Definitivní sylabus pro MA1b

Letní semestr 2005/6 (Veselý)

Pojem primitivní funkce, základní vlastnosti primitivních funkcí. Spojitost primitivní funkce. Rozdíl primitivních funkcí k funkci f na (a, b) je konstantní. Primitivní funkce "ze vzorečků" pro derivování. Existence primitivní funkce ke spojité funkci (bez důkazu). Příklady: existuje primitivní funkce k nespojité funkci a dokonce i k funkci, která není omezená v každém okolí jednoho bodu (vycházíme z derivace funkce $f(x) = x^2 \sin x^{-2}$, $f(0) = 0$). Metoda per partes.

Souvislost vzorců pro derivování součinu a složené funkce s metodami hledání primitivních funkcí. Příklady na užití metody per partes. Primitivní funkce k funkcím $x \sin x, \log x, (1+x^2)^{-n}$. Dvě varianty věty o substituci. Integrace racionálních funkcí, postupná redukce na jednodušší případy. Rozklad racionální funkce na parciální zlomky (tvrzení bez důkazu).

Ukázky řešení některých typů příkladů: rozklad na parciální zlomky. Jednoduché standardní substituce pro převod na případ racionální funkce. Substituce

$$„\log x = t\text{“}, \ „\exp x = t\text{“},$$

substituce pro převod integrandu tvaru $R(\sin x, \cos x)$ na racionální funkci a kritéria volby. Jednoduché „slepování“ primitivních funkcí.

„Slepování“ při užití substituce „$\operatorname{tg}(x/2) = t$,“. Eulerovy substituce. Motivace zavedení zobecněné primitivní funkce (zpf). Dvě zpf k téže funkci se liší pouze o aditivní konstantu. Definice Newtonova integrálu.

Základní poznatky o Newtonově integrálu. $\mathcal{N}$-integrál jako lineární funkcionál na $\mathcal{N}(a, b)$, jeho nezápornost a monotonie. Aditivita vůči oboru, existence integrálu na $(c, d) \subset (a, b)$. Per partes a substituce pro Newtonův integrál.

Riemannův integrál – základní potřebné pojmy. Dělení D intervalu $[\,a, b\,]$, norma $\nu(D)$ dělení D. Horní a dolní součty $S(f; D)$ a $s(f; D)$. Zjemnění dělení. Vliv na $S(f; D)$ a $s(f; D)$. Nerovnost $s(f; D_1) \le S(f; D_2)$ pro libovolná $D \in \mathcal{D}(a, b)$. Definice horního a dolního integrálu, definice Riemannova integrálu. Nutná a postačující podmínka pro existenci s $S(f; D) - s(f; D) < \varepsilon$. Existence R-integrálu z funkce $f \in \mathcal{C}(a, b)$. Existence R-integrálu z funkce f monotónní na $[\,a, b\,]$.

Další vlastnosti Riemannova integrálu: $\mathcal{R}(a, b)$ je lineární prostor, R-integrál je na něm lineárním funkcionálem; tento funkcionál je nezáporný a tedy i monotónní. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $[\,c, d\,] \subset [\,a, b\,]$, je restrikce $f|[\,c, d\,] \in \mathcal{R}(c, d)$. R-integrál má vlastnosti plochy (aditivita vůči oboru, monotonie a integruje správně konstanty).

Existence primitivní funkce F ke spojité funkci na (a, b). Základní odhad pro R-integrál. K tomu: z $f \in \mathcal{R}(a, b)$ plyne f^+, f^- a $|\,f\,| \in \mathcal{R}(a, b)$. R-integrál a integrální součty $\sigma(f, D, \zeta)$. Konverguje-li norma dělení $\nu(D_k) \to 0$ a $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pak $\sigma(f, D_k, \zeta) \to (\mathcal{R})\text{–}\int f$.

