - y(0+)\,. \tag{6.28}$$
Podobně odvodíme, opět pomocí metody per partes za předpokladu existence (vlastní) limity y'(0+), vzorec
$$\mathcal{L}(y''(t)) = s^2\mathcal{L}(y(t)) - sy(0+) - y'(0+)\,, \tag{6.29}$$
a pomocí matematické indukce lze analogicky získat vzorec
$$\mathcal{L}(y^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(y(t)) - s^{n-1}y(0+) - s^{n-2}y'(0+) - \cdots - y^{(n-1)}(0+)\,; \tag{6.30}$$
předpokládáme samozřejmě existenci limit $y'(0+), y''(0+), \ldots, y^{(n-1)}(0+)$.

Příklad 6.3.2. Nyní zjistíme, jak se transformuje Laplaceovou transformací mocnina. S ohledem na linearitu Laplaceovy transformace $\mathcal{L}$ budeme pak moci transformovat i všechny polynomy. Integrací per partes dostaneme např.
$$\mathcal{L}(t) = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \;= \Big[\frac{-t\mathrm{e}^{-st}}{s}\Big]_{s=0}^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \;= \frac{1}{s}\,\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s^2}\,, \tag{6.31}$$
nebo
$$\mathcal{L}(t^2) = \int_0^\infty t^2\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \;= \Big[\frac{-2t\mathrm{e}^{-st}}{s}\Big]_{s=0}^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \;= \frac{2}{s}\,\mathcal{L}(t) = \frac{2}{s^3}\,. \tag{6.32}$$
Podobně dospějeme opět matematickou indukcí ke vzorci
$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}\,. \tag{6.33}$$

Poznamenejme, že příslušné obrazy při Laplaceově transformaci jsou ve vzorcích (6.31), (6.32) a (6.33) definovány pro $s \in (0,\infty)$, i když to není podstatné. Dokonce, kdybychom pracovali i s komplexními hodnotami s, platily by vzorce pro všechna s, která mají kladnou reálnou část, tj. pro $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Poznámka 6.3.3. Ukažme si jiný způsob odvození vzorce (6.33). Tentokrát užijeme vzorec (6.19); postup je jednodušší a rychlejší, ale jeho základ vyžaduje hlubší znalost teorie. Je
$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\,\mathcal{L}(1) = (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\frac{1}{s} = (-1)^n(-1)^n\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}\,.$$

Příklad 6.3.4. Již v motivační části jsme transformovali v (6.4) exponenciální funkci. Zřejmě pro $s > a$ platí
$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t \;= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t \;= \Big[\frac{\mathrm{e}^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\Big]_{s=0}^\infty = \frac{1}{s-a}\,. \tag{6.34}$$

Příklad 6.3.5. Připomeňme, že hyperbolické funkce cosh a sinh jsou definovány vzorci
$$\cosh t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\,, \quad \sinh t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$
Uvážíme-li, že
$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at}) = \frac{1}{s-a}\,, \tag{6.35}$$
pak z rovnosti (6.35) dostaneme díky linearitě Laplaceovy transformace
$$\mathcal{L}(\cosh at) = \mathcal{L}\Big[\frac{\mathrm{e}^{at} + \mathrm{e}^{-at}}{2}\Big] = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\Big) = \frac{s}{s^2 - a^2}\,, \tag{6.36}$$
a podobně odvodíme
$$\mathcal{L}(\sinh at) = \mathcal{L}\Big[\frac{\mathrm{e}^{at} - \mathrm{e}^{-at}}{2}\Big] = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\Big) = \frac{a}{s^2 - a^2}\,. \tag{6.37}$$

Příklad 6.3.6. Pro odvození vzorců pro funkce $\sin at$ a $\cos at$ můžeme použít nekolik cest. Přímý výpočet z definice dvojnásobným užitím metody per partes je patrně ten nejjednodušší, ale rozhodně nejméně zajímavý. Užijeme-li drobný trik, můžeme určit oba obrazy najednou. Je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin at) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \sin at \,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} \sin at\right]_{t=0}^\infty - a \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} \cos at \,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{a}{s} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \cos at \,\mathrm{d}t = \frac{a}{s} \mathcal{L}(\cos at)\,.\end{aligned}$$

Podobně, ale trochu stručněji, dostaneme:

$$\mathcal{L}(\cos at) = \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} \cos at\right]_{t=0}^\infty - \frac{a}{s} \mathcal{L}(\sin at) = \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \mathcal{L}(\sin at)\,.$$

Získali jsme tak dvě rovnice pro neznámé $\mathcal{L}(\cos at)$ a $\mathcal{L}(\sin at)$, z nichž již oba obrazy snadno spočteme a tak dostaneme

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}\,, \tag{6.38}$$

a podobně

$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}\,. \tag{6.39}$$

Poznámky 6.3.7. Čtenář obeznámený s zakladními poznatky z teorie funkcí komplexní proměnné může zvolit kratší cestu. Eulerovy vzorce popisují vztah funkcí cos a sin ke komplexní exponenciále:

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}\,, \quad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Z nich pak lze v případě, že se naučíme zacházet s komplexní exponenciálou (což však opět vyžaduje rozvinutí teorie), lehce odvodit analogicky jako v Poznámce 6.3.5

$$\mathcal{L}(\cos at) = \mathcal{L}\Big[\frac{\mathrm{e}^{iat} + \mathrm{e}^{-iat}}{2}\Big] = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s - ia} + \frac{1}{s + ia}\Big) = \frac{s}{s^2 + a^2}\,,$$

a podobně

$$\mathcal{L}(\sin at) = \mathcal{L}\Big[\frac{\mathrm{e}^{iat} - \mathrm{e}^{-iat}}{2i}\Big] = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia}\Big) = \frac{a}{s^2 + a^2}\,.$$

Ještě kratší cestu lze formálně popsat takto: Je zřejmě

$$\cos at = \cosh ait\,, \quad \sin at = -\mathrm{i} \sinh ait\,.$$

Předcházející vzorce naznačují způsob práce s Laplaceovou transformací, avšak zdaleka nevystihují rozmanitost užitečných vztahů, které pro ni platí. Čtenář si patrně povšiml, že při popisu obecné třídy funkcí, které jsme Laplaceovou transformaci zobrazovali, jsme se vůbec nestarali o jejich hodnoty v bodech nespojitosti. Pro danou funkci f je můžeme v těchto bodech definovat jakkoli, aniž by to měnilo obraz $\mathcal{L}\big(f(t)\big)$. Zatím jsme ostatně zobrazovali pouze spojité funkce f. Aniž bychom to dokazovali, budeme využívat toho, že zobrazení Laplaceovou transformací je prosté, pomineme-li fakt, že např. zrekonstruovat f z $\mathcal{L}(f)$ v bodech nespojitosti nelze. Budeme-li pracovat s řešeními diferenciálních rovnic, jde vesměs o funkce spojité, a pro ně dokázal již před mnoha lety český matematik Matyáš Lerch, že pro dvě různé funkce f, g spojité na intervalu $(0, \infty)$ jsou i jejich obrazy (pokud existují) $\mathcal{L}(f)$ a $\mathcal{L}(g)$ rovněž různé. Ve třídě těchto funkcí je proto transformace $\mathcal{L}$ prostá.

Výpočet vzorů v Laplaceově transformaci a užití tabulek, popisujících Laplaceovu transformaci, však vyžaduje jistou početní rutinu, kterou je nutné si alespoň v jednoduchých případech nacvičit.

6.4 Jak postupujeme

Následující příklady jsou jen ukázkou, zájemce o důkladné procvičení odkazujeme na text [23], který obsahuje mnoho řešených i neřešených úloh. Ukážeme si, jak při hledání vzorů či obrazů postupujeme. Tak např. při stanovení obrazu funkce $f(t)$

$$\mathcal{L}\big(3 + 2t\,\mathrm{e}^{-3t} - 5t^2\mathrm{e}^{2t}\big)$$

stačí použít linearitu transformace a tabulku, podle níž je

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}\,, \qquad \mathcal{L}\big(t\mathrm{e}^{-3t}\big) = \frac{1}{(s+3)^2}\,, \qquad \mathcal{L}\big(t^2\mathrm{e}^{2t}\big) = \frac{2}{(s-3)^3}\,,$$

a je tedy

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \frac{3}{s} + \frac{2}{(s+3)^2} - \frac{5\cdot 2}{(s-3)^3}.$$

Příklad 6.4.1. Snadno obdržíme podle tabulky s využitím linearity a

$$\mathcal{L}\big(t^5 - 2t + 3\mathrm{e}^{-t} - 4\cos 2t\big) = \frac{5!}{s^6} - \frac{2}{s} + \frac{3}{s+1} - \frac{4s}{s^2+4}\,.$$

Příklad 6.4.2. Pomocí Pravidel B, C a linearity dostaneme

$$\mathcal{L}\big(3t\mathrm{e}^{-2t}\cos 5t\big) = -3\Big[\frac{(s+2)}{(s+2)^2+25}\Big]' = \frac{25-(s+2)^2}{\big[25+(s+2)^2\big]^2}\,.$$

I když neuvádíme žádný obecný předpis pro nalezení vzoru $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)$, k řadě funkcí je možné nalézt vzor pomocí vlastností Laplaceovy transformace a tabulky obrazů/vzorů. V části 6.2 jsme připomněli rozklad racionální funkce na parciální zlomky; tím velmi často proces hledání vzoru $\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)$ začíná.

Poznámka 6.4.3 (důležitá). Jestliže navážeme na výklad o speciálním rozkladu a na vzorec (6.12), pak za předpokladů před tímto vzorcem uvedených a při zachování označení dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{P(t)}{Q(t)}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\,\mathrm{e}^{\alpha_k t}\,. \tag{6.40}$$

Příklad 6.4.4. Ilustrujme efektivitu postupu z předcházející poznámky na příkladu, převzatém z [9]: Máme určit

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{t^2+1}{t^3+3t^2+2t}\Big]\,.$$

Je $t^3+3t^2+2t = t(t^2+3t+2) = t(t+1)(t+2)$. Polynomy $P(t) = t^2+1$ a $Q(t) = t^3+3t^2+2t$ jsou zřejmě nesoudělné a $Q'(t) = 3t^2+6t+2$. Označíme-li $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -2$, snadno spočteme $P(\alpha_1) = 1$, $P(\alpha_2) = 2$, $P(\alpha_3) = 5$ a podobně $Q'(\alpha_1) = 2$, $Q'(\alpha_2) = -1$ a $Q'(\alpha_3) = 2$. Je tedy podle (6.12)

$$\frac{t^2+1}{t^3+3t^2+2t} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{t} + \frac{2}{-1}\,\frac{1}{t+1} + \frac{5}{2}\,\frac{1}{t+2} \tag{6.41}$$

z čehož snadno vyplývá

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{t^2+1}{t^3+3t^2+2t}\Big] = \frac{1}{2} - 2\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{5}{2}\,\mathrm{e}^{-2t} \tag{6.42}$$

Uvážíme-li, že rovnost (6.41) má prakticky pouze vysvětlující charakter a že bychom mohli prakticky napsat rovnou (6.42), je zřejmé, že v tomto speciálním případě můžeme výpočet provést tímto jednodušším postupem.

Příklad 6.4.5. Máme určit

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{4s^3 - 10s^2 - 40s - 82}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s - 15}\Big].$$

Stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, lze proto přikročit k nalezení parciálních zlomků. Pokusíme se uhádnout kořeny polynomu ve jmenovateli. Označme tento polynom Q. Jsou-li nulové body Q celá čísla, je na místě ověřit, zda to nejsou dělitelé absolutního členu Q, tj. čísla ± 3, ± 5 čí případně ± 1. Dosazením snadno zjistíme, že $Q(1) = 0$ a dělením najdeme

$$(s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s - 15) = (s-1)\cdot(s^3 + 5s^2 + 11s + 15).$$

Protože též $Q(-3) = 0$, snadno dostaneme

$$(s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s - 15) = (s-1)\cdot(s+3)\cdot\big((s+1)^2 + 4\big).$$

Z rovnosti platné pro všechna $s \in (\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\})$

$$\frac{4s^3 - 10s^2 - 40s - 82}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s - 15} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} + \frac{Cs + D}{(s+1)^2 + 4}$$

snadno určíme částečně dosazením $s = 1$, $s = -3$ a porovnáním vhodných koeficientů $A = -4$, $B = 5$, $C = 3$ a $D = -1$. Je tedy

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{4s^3 - 10s^2 - 40s - 82}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s - 15}\Big] = -4\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s-1}\Big] + 5\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s+3}\Big] + \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{3s-1}{(s+1)^2+4}\Big].$$

Poslední výraz ještě upravíme:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{3s-1}{(s+1)^2+4}\Big] = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{3(s+1)}{(s+1)^2+4} - \frac{4}{(s+1)^2+4}\Big]$$

a pak pomocí tabulky (slovníku) pro Laplaceovu transformaci snadno zjistíme, že hledaný vzor je tvaru

$$-4e^t + 5e^{-3t} + 3e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\sin 2t.$$

Slovník Laplaceovy transformace, důležité vztahy a pravidla

(zde je třeba doplnit tabulku, ev. ji vložit na konec textu)

6.5 Některé jednoduché aplikace

Nejprve si ukážeme, jak pomocí Laplaceovy transformace lze řešit Cauchyho (počáteční) úlohu pro lineární rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty.

Příklad 6.5.1. Ukažme si, jak lze užít Laplaceovu transformaci k řešení Cauchyho úlohy pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty a nenulovou pravou stranou.

Máme-li řešit takovou rovnici v obecném tvaru, dostaneme pro rovnici

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t), \quad y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1$$

po dosazení

$$(s^2Y(s) - sy_0 - y_1) + a_1(sY(s) - y_0) + a_2Y(s) = F(s)\,,$$

neboli

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + a_1 s + a_2} + \frac{sy_0 + a_1 y_0 + y_1}{s^2 + a_1 s + a_2}\,. \tag{6.43}$$

Bylo by zbytečné dosazovat do takového vzorce, výpočet se v konkrétním případě často již v průběhu úprav značně zjednoduší. Je však z něj patrno, že se při aplikaci této metody neobejdeme bez rozkladu na parciální zlomky. Tak např. při řešení počáteční úlohy pro rovnici

$$y''' + y'' = \mathrm{e}^t + t + 1\,, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0\,,$$

dostaneme postupně

$$\mathcal{L}(y''') + \mathcal{L}(y'') = \mathcal{L}(\mathrm{e}^t) + \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(1)\,,$$

neboli

$$\big(s^3Y(s) - s^2\cdot 0 - s\cdot 0 - 0\big) + \big(s^2Y(s) - s\cdot 0 - 0\big) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 1}{s^4(s+1)(s-1)}\,.$$

Rozklad na parciální zlomky má tvar

$$\frac{2s^2-1}{s^4(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s^2} + \frac{E}{s^3} + \frac{F}{s^4}$$

a dá po snadné námaze vyjádření $\mathcal{L}(y)$

$$\mathcal{L}(y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\,.$$

Vyhledáme-li vzory pomocí tabulky pro Laplaceovu transformaci, dostaneme

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s+1}\Big) + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s-1}\Big) - \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s^2}\Big) + \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s^4}\Big) = \\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t} - t + \frac{1}{6}\,t^3\,. \end{aligned}$$

I okrajová úloha pro lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty s nenulovou pravou stranou se dá řešit výhodně užitím Laplaceovy transformace. I když jde v podstatě o využití mechanismu pro Cauchyho úlohu, je užitečné se s takovou typickou úlohou seznámit.

Příklad 6.5.2. Řešte okrajový problém pro rovnici pro netlumené oscilace

$$y'' + a^2 y = \cos at\,, \qquad y(0) = y(\pi/2\,a) = 1\,. \tag{6.44}$$

Laplaceova transformace nás dovede k rovnici

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + a^2Y(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}\,,$$

což dává po úpravě

$$Y(s)(s^2 + a^2) = \frac{s}{s^2+a^2} + s\,y(0) + y'(0)\,,$$

a konečně

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)^2} + \frac{s\,y(0)}{s^2+a^2} + \frac{y'(0)}{s^2+a^2}\,.$$

Užitím inverzní Laplaceovy transformace (příslušné vzory je třeba nalézt v tabulce pro Laplaceovu transformaci) dostaneme

$$y(t) = \frac{1}{2a}\,t\sin at + \cos at + \frac{y'(0)}{a}\sin at\,.$$

Nyní dosazením získáme rovnici pro $y'(0)$, resp. přímo pro $\dfrac{y'(0)}{a}$:

$$1 = y\Big(\frac{\pi}{2a}\Big) = \frac{\pi}{4a^2} + \frac{y'(0)}{a}\,, \quad \text{resp.} \quad \frac{y'(0)}{a} = 1 - \frac{\pi}{4a^2}\,,$$

a pak snadno dopočteme

$$y(t) = \frac{1}{2a}\,t\sin at + \cos at + \Big(1 - \frac{\pi}{4a^2}\Big)\sin at\,. \tag{6.45}$$

6.6 Aplikace na systémy rovnic

Laplaceova transformace se může ukázat jako velmi užitečná i při řešení Cauchyho úlohy pro systém lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)\,, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{u}\,.$$

Pro jednoduchost si ukažme nejprve příklad s maticí $\mathbf{A}$ typu (2×2).

Příklad 6.6.1. Určete první složku y^1 řešení $\mathbf{y}$ systému diferenciálních rovnic (v „rozepsaném" tvaru)

$$\begin{array}{rclcl} (y^1)' & = & & y^2 & + \; 1 \\ (y^2)' & = & y^1 & & - \; \mathrm{e}^t \end{array}$$

vyhovujícího počáteční podmínce $\mathbf{y}(0) = (1,-1)$, neboli systému (při užití maticového zápisu)

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

Zdůrazněme, že máme určit *složku* y^1 řešení $\mathbf{y}$. Budeme pracovat s oběma rovnicemi a použijeme Laplaceovu transformaci. Tak dostaneme

$$\begin{aligned} sY^1(s) - 1 &= Y^2(s) + \frac{1}{s}\,, \\ sY^2(s) + 1 &= Y^1(s) - \frac{1}{s-1}\,, \end{aligned}$$

což dá po jednoduché úpravě

$$\begin{aligned} sY^1(s) - Y^2(s) &= 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s}\,, \\ -Y^1(s) + sY^2(s) &= -1 - \frac{1}{s-1} = -\frac{s}{s-1}\,. \end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme číslem s a sečteme s druhou, čímž obdržíme

$$s^2Y^1(s) - Y^1(s) = (1+s) - \frac{s}{s-1} = \frac{s^2-s-1}{s-1}\,,$$

neboli

$$Y^1(s) = \frac{s^2 - s - 1}{(s-1)^2(s+1)}\,.$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{s^2 - s - 1}{(s-1)^2(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1}\,,$$

což po výpočtu koeficientů A, B, C dává

$$Y^1(s) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{s+1}\,.$$

Pomocí tabulky, kterou nyní užijeme na inverzní Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}^{-1}$, dostaneme

$$y^1(t) = \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\,t\,\mathrm{e}^t + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{4}\big((3-2t)\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\big)\,.$$

Ukážeme si na příkladu Cauchyho úlohy pro soustavu lineárních diferenciálních rovnic s maticí $\boldsymbol{A}$ typu 3×3, že užití Laplaceovy transformace nám někdy může ušetřit trochu práce. Vyřešíme příklad pomocí obou metod, které znáte.

