

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Petra Surynková

Plochy stavební praxe

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: **PhDr. Alena Šarounová, CSc.**

Studijní program: **Matematika**

PRAHA 2006

Děkuji všem, kteří mne při sepisování této práce podpořili. Mé zvláštní poděkování patří PhDr. Aleně Šarounové, CSc. za odborné vedení a množství cenných rad.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 12.května 2006

Petra Surynková

Obsah

Abstrakt	vii
Úvod	1
1 Obecné vlastnosti ploch	2
1.1 Vytvoření plochy	1
1.2 Některé vlastnosti ploch	5
1.2.1 Křivky na ploše	5
1.2.2 Tečna křivky plochy a tečná rovina plochy	8
2 Klasifikace ploch	12
2.1 Přímkové plochy	12
2.1.1 Zborcené plochy	13
2.2 Cyklické plochy	19
2.3 Rotační plochy	20
2.4 Šroubové plochy	20
2.4.1 Přímkové šroubové plochy	20
2.4.2 Cyklické šroubové plochy	22
2.5 Translační plochy	23
2.6 Klínové plochy	23
2.7 Obalové plochy	24
3 Rozvinutelné plochy	26
3.1 Vytvoření a základní vlastnosti	26
3.1.1 Rozvinutelné plochy jako obalové plochy	26
3.1.2 Rozvinutelná plocha spojující dvě dané křivky	28
3.2 Rozvinutí rozvinutelných ploch	30
3.3 Rozvinutí válcových ploch	32
3.4 Rozvinutí kuželových ploch	37
3.5 Rozvinutí rozvinutelné šroubové plochy	40
4 Využití rozvinutelných ploch	43
4.1 Přejížděvací plochy	43
4.2 Klenby	45
4.3 Další užití rozvinutelných ploch	48
Závěr	50

Obrazová příloha	51
-------------------------	-----------

Literatura	59
-------------------	-----------

Seznam obrázků

1.1	Ilustrace k vytvoření plochy jako dvojparametrické množiny bodů	3
1.2	Vytvoření kruhové válcové plochy	4
1.3	Vytvoření kruhové kuželové plochy	4
1.4	Obrázek.....	6
1.5	Obrázek.....	7
1.6	Obrázek.....	7
1.7	Tečna rovinné křivky.....	8
1.8	Tečná rovina a normála plochy	9
1.9	Tečná rovina v hyperbolickém bodě anuloidu	10
1.10	Eliptické, parabolické a hyperbolické body na anuloidu.....	11
2.1	a) Regulární přímka na přímém kruhovém konoidu s tečnými rovinami b) Torzální přímka s torzální rovinou na kuželové ploše	12
2.2	a) Rotační jednodílný hyperboloid v Mongeově promítání b) Rotační jednodílný hyperboloid v perspektivě	13
2.3	Obrázek.....	15
2.4	Obrázek.....	15
2.5	Obrázek.....	15
2.6	Aimondova báh	15
2.7	Návrh střechy nad půdorysem pravidelného pětiúhelníka	16
2.8	Návrh střechy nad půdorysem šesticípé hvězdy.....	16
2.9	Přímý kruhový konoid jako střecha nad kruhovým půdorysem.....	16
2.10	Střecha nad rozlehlým prostorem složená z přímých kruhových konoidů.....	16
2.11	Přímý kruhový konoid jako opěrná zeď	17
2.12	Plocha šikmého průchodu nad kosodélníkem <i>MNOP</i>	17
2.13	Návrh použití plochy šikmého průchodu	18
2.14	Freziérův cylindroid v Mongeově promítání.....	18
2.15	Návrh řešení klenby nad schodištěm.....	18
2.16	Plocha Montpeliérského oblouku.....	19
2.17	Plocha Marseillského oblouku	19
2.18	Obrázek.....	20
2.19	Obrázek.....	20
2.20	Obrázek.....	20
2.21	Přímá uzavřená přímková šroubová plocha	21
2.22	Točité schodiště	21
2.23	Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha.....	22
2.24	Možné použití uzavřených přímkových šroubových ploch u šroubů.....	22
2.25	Normální cyklická šroubová plocha.....	23

2.26	Příklady ozdobných sloupů	23
2.27	Rourová plocha jako potrubí	24
3.1	Vznik rozvinutelné plochy	27
3.2	Rozvinutelné plochy	28
3.3	Rozvinutelná plocha určená dvěma řídicími křivkami	29
3.4	Obrázek	30
3.5	Rozvinutí pláště rotačního válce seříznutého rovinou	33
3.6	K odvození výpočtu poloměru oskulační kružnice elipsy e v bodě U	34
3.7	Rozvinutí pláště válce s jedním závitěm pravotočivé šroubovice	35
3.8	Rozvinutí pláště kosého válce	37
3.9	Rozvinutí pláště rotačního kužele seříznutého rovinou	39
3.10	Přibližné rozvinutí pláště kosého kužele	40
3.11	Rozvinutí rozvinutelné šroubové plochy	42
4.1	Přechodová plocha mezi dvěma rotačními válcovými plochami	43
4.2	Přechodová plocha a její rozvinutí v perspektivě	44
4.3	Přechodová plocha určená kružnicí a čtvercem	44
4.4	Přechodová rozvinutelná plocha spojující dvě potrubí o obdélníkovém a kruhovém průřezu	45
4.5	Valená klenba	45
4.6	Valená klenba u Negrelliho viaduktu v Praze - ČR	45
4.7	Klenební oblouky	46
4.8	Křížová klenba	46
4.9	Kláštevní klenba	46
4.10	Křížová klenba s vyznačenými tvořícími přímkami a průsečnými křivkami	47
4.11	Křížová klenba	47
4.12	Křížová klenba s lomenými vrcholnicemi	47
4.13	Gotická křížová klenba	47
4.14	Obrázek	48
4.15	Obrázek	48
4.16	Obrázek	48
Příloha.1	Chladicí věže ve tvaru rotačního jednodílného hyperboloidu - jaderná elektrárna Temelín - ČR	51
Příloha.2	Plocha šikmého průchodu na Negrelliho viaduktu v Praze - ČR	52
Příloha.3	Ta samá plocha s vyznačenými tvořícími přímkami a obrysem	52
Příloha.4	Ukázka zastřešení rotačními plochami Sacré-Coeur (kostel Nejsvětějšího srdce Ježíšova) v Paříži - Francie	53
Příloha.5	Další příklad rotačních ploch použitých k zastřešení Modrá mešita v Istanbulu - Turecko	53
Příloha.6	Přímá uzavřená přímková šroubová plocha jako točité schodiště	54
Příloha.7	Přechodová rozvinutelná plocha spojující dvě potrubí o obdélníkovém a kruhovém průřezu	54

Příloha.8	Použití částí válcových ploch na zámku v Louňovicích pod Bláníkem - ČR.....	55
Příloha.9	Valené klenby na mostě přes řeku Ticino v Pavii - Itálie	55
Příloha.10	Křížová klenba v Praze - ČR.....	56
Příloha.11	Křížové klenby na Malostranském náměstí v Praze - ČR	56
Příloha.12	Gotické křížové klenby v katedrále Notre-Dame v Laonu - Francie.....	57
Příloha.13	Válcové plochy v Centre Pompidou v Paříži - Francie.....	57
Příloha.14	Válcové plochy jako okapové roury	58
Příloha.15	Válcové plochy jako okapové roury	58

Abstrakt

Název práce: Plochy stavební praxe
Autor: Petra Surynková
Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: PhDr. Alena Šarounová, CSc.
e-mail vedoucího: Alena.Sarounova@mff.cuni.cz

Abstrakt: Bakalářská práce Plochy stavební praxe se zabývá základními vlastnostmi ploch a jejich využitím v technické praxi. Speciálně se věnuje rozvinutelným plochám. Práce je koncipována jako učební text pro učitele a studenty deskriptivní geometrie a zájemce o architekturu. Práce stručně popisuje některé druhy ploch a ukazuje návrhy jejich využití. Podrobně pak studuje rozvinutelné plochy, jejich vytvoření, základní vlastnosti a uvádí i několik příkladů rozvíjení rozvinutelných ploch do roviny. Část práce též předkládá možná využití rozvinutelných ploch v praxi. K většině ploch je připojen také obrázek. K práci je přidána obrazová příloha, která obsahuje fotografie staveb z celého světa, na kterých se zmíněné plochy vyskytují. Součástí bakalářské práce je rovněž přiložené CD, na němž se nachází další obrazová příloha a bakalářská práce v elektronické podobě. Kromě toho jsou na CD zdrojové soubory všech obrázků z bakalářské práce.

Klíčová slova: plocha, rozvinutelná plocha, střecha, klenba

Title: Surfaces of Building Practice
Author: Petra Surynková
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: PhDr. Alena Šarounová, CSc.
Supervisor's e-mail address: Alena.Sarounova@mff.cuni.cz

Abstract: My bachelor thesis Surfaces of Building Practice deals with the basic properties of surfaces and their application in technical practice. It is especially devoted to the developable surfaces. The thesis is outlined as a teaching text for the teachers and the students of descriptive geometry and for those interested in architecture as well. The thesis describes in short some types of surfaces and gives proposals for making use of them. It investigates in detail the developable surfaces, their creation, basic properties and it mentions several examples of developing developable surfaces to the plane too. One part of the thesis also presents possible application of developable surfaces in practice. The pictures are attached to majority of surfaces. The thesis is also accompanied by the picture supplement, which contains photos from all over the world, where the mentioned surfaces are found. The component part of my bachelor thesis is an enclosed CD as well, where is found another picture supplement and the bachelor thesis in an electronic form. Apart from these, the CD contains the source files of all pictures in the bachelor thesis.