Existují-li $(\mathcal{R})\text{–}\int_a^b f$ a $(\mathcal{N})\text{–}\int_a^b f$, mají touž hodnotu. Křivka a její délka. Vzorec pro délku grafu funkce. Objem a povrch rotačního tělesa. Integrál $(\mathcal{N})\text{–}\int_0^\infty (\sin x)/x$ a jeho neabsolutní konvergence (elementární důkaz). Srovnávací kriterium.

Kritéria konvergence pro neabsolutně konvergentní integrály (Abel, Dirichlet). Závěrečné poznámky k integrálu.

Obyčejné diferenciální rovnice. Obecná terminologie: řešení rovnice, maximální řešení rovnice, úplné řešení rovnice. Řád a stupeň rovnice. Lineární diferenciální rovnice 1.řádu - řešení. Lineární prostor řešení rovnice s nulovou pravou stranou. Metody hledání partikulárního řešení: integrační faktor, variace konstanty. Nutnost teoretického základu: Úvod k metrickým prostorům.

Příklady metrických prostorů (MP): (1) normované lineární prostory, (2) prostor A^m m-tic reálných čísel s různými normami, $\mathbb{R}$ jako MP (3) $\mathcal{C}(a,b)$ s maximovou normou (4) diskrétní prostor (5) A^m s eukleidovskou normou: $\mathbb{R}^m$ (6) Lineární prostor se skalárním součinem (7) $\mathcal{C}(a,b)$ s integrální normou.

Nerovnosti mezi normami. Dále vzdálenost množin a diametr množiny. Koule $B(x,r)$, uzavřená koule $K(x,r)$, sféra $S(x,r)$. Situace v diskrétním (ultrametrickém) prostoru. Podprostor metrického prostoru. Izometrické zobrazení (P,ϱ) na (Q,σ). Izometrické prostory (symetrický vztah).

Příklad: (8) přenesení metriky prostým zobrazením, které se tak stane izometrií. Izometrie $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$, izometrické vnoření $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$. Příklad: (9) Metrika na rozšířené reálné ose (pomocí rozšíření $T(x) = x/(1+|x|)$ limitami). (10) Součin metrických prostorů. A^m se „součtovou normou“ je kartézský součin m kopií $\mathbb{R}$.

Otevřené a uzavřené množiny. Jejich systémy v MP – vlastnosti. Okolí v širším a užším smyslu. Topologie, topologický prostor. Spojitost zobrazení mezi MP, speciálně spojitost funkce v bodě. Možnost práce s okolími v širším a užším smyslu. Problém limity v MP. Limita posloupnosti v MP. Hromadné a limitní body množiny.

Původ označení supremové normy ($\|\cdot\|_\infty$) v A^m. Vnitřní a hraniční body $M \subset (P,\varrho)$. Vnitřek, hranice, uzávěr množiny $M \subset (P,\varrho)$. Hromadné a izolované body M. Limitní body M. Některé elementární vztahy pro uzávěr, vnitřek a hranici M. Spojitost zobrazení – ekvivalentní podmínky. Znění věty o globální spojitosti zobrazení.

Příklady na použití aparátu MP: Množina M' všech hromadných bodů množiny $P \subset (P,\varrho)$ je uzavřená. Lineární funkcionál „R-integrál přes $[\,a,b\,]$“ je spojitý na prostoru $\mathcal{C}(a,b)$ se supremovou normou. Vzdálenost bodu x od neprázdné množiny $A \subset (P,\varrho)$ je spojitá na P. Funkční oddělování $A, B \subset (P,\rho)$ uzavřených množin spojitou funkcí f s $H_f = [\,0,1\,]$. Charakteristika globální spojitosti $f : (P,\varrho) \to (Q,\sigma)$ pomocí vzorů otevřených a uzavřených množin. Ekvivalentní normy a ekvivalentní metriky – porovnání.