Příklad 6.6.2. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nejprve budme soustavu řešit bez užití Laplaceovy transformace. Začneme určením charakteristické rovnice soustavy:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0\,.$$

Odtud vidíme, že matice má jednoduché vlastní číslo 2 a dvojnásobné vlastní číslo 1. Rovnici $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, která odpovídá kořeni 2, upravíme na tvar

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

Rovnici v maticovém vyjádření snadno převedeme na ekvivalentní systém dvou *nezávislých* rovnic

$$\begin{aligned} -\,2\,v^1 + \ v^2 - \ v^3 &= 0\,, \\ -\,v^1 + \ v^2 - \ v^3 &= 0\,, \end{aligned}$$

ze kterých určíme jeden (nezávislý) vlastní vektor $\mathbf{v}_1 := (v^1,\, v^2,\, v^3)$ příslušný k vlastnímu číslu $\lambda = 2$: je to např. vektor $\mathbf{v}_1 = (0,\, 1\,, 1)$. Pro dvojnásobné vlastní číslo $\lambda = 1$ dostaneme rovnici $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, neboli

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,,$$

ze které získáme ekvivalentní systém dvou *nezávislých* rovnic

$$\begin{aligned} -v^1 + v^2 - v^3 &= 0\,, \\ -v^1 + v^2 &= 0\,, \end{aligned}$$

s jedním dalším lineárně nezávislým řešením $\mathbf{v}_2 = (1,\,1\,,0)$. Musíme tedy sáhnout k hledání zobecněného vlastního řešení: budeme řešit rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

S touto maticovou rovnicí ekvivalentní soustava rovnic se redukuje na jedinou lineární rovnici

$$v^1 - v^2 = 0$$

s dalším lineárně nezávislým řešením $\mathbf{v}_3 := (0\,,0\,,1)$. Přejdeme od nezávislých (zobecněných) vlastních vektorů k lineárně nezávislým řešením rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Dostáváme

$$\mathbf{y}_1(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a po jednoduchém výpočtu i

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_3(t) &= \mathrm{e}^t \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1-t & t & -t \\ -2t & 1+2t & -t \\ -t & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Protože ve faktoru e^{5t} ve vyjádření vektorové funkce $\mathbf{b}(t)$ číslo 5 v exponentu *není* kořenem charakteristické rovnice, můžeme předpokládat, že partikulární řešení úlohy pro (nenulovou) $\mathbf{b}(t)$ je tvaru $\mathbf{y}(t) = \mathrm{e}^{5t}\,\mathbf{v}(t)$; složky vektoru $\mathbf{v}(t)$ jsou přitom polynomy stupně 0 v proměnné t (protože je 5 „0-*násobným*“ kořenem charakteristické rovnice). Dosazením do rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ dostaneme

$$5\,\mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\,\mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

neboli

$$(5\mathbf{E} - \mathbf{A}) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tato rovnice je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} 5\,v^1 - v^2 + v^3 &= -1 \\ 2\,v^1 + 2\,v^2 + v^3 &= 2 \\ v^1 - v^2 + 4\,v^3 &= -1 \end{aligned}$$

ze níž určíme $\mathbf{v} = (0,\,1,\,0)$. Obecné řešení rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ je v tomto případě tvaru

$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1\,\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\,\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6.46}$$

Dosazením $t=0$ dostaneme rovnici pro určení řešení, vyhovujícího počáteční podmínce:

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},$$

ze které vypočteme $c_1=0$, $c_2=0$, $c_3=2$. Tak dostáváme řešení úlohy

$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\,\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix}-t\\-t\\1\end{pmatrix},$$

které ještě upravíme na tvar

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix}-2\,t\mathrm{e}^{t}\\ \mathrm{e}^{5t} - 2\,t\mathrm{e}^{t}\\ 2\,\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}. \tag{6.47}$$

Příklad 6.6.3. K Příkladu 6.6.2 se vrátíme: spočteme ho pro srovnání ještě jednou pomocí Laplaceovy transformace. V obecné rovině tedy řešíme Cauchyho úlohu

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{u}.$$

Po provedení Laplaceovy transformace všech složek vektorových funkcí dospějeme k vyjádření, které schematicky popíšeme rovnicí (uvědomte si všechny vlastnosti Laplaceovy transformace, kterých využíváme)

$$s\mathbf{Y}(s) - \mathbf{y}(0) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(s) + \mathbf{B}(s). \tag{6.48}$$

Odtud úpravou dostaneme rovnicí

$$\big(s\mathbf{E} - \mathbf{A}\big)\mathbf{Y}(s) = \mathbf{y}(0) + \mathbf{B}(s). \tag{6.49}$$

Jak to vypadá při řešení našeho Příkladu 6.6.2? Po dosazení do (6.49) (resp. po dosazení do (6.48) a úpravě) dostaneme

$$\begin{pmatrix}s & -1 & 1\\ 2 & s-3 & 1\\ 1 & -1 & s-1\end{pmatrix} \mathbf{Y}(s) = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{s-5}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Upravíme rovnost přímo v maticovém tvaru a dostaneme

$$\begin{pmatrix}s & -1 & 1\\ 2 & s-3 & 1\\ 1 & -1 & s-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathbf{Y}^1(s)\\ \mathbf{Y}^2(s)\\ \mathbf{Y}^3(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(s-5)^{-1}\\ 1+2(s-5)^{-1}\\ 2-(s-5)^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(s-5)^{-1}\\ (s-3)(s-5)^{-1}\\ (2s-11)(s-5)^{-1}\end{pmatrix}.$$

Nyní matici soustavy postupně diagonalizujeme. Po další úpravě (v matici na levé straně rovnice opíšeme první řádek, od s-násobku druhého řádku odečteme dvojnásobek prvého a výsledek napíšeme do druhého řádku a konečně od s-násobku třetího řádku odečteme prvý řádek a výsledek napíšeme do třetího řádku – pozor, analogické úpravy musíme dělat i s jednosloupcovou maticí na pravé straně rovnice) dostaneme

$$\begin{pmatrix}s & -1 & 1\\ 0 & (s-1)(s-2) & (s-2)\\ 0 & -(s-1) & s(s-1)-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathbf{Y}^1(s)\\ \mathbf{Y}^2(s)\\ \mathbf{Y}^3(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(s-5)^{-1}\\ (s-1)(s-2)(s-5)^{-1}\\ (2s^2-11s-1)(s-5)^{-1}\end{pmatrix}.$$

Druhý řádek pro zjednodušení dělme faktorem $(s-2)$ a pokračujme s diagonalizací. Po úpravě dostaneme

$$\begin{pmatrix} s & -1 & 1 \\ 0 & (s-1) & 1 \\ 0 & -(s-1) & s(s-1)-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}^1(s) \\ \mathbf{Y}^2(s) \\ \mathbf{Y}^3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(s-5)^{-1} \\ (s-1)(s-5)^{-1} \\ (2s^2-11s-1)(s-5)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dále sečtěme třetí řádek matice s druhým řádkem. Dostaneme tak rovnost v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} s & -1 & 1 \\ 0 & (s-1) & 1 \\ 0 & 0 & s^2-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}^1(s) \\ \mathbf{Y}^2(s) \\ \mathbf{Y}^3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(s-5)^{-1} \\ (s-1)(s-5)^{-1} \\ (2s^2-10s)(s-5)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno výpočtem nebo náhledem do tabulky pro Laplaceovu transformaci dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\Big[-\frac{2}{(s-1)^2}\Big] = -2t\,\mathrm{e}^t, \\ \mathbf{y}^2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s-5}-\frac{2}{(s-1)^2}\Big] = \mathrm{e}^{5t}-2t\mathrm{e}^t, \\ \mathbf{y}^3(t) &= \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{2(s-2)}{(s-1)(s-2)}\Big] = 2\,\mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že nalezené řešení je shodné s tím, které jsme obdrželi v Příkladu 6.6.2:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} -2\,t\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{5t}-2\,t\mathrm{e}^t \\ 2\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Kromě vyjímečných případů je však výpočet řešení *soustavy lineárních diferenciálních rovnic* pomocí Laplaceovy transformace většinou pracnější a proto vcelku nevýhodný. Ukažme si to na modifikovaném Příkladu 6.6.2 :

Příklad 6.6.4. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Tato rovnice se v zadání liší od rovnice v Příkladu 6.6.2 pouze jinou funkcí $\mathbf{b}(t)$ a jinou počáteční podmínkou $\mathbf{u}$. Obecné řešení rovnice

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

se tedy nezmění a zbývá určit partikulární řešení odpovídající nové funkci $\mathbf{b}(t)$ a pak nalézt řešení odpovídající změněné počáteční podmínce. Spočítáme-li partikulární řešení, zjistíme, že je rovno

$$\mathbf{y}_P(t) = \mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

takže obecné řešení rovnice $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ je tvaru

$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + C_1\,\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + C_3\,\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}-t\\-t\\1\end{pmatrix} \tag{6.50}$$

a řešení, splňující počáteční podmínku, je tvaru

$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + 2\,\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\,\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}-t\\-t\\1\end{pmatrix}.$$

Budeme-li nyní řešit pomocí Laplaceovy transformace, po dosazení do (6.49) obdržíme

$$\begin{pmatrix}s & -1 & 1\\ 2 & s-3 & 1\\ 1 & -1 & s-1\end{pmatrix}\mathbf{Y}(s) = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{s-5}\begin{pmatrix}8\\3\\9\end{pmatrix}.$$

a vidíme, že se nám zacházení s pravou stranou rovnice poněkud zkomplikuje a že přibude několikanásobné použití rozkladu na parciální zlomky, abychom dospěli ke tvaru řešení

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix}-2\mathrm{e}^{5t} - \mathrm{e}^{t} - 3t\,\mathrm{e}^{t}\\ \mathrm{e}^{5t} + 3\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t} - 3t\,\mathrm{e}^{t}\\ 3\mathrm{e}^{5t} + 2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}.$$

Poznámka 6.6.5 (důležitá). Laplacova transformace nám mj. umožňuje zjednodušení některých problémů tím, že je převádí na úlohy algebraického charakteru, které jsou v řadě případů jednodušší. Zde je na místě *varování*, které zároveň umocňuje důležitost existenčních tvrzení: Pokud má úloha řešení, nemůžeme se touto metodou dopočítat k něčemu jinému; pokud však nikoli, můžeme dospět k „řešení“, které ve skutečnosti řešením *není*! Ukažme si to na příkladu soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}\dot{x} + y &= 0\,,\\ \ddot{x} + \dot{y} + y &= \mathrm{e}^{t}\,.\end{aligned}$$

Hledáme řešení, pro které je $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = y(0) = 0$. Po provedení transformace obdržíme

$$\begin{aligned}(sX(s) - 1) + Y(s) &= 0\,,\\ (s^2X(s) - s) + sY(s) + Y(s) &= \frac{1}{s-1}\,,\end{aligned}$$

neboli po úpravě

$$\begin{aligned}sX(s) + Y(s) &= 1\,,\\ Y(s) &= \frac{1}{s-1}\,.\end{aligned}$$

Odtud spočteme

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{s-2}{s(s-1)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s-1}\,,\\ Y(s) &= \frac{1}{s-1}\,.\end{aligned}$$

Aplikujeme $\mathcal{L}^{-1}$ a dostaneme

$$x(t) = 2 - \mathrm{e}^t\,, \qquad y(t) = \mathrm{e}^t\,.$$

Dá se lehce ukázat, že obecné řešení soustavy má tvar $x(t) = C - \mathrm{e}^t$, $y(t) = \mathrm{e}^t$, pro každé $C \in \mathbb{R}$, ale žádné řešení nevyhovuje předepsaným počátečním podmínkám. Z první rovnice soustavy totiž plyne $\ddot{x} + \dot{y} = 0$, což po dosazení do druhé rovnice dává $y(t) = \mathrm{e}^t$ a tudíž $x(t) = C - \mathrm{e}^t$. Musíme tedy být opatrní a Laplaceovu transformaci, ač má velmi široké uplatnění, nemůžeme chápat jako univerzální všelék!

6.7 Další vlastnosti $\mathcal{L}$-transformace

Příklad 6.7.1. Zatím jsme zobrazovali Laplaceovou transformací vesměs funkce spojité na intervalu $(0, \infty)$. Je zřejmé, že pokud je taková funkce f rovna na části tohoto intervalu 0, pak můžeme integrovat pouze přes tu část, kde je je různá od 0: Přesněji, je-li např.

$$f(t) := \begin{cases} \sin t\,, & t \in [\,0, \pi\,]\,, \\ 0\,, & t \in [\,\pi, \infty)\,, \end{cases} \tag{6.51}$$

pak je též

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \, = \int_0^\pi (\sin t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,.$$

Odtud dostaneme snadným výpočtem pomocí dvojnásobného užití metody per partes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\,\sin t\right]_{t=0}^{\pi} + \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cos t\,\mathrm{d}t \, = \\ &= \frac{1}{s}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\,\cos t\right]_{t=0}^{\pi} - \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\sin t\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

Označíme-li opět standardně $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, dostáváme odtud rovnici

$$F(s)\Big(1 + \frac{1}{s^2}\Big) = \frac{\mathrm{e}^{-\pi s} + 1}{s^2}\,,$$

ze které plyne

$$F(s) = \frac{1 + \mathrm{e}^{-\pi s}}{1 + s^2}\,. \tag{6.52}$$

Předpis, popisující spojitou funkci f z předcházejícího příkladu, se měnil v bodě π. V následujícím příkladu je zobrazovaná funkce dokonce „slepena“ dvakrát, nicméně je stále spojitá. Postupujeme analogicky.

Příklad 6.7.2. Definujeme-li funkci f předpisem (jeden „pilový kmit“ - načrtněte si obrázek!)

$$f(t) := \begin{cases} t\,, & t \in [\,0, 1\,]\,, \\ 2 - t\,, & t \in [\,1, 2\,]\,, \\ 0\,, & t \in [\,2, \infty)\,, \end{cases} \tag{6.53}$$

spočteme obraz $\mathcal{L}\big(f(t)\big)$ opět pomocí metody per partes. Zřejmě je

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \, + \int_1^2 (2-t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,.$$

Nejprve určíme první z integrálů

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t &= \Big[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\,t\Big]_{t=0}^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \\ &= \Big[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\,t\Big]_{t=0}^1 + \frac{1}{s}\Big[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\Big]_{t=0}^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-s}-s\,\mathrm{e}^{-s}}{s^2}\end{aligned} \tag{6.54}$$

Podobně, s využitím předcházejícího výpočtu

$$\begin{aligned}\int_1^2 (2-t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t &= 2\int_1^2 \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 t\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\Big[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\Big]_{t=1}^2 - \Big(\Big[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\,t\Big]_{t=1}^2 + \frac{1}{s}\Big[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\Big]_{t=1}^2\Big) = \\ &= 2\,\frac{\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}}{s} + \frac{2\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-s}}{s} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-s}}{s^2} = \\ &= \frac{s\,\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}\end{aligned}$$

Sečtením obou nalezených výsledků dostaneme

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1-2\,\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2} = \frac{(1-\mathrm{e}^{-2s})^2}{s^2}\,. \tag{6.55}$$

V obecném výkladu o Laplaceově transformaci jsme zatím připouštěli u zobrazované funkce i konečně mnoho nespojitostí 1. druhu, avšak žádnou takovou funkci jsme dosud netransformovali. Ukážeme si, že to není obtížné – vlastně jsme to již skrytě počítali :

Příklad 6.7.3. Tak např. pro funkci f (načrtněte si opět obrázek !)

$$f(t) := \begin{cases} t\,, & t\in[\,0,1\,]\,, \\ 0\,, & t\in[\,1,\infty)\,, \end{cases}$$

nespojitou v bodě 1 spočteme obraz $\mathcal{L}(f(t))$ shodně jako v (6.54) a dostaneme tak

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \frac{s\,\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}\,. \tag{6.56}$$

Již víme, že $\mathcal{L}(1) = 1/s$; zkusme spočítat $\mathcal{L}(H_a(t))$ pro případ funkce $H_a(t)$, kterou definujeme pro $a > 0$ předpisem

$$H_a(t) := \begin{cases} 0\,, & t\in[\,0,a\,]\,, \\ 1\,, & t\in(a,\infty)\,. \end{cases} \tag{6.57}$$

Tato funkce bývá často nazývána **Heavisidova (schodovitá) funkce**. Potom jednoduchým výpočtem dostaneme

$$\mathcal{L}\big(H_a(t)\big) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,H_a(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\Big]_{t=a}^\infty = \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-as}\,. \tag{6.58}$$

K výsledku lze dospět patrně rychleji pomocí Pravidla B : Protože je podle (6.61)

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \quad \text{je také} \quad \mathcal{L}\big(H_a(t)\big) = \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-as}\,;$$

funkce $H_a(t)$ je „$1(t-a)$“, tj. *posunutá* charakteristická funkce $\chi_{(0,+\infty)}$ intervalu $(0,+\infty)$.

Příklad 6.7.4. Technické praxi se přiblížíme vyšetřením „obdélníkového kmitu“. Definujme pro $0 < a < b < \infty$ funkci f předpisem

$$f(t) := \begin{cases} 0\,, & t \in [\,0, a\,]\,, \\ 1\,, & t \in (a, b)\,, \\ 0\,, & t \in [\,b, \infty)\,. \end{cases} \tag{6.59}$$

Přímým výpočtem snadno dostaneme, podobně jako v předcházejících případech

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\Big]_{t=a}^{b} = \frac{\mathrm{e}^{-as} - \mathrm{e}^{-bs}}{s}\,. \tag{6.60}$$

Poznámka 6.7.5. Opět si lze představit alternativní postup: je-li f tvaru

$$f(t) := \begin{cases} 0\,, & t \in [\,0, d\,]\,, \\ 1\,, & t \in (1, \infty)\,, \end{cases}$$

pak stejně jako v (6.61) odvodíme

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\Big]_{s=0}^{d} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-ds}}{s} = F(s)\,. \tag{6.61}$$

Je-li nyní $d = b - a$ a uplatníme-li „posun o a“, dostaneme pro f určenou (6.59) pomocí (6.18)

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\Big]_{s=0}^{b-a} \mathrm{e}^{-as} = \frac{\mathrm{e}^{-as} - \mathrm{e}^{-bs}}{s} = F(s)\,.$$

I když nám uplatnění posunu v tomto případě nepřineslo něco nového a ani výpočet nebyl jednodušší, připomněli jsme si význam posunu, který jsme zařadili mezi základní vlastnosti Laplaceovy transformace.

Všimněme si ještě krátce techniky hledání vzorů, tj. $\mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big)$. Nemusí vždy jít jen o prostý náhled do tabulky.

Příklad 6.7.6. Přímo podle vzorce (6.26) dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{-1}{(s-3)^2}\Big] = -t\,\mathrm{e}^{3t}\,, \tag{6.62}$$

resp. v případě, že bychom ho neměli k dispozici, dostaneme postupně

$$-\frac{1}{(s-3)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{s-3}\,, \quad \text{a} \quad \frac{1}{s-3} = \mathcal{L}(\mathrm{e}^{3t})\,,$$

z čehož již opět plyne (6.62).

Příklad 6.7.7. Podobně získáme, např. opět podle vzorce (6.26)

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}\Big] = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s+2)^3}\Big] = \frac{1}{2}\,t^2\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

Příklad 6.7.8. Zdánlivě složitějším příkladem téhož typu je určení

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{s+1}{s^2+s-6}\Big].$$

Nejprve upravíme pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$Y(s) := \frac{s+1}{s^2+s-6} = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+3)} \quad \text{a určíme} \quad A = \frac{3}{5}\,,\ B = \frac{2}{5}\,.$$

Odtud plyne

$$\mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = \frac{3}{5}\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s-2)}\Big] + \frac{2}{5}\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s+3)}\Big] = \frac{1}{5}\big(3\,\mathrm{e}^{2t} + 2\,\mathrm{e}^{-3t}\big)\,.$$

Příklad 6.7.9. K určení $\mathcal{L}^{-1}\big(1/(s^2-6s+10)\big)$ upravíme argument a dostaneme

$$\frac{1}{s^2-6s+10} = \frac{1}{(s-3)^2+1} = \mathcal{L}(\mathrm{e}^{3t}\sin t)\,,$$

takže $\mathcal{L}^{-1}\big(1/(s^2-6s+10)\big) = \mathrm{e}^{3t}\sin t$. Spolu s tabulkou jsme využili Pravidlo B. Analogicky postupujeme při určování $\mathcal{L}^{-1}\big(s/(s^2+4s+1)\big)$ a upravujeme

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{s}{s^2+4s+1}\Big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{s}{(s+2)^2-3}\Big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{s+2}{(s+2)^2-3}\Big) - \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{2}{(s+2)^2-3}\Big) =$$
$$= \mathrm{e}^{-2t}\cosh\sqrt{3}t - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-2t}\sinh\sqrt{3}t\,.$$

V tomto případě jsme užili po úpravě dva vzorečky, opět spolu s Pravidlem B.