Keywords: surface, developable surface, roof, vault

Úvod

Bakalářská práce Plochy stavební praxe si klade za cíl seznámit čtenáře se základními vlastnostmi ploch užívaných ve stavební praxi, jejich rozdělením a využitím. Konkrétně je zaměřena na studium tak zvaných rozvinutelných ploch. Především bychom chtěli čtenáře přesvědčit, že deskriptivní geometrie není pouze teoretická věda, ale její výsledky se hojně uplatňují například v architektuře.

Práce je v první řadě koncipována jako učební text pro učitele a studenty deskriptivní geometrie ale i pro zájemce o architekturu. Práce nepředpokládá žádné speciální znalosti z oblasti deskriptivní geometrie, všechny užívané definice a věty jsou v přiměřené míře popsány přímo v práci. K plnému pochopení práce postačí středoškolské znalosti z planimetrie a ze základů stereometrie.

Rozvržení práce je následující. První kapitola popisuje obecné vlastnosti ploch, zavádí základní pojmy a definice. První část kapitoly je věnována vytvoření plochy pomocí spojitého pohybu nějaké tvořící křivky, druhá část se zabývá těmi vlastnostmi ploch, které jsou všem plochám společné.

Druhá kapitola uvádí možné rozdělení ploch podle různých kritérií. Především jsou zde definovány plochy, které se nějakým způsobem využívají v praxi. K většině zmíněných ploch je připojen také obrázek znázorňující návrhy jejich použití.

Třetí kapitola představuje jádro práce, zde jsou konkrétně popsány rozvinutelné plochy. V první části této kapitoly uvádíme způsoby vytvoření rozvinutelných ploch a jejich základní vlastnosti. Druhá část se obecně zabývá rozvíjením rozvinutelných ploch. Zbývající tři oddíly se věnují konkrétním příkladům rozvíjení válcových a kuželových ploch a rozvinutelné ploše šroubové.

Čtvrtá kapitola ukazuje možná využití rozvinutelných ploch v praxi. Hlavním cílem této kapitoly je potvrdit využitelnost zkoumaných ploch.

Dále následuje obrazová příloha, která obsahuje fotografie významných staveb z celého světa, na kterých se vyskytují některé plochy zmiňované v této práci. Pozornost je opět věnována především rozvinutelným plochám. Některé fotografie jsem vyfotografovala sama, ostatní jsou přejaty z různých internetových stránek.

Součástí bakalářské práce je i přiložené CD, na němž se nachází další obrazová příloha a bakalářská práce v elektronické podobě. Důležitým obsahem přiloženého CD jsou také zdrojové soubory všech obrázků z bakalářské práce. Jedná se o soubory vytvořené v programech Maple, DesignCAD, Rhino*.

* Názvy Maple, DesignCAD, Rhino jsou ochranné známky nebo registrované ochranné známky svých vlastníků.

Kapitola 1

Obecné vlastnosti ploch

1.1 Vytvoření plochy

V technické literatuře se plocha zpravidla definuje pomocí *spojitého pohybu* nějaké tvořící křivky k . Přitom se tato tvořící křivka může během pohybu měnit. Pohybem dostaneme jednoparametrickou množinu křivek v prostoru (polohy k_0, k_1, k_2, \dots pohybující se tvořící křivky odpovídají hodnotám u_0, u_1, u_2, \dots parametru u , kde $u \in R$).

Každá z poloh tvořící křivky k_0, k_1, k_2, \dots je jednoparametrickou množinou bodů (polohy bodů křivek k_0, k_1, k_2, \dots odpovídají hodnotám v_0, v_1, v_2, \dots parametru v , kde $v \in R$). To znamená, že na plochu můžeme pohlížet jako na dvojparametrickou množinu bodů nebo jako na jednoparametrickou množinu křivek.

Plochy můžeme studovat i *analyticky*. Mějme pravoúhlou souřadnicovou soustavu $\{O; x, y, z\}$. Potom je plocha dána rovnicemi

$$(1.1) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

kde $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ jsou funkce dvou proměnných u a v definované na množině bodů prostoru E_2 . Je-li např. u = konstantě, dostaneme křivku plochy, která má parametr v , tzv. parametrickou v -křivku (křivku k_i). Stejně pro v = konstantě a u proměnné dostáváme tzv. parametrickou u -křivku (křivku l_i).

Každé uspořádané dvojici (u, v) odpovídá v prostoru právě jeden bod plochy $X = [x, y, z]$ a naopak. Za předpokladu, že se u -křivky a v -křivky nedotýkají, říkáme, že tvoří *souřadnicovou síť* na ploše.

Pokud vyloučíme z (1.1) parametry u a v , dostaneme rovnici plochy ve tvaru implicitním $F(x, y, z) = 0$ nebo explicitním $z = f(x, y)$. Lze-li rovnici plochy převést na tvar $F(x, y, z) = \sum a_{ijk} x^i y^j z^k$, kde a_{ijk} jsou reálné koeficienty, které nejsou všechny rovné nule a i, j, k jsou celé kladné exponenty, nazýváme plochu *algebraickou*. Stupeň tohoto polynomu se nazývá *stupeň plochy*. Nelze-li rovnici plochy vyjádřit polynomem, nazývá se plocha *transcendentní*. Stupeň algebraické plochy má jednoduchý geometrický význam, který můžeme vyjádřit následujícími větami:

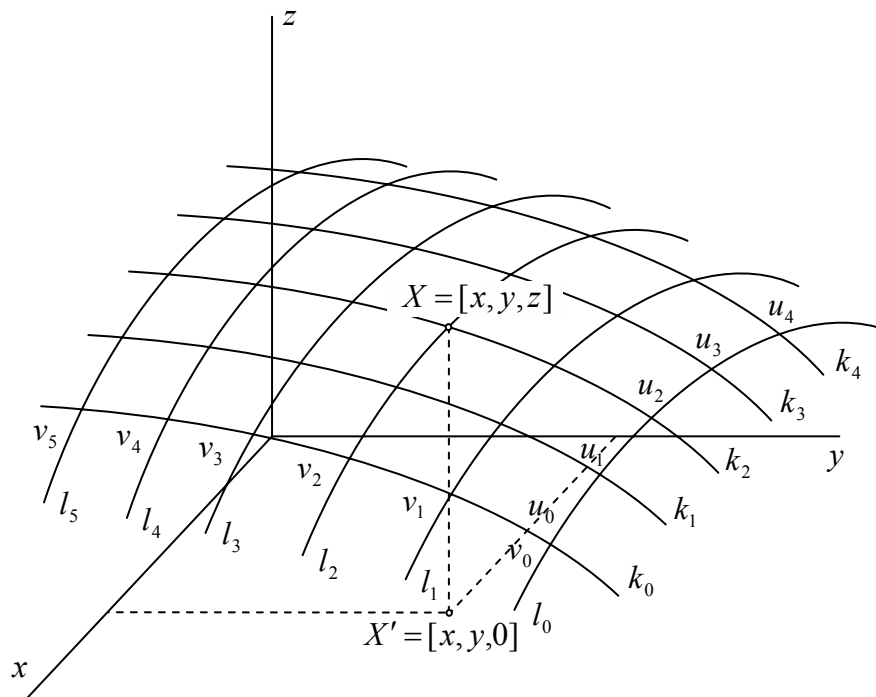
Věta 1.1. *Libovolná přímka, která neleží na ploše, protíná algebraickou plochu n -tého stupně nejvýše v n průsečících. ■*

Věta 1.2. *Libovolná rovina, která není součástí plochy, protíná algebraickou plochu n -tého stupně v rovinném řezu stupně nejvýše n .* ■

Věta 1.3. *Jestliže přímka má s algebraickou plochou n -tého stupně $n+1$ společných bodů, pak všechny body takové přímky jsou body plochy a přímka je tedy součástí plochy.* ■

Tyto tři věty jsou uvedeny v Drábek, Harant, Setzer [1] - 112-113.

Plochy, které lze analyticky vyjádřit nazýváme *matematické*. Existuje ale mnoho ploch, u kterých neznáme jejich výtvarný zákon, takové plochy označujeme jako *empirické*. Jako příklad uveďme *topografické plochy (plochy terénu)*. V technické praxi se empirické plochy vyskytují často. U takové plochy známe buď jen její model nebo její grafický obraz. Přesněji řečeno, plocha je dána řadou svých křivek, mezi kterými musíme plochu zadat empiricky. Pro stavební obory je však důležitý výsledný produkt, většinou ne jeho matematické vyjádření.