Izometrie a homeomorfismus MP, příklady. Ekvivalentní metriky a homeomorfismy. Metrické a topologické vlastnosti MP, příklady. Bolzano-Cauchyho podmínka konvergence posloupnosti v MP. Analogicky: stejnoměrná spojitost, atp. Množina hustá (v (P,ϱ)). Různý popis hustoty množiny. Řídká množina, příklady. Separabilita prostoru, příklady. Součin separabilních prostorů je separabilní.

Separabilita $\mathcal{C}(a,b)$ (přes po částech lineární funkce). Je-li A hustá otevřená, je její komplement řídká množina. Alternativní definice řídké množiny: vnitřek jejího uzávěru je prázdná množina. Množiny 1. a 2. kategorie (Bairova klasifikace).

Úplný prostor. Příklady: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^m$, diskrétní prostor, $\mathcal{C}(a,b)$. Zúplnění (úplný obal) MP s náznakem důkazu tvrzení o existenci.

Úplnost prostoru $\mathcal{C}(a,b)$ – důkaz. Důležitá tvrzení v úplných MP: Cantorova věta o průniku nerostoucí posloupnosti neprázdných uzavřených množin s diametrem konvergujícím k 0. Definice kontrakce. Banachova věta o pevném bodu. Baireova věta o hustotě průniku hustých otevřených množin v MP. Úplný metrický prostor je (v sobě) 2. kategorie.

Objasnění: Úplný metrický prostor je (v sobě) 2. kategorie. Otevřenost v množině (podprostoru) $M \subset (P,\varrho)$ a v (P,ϱ) – k rozmyšlení. Pokrytí, otevřené pokrytí. Definice kompaktní množiny (prostoru). Centrovaný systém – duální popis kompaktnosti pomocí uzavřených množin. Totální omezenost, konečná ε-síť. Totálně omezený prostor je omezený. Totálně omezený prostor je separabilní. Kompaktní množina $M \subset (P,\varrho)$ je uzavřená.

Centrovaný systém uzavřených množin v kompaktním prostoru má neprázdný průnik. Omezenost a uzavřenost množiny není obecně ekvivalentní s její kompaktností – příklady v $\mathcal{C}(a,b)$ a $\mathcal{M}(A)$. Uzavřená množina v kompaktním MP je kompaktní. Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní. Důsledky pro reálné funkce, existence „nejbližšího bodu“. MP je kompaktní, právě když je úplný a totálně omezený. Sekvenciální kompaktnost. Prostor je sekvenciálně kompaktní, právě když je kompaktní. Kompaktifikace – informativně.

Souvislé prostory a množiny, souvislost v $\mathbb{R}$. Role obojetných množin. Spojitý obraz souvislé množiny je souvislý. Úsečky v normovaném lineárním prostoru jsou souvislé. Sjednocení souvislých množin s neprázdným průnikem je souvislá množina. Lomená čára a její souvislost. Hvězdovité a konvexní množiny jsou souvislé. Uzávěr souvislé množiny je souvislá množina. Funkce $\sin x^{-1}$ a souvislost (sjednocení grafu s neprázdnou podmožinou úsečky spojující body $[0,-1]$ a $[0,1]$). Komponenty prostoru.

Stejnoměrná spojitost spojité funkce na kompaktním prostoru – srovnání obecného kontextu a věty pro interval $[a,b]$ v $\mathbb{R}$. Spojité prosté zobrazení kompaktního prostoru (P,ϱ) na (Q,σ) je homeomorfismus. Darbouxova vlastnost spojité funkce na souvislém prostoru; charakterizace souvislosti. Oblast v $\mathbb{R}^m$. V oblasti $G \subset \mathbb{R}^m$ lze spojit každé dva body lomenou čarou. Základní vlastnosti komponent. Uzavřenost komponent. Komponenty otevřené množiny jsou oblasti. Každá otevřená množina v $\mathbb{R}^m$ je spočetným sjednocením oblastí. Informativně: lokální souvislost.

Weierstrassova věta o stejnoměrné aproximaci funkce $f \in \mathcal{C}(a,b)$ polynomem. (důkaz nebude zkoušen).