Příklad 6.7.10. Řešte Cauchyho úlohu

$$y'' + 2y' + y = t\mathrm{e}^{-t}\,, \qquad y(0) = 1\,,\ y'(0) = -2\,.$$

Po dosazení pomocí tabulky s prihlédnutím k počátečním hodnotám dostaneme

$$\big(s^2Y(s) - s + 2\big) + 2\big(sY(s) - 1\big) + Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}\,,$$
$$Y(s)\,(s^2+2s+1) = \frac{1}{(s+1)^2} + s\,, \quad \text{a tedy} \quad Y(s) = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{s}{(s+1)^2}\,.$$

Po další úpravě v posledním zlomku dostaneme

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(s+1)^4} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)}\Big] = \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-t}\big(t^3 - 6\,t + 6\big)$$

Příklad 6.7.11. Řešte Cauchyho úlohu

$$y'' + y = f(t)\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,,$$

kde funkce f je dána vztahem (6.51), tj. jde o první oblouk sinusoidy na intervalu $[\,0,\pi\,]$ Pak snadno obdržíme pomocí výsledku z (6.52) z Příkladu 6.7.1

$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi s}}{1+s^2}\,,$$

neboli

$$Y(s) = \frac{1}{\left(1+s^2\right)^2} + \frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{\left(1+s^2\right)^2}\,.$$

K dokončení nám chybí ještě trocha znalostí o chování Laplaceovy transformace, které však můžeme nahradit náhledem do tabulky. Je (ve složené závorce $\{\dots\}$ nabízíme alternativní výpočet)

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{\left(1+s^2\right)^2}\Big] = \Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{s^2+1+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s^2+1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{s}{s^2+1}\Big)\Big\} = \frac{\sin t - t\cos t}{2}\,,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{\left(1+s^2\right)^2}\Big] = H_\pi(t)\frac{\sin(t-\pi) - (t-\pi)\cos(t-\pi)}{2}$$

z čehož již dostaneme snadno sečtením hledaný výsledek

$$y(t) = \frac{1}{2}\big(\sin t - t\cos t + H_\pi(t)(\sin(t-\pi) - (t-\pi)\cos(t-\pi))\big)\,.$$

Laplaceovu transformaci lze použít i při hledání obecného řešení lineární rovnice vyššího řádu. Ukažme si to na ilustrativním příkladu.

Příklad 6.7.12. Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = \mathrm{e}^{-t}\,.$$

Označíme $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$. Provedeme transformaci a obdržíme

$$(s^2Y(s) - sy_0 - y_1) + Y(s) = \frac{1}{s+1}\,,$$

neboli po jednoduché úpravě

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} + y_0\frac{s}{s^2+1} + y_1\frac{1}{s^2+1} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s-1}{s^2+1} + y_0\frac{s}{s^2+1} + y_1\frac{1}{s^2+1} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \big(y_0 - \frac{1}{2}\big)\frac{s}{s^2+1} + \big(y_1 + \frac{1}{2}\big)\frac{1}{s^2+1}\,. \end{aligned}$$

Nyní, zpaměti nebo za pomoci tabulky pro Laplaceovu transformaci, dostaneme aplikováním $\mathcal{L}^{-1}$ již konečný výsledek

$$y(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} + \big(y_0 - \frac{1}{2}\big)\cos t + \big(y_1 + \frac{1}{2}\big)\sin t\,, \qquad y_0,\, y_1 \in \mathbb{R}\,.$$

6.8 L-periodicita

Předem je třeba upozornit čtenáře na to, že termín L-periodicita není běžně užíván. V partiích o Laplaceově transformaci se tak označují funkce f, definované např. na intervalu $[\,0,\infty\,]$, pro něž existuje $T > 0$ tak, že pro každé $x \in [\,0,\infty\,]$ je

$$f(x) = f(x+T)\,.$$

Funkce dokonce nemusí být definována *všude* v intervalu $[\,0,\infty\,]$, předpokládáme však, že T je nejmenší číslo z popsanou vlastností a že integrál

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

je konečný pro všechna $s > 0$. Připouštíme dokonce i to, že f má nekonečně mnoho bodů nespojitosti, ale v každém omezeném intervalu $[0, A]$, $A > 0$, tvoří její všechny body nespojitosti (jsou pouze 1. druhu!) konečnou množinu.

Ukážeme, jak lze Laplaceovu transformaci L-periodických funkcí spočítat. Je-li f L-periodická funkce s periodou $T > 0$, $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$ a

$$F_1(s) := \int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\;,$$

potom je

$$F(s) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\,F_1(s)\,. \tag{6.63}$$

Skutečně, je

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\; = \int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\; + \int_T^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\;.$$

Druhý integrál na pravé straně předchozí rovnosti upravíme: provedeme v něm substituci $u = t-T$ a obdržíme se zohledněním L-periodicity funkce f

$$\int_T^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\; = \int_0^\infty f(u+T)\mathrm{e}^{-s(u+T)}\,\mathrm{d}u\; = \mathrm{e}^{-sT}\int_0^\infty f(u)\,\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u\;.$$

Nyní již jen použijeme zavedené označení a z rovnosti

$$F(s) = \int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\; + \mathrm{e}^{-st}F(s) = F_1(s) + \mathrm{e}^{-st}F(s)$$

spočteme

$$F(s) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\,F_1(s)\,.$$

Příklad 6.8.1. V Příkladu 6.7.1 jsme určili Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}(f(t))$ pro funkci f, která byla popsána jako restrikce funkce sin na interval $[0, \pi]$ rozšířená na interval $[0, \infty)$ dodefinováním $f(t) = 0$ pro $t \in [1, \infty]$. Označme nyní restrikci funkce sin na interval $[0, \pi]$ symbolem f_1. Potom je

$$F_1(s) = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi s}}{1+s^2}\,.$$

Je-li nyní $f(t) = |\sin t|$, $t \in [0, \infty)$, je to L-periodická funkce a $\mathcal{L}\big(f(t)\big)$ můžeme snadno získat pomocí vzorce (6.63) (v tomto případě je $T = \pi$):

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s\pi}}\,F_1(s) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi s}}\,\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi s}}{1+s^2} = \\ &= \frac{1}{1+s^2}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi s}}{1-\mathrm{e}^{-\pi s}}\right) = \frac{1}{1+s^2}\,\operatorname{cotgh}\frac{\pi s}{2}\,. \end{aligned}$$

Příklad 6.8.2. Položme

$$f_1(t) := \begin{cases} 0\,, & t \in [0, a]\,,\\ 1\,, & t \in (a, 2a)\,, \end{cases} \tag{6.64}$$

a vytvořme L-periodickou funkci f s $T = 2a$ takovou, aby se na intervalu $[0, 2a)$ shodovala s funkcí f_1. Potom je

$$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2as}}\,F_1(s)\,,$$

kde

$$F_1(s) = \mathcal{L}\big(f_1(t)\big) = \int_0^\infty f_1(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_a^{2a} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-sa} - \mathrm{e}^{-2sa}}{s}\,,$$

takže celkově dostaneme

$$F(s) = \frac{\mathrm{e}^{-sa} - \mathrm{e}^{-2sa}}{s\big(1 - \mathrm{e}^{-2sa}\big)} = \frac{\mathrm{e}^{-sa}(1 - \mathrm{e}^{-sa})}{s(1 + \mathrm{e}^{-sa})(1 - \mathrm{e}^{-sa})} = \frac{1}{s(1 + \mathrm{e}^{as})}\,. \tag{6.65}$$

6.9 Cvičení

1. Pomocí Laplaceovy transformace řešte Cauchyho úlohu pro

$$y'' - 2y' + y = t\,\mathrm{e}^t\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,. \qquad \Big[\,y(t) = \tfrac{1}{6}\,t^3\,\mathrm{e}^t\,\Big]$$

2. Pomocí Laplaceovy transformace řešte Cauchyho úlohu pro

$$y''' + 7y'' + 14y' + 8y = 0\,, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 2\,.$$

$[\,y(t) = \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-4t}\,]$

3. Pomocí Laplaceovy transformace řešte Cauchyho úlohu pro

$$y'' + 3y' + 2y = t + \mathrm{e}^{-t}\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

$[\,\frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-2t} + t\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t\,]$

4. Pomocí Laplaceovy transformace se pokuste vyřešit integrodiferenciální rovnici

$$y' + 2y + 2\int_0^t y(v)\,\mathrm{d}v = 1$$

s počáteční podmínkou $y(0_+) = 0$. $\big[\,y(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\big]$

5. Analogickou úlohu jako ve Cvičení 4 řešte pro rovnici

$$y' + 6y + 9\int_0^t y(v)\,\mathrm{d}v = 0$$

s počáteční podmínkou $y(0_+) = 1$. $\big[\,y(t) = \mathrm{e}^{-3t}(1 - 3t)\,\big]$

6. Určete obrazy

$$\mathcal{L}\big(\sin^3 at\big) \quad \text{a} \quad \mathcal{L}\big(\cos^3 at\big)\ !$$

$$\Big[\,\frac{6a^3}{(s^2 + 9a^2)(s^2 + a^2)} \qquad \text{a} \qquad \frac{6a^3}{s(s^2 + 7a^2)(s^2 + a^2)}\,\Big]$$

7. S využitím Pravidla E se pokuste dokázat rovnost

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}\Big] = \frac{1}{2}\big(1 - \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t)\big)\ !$$

8. Určete

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{s + 1}{s^2 + s - 6}\Big]\,! \qquad \Big[\,y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{3}{5}\,\frac{1}{s - 2} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{s + 3}\Big) = \tfrac{1}{5}\,(3\mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^{-3t})\,\Big]$$

9. Určete řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = 12\mathrm{e}^{-2t}\,,$$

vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = 2$ a $y'(0) = 6$! $[\,y(t) = -\,6\mathrm{e}^t + 7\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\,]$

10. Řešte počáteční úlohy pro rovnice

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 9y = 2 - t\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,, \\ &(b) \quad y''' + y = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = y''(0) = 0\,. \end{aligned}$$

$$\left[\text{(a)} \quad y(t) = \tfrac{1}{27}\big(-6 + 3t + 7\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-3t} \big), \quad \text{(b)} \quad y(t) = \tfrac{1}{3}\big(\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{t/2} \cos \tfrac{\sqrt{3}}{2} t \big) \right]$$

11. Řešte počáteční úlohy pro rovnice

$$\begin{aligned} &(a) \quad y''' + y'' - y' - y = \mathrm{e}^{-t}\,, \quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 2\,, \\ &(b) \quad y'' + 2y' + y = t\,\mathrm{e}^{-t}\,, \quad y(0) = 0\ \ y'(0) = 1\,. \end{aligned}$$

$$\left[\text{(a)} \quad y(t) = \tfrac{1}{8}\Big(5(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}) - 10\,t\mathrm{e}^{-t} - 2\,t^2\,\mathrm{e}^{-t} \Big), \quad \text{(b)} \quad y(t) = t\,\mathrm{e}^{-t} + \tfrac{1}{6}\,t^3\,\mathrm{e}^{-t} \right]$$

12. Řešte systém LDR 1. řádu

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \left[\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} (1 + 2\,\mathrm{e}^{-3t})/3 \\ (1 + \mathrm{e}^{-3t})/3 \end{pmatrix} \right]$$

13. Řešte systém LDR 1. řádu

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \left[\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}\big(\cos 3t - \sin 3t \big) \\ \mathrm{e}^{2t}\big(\cos 3t + 2\,\sin 3t \big) \end{pmatrix} \right]$$

14. Řešte systém LDR 1. řádu

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \left[\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-6t}\big(\cos t - \sin t \big) \\ -2\,\mathrm{e}^{-6t} \sin t \end{pmatrix} \right]$$

15. Řešte systém LDR 1. řádu s počáteční podmínkou

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}\,, \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left[y(t) = \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t - \sin t \\ 1\cos t + \sin t \end{pmatrix} \right]$$

Kapitola 7

Řešené úlohy

V této kapitole jsou další řešené úlohy. Čtenář by si je měl po opsání zadání samostatně vyřešit a pak svůj postup a výsledky konfrontovat s textem. Příklady obsahují již zformulovaná zadání, v této části se problematika sestavování rovnic nebo systémů nevyskytuje. V textu kvůli sazbě píšeme sloupcové vektory do řádků, což by nemělo čtenáři vadit nebo ho mást.

7.1 Rovnice 1. řádu

Vzhledem k tomu ODR 1. řádu jsou jedinými, které bez dalšího omezení umíme řešit i v případě, že koeficient $a(x)$ je nekonstantní funkce, spočteme pouze jeden lehký ilustrativní příklad; vrátíme se však k němu v další kapitole.

Příklad 7.1.1. Řešte rovnici

$$y' = k(y - a)\,, \tag{7.1}$$

kde $k, a \in \mathbb{R}$.

Řešení : Můžeme např. řešit tak, že rovnici upravíme na tvar

$$y' - ky = -ka\,,$$

a postupujeme standardním postupem řešení rovnice 1. řádu. V prvním kroku řešíme rovnici $y' - ky = 0$ a určíme její obecné řešení $y_H(x) = C\,\mathrm{e}^{kx}$, $C \in \mathbb{R}$. Pak variací konstant(y) dostaneme po dosazení

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{kx} + C(x)k\mathrm{e}^{kx} - kC(x)\mathrm{e}^{kx} = -ak\,,$$

neboli

$$C'(x) = -ak\mathrm{e}^{-kx} \quad \text{a tedy} \quad C(x) = a\mathrm{e}^{-kx}\,.$$

Partikulární řešení rovnice (7.1) je tvaru $y_P(x) = a\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{e}^{kx} = a$ a její obecné řešení tudíž je

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = a + C\,\mathrm{e}^{kx}\,, \quad \text{kde} \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(Uvědomte si, že můžeme postupovat i jinak, jde o rovnici se separovanými proměnnými; samozřejmě, že dospějeme k témuž výsledku).

7.2 Rovnice 2. řádu – srovnání

Zkusíme na jednoduchém příkladu porovnat řešení oběma způsoby, které jsme se naučili, abychom alespoň částečně ozřejmili, v čem jsou výhody (a nevýhody) použití Laplaceovy transformace.

Příklad 7.2.1. Určete řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 3y = \mathrm{e}^{2x}, \tag{7.2}$$

které vyhovuje počátečním podmínkám $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Řešení : Řešme nejprve bez užití Laplaceovy transformace. Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 3$, takže obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 3y = 0$ je tvaru

$$y(t) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{3x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Speciální tvar pravé strany v (7.2) a to, že číslo 2 není kořenem charakteristické rovnice nám umožňuje hledat partikulární řešení ve tvaru $y(x) = K\mathrm{e}^{2x}$ s tím, že musíme určit konstantu K. Dosazením do (7.2) dostáváme

$$4K\mathrm{e}^{2x} - 4 \cdot 2K\mathrm{e}^{2x} + 3 \cdot K\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x},$$

neboli $-K\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$, takže $K = -1$. Obecné řešení rovnice (7.2) je tedy tvaru

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Dosazením počátečních podmínek dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 - 1 \\ 0 &= C_1 + 3C_2 - 2\,, \end{aligned}$$

odkud plyne $C_2 = 0$ a $C_1 = 2$. Tak jsme dospěli k hledanému řešení $y(x) = 2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$.

Nyní budeme řešit pomocí Laplaceovy transformace. Spočteme $\mathcal{L}$-obraz levé strany v (7.2). Po dosazení obrazů jednotlivých členů s přihlédnutím k počátečním podmínkám (využíváme linearitu $\mathcal{L}$) dostaneme

$$\left(s^2Y(s) - s\right) - 4 \cdot \left(sY(s) - 1\right) + 3 \cdot Y(s) = \frac{1}{s-2}\,,$$

neboli

$$Y(s)\bigl(s^2 - 4s + 3\bigr) - s + 4 = \frac{1}{s-2}\,.$$

Po jednoduché úpravě dostáváme

$$Y(s) = \frac{s^2 - 6s + 9}{(s-2)(s^2 - 4s + 3)} = \frac{(s-3)^2}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{s-3}{(s-1)(s-2)}\,.$$

Rozklad na parciální zlomky je zde jednoduchý, snadno určíme z

$$\frac{s-3}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}\,,$$

že $A = 2$ a $B = -1$. Z rovnice

$$Y(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2}$$

přechodem ke vzorům dostaneme již dříve nalezený výsledek $y(t) = 2\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t}$. Porovnání necháme na čtenáři – je třeba si uvědomit, že jednotlivé kroky budou u složitější rovnice časově náročnější.

7.3 Úlohy na vlastní čísla a vlastní vektory matic

Příklad 7.3.1. Najděte všechna vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení : Protože snadno získáme rozklad

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & -3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (-3-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) - 3 - 3(\lambda+2) = -(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda+1)\,,$$

jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ rovny $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$ a $\lambda_3 = -1$. Jsou navzájem různá, takže stačí, když ke každému z nich najdeme jeden vlastní vektor $\boldsymbol{v}$. Očíslujeme je shodně s indexy vlastních čísel. K číslu λ_1 hledáme všechna *nenulová* řešení soustavy $(\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Všechna *nenulová* řešení poslední soustavy jsou (píšeme v textu sloupcové vektory jako již dříve do řádku) tvaru $\boldsymbol{v} = c(1,0,1)$, $c \neq 0$, a tedy, volíme-li např. $c = 1$, vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu λ_1 je vektor $\boldsymbol{v}^1 = (1,0,1)$.

K nalezení vlastního vektoru $\boldsymbol{v}^2$ příslušného k vlastnímu číslu λ_2 hledáme všechna *nenulová* řešení soustavy $(\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. soustavy

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ta má *nenulová* řešení tvaru $d(-3,4,1)$, $d \neq 0$, a tedy za vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ_2 lze volit $\boldsymbol{v}^2 = (-3,4,1)$.

Pro nalezení vlastního vektoru $\boldsymbol{v}^3$ příslušného k vlastnímu číslu λ_3 hledáme *nenulové* řešení soustavy $(\boldsymbol{A} + 1\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. soustavy

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má všechna *nenulová* řešení tvaru $e(3,-2,-3)$, $e \neq 0$, a tedy lze volit za vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ_3 vektor $\boldsymbol{v}^3 = (3,-2,-3)$.

Příklad 7.3.2. Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Budeme postupovat trochu rychleji. Protože $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8)$, jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ rovny $\lambda_{1,2} = -1$ a $\lambda_3 = 8$. K nalezení vlastních vektorů $\boldsymbol{v}$ příslušných vlastnímu číslu $\lambda_{1,2}$ hledáme všechna *nenulová* řešení soustavy $(\boldsymbol{A} + 1\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. soustavy

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{neboli} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Všechna *nenulová* řešení poslední soustavy jsou tvaru $\big(c, -2(c+d), d\big)$, $c^2 + d^2 > 0$. Zvolíme-li např. $c = 1$, $d = 0$ a pak $c = 0$, $d = 1$, dostáváme dva nezávislé vlastní vektory $\boldsymbol{v}^1 = (1, -2, 0)$ a $\boldsymbol{v}^2 = (0, -2, 1)$, které tvoří bázi vlastního podprostoru příslušného (dvojnásobnému) vlastnímu číslu $\lambda_{1,2}$.