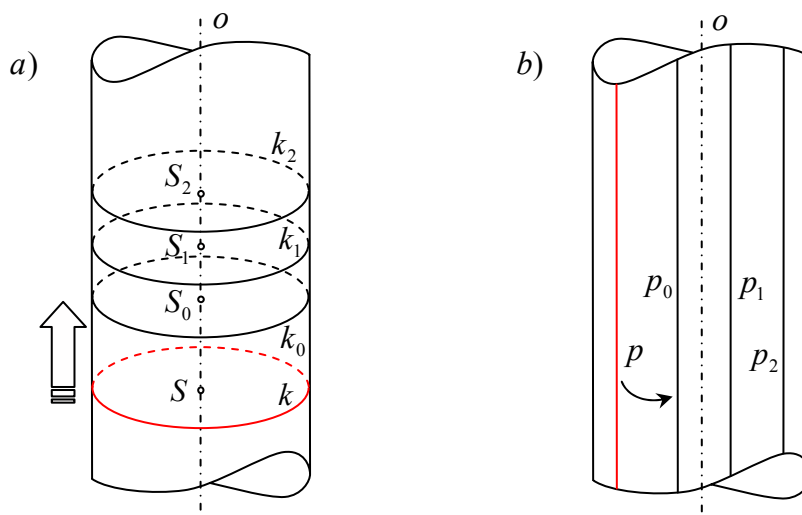
Obrázek 1.1: Ilustrace k vytvoření plochy jako dvojparametrické množiny bodů

Podívejme se ještě na vytvoření některých speciálních ploch pomocí již zmíněného spojitého pohybu.

Definice 1.1. *Válcová, respektive kuželová plocha, je množina všech přímek, které protínají danou křivku a jsou rovnoběžné s danou přímkou, respektive procházejí daným bodem. Daná křivka se nazývá **řídící křivka** a daný směr (bod) **řídící směr (vrchol)**.* ■

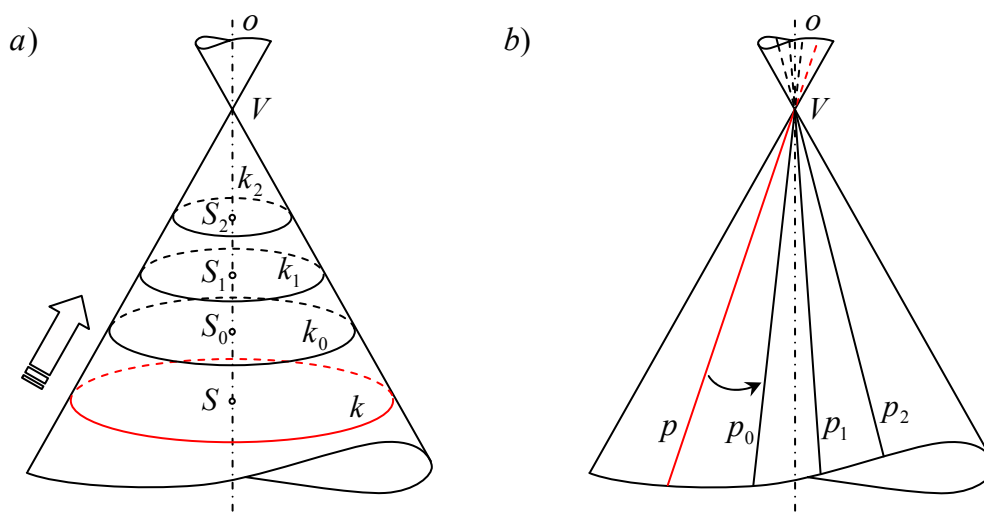
Definice je uvedena například v Urban [8] - 56.

Vezměme si kruhovou válcovou a kuželovou plochu. Pro ně je danou řídicí křivkou z definice 1.1. kružnice. Na těchto dvou plochách můžeme velice snadno demonstrovat jejich vytvoření. Kromě řídicí křivky si na nich ukážeme ještě *tvořící křivky*, což jsou křivky, jejichž pohybem plocha vzniká a jejichž všechny body leží na ploše.



Obrázek 1.2: Vytvoření kruhové válcové plochy

Na obrázku 1.2 a) vidíme vytvoření kruhové válcové plochy pomocí rovnoměrného translačního pohybu kružnice k ve směru osy o . Kružnice k je tedy tvořící křivkou a kružnice k_0, k_1, k_2, \dots jsou další její polohy. Kružnice k je zde zároveň řídicí křivkou. Na obrázku 1.2 b) je ta samá kruhová válcová plocha vytvořena pomocí rovnoměrného rotačního pohybu přímky p okolo osy o , která je s ní rovnoběžná. Tvořící křivkou je zde tedy přímka p , řídicí opět kružnice k . Opět můžeme pozorovat jednotlivé polohy přímky $p_0, p_1, p_2 \dots$



Obrázek 1.3: Vytvoření kruhové kuželové plochy

Kruhová kuželová plocha je velice jednoduchý příklad plochy, která vzniká pomocí spojitého pohybu, při kterém se tvořící křivka mění. Tvořící křivkou je tedy kružnice k , jejíž poloměr se při rovnoměrném translačním pohybu ve směru osy o rovnoměrně mění. Tuto situaci můžeme vidět na obrázku 1.3 a). Kružnice k je zároveň křivkou řídicí. Kružnice k_0, k_1, k_2, \dots jsou jednotlivé polohy kružnice k . Na obrázku 1.3 b) je ta samá kruhová kuželová plocha utvořena rovnoměrným rotačním pohybem přímky p okolo osy o , která je sní různoběžná. Přímky p_0, p_1, p_2, \dots představují jednotlivé polohy přímky p .

Později se ještě dozvíme, do kterých kategorií ploch tyto dvě speciální plochy můžeme řadit.

1.2 Některé vlastnosti ploch

Než přistoupíme k jednotlivým druhům ploch, podíváme se ještě na některé vlastnosti, které jsou plochám společné.

1.2.1 Křivky na ploše

Na plochách nás budou zajímat jejich tvořící křivky. Křivka na ploše je dána pohybem bodu, který je vázán nějakou podmínkou. Jak už jsme se dozvěděli v předchozím, příkladem křivek na ploše jsou parametrické křivky. Libovolnou křivku plochy dostaneme, jestliže volíme parametry u, v závislé na dalším reálném parametru t , tj.

$$(1.2) \quad u = u(t), \quad v = v(t),$$

kde $u(t), v(t)$ jsou funkce definované na nějakém intervalu.

Parametrické rovnice křivky plochy dostaneme dosazením (1.2) do (1.1), tj.

$$(1.3) \quad x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)).$$

Křivku na ploše můžeme vyjádřit ještě jinak. Necht' $F(x, y, z) = 0$ je implicitní tvar rovnice dané plochy a $G(x, y, z) = 0$ je rovnice další plochy, na níž daná křivka také leží, přitom $F(x, y, z) \neq G(x, y, z)$. Křivka na ploše je potom definovaná jako průnik těchto dvou ploch (množina všech společných bodů obou ploch)

$$(1.4) \quad F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0.$$

Je-li plocha $G(x, y, z) = 0$ rovina, pak mluvíme o řezu plochy rovinou nebo o rovinném řezu. Z konstruktivního hlediska jde tedy o sestavení průsečné křivky plochy a roviny nebo průnikové křivky dvou ploch.

Příklad 1.1. Uvažujme nyní plochu hyperbolického paraboloidu, na níž si ukážeme některé křivky. V pravouhlé souřadnicové soustavě $\{O; x, y, z\}$ lze tuto plochu zapsat rovnicí

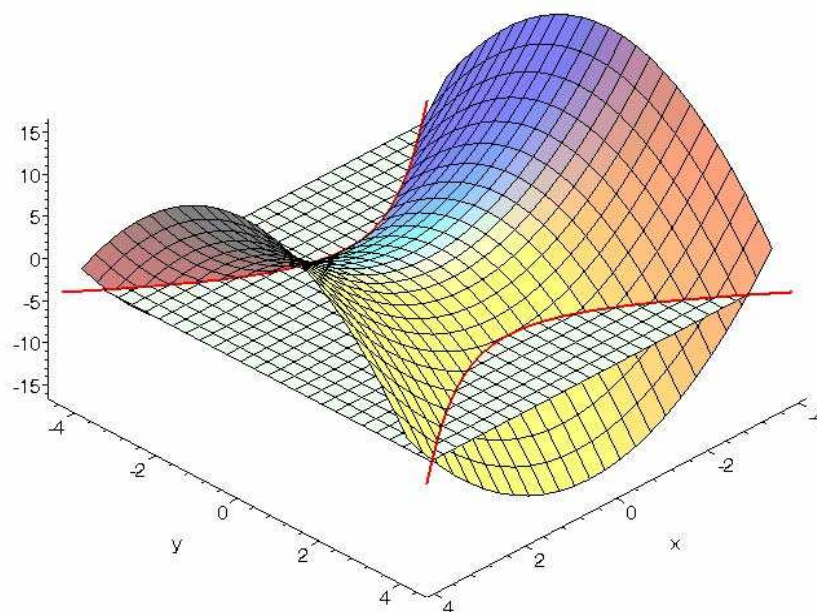
$$(1.5) \quad x^2 - y^2 = z.$$

Nutno podotknout, že pro tuto plochu existuje obecnější rovnice, ale my se spokojíme s tímto speciálním případem.

Osa z je osa hyperbolického paraboloidu a její průsečík s plochou je vrchol. Hyperbolický paraboloid s rovnicí (1.5) má vrchol v počátku souřadnicové soustavy.

Zvolme si nyní roviny rovnoběžné se souřadnicovými rovinami a určíme jejich rovinové řezy hyperbolickým paraboloidem. Z rovnice této plochy je patrné, že řezy rovinami rovnoběžnými s rovinou (x, y) dostáváme navzájem podobné hyperboly a řezy rovinami rovnoběžnými s rovinou (x, z) nebo (y, z) navzájem shodné paraboly.