K nalezení vlastního vektoru $\boldsymbol{v}^3$ příslušného k vlastnímu číslu λ_3 hledáme *nenulové* řešení soustavy $(\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. soustavy

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má *nenulová* řešení tvaru $e\,(2, 1, 2)$, $e \neq 0$. Vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ_3 je např. vektor $\boldsymbol{v}^3 = (2, 1, 2)$, který je zároveň bází vlastního podprostoru příslušného k λ_3.

Příklad 7.3.3. Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Protože $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$, jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ rovny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. K nalezení všech vlastních vektorů $\boldsymbol{v}$ příslušných vlastnímu číslu λ_1 hledáme všechna *nenulová* řešení soustavy $(\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Všechna řešení poslední soustavy jsou tvaru $c\,(2, -3, 2)$, a tedy všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_1 mají popis $\boldsymbol{v} = c(2, -3, 2)$, $c \neq 0$. Můžeme tedy volit $c = 1$ a tak dostat vlastní vektor $\boldsymbol{v}^1 = (2, -3, 2)$.

K nalezení všech vlastních vektorů $\boldsymbol{v}$ příslušných vlastnímu číslu $\lambda_{2,3}$ hledáme všechna *nenulová* řešení soustavy $(\boldsymbol{A} - (1+2i)\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. soustavy

$$\begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poslední soustava má *nenulová* řešení tvaru $d\,(0,\mathrm{i},1)$, $d \neq 0$, a tedy všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_2 jsou tvaru $\boldsymbol{v}^2 = d(0,\mathrm{i},1)$, $d \neq 0$.

K nalezení všech vlastního vektoru $\boldsymbol{v}^3$ příslušného k vlastnímu číslu λ_3 můžeme např. hledat všechna *nenulová* řešení soustavy $(\boldsymbol{A} - (1-2i)\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, což po přepisu je soustava

$$\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 2 & 2i & -2 \\ 3 & 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tak získáme vyjádření všech vlastních vektorů příslušných k vlastnímu číslu λ_3: je tvaru $\boldsymbol{v}^2 = e\,(0,-\mathrm{i},1)$, $e \neq 0$. Obě poslední vyjádření nejsou reálná, víme však, že stačí např. vzít jejich reálnou a imaginární část. Můžeme tedy např. volit $\boldsymbol{v}^2 = (0,0,1)$ a $\boldsymbol{v}^3 = e\,(0,1,0)$.

7.4 Úlohy na soustavy ODR

Příklad 7.4.1. Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy pro soustavu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Zjistěte dále, zda je každé řešení příslušné autonomní rovnice stabilní, resp. asymptoticky stabilní.

Řešení: Označme $\boldsymbol{A}$ matici soustavy. Protože $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$, jsou vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_{2,3} = 2$. Nalezením všech *nenulových* řešení soustavy $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. řešením rovnice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\,,$$

dostáváme všechny vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ_1: jsou tvaru $\boldsymbol{v} = c\,(1,0,1)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Nalezením všech nenulových řešení soustavy $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. řešením rovnice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

dostáváme všechny vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu $\lambda_{2,3}$: $\boldsymbol{v} = d\,(1,0,0)$, $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$. Protože je

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

je zřejmé, že všechny vektory $\boldsymbol{v}$ splňující podmínky $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ a $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ jsou tvaru $\boldsymbol{v} = (e,\ f,\ -f)$, kde $e,\ f \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$. Zvolíme-li $e = 0$, $f = 1$, dostáváme obecné řešení homogenní soustavy ve tvaru ($c_1,\ c_2,\ c_3$ označují reálné konstanty):

$$\boldsymbol{x}_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \mathrm{e}^{2t},$$

což po úpravě dává

$$\boldsymbol{x}_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice budeme hledat pomocí metody variace konstant:

$$\boldsymbol{x}_P(t) = c_1(t)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{3t} + c_2(t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_3(t)\begin{pmatrix}-t\\1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}.$$

Dosazením tohoto řešení do rovnice (7.3) získáme po dělení výrazem e^{2t} soustavu algebraických rovnic tvaru (v maticovém zápisu)

$$\dot{c}_1(t)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{t} + \dot{c}_2(t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \dot{c}_3(t)\begin{pmatrix}-t\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

která má řešení $\dot{c}_1(t) = e^{-t}$, $\dot{c}_2(t) = 0$, $\dot{c}_3(t) = 0$. Odtud dostaneme $c_1(t) = -e^{-t}$, $c_2(t) = 0$, $c_3(t) = 0$ (integrační konstanty jsme zvolili vesměs rovny nule), takže

$$\boldsymbol{x}_P(t) = -\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}.$$

Obecné řešení nehomogenní soustavy je tvaru:

$$\boldsymbol{x}_{OB}(t) = \boldsymbol{x}_H(t) + \boldsymbol{x}_P(t).$$

Nyní určíme konstanty c_1, c_2, c_3 tak, aby byly splněny počáteční podmínky, tj. dosadíme do obecného řešení, které jsme nalezli $t = 0$ a řešíme vzniklou soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\boldsymbol{x}_{OB}(0) = \quad c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Tato soustava má řešení $c_1 = 3$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$. Řešení rovnice (7.3), splňující počáteční podmínku, je tvaru:

$$\boldsymbol{x}(t) = 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{3t} - \begin{pmatrix}2+t\\-1\\2\end{pmatrix}e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože všechna vlastní čísla jsou kladná, *není* žádné řešení $\boldsymbol{x}_H(t)$ homogenní rovnice stabilní ani asymptoticky stabilní.

Příklad 7.4.2. Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy pro soustavu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&3&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}e^{-t}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Rozhodněte, zda je řešení příslušné autonomní rovnice stabilní a asymptoticky stabilní.

Řešení: Označme matici soustavy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&3&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

Protože $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, jsou vlastní čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_{2,3} = 1$. Všechny vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ_1 jsou tvaru $\boldsymbol{v} = c\,(0,1,1)$, $c \neq 0$. K dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{2,3}$ jsou všechny vlastní vektory tvaru $\boldsymbol{v} = d\,(1,1,0)$, $d \neq 0$. Protože je

$$(\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{E})^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a pro vektor $\boldsymbol{v} = (0,0,1)$ je $(\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{E})^2 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ a $(\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, má homogenní soustava obecné řešení tvaru ($c_1,\ c_2,\ c_3$ libovolné konstanty):

$$\boldsymbol{x}_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \mathrm{e}^{t},$$

neboli

$$\boldsymbol{x}_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_3 \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$\boldsymbol{x}_P(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t},$$

kde a, b, c jsou konstantní funkce. Dosazením do rovnice (7.4) dostaneme

$$-\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

což po úpravě vede na soustavu

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

která má řešení $a = -1$, $b = c = 0$. Obecné řešení nehomogenní soustavy má tvar

$$\boldsymbol{x}_{OB}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_3 \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}.$$

Řešení splňující počáteční podmínku je tvaru (postupujeme stejně jako v předchozím případě, volíme $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = 1$):

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} - \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože vlastní čísla jsou vesměs kladná, *nejsou* řešení příslušné homogenní rovnice stabilní ani asymptoticky stabilní.

Příklad 7.4.3. Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy pro soustavu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je každé řešení soustavy asymptoticky stabilní.

Řešení: Označme $\boldsymbol{A}$ matici soustavy. Protože $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = -(\lambda - 2)^2 \lambda$, jsou vlastní čísla $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_{2,3} = 2$. Všechny vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ_1 jsou tvaru $c\,(0,1,0)$, $c \neq 0$, a k dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{2,3}$ jsou tvaru $d\,(0,1,1)$, $d \neq 0$. Protože je

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a pro vektor $\boldsymbol{v} = (1,0,0)$ je $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ a $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, má homogenní soustava obecné řešení tvaru

$$\boldsymbol{x}_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{e}^{2t}$$

což dává po úpravě

$$\boldsymbol{x}_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $\boldsymbol{x}_P(t) = (a, b, c)$. Dosazením do soustavy dostáváme po úpravě algebraickou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

která má řešení $a = -1$, $b = -1$, $c = 0$. Obecné řešení nehomogenní soustavy má tvar:

$$\boldsymbol{x}_{OB}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}.$$

Zbývá nalézt konstanty c_1, c_2 a c_3 tak, aby

$$\boldsymbol{x}_{OB}(0) = \quad c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tj. řešit soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soustava má řešení $c_3 = 3$, $c_2 = 1$ a $c_1 = 3$, a tedy řešení splňující počáteční podmínku je

$$\boldsymbol{u}(t) = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože *nemají* všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ záporné reálné části, *nejsou* řešení soustavy asymptoticky stabilní.

Příklad 7.4.4. Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy pro soustavu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je každé řešení soustavy asymptoticky stabilní.

Řešení: Označme $\boldsymbol{A}$ matici soustavy. Protože $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = -(\lambda+1)(\lambda^2+1)$, má matice $\boldsymbol{A}$ jednoduché vlastní číslo $\lambda_1 = -1$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{2,3} = \pm\,\mathrm{i}$. Všechny vlastní vektory k vlastnímu číslu λ_1 jsou tvaru $c\,(0,1,-1)$, $c \neq 0$. Pro nalezení vlastních vektorů k vlastnímu číslu $\lambda_2 = i$ řešíme v komplexním oboru rovnici

$$\begin{pmatrix} 1-i & -1 & -1 \\ 1 & -1-i & 0 \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kterou snadno upravíme do tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud dospějeme k obecnému tvaru příslušného vlastního vektoru $\boldsymbol{v} = d\,(1+i,1,1)$, $d \neq 0$. Protože je

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

má analogicky jako ve (5.8) homogenní soustava obecné řešení tvaru

$$\boldsymbol{x}_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $\boldsymbol{x}_P(t) = (a,b,c)e^{2t}$, kde a,b,c jsou konstantní funkce. Po dosazení do soustavy dostáváme soustavu lineárních rovnic tvaru

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

která má řešení $a = -1$, $b = c = 1$. Obecné řešení nehomogenní soustavy má tvar

$$\boldsymbol{x}_{OB}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}.$$

Zbývá nalézt konstanty c_1, c_2 a c_3 tak, aby po dosazení $t = 0$ pro $\boldsymbol{x}_{OB}(0)$ platilo

$$c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

tj. řešit soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soustava má řešení $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ a $c_3 = -3$. Řešení splňující počáteční podmínku je tedy

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \begin{pmatrix} -\cos t - 5\sin t \\ 2\cos t - 3\sin t \\ 2\cos t - 3\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}.$$

Podle kritéria *nejsou* řešení soustavy asymptoticky stabilní, neboť vlastní čísla $\lambda_{2,3} = \pm\,\mathrm{i}$ *nemají* zápornou reálnou část.

Příklad 7.4.5. Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy pro soustavu

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je každé řešení příslušné autonomní soustavy asymptoticky stabilní.

Řešení : Označme $\boldsymbol{A}$ matici soustavy. Protože $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$, jsou vlastní čísla $\lambda_1 = -2$ a $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$. Všechny vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ_1 jsou tvaru $c\,(1, -1, 1)$, $c \neq 0$. Abychom určili všechny vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1 + i$, musíme najít *nenulová* řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} -1-i & 2 & 0 \\ 0 & -1-i & 2 \\ -1 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{pmatrix} 0 & 1+i & -2 \\ 1-i & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ta má nenulová řešení tvaru $\boldsymbol{v} = d\,(-2i, 1-i, 1)$, $d \neq 0$. Protože je

$$\begin{pmatrix} -2i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

má homogenní soustava obecné řešení tvaru (srovnej s (5.8)):

$$\boldsymbol{x}_H(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin t \\ \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_3 \begin{pmatrix} -2\cos t \\ \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $\boldsymbol{x}_P(t) = (a, b, c)$. Čtenář jistě již samostatně určí řešení soustavy a nalezne $a = 1$, $b = c = 0$ (partikulární řešení se hledá stejně jako v předchozím příkladě). Obecné řešení nehomogenní soustavy je tvaru

$$\boldsymbol{x}_{OB}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin t \\ \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_3 \begin{pmatrix} -2\cos t \\ \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}.$$

Dosadíme do obecného řešení $t = 0$ a určíme z obdržené rovnice $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$, takže hledané řešení má tvar

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \sin t - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \cos t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Podle kritéria *nejsou* řešení soustavy asymptoticky stabilní ($\lambda_{2,3}$ má kladnou reálnou část).

7.5 Úlohy na Laplaceovu transformaci

Příklad 7.5.1. Řešte rovnici

$$y'' + 4y' + 3y = \chi_{[0,1]}(t)\,, \tag{7.5}$$

kde $\chi_{[0,1]}$ je charakteristická funkce intervalu $[0,1]$, a nalezněte její řešení, které splňuje podmínky $y(0) = y'(0) = 0$.

Řešení: Z linearity a ze vzorce (6.30) dostaneme po dosazení počátečních podmínek

$$\mathcal{L}\big(y''(t) + 4y'(t) + 3y(t)\big) = Y(s)(s^2 + 4s + 3)$$

a pomocí již odvozeného obecnějšího vztahu (6.60) dostaneme pro $a = 0$ a $b = 1$

$$\mathcal{L}\big(\chi_{[0,1]}(x)\big) = \frac{1 - e^{-s}}{s}\,.$$

Porovnáním obrazů levé a pravé části rovnice (7.5) dostaneme

$$Y(s)(s^2 + 4s + 3) = \frac{1 - e^{-s}}{s}\,, \quad \text{neboli} \quad Y(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s^2 + 4s + 3)}\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky dostaneme (lze využít (6.12), resp. (6.40)

$$\frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)} = \Big(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+3}\Big)\,.$$

Odtud dostaneme pro všechna $t \geq 0$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+3}\Big] H_0(t) - \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{3} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-t}}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-t}}{s+1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-t}}{s+3}\Big] H_1(t)\,.$$

Výsledek v jiné formě můžeme zapsat po rozepsání užitých Heavisideových funkcí

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-3t} & \text{pro} \quad x \in [0,1]\,, \\ \frac{1}{2}\,(\mathrm{e} - 1)\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{6}\,(1 - \mathrm{e}^3)\,\mathrm{e}^{-3t} & \text{pro} \quad x \in [1, +\infty)\,. \end{cases} \tag{7.6}$$

Kapitola 8

Praktické úlohy

V této kapitole jsou další úlohy, jimiž se snažíme ukázat „praktičtější“ stránku použití ODR. Všimneme si i problematiky sestavování rovnic a jejich systémů. Na druhé straně upozorňujeme, že možnosti využití diferenciálních rovnic k popisu a řešení úloh z praxe jsou podstatně širší, nežli lze v tomto textu ukázat.

8.1 Lineární rovnice 1. řádu

Začneme úlohou, která působí trochu záhadně. Vytváření modelu reálné situace je nutně vždy založeno na určitých zjednodušujících předpokladech. Ukažme si to na příkladu, jehož schéma je převzato z [1]:

Příklad 8.1.1. Představme si, že začalo náhle velmi hustě sněžit. Pan Novák, bydlící na samotě, se vzbudil a vyhodnotil situaci jako kritickou: již od 7 hod začal čistit frézou cestu k nejbližší udržované komunikaci. Za první hodinu vyčistil 2 km, za další hodinu zbývajících 1,5 km. Zcela vyčerpán si povzdechl: „Rád bych věděl, kdy začalo takhle hrozně sněžit“ a my bychom mu s tímto problémem měli pomoci.

Řešení: Pokud jsme konfrontováni s takovou úlohou, která se zdá dosti zvláštní, uvědomíme si nejprve, že zpomalení výkonu odpovídá naší zkušenosti: silnější vrstva sněhu se odklízí pomaleji. To nám však příliš nepomůže k řešení: Musíme si vytvořit nějaký matematický model, založený na jednoduchých předpokladech; patrně ne ideálních, nicméně vedoucích k řešení, protože složitý model nemusíme umět dosud získanými znalostmi řešit. Model založíme na předpokladu, že fréza je schopna odklidit k km^3 sněhu za 1 hodinu (za jednotku volíme kilometry). Čas t budeme měřit v hodinách počínaje od 7 hod, tloušťka vrstvy sněhu v čase t nechť je $x(t)$ (opět v odpovídajících jednotkách, tj. km). Délka vyčištěné dráhy v čase t nechť je $s(t)$, takže $\dot{s}(t)$ je rychlost frézy v čase t. Označíme-li ještě šířku záběru frézy d, dostaneme jednoduchou rovnici

$$x\,d\dot{s} = k\,. \tag{8.1}$$

Abychom nalezli funkci x, označme t_0 neznámý čas, tj. dobu, po kterou již sněžilo, než započala fréza pracovat, a dále h nechť je (konstantní) rychlost přírůstku tloušťky sněhové vrstvy (v odpovídajících jednotkách, tj. v km/hod). Potom je

$$x(t) = h \cdot (t_0 + t)\,, \quad t > -\,t_0\,,$$

což po dosazení do (8.1) dává rovnici

$$\dot{s} = \frac{k}{dh}\,\frac{1}{t_0 + t}\,,$$

kterou snadno vyřešíme; její obecné řešení je

$$s(t) = \frac{k}{dh}\left(\log(t_0 + t) + C\right), \tag{8.2}$$

kde C je reálná konstanta a $t \in (-t_0, \infty)$. Dá se očekávat, že údaje ze zadání by nám měly stačit k určení času t_0. Z $s = 0$ pro $t = 0$ dostaneme $C = -\log t_0$, což po dosazení do (8.2) dává

$$s(t) = \frac{k}{dh}\log\left(1 + \frac{t}{t_0}\right). \tag{8.3}$$

Víme ještě, že $s(1) = 2$ a $s(2) = 3{,}5$, což by nám mělo umožnit úlohu vyřešit. Je tedy

$$2 = \frac{k}{dh}\log\left(1 + \frac{1}{t_0}\right) \quad \text{a} \quad 3{,}5 = \frac{k}{dh}\log\left(1 + \frac{2}{t_0}\right).$$

Z obou rovnic spočteme výraz dh/k a porovnáme výsledky, čímž dostaneme rovnici

$$\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{t_0}\right) = \frac{1}{3{,}5}\log\left(1 + \frac{2}{t_0}\right),$$

která po další úpravě a „odlogaritmování“ je tvaru

$$\left(1 + \frac{1}{t_0}\right)^{3{,}5} = \left(1 + \frac{2}{t_0}\right)^{2}. \tag{8.4}$$

Zadáme-li např. v programu *Maple*, což je jeden z programů usnadňujících výpočty [1])

```
solve((1+2/t)^2 = (1+1/t)^3.5),                                        (*)
```

dostaneme za malý okamžik řešení ve tvaru

```
2.548142158, -1.665520267,                                             (*)
```

kde první (kladný) kořen odpovídá hledanému řešení t_0. Proto tedy začalo sněžit před cca $60 \cdot 2{,}548142158$ min, tj. cca 153 minut před 7 hod, tj. v 4 hod 27 min. Nemusíme snad zdůrazňovat, že model byl primitivní a zadání bylo podřízeno našim možnostem. Pokud má čtenář k dispozici jen tužku a papír, může zkusit totéž se zadáním: první hodinu urazila fréza 2 km, druhou hodinu 1 km. Dospěje pak ke kvadratické rovnici, kterou snadno vyřeší. Dostane tak jako výsledek $t_0 = (\sqrt{5} - 1)/2$, z čehož plyne, že sněžit začalo cca v 6 hod 23 min.

Příklad 8.1.2 (radioaktivní rozpad). Rozpad radioaktivních látek se řídí zákonitostí podobnou jako je ta, kterou jsme již poznali. Je-li $M(t)$ množství látky v čase t, pak

$$\Delta M = M(t + \Delta t) - M(t) \approx \alpha M(t)\Delta t,$$

kde však je $\alpha < 0$. Píšeme-li $-\alpha$ místo α, bude $\alpha > 0$ a vztah nabude tvaru

$$\Delta M \approx -\alpha M(t)\Delta t.$$

Od něj dospějeme k rovnici tvaru $M' + \alpha M = 0$, přičemž nás z fyzikálního hlediska zajímá pouze množství látky v čase od okamžiku $t_0 = 0$.