Tyto situace si můžeme graficky znázornit.

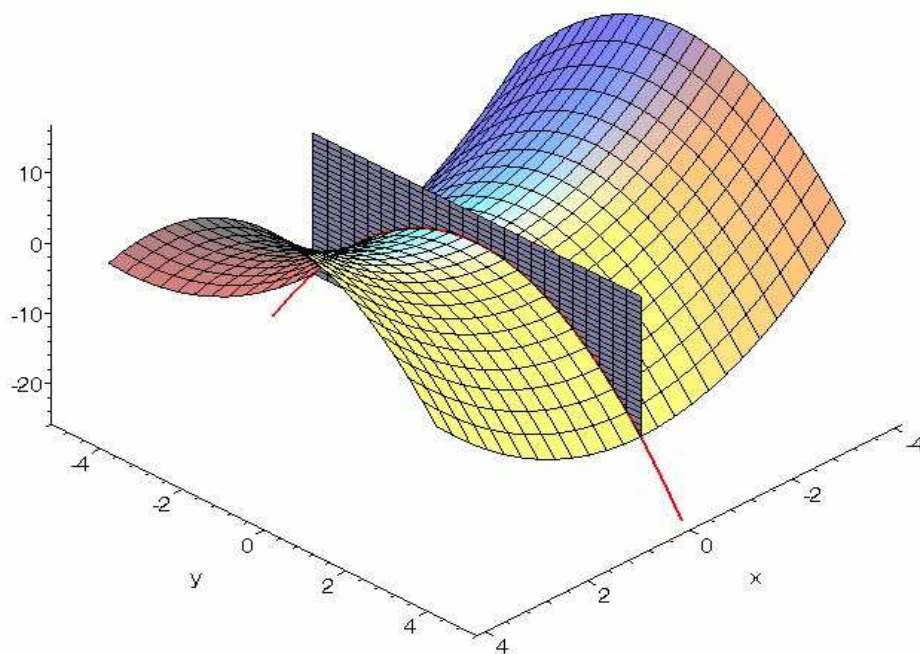


Obrázek 1.4

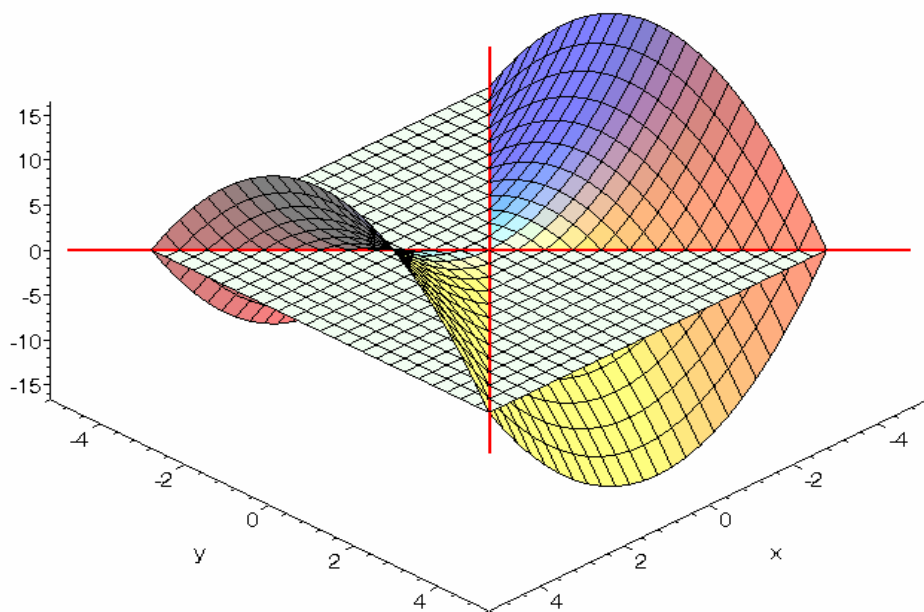
Na obrázku 1.4 vidíme řez hyperbolického paraboloidu rovinou s rovnicí $z = -4$. Dostáváme hyperbolu: $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Na obrázku 1.5 má rovina řezu rovnicí $x = 0$. Tentokrát je řezem parabola: $y^2 = -z$.

Pokud sestrojíme vrcholovou tečnou rovinu hyperbolického paraboloidu, protíná plochu ve vrcholových přímkách s rovnicemi $y = x$ a $y = -x$. Tento případ je znázorněn na obrázku 1.6.



Obrázek 1.5

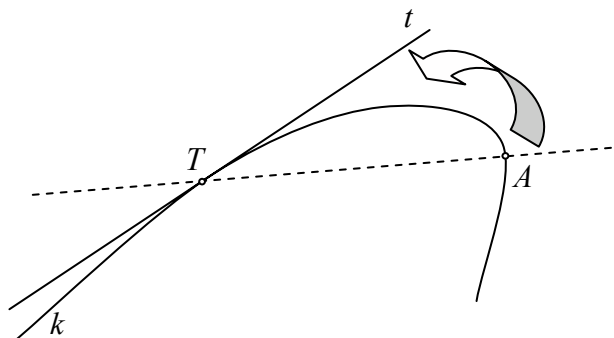


Obrázek 1.6

Na hyperbolickém paraboloidu tedy existují jen parabolické a hyperbolické řezy. (Speciálně jsou rovinným řezem dvě přímky.) Hyperbolickým paraboloidem se budeme zabývat ještě později, protože je hojně využíván ve stavební praxi. ■

1.2.2 Tečna křivky plochy a tečná rovina plochy

Nebudeme zde uvádět definice tečny křivky, spokojíme se jen s názornou představou. Mějme libovolnou křivku k (rovinnou či prostorovou) a bod T její libovolný bod. Na křivce zvolme další bod A dostatečně blízko bodu T a sestrojme přímku AT . Jestliže existuje jediná limitní poloha t přímky AT při $A \rightarrow T$, potom přímku t nazýváme *tečnou* dané křivky k v bodě T . Bod T se nazývá *bod dotyku* tečny t .



Obrázek 1.7: Tečna rovinné křivky

Tento popis je možné nalézt například v Piska, Medek [5] - 219.

Každým bodem plochy prochází nekonečně mnoho křivek. Tečny křivek plochy v daném bodě jsou také tečnami plochy v tomto bodě.

Vraťme se nyní znovu k tzv. parametrickým u -křivkám a v -křivkám plochy. Předpokládejme, že v bodě $T = [x, y, z]$ parametrické křivky dané plochy existuje jediná tečna. Směr tečny parametrické u -křivky je $(x_v, y_v, z_v) = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$ a směr tečny parametrické v -křivky je $(x_u, y_u, z_u) = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$. Na ploše uvažujme oblast, v níž parametrické křivky tvoří souřadnicovou síť, tzn. že jsou tyto dva směry lineárně nezávislé a tedy matice

$$(1.6) \quad A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

má hodnost dvě.

Definice 1.2. Bod plochy T , ve kterém má matice A (1.6) hodnost dvě, se nazývá **regulární bod** plochy. Je-li tato hodnost menší než dvě, nazýváme bod **singulárním bodem** plochy. ■

Definice je uvedena v Urban [8] - 52 nebo v Drábek, Harant, Setzer [1] - 114.

Věta 1.4. Tečny všech křivek plochy v jejím regulárním bodě T leží v jedné rovině τ . ■

Důkaz této věty nalezneme čtenář například v Urban [8] - 52.

Rovina τ z věty 1.4. se nazývá *tečnou rovinou plochy*. Bod T je *bod dotyku* tečné roviny τ . Přímka tečné roviny τ , která prochází jejím bodem dotyku T , se nazývá *tečna plochy*. Navíc platí, že každá přímka roviny τ , která prochází bodem T , je tečnou nějaké křivky plochy, jak je uvedeno například v Urban [8] - 52.

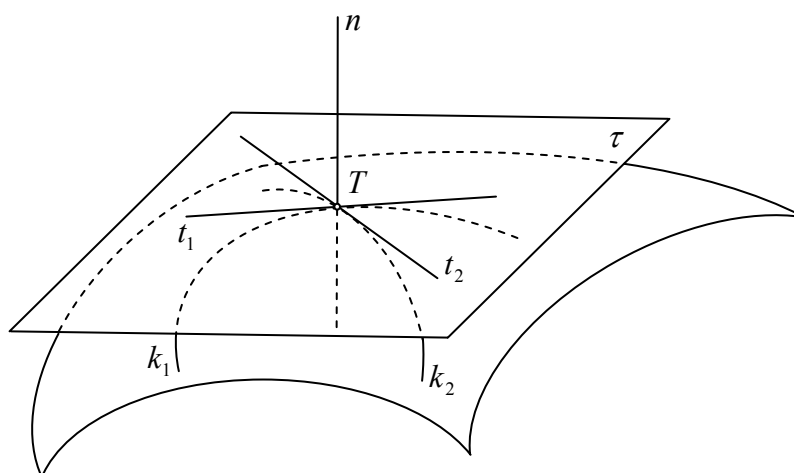
Ještě se můžeme podívat na rovnici tečné roviny plochy. Mějme zadanou plochu rovnicí v explicitním tvaru $z = f(x, y)$ a její libovolný bod $X = [x_0, y_0, z_0]$, který je regulární. Potom rovnice tečné roviny v bodě X vypadá takto:

$$(1.7) \quad z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Definice 1.3. *Přímka n kolmá k tečné rovině τ plochy v jejím bodě dotyku T se nazývá normála plochy.*

Směr normály plochy dané rovnicí v explicitním tvaru $z = f(x, y)$ je $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1)$. ■

Z konstruktivního hlediska budeme tečnou rovinu plochy v jejím bodě určovat pomocí dvou různoběžných tečen dvou křivek plochy, které tímto bodem procházejí. Křivky volíme co nejjednodušší. Pokud bodem plochy prochází přímka, která leží na ploše, zvolíme ji za jednu ze křivek plochy. Tato přímka potom leží v hledané tečné rovině.



Obrázek 1.8: Tečná rovina a normála plochy

(Vlastní tečná rovina v nevlastním bodě plochy je *asymptotická tečná rovina*.)

V souladu s literaturou například Urban [8] - 53 uvedme ještě definici pro dotyk dvou ploch:

Definice 1.4. *Dvě plochy se dotýkají v bodě T , jestliže ve společném bodě T mají společnou tečnou rovinu. Bod T se nazývá **bod dotyku**.*

Dvě plochy se dotýkají podél křivky k , jestliže křivka k leží na obou plochách a jestliže se plochy dotýkají v každém jejím bodě. ■

Uvažujme nyní tečnou rovinu τ v daném bodě T plochy κ . Dá se dokázat, že pro vzájemnou polohu tečné roviny a plochy mohou nastat jen tři případy (například viz Urban [8] - 54):

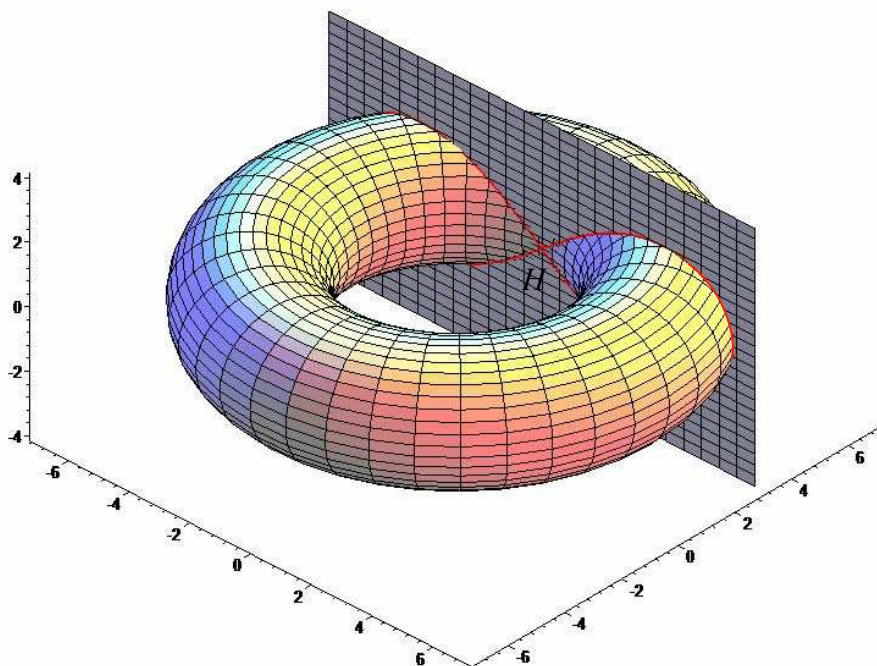
a) Tečná rovina τ má s plochou κ v blízkém okolí dotykového bodu T společný právě jen bod T . Plocha v okolí dotykového bodu takové tečné roviny leží jen v jednom z poloprostorů určených tečnou rovinou. Bod se nazývá *eliptický*.

b) Tečná rovina τ protíná plochu κ v křivce, která v dotykovém bodě T má uzlový bod s různými tečnami t_1, t_2 . Plocha v okolí takového bodu leží v obou poloprostorech vyřatých tečnou rovinou. Bod se nazývá *hyperbolický*.

c) Tečná rovina τ protíná plochu κ v křivce, která v dotykovém bodě T má bod vratu prvního druhu s jedinou tečnou t . Také v tomto případě plocha v okolí bodu T leží v obou poloprostorech vyřatých tečnou rovinou. Bod se nazývá *parabolický*.

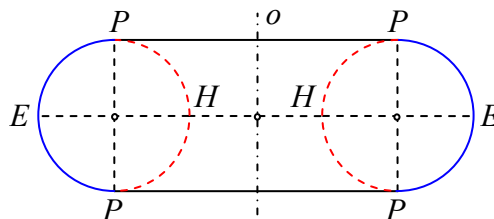
Tyto tři případy si můžeme snadno ilustrovat na příkladu.

Příklad 1.2. Všechny tři typy bodů nalezneme například na anuloidu. Na obrázku 1.9 vidíme tečnou rovinu v hyperbolickém bodě plochy.



Obrázek 1.9: Tečná rovina v hyperbolickém bodě anuloidu

Na obrázku 1.10 jsou v kolmém průmětu na téže ploše znázorněny body eliptické, hyperbolické i parabolické. Body hyperbolické a eliptické tvoří vždy dva oblouky kružnic (odlišeno barvou). Body parabolické tvoří na anuloidu nejvyšší a nejnižší rovnoběžkovou kružnici. Na obrázku jsou znázorněny čtyři parabolické body. ■



Obrázek 1.10: Eliptické, parabolické a hyperbolické body na anuloidu

O dalších vlastnostech ploch se zmíníme v následujících kapitolách při jejich konkrétním zkoumání.

Kapitola 2

Klasifikace ploch

V následující kapitole se budeme stručněji zabývat plochami, které se nějakým způsobem využívají v technické praxi. Konkrétně se později zaměříme pouze na tzv. rozvinutelné plochy.

Plochy můžeme rozdělovat podle různých kritérií. Na druhy ploch bude jinak nahlížet stavitel a jinak matematik či geometr. Při výběru plochy pro stavební účely rozhoduje mnoho aspektů. Záleží na statických vlastnostech plochy, na velikosti zastavovaného prostoru, ale samozřejmě důležitá je také estetická stránka. Z hlediska techniky se plochy třídí většinou podle jejich vytvoření. Jak už jsme uvedli v první kapitole, lze plochu definovat pomocí spojitého pohybu nějaké tvořící křivky k . Plochy tedy rozdělíme podle **druhu tvořící křivky**.

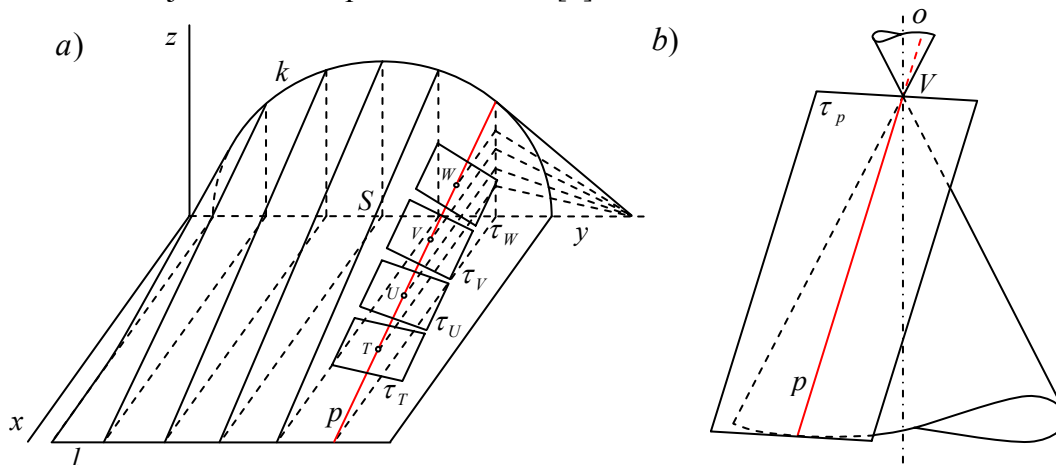
2.1 Přímkové plochy

Plochy vytvořené pohybem přímky se nazývají *přímkové plochy*. Jde tedy o jednoparametrickou soustavu přímek v prostoru. Tvořícím přímkám říkáme *povrchové přímky* plochy (viz Drábek, Harant, Setzer [1] - 116). Tečná rovina přímkové plochy v jejím regulárním bodě T obsahuje přímku plochy procházející bodem T .

Definice 2.1. Podél přímky p přímkové plochy existuje buď

- a) nekonečně mnoho tečných rovin, které tvoří svazek o ose p
- nebo
- b) (až na kuspidální bod) jediná tečná rovina. ■

Definice je uvedena například v Urban [8] - 57.



Obrázek 2.1: a) Regulární přímka na přímém kruhovém konoidu s tečnými rovinami
b) Torzální přímka s torzální rovinou na kuželové ploše

V případě a) v definici 2.1. nazýváme přímkou *regulární přímkou*, v případě b) *torzální přímkou* a příslušnou tečnou rovinu *torzální rovinou*. Na obrázku 2.1 můžeme vidět jednoduché příklady těchto dvou typů přímek.

Přímkové plochy dělíme na *rozvinutelné*, které mají všechny přímky torzální a na *zborčené*, na kterých existují přímky regulární. (Na zborčených plochách však mohou být některé přímky také torzální.)