[1]) Čárky na konci řádků označených (*) nejsou součástí vstupu ani výstupu programu.

Řešení: Rovnici tedy vyšetříme na intervalu $(0, +\infty)$ a dospějeme k řešení

$$M(t) = M_0 \, \mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad t \in (0, +\infty),$$

takže rozpad je popsán při $\alpha > 0$ pro $t \geq 0$ vztahem

$$M(t) = M_0 \, \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Čas δ, za který se množství látky změní na poloviční, se obvykle nazývá *poločas rozpadu*. Pak je

$$-\alpha t = \log \frac{M(\delta)}{M_0} = \log \frac{1}{2},$$

takže $\delta = (\log 2)/\alpha \doteq (0,6931)/\alpha$. Porovnáme-li řešenou rovnici s rovnicí (1.17), zjistíme, že velmi odlišné děje se řídí z matematického hlediska analogickými zákonitostmi.

I když se zdánlivě jedná o čistě teoretický výsledek, má značně důležité praktické důsledky. Užíváme ho při určování stáří archeologických vykopávek, ale i při zkoumání pravosti starých obrazů. Pro představu: poločas rozpadu radioaktivního isotopu uhlíku ^{14}C je cca 5568 let a metoda určování stáří, která tento rozpad využívá, pochází z roku 1949. Blíže viz [3], kde je poutavě popsán i příběh padělatele obrazů H. A. van Meegerena (1889 − 1947), který prodal prostřednictvím jednoho bankéře Hermanu Göringovi padělaný obraz barokního malíře Jana Vermeera (1632 − 1675). Po válce byl obviněn z kolaborace s nacisty a při té příležitosti byly odhaleny další jeho padělky Vermeerových obrazů. Příběh se dočkal dokonce zpracování v u nás dobře známém česko-německém televizním seriálu „Dobrodružství kriminalistiky“ (Díl 16: Paprsek).

Příklad 8.1.3 (ochlazování). Jestliže ohřejeme např. hrnec s vodou na 100° C a pak necháme na sporáku v pokojové teplotě 25° C chladnout, řídí se jeho okamžitá teplota Newtonovým zákonem pro ochlazování, který má tvar diferenciální rovnice (7.1)

$$y' = k(y - a),$$

kde $k, a \in \mathbb{R}$. Funkce y popisuje okamžitou teplotu, a má význam teploty okolního prostředí. Již jsme spočítali v Příkladu 7.1.1 obecné řešení rovnice (7.1):

$$y(x) = a + C \, \mathrm{e}^{kx}, \quad \text{kde} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zbývá tedy určit z konkretního zadání hodnoty k a C. Víme-li tedy například, že teplota vody v hrnci po 5 min bude 80° C, dostaneme odtud $y(0) = 100 = 25 + C\mathrm{e}^{k0}$, tedy $C = 75$ a z rovnosti, kterou dostaneme pro stav po 5 min spočteme hodnotu k:

$$80 = 25 + 75 \, \mathrm{e}^{5k}, \text{ tedy } \mathrm{e}^{5k} = 55/75, \text{ a tedy } k = \tfrac{1}{5} \log(11/15) \doteq -0{,}03101.$$

Následující tabulka ukazuje průběh teploty, počítaný v tomto (hypotetickém) případě podle popsaného modelu; hodnoty teplot jsou zaokrouhlené:

Teplota po:	5 min	10 min	20 min	30 min	40 min	50 min	60 min
	80° C	65° C	46.7° C	36.67° C	31.28° C	28.37° C	26,81° C

8.2 Nelineární rovnice prvního řádu

Příklad 8.2.1 (logistický růstový zákon). Snaha po nalezení dokonalejšího růstového zákona vedla k modifikacím diferenciální rovnice (1.17). Intuitivně cítíme, že „lepší“ růstový zákon by měla popisovat rovnice $P' = \alpha(P) \cdot P$, kde α je vhodně zvolená funkce, která je pro nějaké $\delta > 0$

na intervalu $(\delta, +\infty)$ klesající; pak bude klesat i rychlost růstu populace. Budeme se zabývat jednoduchým případem tohoto typu, dříve však uveďme jeden údaj, týkající se formy rovnice. Často se růstová konstanta α v rovnici (1.17) zapisuje ve tvaru rozdílu a pracuje se s nepatrně *formálně* odlišnou rovnicí

$$P' = \gamma P - \tau P\,, \quad \gamma, \tau > 0\,,$$

kde konstanty γ a τ charakterizují *porodnost* a *úmrtnost* dané populace.

Řešení: Modifikovaná rovnice, popisující logistický růstový zákon, je tvaru

$$P' = \gamma P - \tau P^2\,, \quad \gamma, \tau > 0\,. \tag{8.5}$$

Rovnici lze dát ještě další interpretaci: prostředí, v němž populace žije, má omezené zdroje, které určují „maximální kapacitu životního prostoru“. Růst populace je úměrný nejen její velikosti, ale i „velikosti zbývajícího prostoru“. Skutečně, položme $\lambda = \tau$ a $K = \gamma/\lambda$. Zbývající životní prostor popisuje veličina $K - P(t)$, kde konstanta K odpovídá maximální kapacitě. Rovnice tak po úpravě má tvar

$$P' = \lambda P(K - P)\,, \tag{8.6}$$

kde $\lambda, K > 0$. Zde je výše zmíněná funkce $\alpha(P) = \lambda(K - P)$ lineární, tedy obzvlášť jednoduchá. Řešení rovnice je tvaru (to se dá spočítat pomocí tzv. separace proměnných, čtenář se však o tom může přesvědčit derivováním)

$$P(t) = \frac{\gamma}{\tau + (\gamma/P_0 - \tau)\,\mathrm{e}^{-\gamma t}}\,, \quad \text{resp.} \quad P(t) = \frac{K}{1 + (K/P_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-\lambda K t}}\,, \quad t > 0\,,$$

kde $P_0 > 0$. Lze ukázat, že v *daném oboru* je to popis všech maximálních řešení rovnice (8.5). Řešená rovnice však již není *lineární rovnicí* prvního řádu, neboť obsahuje člen P^2.

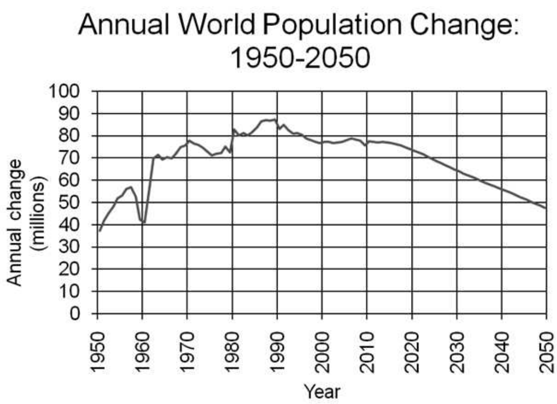
Poznámka 8.2.2. Rovnice typu (8.6) se v některých případech jeví jako poměrně dobrý model pro reálnou situaci. Tak např. studie o růstu slunečnic ukazují jinou reálnou situaci, jíž odpovídá týž model. Výška slunečnic poměrně dobře vyhovuje analogickému vztahu

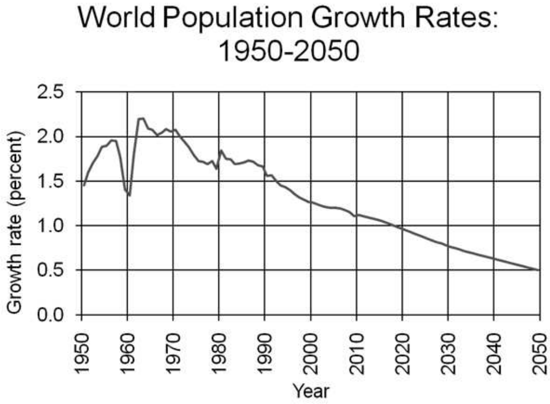
$$h(t) = \frac{H}{1 + (H/h_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-\lambda H t}}\,,$$

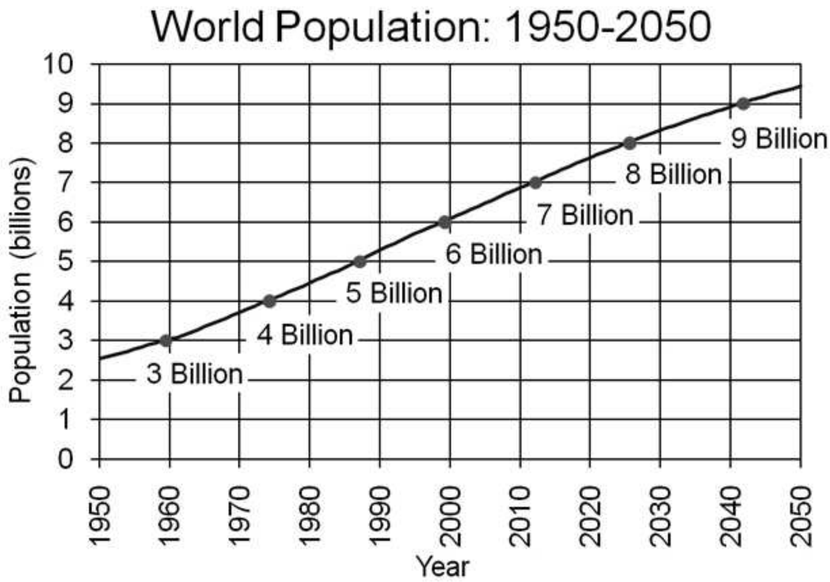
kde H je maximální výška rostliny a h_0 výška na začátku pozorování. V r. 1983 byla publikována studie, která ukázala, že analogické chování vykazuje i „světová automobilová populace“.

Poznámka 8.2.3. Pro lidskou populaci je chování růstové funkce α podstatně složitější; není to ani konstantní funkce, což jsme uvažovali v Poznámce 1.2.2, ani lineární klesající funkce jako v předcházejícím Příkladu 8.2.1. Náhledem na data v [34] zjistíme, že tzv. *meziroční přírůstek* $\log\big(P(t+1)/P(t)\big)$ (srov. s (1.18)) není ani monotonní v čase. Zatímco v letech 1950 – 60 rostl od cca 0,015 až do hodnoty 0,02 užité v Poznámce 1.2.2, na které se pak držel asi 10 let, od r. 1971 téměř stále klesá k hodnotě 0,0116 za dobu 2004 – 2005. Kolem r. 2050 by podle prognóz měl být cca 0,005.

Ukazatelé chování lidské populace jsou různorodé. Doporučujeme čtenáři náhled na URL adresu uvedenou v citaci [34]. Tam odtud jsou převzaty následující grafy, které vypovídají o lidské populaci mnohem více, než námi užité primitivní modely, které nezohledňují celou řadu dalších faktorů:







Anomalie růstu populace, který se zvýšil v letech 1950 − 1960 z 1,5 % na více než 2 % a pak se náhle propadl, souvisí s Čínou (období „Velkého skoku vpřed“ za Mao-Ce-Tunga) a vývojem hormonální antikoncepce.

Na stránkách *U.S. Census Bureau* se můžeme také například dočíst to, že se obyvatelstvo světa zdvojnásobilo v letech 1959 až 1999 (ze 3 na 6 miliard obyvatel) a že podle odhadů k dalšímu vzrůstu o 50 % dojde patrně za 45 let, tj. 9 miliard obyvatel by mohla hostit Země v roce 2044.

Příklad 8.2.4 (start rakety). Předpokládáme, že vesmírná raketa startuje ve svislém směru; poloměr Země označíme R a h_v výšku rakety nad zemským povrchem v okamžiku, kdy dojde k vyhoření paliva rakety; hodnota $x(t)$ nechť udává výšku rakety nad zemským povrchem v čase t. Od okamžiku vyhoření paliva se raketa chová jako kámen vržený do prostoru. Vrhneme-li ho malou rychlostí, spadne opět na zemský povrch, při velké rychlosti se vymaní z vlivu zemské přitažlivosti. Minimum rychlostí, pro něž nastává druhý případ, se nazývá *úniková rychlost* a naším úkolem je ji určit.

Řešení: Na počátku situace, kterou se zabýváme, je

$$x(0) = R + h_v =: x_v \quad \text{a} \quad \dot{x}(0) =: v_v \,.$$

Z Newtonova gravitačního zákona vyplývá, že velikost síly působící na raketu je dána rovností $K = -\gamma \cdot m(x)/x^2$, kde $m(x)$ je hmotnost rakety; ta se pochopitelně mění s dobou, a tedy i v závislosti na x. Je proto např. $M := m(R)$ hmotnost rakety při startu a $m := m(x_v)$ vlastní hmotnost rakety (bez paliva) [2]). Určíme velikost γ vyšetřením situace při startu. Z rovnosti

$$-Mg = -\gamma \frac{M}{R^2} \quad \text{dostaneme} \quad \gamma = gR^2\,,$$

takže $K = -gR^2 m/x^2$. Proto po vyhoření paliva pro raketu platí rovnosti

$$m\ddot{x} = -gR^2 \cdot \frac{m}{x^2}\,, \quad \text{resp.} \quad \ddot{x} = -gR^2 \cdot \frac{1}{x^2}\,.$$

Nyní si pomůžeme „trikem“: násobíme obě strany rovnice činitelem $2\dot{x}$, takže dostaneme

$$2\dot{x}\ddot{x} = -2gR^2 \cdot \frac{\dot{x}}{x^2}\,, \quad \text{resp.} \quad (\dot{x}^2)' = \left(2gR^2 \cdot \frac{1}{x}\right)'\,;$$

zde opět značíme čárkou derivaci podle času. Odtud dostaneme integrací ($v := \dot{x}$)

$$v^2 = 2gR^2 \cdot \frac{1}{x} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Uvážíme-li, že pro $t = 0$ je $v_v^2 = 2gR^2 \cdot (1/x_v) + C$, dostáváme konečně [3])

$$v^2 = 2gR^2 x^{-1} + v_v^2 - 2gR^2 x_v^{-1}\,. \tag{8.7}$$

Bude-li platit $v_v^2 - 2gR^2/x_v \geq 0$, příslušná rychlost umožní raketě opustit sféru vlivu přitažlivosti Země. Tomuto jevu odpovídá hodnota $v_v = \sqrt{2gR^2/x_v}$.

Při průměru Země rovném $D := 2R = 12,757 \cdot 10^6$ m, $g = 9,81$ ms^{-2} a při relativně malé výšce, tj. při $h_v \doteq R$, je přibližná hodnota únikové rychlosti $\sqrt{gD} \doteq 11{,}19\,$km/s. Toto je tedy hledaná úniková rychlost.

Označení 8.2.5. V dalším se budeme zabývat pohybem ideálního tělesa (hmotného bodu) v gravitačním poli Země. Jeho výšku nad zemským povrchem v čase t označíme $x(t)$ a orientaci volíme tak, aby byla nezáporná. Tomu pak odpovídá rovnice pro zrychlení [4])

$$\ddot{x} = -g\,, \tag{8.8}$$

přičemž pro jednoduchost budeme v praktických ukázkách počítat se zaokrouhlenou hodnotou $g \doteq 10\,\mathrm{ms}^{-2}$. Derivace budeme značit způsobem obvyklým ve fyzice, tj. pomocí teček nad označením funkcí. Integrací dostaneme z (8.8) $\dot{x} = -gt + C_1$. Položíme-li $v_0 := v(0) = \dot{x}(0)$, dostaneme dosazením $v_0 = C_1$ a dospějeme ke vzorečku pro rychlost

$$v(t) = -gt + v_0\,, \tag{8.9}$$

známému z fyziky. Analogicky dospějeme dalším krokem ke vzorci

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}\,gt^2 + v_0 t + C_2$$

a položením $x(0) = x_0$ určíme $C_2 = x_0$. Dospějeme tak k rovnici

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2}\,gt^2\,, \tag{8.10}$$

[2]) Složitější modely zahrnují další veličiny, ale v našem případě nehraje sledování úbytku hmotnosti rakety důležitou roli a je proto zbytečné.

[3]) Rovnice (8.7) odpovídá energetické bilanci, kterou by patrně zkušenější fyzik při odvozování napsal přímo „bez počítání“.

[4]) Na rozdíl od většiny fyzikálních učebnic zde píšeme $-g$ místo g. Z matematického hlediska má smysl se zabývat řešeními na $\mathbb{R}$, z hlediska fyzikální interpretace stačí pracovat s řešeními na intervalu $(0, +\infty)$, resp. s jejich spojitými rozšířeními na interval $[\,0, +\infty)$.

kde x_0 je výška nad povrchem Země v čase $t = 0$. I když pracujeme s otevřenými intervaly, protože na nich jsou definována řešení, funkce spojitě rozšiřujeme na uzavřené intervaly vždy, kdy je to možné a pro zkrácení zápisu užitečné.

Pro $v_0 = 0 = x_0$ tak dostaneme

$$v(t) = -\,gt\,, \quad x(t) = -\tfrac{1}{2}\,gt^2\,,$$

což jsou (až na znaménko) známé vztahy popisující fyzikální zákony, ke kterým dospěl na základě pokusů jako první Galileo Galilei (1564 – 1642).

Příklad 8.2.6 (vrh svislý vzhůru). Použijeme označení zavedené v předcházejícím odstavci. Pohyb ideálního vrženého tělesa (hmotného bodu) se děje bez odporu prostředí a zajímá nás v časovém intervalu $[\,0, t_2\,]$, kde $t_2 > 0$ je čas, ve kterém bude $x(t_2) = 0$, tj. kdy vržené těleso dopadne na zem.

Řešení: Z představy o reálné situaci vyplývá, že $x_0 = 0$ (vrháme vzhůru ze země), a že počáteční rychlost v_0 je kladná. Rovnice (8.10) bude mít jednodušší tvar

$$x(t) = v_0 t - \tfrac{1}{2}\,gt^2 = t(v_0 - \tfrac{1}{2}\,gt)\,, \tag{8.11}$$

přičemž funkce x bude kladná v intervalu $(0, t_2)$, kde $t_2 = 2v_0/g$. Funkce x nabude svého maxima na intervalu $[\,0, t_2\,]$ v nulovém bodě t_1 okamžité rychlosti

$$v(t) := \dot{x}(t) = v_0 - gt\,, \qquad \text{tedy} \qquad t_1 = v_0/g = (1/2)t_2\,;$$

funkce x roste v intervalu $[\,0, t_1\,]$ a klesá v intervalu $[\,t_1, t_2\,]$. Maximální dosažená výška vrhu je $x(t_1) = v_0^2/2g$.

Konfrontujme model s našimi představami: Vyhodíme-li kámen svisle vzhůru rychlostí 20 m/s, poletí vzhůru 2 sekundy a další 2 sekundy bude padat zpět na zem. Dosáhne maximální výšky $x(t_1) = 20\,\mathrm{m}$. Jestliže však vystřelíme vzhůru z pušky rychlostí 300 m/s, bude kulka ve vzduchu celou minutu a dosáhne největší výšky 4 500 m. Poznamenejme, že při malých rychlostech zanedbání odporu vzduchu nevede k velkým chybám, avšak ty při vyšších rychlostech rychle rostou.

Příklad 8.2.7 (volný pád). Při studiu (idealizovaného) volného pádu opět vycházíme z rovnice $\ddot{x} = -g$ a dospějeme k rovnici (8.10), ale nyní $x_0 = x(0) > 0$ udává výšku, z níž k pádu dochází a $v_0 = 0$.