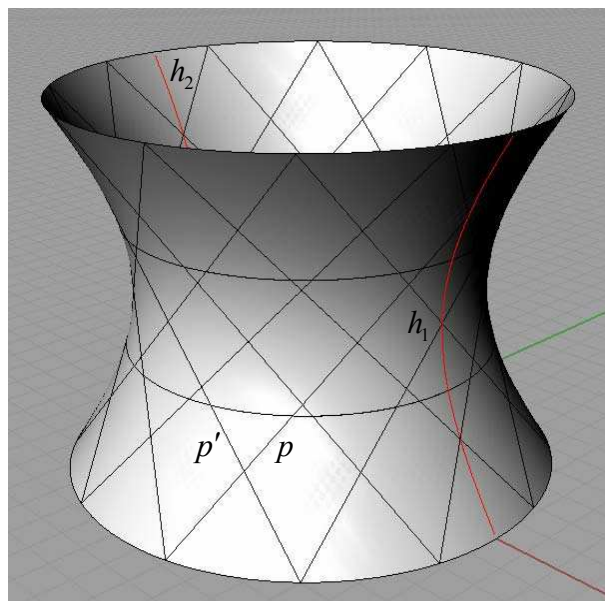
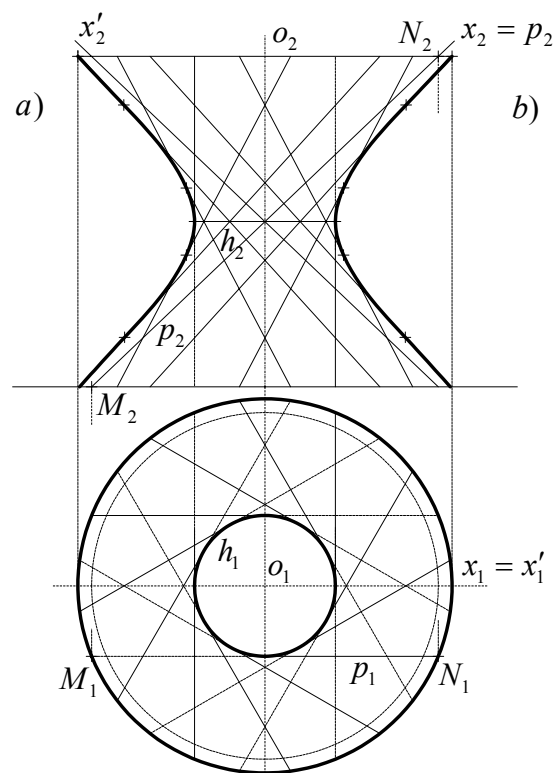
Přímkové plochy jsou ve stavebnictví velice oblíbené. Nejčastěji bývají určeny třemi řídicími křivkami. Potom každá přímka, která protíná zároveň všechny řídicí křivky, je *tvůřící přímkou plochy* (viz Setzer [7] - 27). Jedna ze křivek může také ležet v nevlastní rovině. Ve speciálním případě může být nevlastní řídicí křivka přímkou, potom jsou tvořící přímky plochy rovnoběžné s tzv. *řídící rovinou*.

Zkoumáme-li vytvoření přímkových ploch takto, platí, že obecně vzniká zborčená plocha.

2.1.1 Zborčené plochy

Rozvinutelným plochám se budeme věnovat později, teď si uvedme alespoň některé příklady ploch zborčených.

a) Rotační jednodílný hyperboloid



Obrázek 2.2: a) Rotační jednodílný hyperboloid v Mongeově promítání
b) Rotační jednodílný hyperboloid v perspektivě

V souladu s literaturou, například Kounovský [4] - 15, si uveďme tuto definici:

Definice 2.2. *Rotační jednodílný hyperboloid je zborcená plocha o dvou soustavách přímek. Přímky téže soustavy jsou vzájemně mimoběžné a každé dvě přímky různých soustav se protínají. Každým bodem plochy procházejí dvě přímky patřící různým soustavám a určují v něm tečnou rovinu. ■*

Jak už z názvu vyplývá, tuto plochu lze zařadit i mezi plochy rotační. Rotační jednodílný hyperboloid také vzniká otáčením hyperboly kolem její vedlejší osy nebo otáčením přímky okolo mimoběžné osy.

V praxi se rotační jednodílný hyperboloid používá například při stavbách chladících věží, viz obrazová příloha. Přitom tvořících přímek obou soustav je užito jako podpěrných noh, na nichž plocha spočívá.

Na obrázku 2.2 a) je znázorněna konstrukce rotačního jednodílného hyperboloidu vznikajícího rotací přímky p okolo mimoběžné osy o . Na obrázku 2.2 b) vidíme tu samou plochu v perspektivě s vyznačenou hyperbolou s větvemi h_1 a h_2 , jejíž rotací plocha také vzniká.

b) Hyperbolický paraboloid

S touto plochou jsme se už částečně seznámili dříve. A jak už bylo řečeno, ve stavitelství je velmi často užívána. Následující definici lze nalézt v Drábek, Harant, Setzer [1] - 165.

Definice 2.3. *Hyperbolický paraboloid je zborcená plocha o dvou soustavách přímek. Přímky téže soustavy jsou vzájemně mimoběžné a zároveň jsou rovnoběžné s danou rovinou tzv. řídicí rovinou. Každé dvě přímky různých soustav se protínají a ve svém průsečíku určují tečnou rovinu. ■*

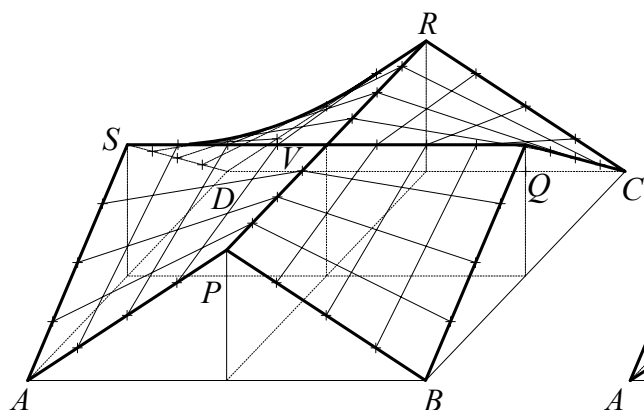
Hyperbolický paraboloid můžeme zadat dvěma mimoběžnými přímkami a řídicí rovinou pro přímky druhé soustavy. V praxi se ale často využívá zadání pomocí tzv. zborceného čtyřúhelníka, což je čtyřúhelník, jehož čtyři vrcholy neleží v téže rovině.

Obyčejně se tato plocha užívá pro zastřešení rozlehlých továrních hal, hangárů a podobně. Použití nachází také při zastřešování nad různoběžníkovým půdorysem. Je možné ji využít také jako plochu stropní.

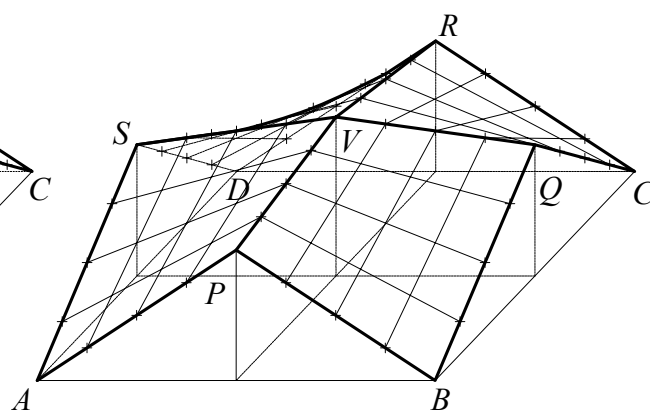
Podívejme se nyní na několik příkladů zastřešení pomocí této plochy.

Na obrázku 2.3 je zobrazena střecha složená ze čtyř shodných částí hyperbolického paraboloidu nad čtvercovým půdorysem A, B, C, D . Nad stranami čtverce jsou sestrojeny čtyři stejně vysoké štíty s vrcholy P, Q, R, S , kterými procházejí dva hřebeny protínající se ve vrcholu V . Dostáváme tak dva shodné hyperbolické paraboloidy $APVQCRVS$, $BQVRDSVP$.

Vrchol V nemusíme vždy volit ve stejné výši jako body P, Q, R, S . V tomto případě vznikají čtyři shodné hyperbolické paraboloidy. Tato situace je znázorněna na obrázku 2.4.