Řešení: Rovnice nabude proto tvaru

$$x(t) = x_0 - \tfrac{1}{2}\,gt^2\,. \tag{8.12}$$

K dopadu předmětu na zem dojde v čase $t_1 > 0$, pro který $x(t_1) = 0$, z čehož dostáváme $t_1 = \sqrt{2x_0/g}$. Řešení (8.12) rovnice $\ddot{x} = -g$ má nyní fyzikální smysl v intervalu $(0, t_1)$. Funkce (8.12) má však rozumný fyzikální smysl i na uzavřeném intervalu $[\,0, t_1\,]$ a odpovídá spojitému rozšíření řešení na tento interval.

Opět pro ilustraci uveďme: dle tohoto modelu bude padat předmět z výšky $x_0 = 500\,\mathrm{m}$ 10 sekund a dopadne rychlostí 100 m/s. Zde je vliv odporu vzduchu podstatnější, a tak je výsledek vcelku přijatelný pro olověnou kulku, zatímco přistávací rychlost padáků je nejméně desetinásobně menší. Snadno tak nahlédneme, že v některých situacích jsou tyto zákony nepoužitelné: neřídí se jimi ani pád člověka v zemské atmosféře (např. před otevřením padáku). Zcela jsme totiž zanedbali vliv odporu prostředí. Viz další příklad.

Příklad 8.2.8 (stabilizovaný pád). V některých reálných situacích odpor prostředí zanedbat nelze. Jestliže přihlédneme k odporu vzduchu, který je úměrný rychlosti padajícího tělesa v atmosféře, dospějeme na základě fyzikálních úvah k rovnici

$$\ddot{x} = -\,k\dot{x} - g\,, \tag{8.13}$$

ve které $k > 0$ souvisí s odporem prostředí. Vyšetříme tedy tuto rovnici.

Řešení: Dosazením $v = \dot{x}$ dostaneme rovnici prvního řádu

$$\dot{v} + kv = -g\,.$$

s integračním faktorem $\exp(kt)$; to vede k identitám (píšeme kvůli zřetelnosti čárky místo teček)

$$\big(v(t)\mathrm{e}^{kt}\big)' = -\,g\mathrm{e}^{kt} = -\,\Big(\frac{g}{k}\,\mathrm{e}^{kt}\Big)' \tag{8.14}$$

a k existenci konstanty C, pro kterou je

$$v(t)\mathrm{e}^{kt} = C - \frac{g}{k}\,\mathrm{e}^{kt}$$

Z podmínky $v(0) = 0$ plyne, že $C = g/k$, z čehož dostaneme

$$\dot{x}(t) = v(t) = \frac{g}{k}\,\Big(\mathrm{e}^{-kt} - 1\Big)\,. \tag{8.15}$$

Další integrací získáme identitu

$$x(t) = -\,\frac{g}{k}\,\Big(t + \frac{1}{k}\,\mathrm{e}^{-kt}\Big) + D\,, \tag{8.16}$$

kde hodnotu konstanty D najdeme pomocí podmínky $x(0) = x_0$. Protože dostaneme $D = x_0 + g/k^2$, má identita (8.16) po úpravě tvar

$$x(t) = x_0 - \frac{g}{k^2}\,\Big(kt + \mathrm{e}^{-kt} - 1\Big)\,. \tag{8.17}$$

Funkce v ve vzorci (8.15) má pro $t \to +\infty$ limitu $-g/k$; odtud plyne, že pokud x_0 je tak velké číslo, že výraz $\exp(-kt)$ má čas klesnout k hodnotám blízkým k nule, rychlost pádu se od jistého okamžiku prakticky nezvyšuje.

Uveďme pro ilustraci příklad počítaný pomocí tohoto modelu: Předpokládáme-li, že při seskoku padákem určitého typu z dostatečně velké výšky se rychlost pádu ustálí na 6 m/s, bude $k = 5/3$, protože $g/k = 10 : (5/3) = 6$. Při tomto k trvá podle (8.17) seskok z výšky 1000 m nepatrně déle než 167,25 sekundy. Podle (8.15) by rychlost pádu byla (pokud by se padák otevřel v čase $t = 0$) již za 3 sekundy větší než 5,9 m/s. Volný pád bez přihlédnutí k odporu vzduchu by přitom trval dle modelu z Příkladu 8.2.7 jen o málo více než 14 sekund. Opět jsme však zanedbali některé vlivy, které mohou za určitých okolností hrát podstatnější úlohu, např. pokles hustoty atmosféry v závislosti na výšce apod.

Jiná úvaha nám může osvětlit některé jevy související s počasím: Nepatrné vodní kapičky tvořící mlhu mají limitní rychlost klesání (pro $t \to +\infty$) rovnou cca 12 mm/s. Proto mlha padá někdy tak dlouho. Odpovídá to hodnotě $k = 2500/3 = 833{,}\overline{3}$ a doba pádu z 1000 m na zem by za těchto podmínek trvala teoreticky přes 23 hod. Pro konfrontaci se zkušenostmi z praxe uvažme, že jsme zcela zanedbali další faktory, např. vliv slunečního záření.

Příklad 8.2.9 (let rakety). Vytvořte matematický model pro let rakety, a to od momentu startu až po její dopad na zem. Přihlédněte přitom k úbytku váhy vznikajícímu hořením paliva, zanedbejte však odpor prostředí a případnou změnu tíhového zrychlení v závislosti nad povrchem země.

Řešení: Uvědomme si větší komplexitu modelu, který budeme vytvářet. Budeme pracovat s pohybem tělesa s proměnou hmotností pod vlivem dvojice sil, z nichž jedna popisující tah motoru bude působit pouze do vyhoření paliva. Od tohoto okamžiku se bude raketa vykonávat pohyb obdobný tomu, který jsme popsali v Příkladu 8.2.6 až do okamžiku, kdy dosáhne maximální výšky a pak bude její pohyb analogický jako ten, který jsme popsali v Příkladu 8.2.7. Situace je stále velmi zjednodušená, model by však měl dát lepší představu o chování rakety, která nedosáhne únikové rychlosti.

Zavedeme nejprve označení. Hmotnost rakety bez paliva označíme M_r a celkovou hmotnost paliva při startu rakety M_p, takže celková hmotnost rakety při startu je $M_0 = M_r + M_p$. Označíme dále τ celkovou dobu hoření paliva a $M(t)$ okamžitou hmotnost rakety v čase t, $0 \le t \le \tau$, takže $M(\tau) = M_r$; dále předpokládáme, že palivo bude ubývat konstantní rychlostí, přičemž úbytek hmotnosti za časovou jednotku označíme μ. Symbolem označíme u označíme výtokovou rychlost plynů z trysek rakety a $v = v(t)$ její rychlost v čase t, který měříme od okamžiku startu rakety.

Z modelu chceme zejména získat :

(a) Okamžitou výšku rakety $h(t)$ a její rychlost $v(t)$ v čase t od okamžiku startu až do jejího dopadu na zem,

(b) výšku rakety a její rychlost v okamžiku τ, a

(c) maximální výšku, které raketa dosáhne.

Ze zadání vyplývá, že na raketu působí vzhůru ve svislém směru až do vyhoření paliva stálá síla $F_{tah} = \mu u$ a v opačném směru přitažlivost $G = M(t)g$, kde g značíme (konstantní) gravitační zrychlení. Podle Newtonova pohybového zákona dostaneme

$$M(t)\,a = F_{tah} - G = \mu u - M(t)g\,.$$

Po startu se tedy raketa pohybuje vzhůru se zrychlením

$$a = \dot{v} = \frac{\mu u}{M(t)} - g > 0\,.$$

Zároveň vidíme, že tažná síla motorů musí splňovat podmínku $F_{tah} > M_0 g$, jinak by se raketa nevznesla. Protože palivo ubývá rovnoměrně, je jeho úbytek popsán lineární funkcí, takže

$$M(t) = M_0 - \mu t\,.$$

Okamžitou rychlost rakety až do doby vyhoření paliva získáme integrací diferenciální rovnice

$$\dot{v} = \frac{\mu u}{M(t) - g} = \frac{\mu u}{M(0) - \mu t} - g\,.$$

Integrací této rovnice obdržíme

$$v(t) = \int \dot{v}(t)\,\mathrm{d}t = \int \Big(\frac{\mu u}{M(0) - \mu t} - g\Big)\,\mathrm{d}t = \mu u \int \frac{\mathrm{d}t}{M(0) - \mu t} - gt\,.$$

Integrujeme pomocí jednoduché substituce $z = M(0) - \mu t$, ze které dostáváme pro dosazení $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\mu$, $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}z}{\mu}$, z čehož plyne

$$\begin{aligned} v(t) &= \mu u \int \frac{1}{z}\Big(-\frac{\mathrm{d}z}{\mu}\Big) - gt = -u \int \frac{\mathrm{d}z}{z} - gt = -u \log|z| - gt + C_1 = \\ &= -u \log(M(0) - \mu t) - gt + C_1\,. \end{aligned}$$

Z podmínky $v(0) = 0$ dostaneme hodnotu $C_1 = u \log M_0$. Pro rychlost $v(t)$ v časovém úseku $[\,0,\tau\,]$ tak dostaneme

$$\begin{aligned} v(t) &= -u\log(M(0)-\mu t) - g + u\log M_0 = -u\left(\log(M(0)-\mu t) - \log M_0\right) - gt = \\ &= -u\log\Big(\frac{M(0)-\mu t}{M_0}\Big) - gt\,. \end{aligned}$$

Výšku h získáme jako primitivní funkci k v, přičemž integrační konstantu určíme z počáteční podmínky $h(0) = 0$. Pak určíme $h(\tau)$.

$$\begin{aligned} h(t) &= \int v\,\mathrm{d}t = -u\int \log\Big(\frac{M(0)-\mu t}{M_0}\Big)\,\mathrm{d}t - g\int t\,\mathrm{d}t = \\ &= -u\int \log\Big(\frac{M(0)-\mu t}{M_0}\Big)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}gt^2\,. \end{aligned}$$

Budeme postupovat trochu rychleji: Po substituci $z = \frac{M(0)-\mu t}{M_0}$ obdržíme pro integrál I v předcházející rovnici

$$I = \int \log\Big(\frac{M(0)-\mu t}{M_0}\Big)\,\mathrm{d}t = -\frac{M_0}{\mu}\int \log z\,\mathrm{d}z = -\frac{M_0}{\mu}\,z(z-1) + C_2\,,$$

neboli, po provedení „zpětné substituce“ a úpravě

$$I = -\frac{M_0-\mu t}{\mu}\Big[\log\Big(\frac{M(0)-\mu t}{M_0}\Big) - 1\Big] + C_2\,.$$

Dosadíme-li nyní vypočtený integrál do vyjádření $h(t)$, dostaneme

$$h(t) = \frac{u(M_0-\mu t)}{\mu}\Big[\log\Big(\frac{M(0)-\mu t}{M_0}\Big) - 1\Big] - uC_2 - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Dosazením $h(0) = 0$ určíme

$$C_2 = -\frac{M_0}{\mu}\,,$$

takže raketa má okamžitou výšku

$$h(t) = \frac{u(M_0-\mu t)}{\mu}\Big[\log\Big(\frac{M(0)-\mu t}{M_0}\Big) - 1\Big] + \frac{uM_0}{\mu} - \frac{1}{2}gt^2\,,\quad t\in[\,0,\tau\,]\,.$$

Tím jsme získali odpověď na otázku v **(a)**.

V okamžiku $t = \tau$ vyhoření veškerého paliva je $M(\tau) = M(0) - \mu\tau = M_r$. Pro čas vyhoření paliva tak dostaneme

$$\tau = \frac{M_0 - M_r}{\mu}\,,$$

a po dosazení obdržíme

$$h(\tau) = \frac{u(M_0-\mu\tau)}{\mu}\Big[\log\Big(\frac{M(0)-\mu\tau}{M_0}\Big) - 1\Big] + \frac{uM_0}{\mu} - \frac{1}{2}\,g\tau^2\,,$$

což po úpravě dá

$$h(\tau) = \frac{uM_r}{\mu}\Big[\log\Big(\frac{M_r}{M_0}\Big) + \frac{M_0}{M_r} - 1\Big] - \frac{1}{2}\,g\tau^2\,.$$

V okamžiku τ dosáhne raketa své nejvyšší rychlosti

$$v_{\max} = v(\tau) = -u\log\Big(\frac{M_0-\mu\tau}{M_0}\Big) - g\tau = u\log\Big(\frac{M_0}{M_r}\Big) - g\tau\,.$$

Po vyhoření veškerého paliva se raketa chová jako při vrhu svislém vzhůru, neboť na ni působí pouze síla přitažlivosti $G = M_r g$. Zároveň známe její počáteční rychlost v okamžiku τ. Proto dostáváme

$$h(t) = h(\tau) + v(\tau)(t-\tau) - \frac{1}{2}\,g(t-\tau)^2\,, \quad t \geq \tau\,,$$

kde $h(\tau)$ je výška rakety v okamžiku τ vyhoření paliva, druhý člen odpovídá dráze při pohybu konstantní rychlostí $v(\tau)$ za čas $t-\tau$ a třetí člen odpovídá „složce volného pádu“ se zrychlením g za dobu $t-\tau$.

Raketa dosáhne své největší výšky v okamžiku t_1, kdy bude její rychlost nulová („bod úvratu“). Je $v(t_1) = 0$ pro

$$v(\tau) - g(t_1 - \tau) = 0\,, \quad \text{takže je} \quad t_1 = \frac{v(\tau) + gt}{g}\,.$$

Odtud dostaneme dosazením

$$\begin{aligned} h_{\max} = h(t_1) &= h(\tau) + v(\tau)(t_1-\tau) - \frac{1}{2}\,g\,(t_1-\tau)^2 = \\ &= h(\tau) + v(\tau)\frac{v(\tau)}{g} - \frac{1}{2}\,g\Big(\frac{v(\tau)}{g}\Big)^2 = h(\tau) + \frac{v^2(\tau)}{2g}\,. \end{aligned}$$

Od okamžiku t_1 se raketa pohybuje volným pádem (odpor prostředí zanedbáváme), postupujeme tedy jako v Příkladu 8.2.7 a určíme dobu tohoto pádu z výšky $h_{\max}$. Tuto část již přenecháme čtenáři za cvičení.

Příklad 8.2.10 (řetězovka). V obecné rovině jde o popis křivky, modelující tvar řetězu, lana či vodiče, zavěšeného mezi dvěma body. Situaci opět zjednodušujeme, uvažujeme dokonale ohebné a neprůtažné homogenní vlákno. Problém je velmi starý, viz Historické poznámky.

Řešení: I když technici zpravidla vycházejí přímo z popisu řetězovky jako grafu hyperbolického kosinu, my se dříve seznámíme s jeho odvozením. Problém vede na nelineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$ay'' = \sqrt{1 + (y')^2}\,. \tag{8.18}$$

Výraz vpravo je vlastně délkou části oblouku, kterou užíváme k výpočtu síly, kterou je v určitém bodě namáháno. Substitujeme-li $z = y'$, $z' = y''$, dostaneme rovnici 1. řádu

$$z' = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 + z^2}\,,$$

kterou už snadno vyřešíme. Při rozepsání $z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ dostaneme formální úpravou

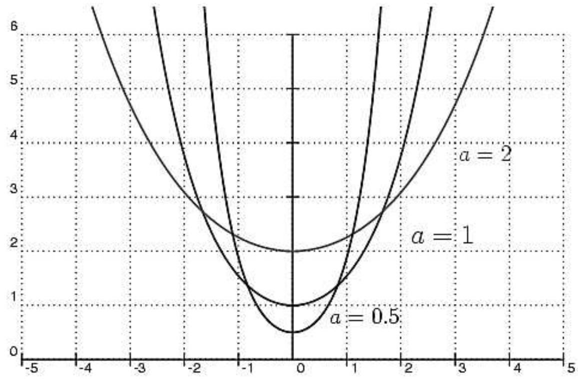
$$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{resp.} \quad \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{a}\int \mathrm{d}x\,,$$

odkud dostaneme

$$[\,\mathrm{argsinh}\, z\,] = \log\big(z + \sqrt{1+z^2}\big) = \frac{x}{a} + C\,, \quad \text{nebo-li} \quad z = \sinh\Big(\frac{x}{a} + C\Big)\,.$$

Zvážíme-li ještě provedenou substituci a zvolíme-li šikovně souřadnicovou soustavu tak, aby v bodě $x = 0$ bylo $z(0) = y'(0) = 0$, dostaneme podmínku $\sinh C = 0$, která dává $C = 0$. Další integrací dostaneme

$$y = \int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int \sinh\Big(\frac{x}{a}\Big)\,\mathrm{d}x = a \cdot \cosh\Big(\frac{x}{a}\Big) + C\,.$$

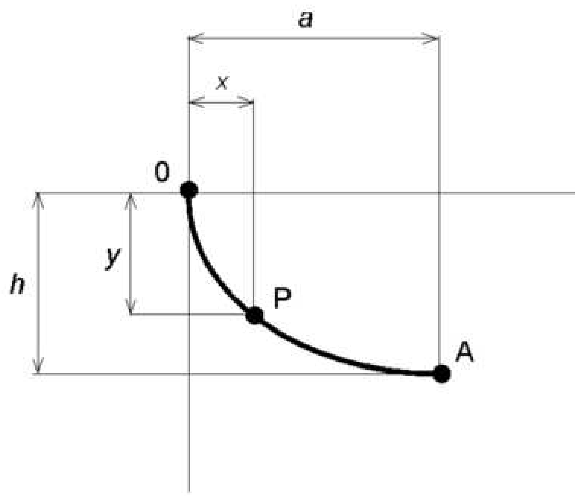


Na obrázku odpovídá nejvíce rozevřená křivka hodnotě $a = 2$ a zužující se křivky postupně hodnotám $a = 1$ a $a = 1/2$. I v tomto případě má C nepříliš důležitou roli, jde vlastně pouze o vertikální posunutí grafu. Ukázali jsme, že řetězovka je, jak již bylo řečeno, až na jistou deformaci grafem hyperbolického kosinu.

Příklad 8.2.11 (tautochrona, resp. isochrona, resp. brachistochrona). Tato úloha má zdánlivě k praktickému využití daleko. Její formulace je těsně spjata s předcházející úlohou o řetězovce. Je třeba nalézt tvar křivky mezi dvěma body umístěnými v různé výšce v gravitačním poli a neležícími nad sebou, podél které se bez tření pohybující se objekt dostane z jednoho bodu do druhého v nejkratším čase. Je intuitivně zřejmé, že začneme-li z jiného bodu křivky, dostaneme se do nejnižšího jejího bodu podél ní opět v nejkratším možném čase. Vůbec však není zřejmé, že celkový čas pohybu nezávisí na bodu křivky, z kterého pohyb začíná, a že tento čas je pro všechny stejný.

Řešení: Sledujte obrázek: Má-li se se objekt (idealizovaně: hmotný bod HB) přemístit z bodu O do bodu A v nejkratším čase, zkusíme potřebný čas vypočítat. Rychlost pohybu HB bude dle fyzikálního zákona rovna $v = \sqrt{2gy}$, délku oblouku počítáme podle známého vzorce integrací výrazu $\sqrt{1 + (y')^2}$. Čas, který máme minimalizovat, je proto roven

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}}\, \mathrm{d}x$$



Vzhledem k tomu, že vlastnost minimality bude mít každá, tedy i infinitesimálně malá část trajektorie HB, bude platit

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}} \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{konst.}$$

Odtud jednoduchou úpravou získáme ODR

$$y(1+(y')^2) = \text{konst.}$$

Jde o nelineární ODR, jejímž řešením je křivka s parametrickým vyjádřením

$$x(t) = a(t-\sin t)\,, \qquad y(t) = a(1-\cos t) = 2\,a\sin(t/2)\,,$$

která se nazývá **cykloida**.

8.3 Systém lineárních rovnic 1. řádu

Příklad 8.3.1. Tento příklad je podrobně rozebrán v [3] a ilustruje chování lidské populace v souvislosti s přenosem pohlavní choroby: gonorrhoea (česky kapavka) je choroba, šířící se téměř výlučně pohlavním stykem. Dnes je sice úspěšně léčena antibiotiky, ale spolu se stoupající frekvencí výskytu rezistentních kultur původce, bakterie Neisseria gonorrhoea (gonokok), představuje závažný problém.