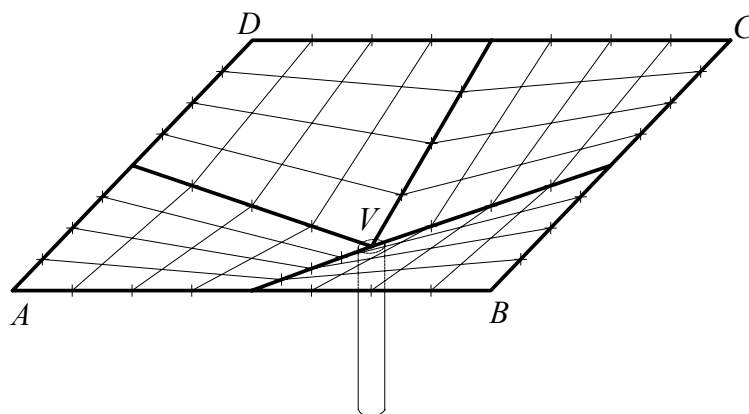


Obrázek 2.3



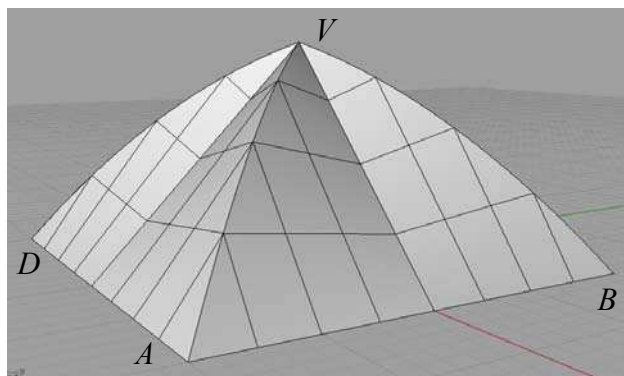
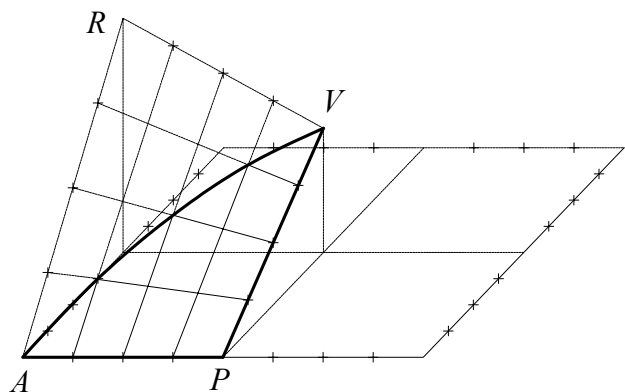
Obrázek 2.4

Hyperbolické paraboloidy při zastřešování můžeme kombinovat i jinak. Podívejme se na obrázek 2.5. Ve vodorovné rovině máme dán čtverec $ABCD$, jehož středy stran jsou spojeny s bodem V položeným pod jeho středem. Dostáváme tak čtyři hyperbolické paraboloidy. Takto vytvořené plochy můžeme v libovolném množství spojovat vedle sebe. Tato plocha se používá nad velkými pracovišti či nad nádražním nástupištěm. Dešťová voda se přitom odvádí nosným sloupem.



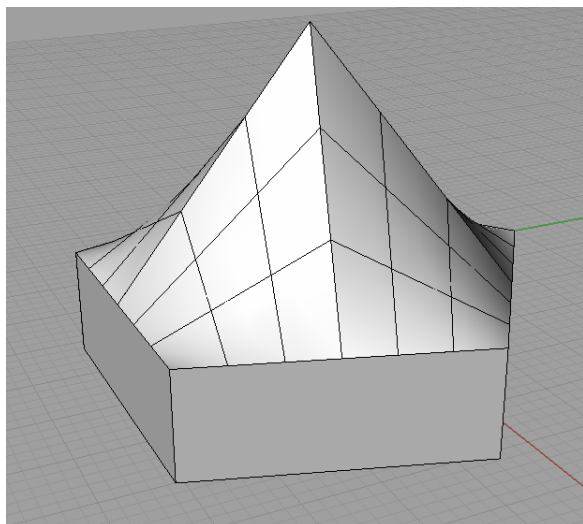
Obrázek 2.5

Uveďme si ještě tzv. *Aimondovu bání* (viz Piska, Medek [6] - 107), což je plocha, která vznikne seskupením osmi hyperbolických paraboloidů. Na obrázku 2.6 je znázorněna konstrukce jedné osminy této střechy, která je dána zborceným čtyřúhelníkem $APVR$, z něhož je použita jen polovina. Řezy svíslými rovinami procházející body AV , BV , ... jsou paraboly.

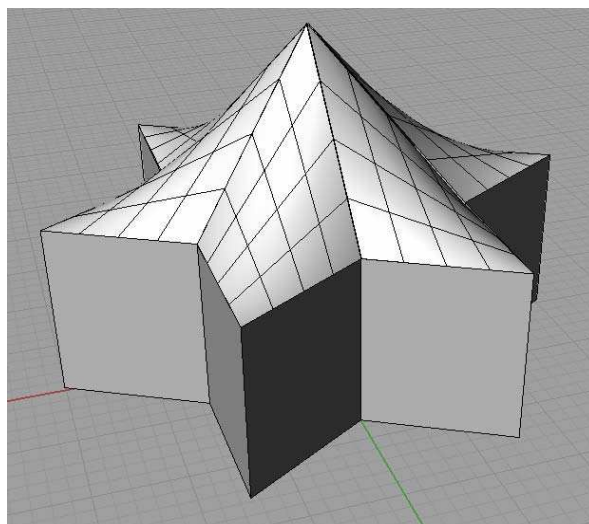


Obrázek 2.6: Aimondova bání

Hyperbolické paraboloidy se mohou používat i nad složitějším půdorysem. Podívejme se na obrázky 2.7 a 2.8, kde jsou znázorněny návrhy střech nad půdorysem pravidelného pětiúhelníka a šesticípé hvězdy.



Obrázek 2.7: Návrh střechy nad půdorysem pravidelného pětiúhelníka



Obrázek 2.8: Návrh střechy nad půdorysem šesticípé hvězdy

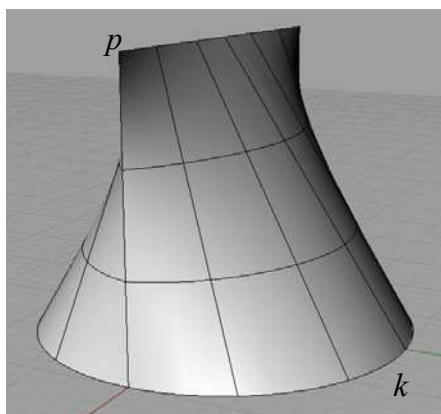
c) Konoidy

Definice 2.4. *Konoidy jsou zborčené plochy určené řídicí křivkou, řídicí přímkou a řídicí rovinou. ■*

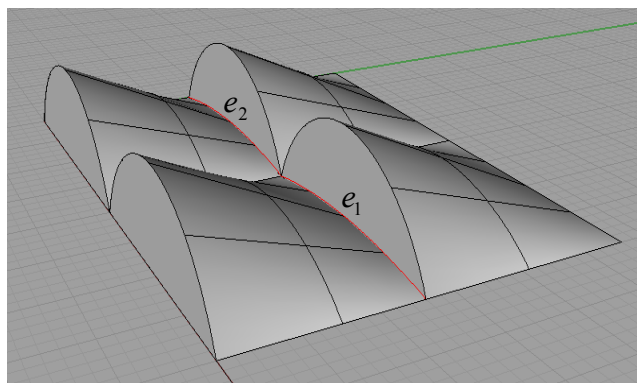
Definice je uvedena například v Drábek, Harant, Setzer [1] - 191.

Podle druhu tvořící křivky se konoidy dělí na *kruhové* (viz obrázek 2.1 a)), *parabolické*, *eliptické*, *šroubové*, ... Jestliže je řídicí přímka kolmá k řídicí rovině, nazývá se konoid *přímý*, v opačném případě *kosý*.

Podívejme se opět na několik ukázek využití konoidů v praxi.



Obrázek 2.9: Přímý kruhový konoid jako střecha nad kruhovým půdorysem

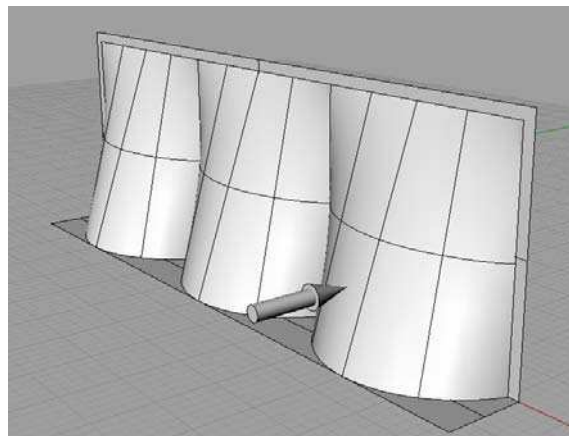


Obrázek 2.10: Střecha nad rozlehlým prostorem složená z přímých kruhových konoidů

Kruhové konoidy se opět hojně využívají k zastřešování. Obrázek 2.9 ukazuje zastřešení budovy o kruhovém půdorysu. Z kruhového půdorysu přechází střecha ve vodorovný hřeben.

Konoidy můžeme vidět také při zastřešování rozlehlých prostor. Takové střechy vznikají vhodných řazením shodných ploch. Tato situace je naznačena na obrázku 2.10. Aby dobře odtékala dešťová voda, nejsou jednotlivé konoidy dokončeny až k řídicí přímce, nýbrž jsou seříznuty svislou rovinou v elipsách e_1 a e_2 . Svislé části ploch se zasklí.

Kruhové konoidy se také používají jako opěrné zdi pro vodní nádrže či skladiště jemných sypkých hmot, viz obrázek 2.11.