V poválečných obdobích docházelo vždy k růstu počtu zachycených případů. Po druhé světové válce se tehdejší Československo vyhnulo většímu nárůstu počtu infikovaných díky zvýšení životní úrovně obyvatelstva, aplikaci zákona o pohlavních chorobách a hlavně objevu penicilinu. Proto celkově poklesl výskyt sexuálních infekcí v padesátých letech na minimum, avšak v šedesátých letech nastává výrazná změna; za dalších dvacet let vzrostl v Evropě počet nakažených kapavkou třikrát. U nás jí ročně onemocní cca 1000 lidí a na jejím častějším výskytu má velký podíl migrace. Výskyt kapavky se v Česku dlouhodobě snižoval. Z téměř 6500 případů v roce 1990 klesl v polovině 90. let na 2000 případů a od roku 2000 se počet nakažených pohybuje kolem jednoho tisíce.

Za častý výskyt kapavky může její velmi vysoká infekčnost. Při styku s virem HIV je pravděpodobnost nákazy řádově několika málo procent, u kapavky se u žen udává přes 50 %. Inkubační doba je 2 až 14 dnů, přičemž u mužů to bývá nejčastěji v rozmezí 2 – 5 a u žen 4 – 7 dnů. Poznamenejme ještě, že po vyléčení pacient není ani v nejmenším imunní vůči další nákaze. Náš model je opět značně zjednodušený, ale i tak velmi zajímavý.

Řešení: Sexuálně aktivní a promiskuitní část obyvatelstva rozdělíme na dvě skupiny: infikované a ohrožené. Označme $c_1(t)$ celkový počet promiskuitních mužů a $c_2(t)$ celkový počet promiskuitních žen. Dále nechť $x(t)$ je počet všech infikovaných mužů a $y(t)$ počet všech infikovaných žen. Máme tedy $c_1(t)-x(t)$ ohrožených mužů a $c_2(t)-y(t)$ ohrožených žen. Budeme předpokládat, že šíření kapavky se řídí podle těchto pravidel:

(a) Infikovaní muži se vyléčí v poměru a_1, úměrnému jejich celkovému počtu a infikované ženy se vyléčí v poměru a_2, který je také úměrný jejich celkovému počtu. Zde $a_1 > a_2$, a to proto, že u mužů je onemocnění většinou bolestivější a tak je odhaleno dříve. Symptomy onemocnění u žen jsou hůře zachytitelné a tak jsou v průměru ženy infekční delší dobu.

(b) Celkový počet promiskuitních mužů je c_1 a promiskuitních žen je c_2, přičemž tyto počty považujeme za neměnné.

(c) Nově infikovaní muži přibývají úměrně součinu $(c_1-x)y$ s koeficientem úměrnosti b_1 a analogicky nově infikované ženy přibývají úměrně součinu $(c_2-y)x$ s koeficientem úměrnosti b_2.

Nežli sestavíme příslušný systém rovnic, uvědomme si, že uvažujeme pouze heterosexuální kontakty; z různých příčin infikovaných homosexuálů je jen velice malé procento celkového počtu onemocnělých, což je v příkrém kontrastu ve srovnání s případy onemocnění syfilis či AIDS.

Formulované zjednodušené předpoklady nyní vtělíme do následující soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\,a_1x + b_1(c_1 - x)y\,, \quad (1)\\ \dot{y} &= -\,a_2y + b_2(c_2 - y)x\,. \quad (2) \end{aligned} \tag{8.19}$$

Prověříme nejprve, zda náš model v některých aspektech odpovídá realitě. Tomu odpovídá zjištění, zda v případě,

(i) že je $x(t_0) > 0$ a $y(t_0) > 0$ pro nějaké t_0, je také $x(t) > 0$ a $y(t) > 0$ pro všechna $t \geq t_0$, a

(ii) jestliže je $x(t_0) < c_1$ a $y(t_0) < c_2$, pak také i $x(t) < c_1$ a $y(t) < c_2$ pro všechna $t \geq t_0$.

Tvrzení z (i) budeme dokazovat sporem: Nechť $t_1 > t_0$ a t_1 je nejmenší z takových nulových bodů x. Pak v t_1 nabude první rovnice z (8.19) tvaru $\dot{x}(t_1) = b_1c_1y(t_1)$. Je $y(t_1) > 0$, protože v opačném případě by bylo $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ řešením; odtud plyne, že hodnota vpravo v rovnosti je kladná. Pak však je x v bodě t_1 rostoucí funkce a nabývá tak v levém okolí bodu t_1 *záporné* hodnoty, což vede díky Darbouxově vlastnosti x ke sporu s tím, že t_1 je *nejmenší* nulový bod x větší než t_0.

Také tvrzení z (ii) budeme dokazovat sporem: Nyní nechť je t_1, $t_1 > t_0$ nejmenší takový bod, ve kterém nabude x hodnoty c_1 nebo y nabude hodnoty c_2. Bude-li $x(t_1) = c_1$, dostaneme z první rovnice v (8.19) rovnost $\dot{x}(t_1) = -a_1c_1$. Vpravo v rovnosti je záporná hodnota, takže pro nějaké $t_0 < t < t_1$ je $x(t) > c_1$. Pak se však musí nabýt hodnoty c_1 někde v intervalu (t_0, t) a to je spor s volbou t_1, což je *nejmenší* takový bod. Analogicky odvodíme spor z předpokladu, že t_1, $t_1 > t_0$ je nejmenší takový bod, ve kterém nabude y hodnoty c_2.

Nyní přikročíme k analýze modelu. Intuitivně cítíme, že ovlivněním některých parametrů bychom mohli dospět ke stavu, kdy choroba bude na ústupu, ale to musíme dokázat. Ukážeme proto, že platí tvrzení:

Věta 8.3.2. (a) *Předpokládejme, že je $a_1a_2 < b_1b_2\,c_1c_2$. Potom každé řešení soustavy* (8.19)*, pro něž je $0 < x(t_0) < c_1$, $0 < y(t_0) < c_2$, se pro $t \to +\infty$ blíží konstantnímu řešení*

$$x = \frac{b_1b_2\,c_1c_2 - a_1a_2}{a_1b_2 + b_1b_2c_2}\,, \quad y = \frac{b_1b_2\,c_1c_2 - a_1a_2}{a_2b_1 + b_1b_2c_1}\,. \tag{8.20}$$

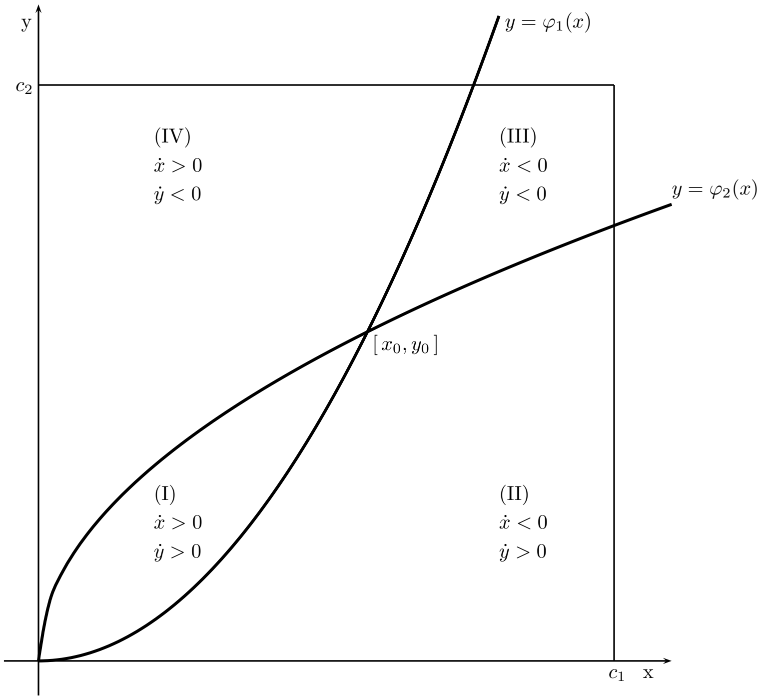
Jinak řečeno, v takovém případě se počet nakažených v ohrožené části populace postupně ustálí na uvedených hodnotách.
(b) *Předpokládejme, že je $a_1a_2 > b_1b_2\,c_1c_2$. Potom každé řešení soustavy* (8.19)*, pro něž platí $0 < x(t_0) < c_1$, $0 < y(t_0) < c_2$, se pro $t \to +\infty$ blíží k* 0*. V takovém případě kapavka postupně vymizí.*

Ukážeme si hlavní momenty důkazu obou tvrzení Věty 8.3.2. Pro důkaz části (a) rozdělíme obdélník $(0, c_1) \times (0, c_2)$ na čtyři části (sledujte Obr. 8.1), ve kterých derivace žádná z derivací $\dot{x}$, $\dot{y}$ nemění znaménko. To uděláme takto: v rovnici (1) v (8.19) položíme $\dot{x} = 0$ a spočteme ze vzniklé rovnice y v závislosti na x. Dostaneme

$$y = \frac{a_1\,x}{b_1(c_1 - x)} \equiv \varphi_1(x)\,.$$

Analogicky v rovnici (2) v (8.19) položíme $\dot{y} = 0$ a tak dostaneme

$$x = \frac{a_2\,y}{b_2(c_2 - y)} \quad \text{neboli} \quad y = \frac{b_2c_2x}{a_2 + b_2x} \equiv \varphi_2(x)\,.$$



Obr. 1

Obě funkce jsou rostoucími funkcemi v proměnné x a je

$$\lim_{x\to c_1} \frac{a_1\, x}{b_1(c_1 - x)} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{b_2 c_2 x}{a_2 + b_2 x} = c_2\,,$$

neboli pro $x \to c_1$ je $\varphi_1(x) \to +\infty$ a pro $x \to +\infty$ je $\varphi_2(x) \to c_2$. Průsečíky křivek $y = \varphi_1(x)$ a $y = \varphi_2(x)$ jsou dva: Jsou to body o souřadnicích $[\,0, 0\,]$ a $[\,x_0, y_0\,]$, kde

$$x_0 = \frac{b_1 b_2\, c_1 c_2 - a_1 a_2}{a_1 b_2 + b_1 b_2 c_2}\,, \quad y_0 = \frac{b_1 b_2\, c_1 c_2 - a_1 a_2}{a_2 b_1 + b_1 b_2 c_1}\,.$$

Konečně funkce $\varphi_2(x)$ v bodě $x = 0$ vzhledem k předpokládané nerovnosti roste rychleji než funkce $\varphi_1(x)$, protože

$$\varphi_2'(0) = \frac{b_2 c_2}{a_2} > \frac{a_1}{b_1 c_1} = \varphi_1'(0)\,.$$

Odtud vyplývá, že mezi body 0 a x_0 je $\varphi_2(x) > \varphi_1(x)$. Poznamenejme ještě, že $[\,x_0, y_0\,]$ reprezentuje rovnovážné řešení systému (8.19), protože $\dot x$ i $\dot y$ jsou pro $x = x_0$ a $y = y_0$ rovny 0.

Obdélník se tak rozpadne na čtyři části (viz opět Obr. 1) (I), (II), (III) a (IV). Protože $\dot x$ je kladná nad křivkou $y = \varphi_1(x)$ a záporná pod ní, a podobně $\dot y$ je kladná pod křivkou $y = \varphi_2(x)$ a záporná nad ní, můžeme popsat v jednotlivých částech chování $\dot x$, $\dot y$ takto:

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & \dot x > 0\,,\ \dot y > 0\,, & \text{(III)} & \dot x < 0\,, \dot y < 0\,, \\ \text{(II)} & \dot x < 0\,,\ \dot y > 0\,, & \text{(IV)} & \dot x > 0\,, \dot y < 0\,. \end{array}$$

Důkaz části (a) Věty 8.3.2 se rozpadne na čtyři části podle toho, ve které z částí (I), (II), (III), (IV) leží bod $[\,x(t_0), y(t_0)\,]$.

Lemma 8.3.3. *Pro každé řešení* $\big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [\,t_0, \infty)$, *pro které je* $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (I), *je* $[\,x(t), y(t)\,] \in$ (I) *pro všechna* $t \in [\,t_0, \infty)$. *Dále je* $\big(x(t), y(t)\big) \to [\,x_0, y_0\,]$ *pro* $t \to +\infty$.

Důkaz. Budeme postupovat sporem: Předpokládejme, že v nějakém čase t_1 řešení $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ opustí (I). Pak však $\dot{x}(t_1) = 0$ nebo $\dot{y}(t_1) = 0$, protože by se tak stalo jedině přes jednu z křivek $y = \varphi_1(x)$ nebo $y = \varphi_2(x)$. Nechť tedy $\dot{x}(t_1) = 0$. Dalším derivováním rovnice (1) z (8.19) dostaneme po dosazení t_1 za t

$$\ddot{x}(t_1) = b_1\bigl(c_1 - x(t_1)\bigr)\dot{y}(t_1)\,. \tag{8.21}$$

Protože $x(t_1) < c_1$ a $\dot{y}$ je kladná na $y = \varphi_1(x)$, $0 < x < x_0$, je pravá strana rovnosti kladná. Proto má $x(t)$ v bodě t_1 lokální minimum. To je však ve sporu s tím, že $\dot{x} > 0$ v (I), takže x je rostoucí.

Jestliže je $\dot{y}(t_1) = 0$, postupujeme obdobným způsobem. Derivováním rovnice (2) z (8.19) dostaneme po dosazení t_1 za t

$$\ddot{y}(t_1) = b_2\bigl(c_2 - y(t_1)\bigr)\dot{x}(t_1)\,. \tag{8.22}$$

Protože $y(t_1) < c_2$ a $\dot{x}$ je kladná na $y = \varphi_2(x)$, $0 < x < x_0$, je pravá strana rovnosti kladná. Proto má $y(t)$ v bodě t_1 lokální minimum. To je však ve sporu s tím, že $\dot{y} > 0$ v (I), takže y je rostoucí. V obou případech jsme dospěli ke sporu, takže jsme tím dokončili důkaz první části tvrzení Lemmatu 8.3.3.

Z již dokázaného vyplývá, že jakékoli řešení systému (8.19), pro něž je $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (I) „zůstává“ v (I), tj. platí pro ně $[\,x(t), y(t)\,] \in$ (I) pro všechna $t > t_0$. Protože x i y jsou omezené, monotónní funkce a existují tedy

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*\,, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = y^*\,,$$

přičemž (x^*, y^*) je s ohledem na Lemma 5.3.3 rovnovážným řešením (8.19). Taková řešení jsou pouze dvě (odpovídají průsečíkům křivek φ_1 a φ_2): $[\,0, 0\,]$ a $[\,x_0, y_0\,]$. Protože však jsou x i y rostoucí funkce, platí $x^* = x_0$ a $y^* = y_0$. $\square$

Lemma 8.3.4. *Pro každé řešení* $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$, $t \in [\,t_0, \infty)$, *pro které je* $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (III), *je* $[\,x(t), y(t)\,] \in$ (III) *pro všechna* $t \in [\,t_0, \infty)$. *Dále je* $\bigl(x(t), y(t)\bigr) \to [\,x_0, y_0\,]$ *pro* $t \to +\infty$.

Důkaz se provede analogicky jako u Lemmatu 8.3.3. Opět se postupuje sporem: Předpokládáme, že v nějakém čase t_1 řešení $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ opustí (III). Pak však $\dot{x}(t_1) = 0$ nebo $\dot{y}(t_1) = 0$, protože by se tak stalo opět jedině přes jednu z křivek $y = \varphi_1(x)$ nebo $y = \varphi_2(x)$. Pak by musela nabývat x nebo y v bodě t_1 lokálního minima, což vede ke sporu; nastane tedy situace, popsaná v první části tvrzení. Protože x i y jsou omezené, monotónní funkce, dostaneme podobným obratem jako v důkazu Lemmatu 8.3.3 druhou část tvrzení.

Zbývá vyřešit případ oblastí (II) a (IV), o kterých platí nepatrně odlišná tvrzení. Zformulujeme je do následujících dvou lemmat, která mají obdobný důkaz; proto pak dokážeme pouze jedno. Porovnejte následující lemma s Lemmatem 8.3.3 a všimněte si rozdílu ve znění.

Lemma 8.3.5. *Pro každé řešení* $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$, $t \in [\,t_0, \infty)$, *pro které je* $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (II) *a které „zůstane“ v* (II), *tj. pro něž je* $[\,x(t), y(t)\,] \in$ (II) *pro všechna* $t \in [\,t_0, \infty)$, *je* $\bigl(x(t), y(t)\bigr) \to [\,x_0, y_0\,]$ *pro* $t \to +\infty$ *(tedy* $(x(t), y(t))$ *konverguje ke stacionárnímu řešení).*

Lemma 8.3.6. *Pro každé řešení* $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$, $t \in [\,t_0, \infty)$, *pro které je* $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (IV) *a které „zůstane“ v* (IV), *tj. pro něž je* $[\,x(t), y(t)\,] \in$ (IV) *pro všechna* $t \in [\,t_0, \infty)$, *je* $\bigl(x(t), y(t)\bigr) \to [\,x_0, y_0\,]$ *pro* $t \to +\infty$ *(tedy* $(x(t), y(t))$ *konverguje ke stacionárnímu řešení).*

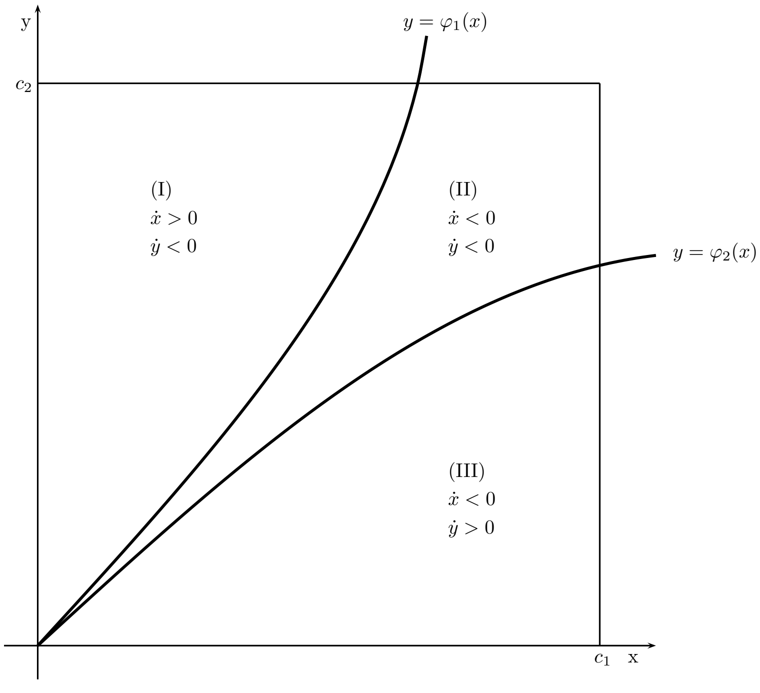
Důkaz Lemmatu 8.3.5. Jestliže pro řešení $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$, $t \in [\,t_0, \infty)$ platí $[\,x(t), y(t)\,] \in$ (IV) pro všechna $t \in [\,t_0, \infty)$, je x klesající a y rostoucí funkce na intervalu $[\,t_0, \infty)$. Přitom je x kladná a $y(t) < c_2$, takže x i y jsou omezené monotónní funkce. Platí tedy opět jako v důkazu Lemmatu 8.3.3

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*\,, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = y^*\,,$$

přičemž (x^*, y^*) je s ohledem na Lemma 5.3.3 rovnovážným řešením (8.19). Protože je y rostoucí, nemůže to být bod $[\,0,0\,]$ a je to tedy bod $[\,x_0, y_0\,]$. □

Nyní můžeme přistoupit k důkazu věty, ve které je zformulováno řešení řešeného problému. I když jsme si již připravili částečné výsledky, které potřebujeme, je důkaz věty poměrně dlouhý. Ukazuje se tak, že pro řešení praktických problémů potřebujeme z matematického hlediska další prohlubující poznatky, takže prakticky tvoříme jakousi „miniteorii“.

Důkaz Věty 8.3.2. Nejprve se budeme zabývat částí (a). Připomeňme, že z hlediska praktické upotřebitelnosti našeho modelu popsaného systémem dvou rovnic (8.19), odpovídají reálné počáteční hodnoty bodům obdélníka $(0,c_1)\times(0,c_2)$. Ten jsme rozdělili na čtyři části (I), (II), (III) a (IV). Pak jsme ve čtyřech Lemmatech 8.3.3 až 8.3.6 probrali případy, kdy počáteční hodnoty $x(t_0)$ a $y(t_0)$ odpovídají bodům těchto disjunktních oblastí.



Obr. 2

Je-li $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (I), nebo $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (III), pak pro takové řešení podle Lemmat 8.3.3 a 8.3.4 platí $\big(x(t), y(t)\big) \to [\,x_0, y_0\,]$ pro $t \to +\infty$. Další krok důkazu se rozpadne na dvě části: Jestliže je $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (II), nebo $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (IV), pak pro takové řešení, pokud *neopustí tyto oblasti*, podle Lemmat 8.3.5 a 8.3.6 opět platí $\big(x(t), y(t)\big) \to [\,x_0, y_0\,]$ pro $t \to +\infty$. Zbývá si rozmyslet případ, kdy by řešení $\big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [\,t_0, \infty)$ *opustilo oblasti* (II) nebo (IV). Pak by však „přešlo“ do (I) nebo (III) a situaci bychom dořešili pomocí Lemmatu 8.3.3 nebo Lemmatu 8.3.4. Pokud tedy $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (II), nebo $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (IV) nebo $[\,x(t_0), y(t_0)\,]$ leží na křivkách o rovnicích $y = \varphi_1(x)$ nebo $y = \varphi_2(x)$, dostaneme opět $\big(x(t), y(t)\big) \to [\,x_0, y_0\,]$ pro $t \to +\infty$. Tím jsme vyčerpali všechny možnosti a dokončili tak důkaz části (a).

Nyní dokážeme část (b) Věty 8.3.2. Jestliže je $a_1 a_2 > b_1 b_2\, c_1 c_2$, potom křivky o rovnicích $y = \varphi_1(x)$ a $y = \varphi_2(x)$ dělí obdélník $(0,c_1)\times(0,c_2)$ na *tři* části (I), (II), (III); sledujte Obr. 8.2. Připomeňme, že $\dot{x}$ je kladná nad křivkou $y = \varphi_1(x)$ a záporná pod ní, a podobně $\dot{y}$ je kladná pod křivkou $y = \varphi_2(x)$ a záporná nad ní. Proto lze popsat v jednotlivých částech (I), (II), (III) chování $\dot{x}$, $\dot{y}$ takto:

$$\text{(I)} \quad \dot{x} > 0\,, \ \ \dot{y} < 0\,, \qquad \text{(II)} \quad \dot{x} < 0\,, \ \ \dot{y} < 0\,, \qquad \text{(III)} \quad \dot{x} < 0\,, \ \ \dot{y} > 0\,.$$

Každé řešení, pro které je $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (II) „zůstane“ nadále v (II), tj. platí $[\,x(t), y(t)\,] \in$ (II) pro všechna $t \in [\,t_0, +\infty)$. To dokážeme sporem. Pokud by to neplatilo, pak pro t_1, $0 < t_1 < \infty$, by bod $[\,x(t_1), y(t_1)\,]$ by ležel na křivce o rovnici $y = \varphi_1(x)$ nebo na křivce o rovnici $y = \varphi_2(x)$. Protože v prvním případě je $\dot{x}(t_1) = 0$, $x(t_1) < c_1$ a $\dot{y}$ je nyní záporná na křivce $y = \varphi_1(x)$, je pravá strana v rovnosti (8.21) rovnosti záporná. To znamená, že x nabývá v bodě t_1 svého minima, což je ale spor, neboť $\dot{x} < 0$ v (II). Ve druhém případě je $\dot{y}(t_1) = 0$, $y(t_1) < c_2$ a $\dot{x}$ je záporná na křivce $y = \varphi_2(x)$, takže je pravá strana v (8.22) záporná. To znamená, že y nabývá v bodě t_1 svého minima, což je ale spor, neboť $\dot{y} < 0$ v (II). V oblasti (II) jsou x i y omezené monotónní funkce, mají tedy vlastní limitu 0, neboť nyní je $[\,0, 0\,]$ jediným bodem odpovídajícím rovnovážnému řešení soustavy (8.19).

Tím jsme dokázali jakýsi analog Lemmatu 8.3.3, tentokrát však pro oblast označenou nyní (II). Zbývá zjistit, jak se budou chovat řešení, pro něž je $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (I) nebo $[\,x(t_0), y(t_0)\,] \in$ (III). Pokud půjde o řešení, která zůstanou v těchto oblastech, pak díky monotonii x a y dojdeme opět k rovnovážnému řešení odpovídajícímu dvojici $[\,0, 0\,]$. Pak již stačí uvážit, že pokud takové řešení opustí (I) nebo (III), musí se „dostat“ přes křivky o rovnicích $y = \varphi_1(x)$ a $y = \varphi_2(x)$ do (II), ale řešení, které se v nějakém čase ocitne na jedné z těchto křivek nebo v (II) se opět při $t \to +\infty$ blíží ke stacionárnímu řešení odpovídajícímu dvojici $[\,0, 0\,]$. □

Poznámka 8.3.7. V dnešní době je možné získat prostřednictvím internetu o kapavce poměrně mnoho informací. Nebezpečí nákazy nesmíme bagatelizovat, každoročně u nás onemocní touto chorobou s občasnými výkyvy několik stovek lidí. Znepokojivé je, že zpočátku velmi efektivní léčba penicilinem či tetracyklinem se stává méně účinnou díky postupnému vzniku rezistence, dokonce i na některá další speciální antibiotika. Z matematického hlediska má prezentovaný model řadu „háčků“. S ohledem na četnost pohlavního styku v závislosti na věku lze dosáhnout přesnějších výsledků při přihlédnutí k věkovým kategoriím (pro zajímavost: nejohroženější věkovou skupinu tvoří u nás lidé zhruba ve věku 15 − 30 let). Je téměř nemožné získat dostatečně přesné odhady velikosti jednotlivých konstant figurujících v modelu. Přesto je však možné z dostupných dat (onemocnění kapavkou a některými dalšími pohlavními chorobami podléhá speciálním evidenčním předpisům) odhadovat např. veličinu b_1c_1/a_2, kterou lze interpretovat jako průměrný počet mužů, kteří jsou nakaženi jednou ženou v období její infekčnosti, pokud jsou všichni muži náchylní k onemocnění. Stejně tak lze odhadovat veličinu b_2c_2/a_1 s podobnou interpretací. Z nich lze pak odhadovat, zda je

$$\Big(\frac{b_1c_1}{a_2}\Big)\Big(\frac{b_2c_2}{a_1}\Big) > 1\,.$$

Podrobnější, i když ne aktuální, rozbor situace lze nalézt v knize [3].

Kapitola 9

Historické poznámky

Každá vědní disciplina má svoji historii. Poznatky v matematice se postupně skládají a vrší po stovky let. „Nepřepisují se“ pravidelně, jako v jiných vědních oborech, ale zůstávají v platnosti od okamžiku jejich objevení. V této minikapitole se pokusíme podat stručnou informaci o historii pojmů a tvrzení probrané části teorie ODE. Čtenáři, který by se rád o historii ODE poučil detailněji, doporučujeme nahlédnout např. do [8], [13] nebo do staršího textu [32].

9.1 Trocha historie

Historické poznámky 9.1.1. Diferenciální rovnice se objevují nejprve v pracích, tvořících samotný základ historie diferenciálního a integrálního počtu. Vyskytují se již r. 1693 u Christiana Huygense (1629 – 1695) a také u Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646 – 1716), obvykle v konkrétních úlohách. Někdy se považuje za řešení diferenciálních rovnic již hledání primitivních funkcí, které u Leibnize sahá do r. 1675. Poznamenejme ještě, že studium problémů, vedoucích na systémy diferenciálních rovnic, lze stopovat až k Isaacu Newtonovi (1642 – 1727). U něj tvořil hlavní objekt studia pohyb dvou a více těles při vzájemném gravitačním působení a pochází od něj též první pokus o klasifikaci rovnic 1. řádu.

Jeden z historických problémů, který jsme zmínili (viz str. 9), se týkal křivky nazývané *traktrix*. Tuto křivku popsal již roku 1670 Claude Perrault (1613 – 1688), architekt a všestranně nadaný člověk. Později ji studovali jak Newton (1676), tak i Huygens (1692). ODR se vyskytly v souvislosti s dalšími křivkami mnohokrát: Problém *isochrony*, který jsme zmínili (viz str. 128), pochází z r. 1690, kdy jeho řešení publikoval v časopise *Acta Eruditorum* Johann Bernoulli (1667 – 1748).

Ve stejné práci zformuloval Johann Bernoulli úlohu o nalezení tvaru *řetězovky* (viz str. 127). Jeho řešení podali o rok později nezávisle na sobě např. Huygens, Leibniz a Bernoulli. Obrácený oblouk řetězovky se vyskytuje i v dávné architektuře; ukázkou je obrázek oblouku (viz str. 135), který byl částí palácového komplexu, postaveného v 6. stol. našeho letopočtu v Ctesiphonu (Irák).

Další vývoj teorie ODR významně ovlivnili JACOB BERNOULLI (1655 – 1705) a JOHANN BERNOULLI (1667 – 1748). Oba byli významnými matematiky a zároveň bezprostředními pokračovateli Leibnize. Problém isochrony, který jsme zmínili, pochází z r. 1690, kdy jeho řešení publikoval v časopise *Acta Eruditorum* JOHANN BERNOULLI (1667 – 1748). Ve stejné práci zformuloval Johann Bernoulli úlohu o nalezení tvaru řetězovky. Jeho řešení podali o rok později nezávisle na sobě např. Huygens, Leibniz a Bernoulli.

Separace proměnných je obsažena již v Leibnizově práci z r. 1691; její explicitní popis podal Jacob Bernoulli. Již v r. 1694 Johann Bernoulli také použil už v r. 1694 *přibližné řešení* rovnice (2.3). Popsaná metoda konstrukce přibližného řešení, kterou v podstatě používal LEONHARD EULER (1707 – 1783), je z r. 1768. Poznamenejme, že o stáří poznatků z této oblasti svědčí např. to, že pojmy *charakteristický polynom* nebo *charakteristická rovnice* pocházejí patrně již od Eulera. Tato etapa vývoje ODE spočívající, zhruba řečeno, v hledání obecných metod integrace rovnic, trvala do r. 1775, pak došlo ve studiu této problematiky na dlouhou dobu k jistému útlumu.

Teprve kolem r. 1740 se objevují diferenciální rovnice vzniklé eliminací konstant ze vztahu pro funkce a jejich derivace. Studoval je ALEXIS FONTAINE DES BERTINS (1704 – 1771).

Historicky prvním tvrzením o *existenci* (a dokonce i o jednoznačnosti řešení, ovšem za silnějších předpokladů) bylo tvrzení, které dokázal LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789 – 1857) r. 1824. Mnohem později studovali kompaktnost množiny spojitých funkcí na intervalu CESARE ARZELÀ (1847 – 1912) a GIULIO ASCOLI (1843 – 1896), jejich tvrzení je však pouze jednou z možných cest k důkazu Peanova tvrzení o existenci řešení, o kterém jsme se zmínili.

V tomto textu jsme také použili mnoha poznatků z algebry. K oblasti studia lineárních rovnic položil základy Leibniz pracemi z r. 1678 a r. 1693. Metoda řešení soustav rovnic o dvou, třech a čtyřech neznámých pochází z r. 1729 od COLINA MACLAURINA (1698 – 1746), byla však publikována po jeho smrti r. 1748. Švýcar GABRIEL CRAMER (1704 – 1752), po němž se dnes postup (*Cramerovo pravidlo*) nazývá, ho popsal r. 1750.

Významným algebraikem byl ALEXANDER-THEOPHILE CHARLES AUGUST VANDERMONDE (1735 – 1786). Pro práce z oblasti teorie řešitelnosti algebraických rovnic vyšších stupňů bývá označován jako předchůdce NIELSE HENRIKA ABELA (1802 – 1829). Nesporně je však tvůrcem *teorie determinantů*, ve které mu náleží řada výsledků.

Obyčejné diferenciální rovnice (ODE) tvoří významnou partii matematiky, která je vzhledem k četným aplikacím velmi důležitá. Velmi podnětné jsou v tomto směru učebnice [3] a [8]. U vět o existenci a jednoznačnosti jsme se o hlavních protagonistech vývoje již krátce zmínili. Neprobírali jsme podrobně všechny typy rovnic, které lze bez větší námahy vyloženým aparátem řešit; viz např. [12]. Také jsme neuváděli složitější tvrzení o chování maximálních řešení.

Rovnice druhého řádu byly v souvislosti s fyzikálními problémy studovány již r. 1691. Studovali je jak Jacob Bernoulli, tak i Johann Bernoulli. Jedním z takových problémů byl popis kmitání strun. Zde Johann Bernoulli navázal na BROOKA TAYLORA (1685 – 1731). Další výsledky v této problematice získali Euler r. 1728 a DANIEL BERNOULLI (1700 – 1782) r. 1733, kteří dospěli nejen k základní frekvenci kmitání struny, ale i k vyšším harmonickým. Daniel Bernoulli r. 1734 již úspěšně řešil rovnici řádu 4. Roku 1739 informoval Euler Johanna Bernoulliho o řešení obecných lineárních rovnic s konstantními koeficienty. Také metoda variace konstant se objevuje v jednoduché verzi v souvislosti se studiem speciální rovnice 2. řádu poprvé u Eulera r. 1739. V obecnější podobě ji při systematickém studiu lineárních diferenciálních rovnic (s nekonstantními koeficienty) použil později JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813).

V případě komplexních funkcí *komplexní proměnné* je řešení diferenciálních rovnic rovněž rozvinutou partií matematické analýzy; poznamenejme alespoň to, že řešení lze např. hledat ve tvaru mocninné řady. Řešení rovnic tohoto typu je věnována kniha [11].

Příklad, ukazující možnou nejednoznačnost řešení, který jsme uvedli již v Kapitole 1, nalezl Peano. Tzv. Lipschitzovu podmínku zavedl poprvé Lipschitz r. 1864 při vyšetřování Fourierových řad. Poznamenejme konečně, že jedinečným zdrojem poznatků z oblasti historie ODE je kniha [8].

Otázek stability jsme se pouze dotkli, avšak i ony patří ke klasickým partiím teorie ODE. Jedním z těch, kteří významně přispěli ke studiu stability, byl ruský matematik Aleksandr Michajlovič Ljapunov (1857 – 1918). Zabýval se praktickým problémem existence rotujících elipsoidálních kapalných útvarů při malých změnách rychlosti rotace. Populárně lze ideu stability popsat takto: Rovnovážný stav systému (5.31) je stabilní, jestliže každé řešení, které je v čase $t = 0$ „blízko“ rovnovážného stavu bude „blízko“ i v libovolném budoucím okamžiku.

Literatura

[1] Agnew, R. P.: *Differential equations*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1960, (druhé vydání).

[2] Bečvář, J.: *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000.

[3] Braun, M.: *Differential equations and their applications*, Springer, New York, 1978, (druhé vydání).

[4] Brzezina, M.: *Jak na soustavy obyčejných diferenciálních rovnic ?*, Technická univerzita Liberec, Liberec, 2001.

[5] Černý, I.: *Matematická analýza, 3. část*, Technická univerzita Liberec, Liberec, 1996.

[6] Černý, I.: *Úvod do inteligentního kalkulu 2; 1000 příkladů z pokročilejší analýzy*, Academia, Praha, 2005.

[7] Fick, E.: *Aufgabensammlung über Differentialgleichungen*, R. Oldenbourg, München und Berlin, 1930.

[8] Heuser, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1995, (třetí vydání).

[9] Hildebrand, F. B.: *Advanced calculus for applications*, Pentice Hall, London, 1962, (třetí vydání).

[10] Holický, P., Kalenda, O. F. K.: *Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy*, Matfyzpress, Praha, 2002.

[11] Jarník, V.: *Diferenciální rovnice v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1975.

[12] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno, 1995.

[13] Kline, M.: *Mathematical thought from ancient to modern time*, Oxford University Press, New York, 1972, 1990.

[14] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V.: *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*, SNTL, Praha, 1975.

[15] Krasnov, M. L., Kiselev, A. I., Makarenko, G. I.: *Sbornik zadač po obyknovennym differencial'nym uravněnijam*, Vysšaja škola, Moskva, 1976.

[16] Kropáč, J., Kuben J.: *Gama a beta funkce. Transformace Laplaceova, Z a Fourierova*, Vojenská akademie v Brně, Brno, 1999.

[17] Kuben, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Vojenská akademie Brno, Brno, 2000, (3. vydání).

[18] Kurzweil, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL, Praha, 1978.

[19] Ljaško, I. I. a kol.: *Matěmatičeskij analiz 3*, Vyšča škola, Kyjev, 1987.

[20] Meyberg, K., Vachenauer P.: *Höhere Mathematik*, Springer Ver., Berlin, 1991.

[21] Nagy, J.: *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic*, SNTL, Praha, 1983.

[22] Nagy, J.: *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, SNTL, Praha, 1980.

[23] Nováková, E., Hyánková, M., Průcha, L.: *Studijní text: Laplaceova transformace*, interní text ČVUT pro cvičení, URL: `http://math.feld.cvut.cz/hyankova/ltru.pdf`, Praha.

[24] Papula, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Übungen*, Friedrich Vieweg & Sohns, Braunschweig, 2001, (4. vydání.).

[25] Petrovskij, I. G.: *Lekcii po tĕorii obyknovennych differencial'nych uravnĕnij*, Nauka, Moskva, 1964.

[26] Pontrjagin, L. S.: *Obyknovennyje differencial'nyje uravnĕnija*, GIFML, Moskva, 1961.

[27] Reiss, E. L., Callegari, A. J., Ahluwallia, D. S.: *Ordinary differential equations with applications*, Holt, Rinegart and Winston, New York, 1976.

[28] Samojlenko, A. M. a kol.: *Differencialnyje uravnĕnija – primĕry i zadači*, Vysšaja škola, Moskva, 1989.

[29] Sasser, J. E.: *Mathematical origins of ordinary differential equations: the first hundred years*, obsaženo v: *Proc. of The Midwest Mathematics History Conferences*, Modern Logic Publishing, 1997.

[30] Schiff, J. L.: *The Laplace transform. Theory and applications.*, Springer Ver., New York, 1999.

[31] Segal, A. C.: *A linear diet model*, str. 175 – 176, obsaženo v: *Apostol, T. M. and al.*, *A century of calculus II*, The Mathematical Association of America, 1992, (sborník článků z *American Mathematical Monthly* a *Mathematical Magazine*).

[32] Stěpanov, V. V.: *Kurs diferenciálních rovnic*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

[33] Wikipedia: *Taq-i Kisra* (foto), `http://en.wikipedia.org/wiki/Taq-i_Kisra`.

[34] U.S. Census Bureau: *International Data Base*, `http://www.census.gov/population/international/data/idb/worldpopgraph.php`.

[35] Veselý, J.: *Základy matematické analýzy* (*Druhý díl*), Matfyzpress, Praha, 2009.

[36] Wylie, C. R.: *Differential equations*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1979.