Obrázek 2.11: Přímý kruhový konoid jako opěrná zeď

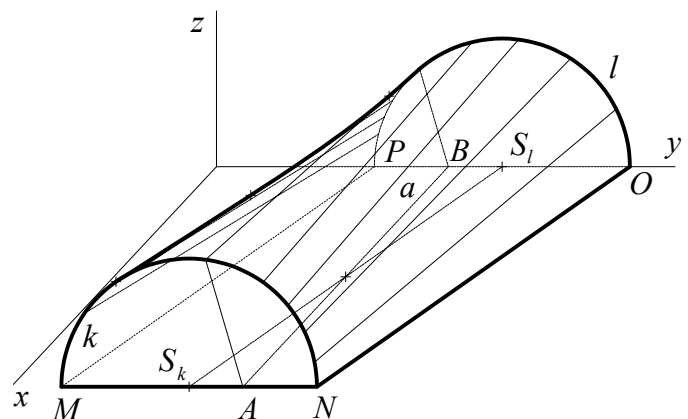
d) Některé další zborcené plochy

Definice 2.5. *Plocha šikmého průchodu je zborcená plocha určená dvěma shodnými kružnicemi k a l v rovnoběžných rovinách, přičemž spojnice středů S_k a S_l obou kružnic je vodorovná a není k jejich rovinám kolmá. Třetí určující křivkou je přímka a procházející středem úsečky $S_k S_l$ kolmo k rovinám kružnic. ■*

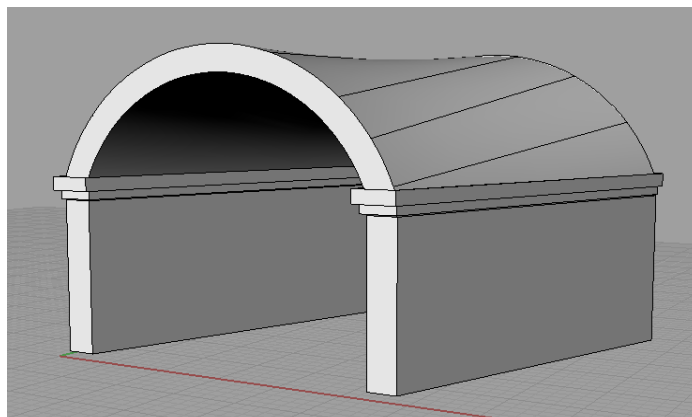
Definici může čtenář nalézt v Piska, Medek [6] - 151.

Roviny procházející řídicí přímkou a vytínají na kružnicích k a l body, jejichž spojnice jsou tvořícími přímkami plochy. V každé rovině leží dvě rovnoběžné tvořící přímky. Konstrukce přímek je znázorněna na obrázku 2.12. Plocha je souměrná podle roviny souměrnosti obou kružnic.

V praxi se používá jen část této plochy k zaklenutí půdorysu tvaru kosodélníka, viz obrazová příloha a obrázky 2.12 a 2.13. Na obrázku 2.13 je návrh použití této plochy nad kosodélníkem.



Obrázek 2.12: Plocha šikmého průchodu nad kosodélníkem $MNOP$



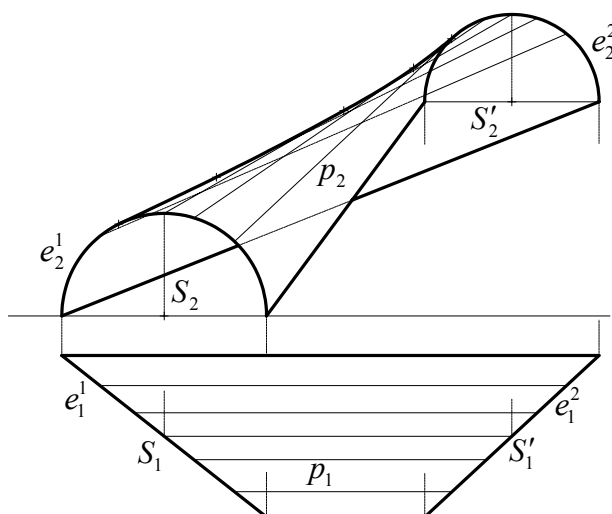
Obrázek 2.13: Návrh použití plochy šikmého průchodu

Definice 2.6. *Freziérův cylindroid je zborčená plocha určena řídicí rovinou a dvěma afinně sdruženými elipsami.* ■

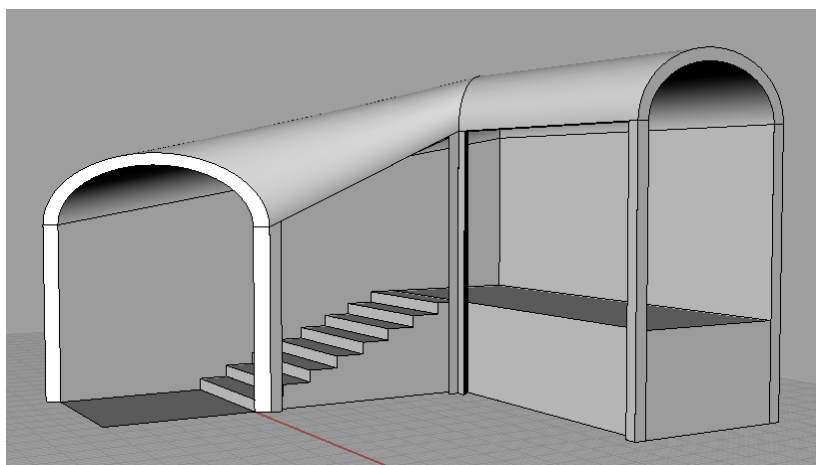
Definici je možné nalézt například v Piska, Medek [6] - 148.

Podívejme se na obrázek 2.14, kde je plocha zkonstruována v Mongeově promítání. V našem případě je plocha zadána elipsami e^1 a e^2 , které se do nárysu, což je řídicí rovina, promítají jako kružnice. Tvořící přímky zobrazíme nejdříve v půdoryse, potom v náryse.

Freziérův cylindroid se používá k zaklenutí stoupající chodby nad schodištěm, když chodby, které schodiště spojují, jsou valené klenby ukončené elipsami.



Obrázek 2.14: Freziérův cylindroid v Mongeově promítání



Obrázek 2.15: Návrh řešení klenby nad schodištěm

Definice 2.7. *Plocha Montpellierského oblouku* je zborcená plocha určená kružnicí k , přímkou a , která prochází středem kružnice k kolmo k její rovině a přímkou b , která je rovnoběžná s rovinou kružnice k . ■

Tvořící přímky plochy sestrojíme tak, že přímkou a prokládáme rovinami, které protnou kružnici k vždy ve dvou bodech a přímkou b v jednom bodě. V každé rovině tedy leží dvě přímky. Plocha je souměrná podle roviny procházející přímkou a kolmo k přímce b . Používá se opět pouze část plochy nad vodorovnou rovinou procházející přímkou a .

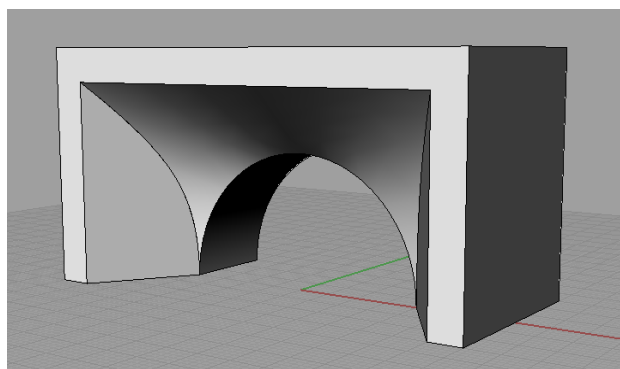
Ve stavební praxi se plocha Montpellierského oblouku používá například jako klenba nad vstupem do budovy.

Definice 2.8. *Plocha Marseillského oblouku* je zborcená plocha určená kružnicí k a l v rovinách navzájem rovnoběžných a přímkou a procházející středem kružnice k kolmo k její rovině. ■

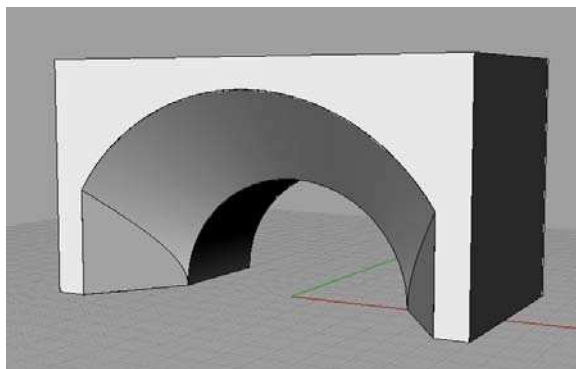
Definice 2.7. a 2.8. jsou převzaty z Piska, Medek [6] - 152-155.

Poloměr kružnice l volíme větší než poloměr kružnice k . Příмка b Montpellierského oblouku je zde nahrazena kružnicí l . Konstrukce tvořících přímek je tedy analogická.

Využití ve stavebnictví je stejné jako u plochy předchozí.



Obrázek 2.16: Plocha Montpellierského oblouku



Obrázek 2.17: Plocha Marseillského oblouku

2.2 Cyklické plochy

Plochy vytvořené pohybem kružnice, jejíž poloměr se může během pohybu také měnit, se nazývají *cyklické plochy*. Jde tedy o jednoparametrickou soustavu kružnic.

Cyklickými plochami jsou například kruhová kuželová plocha (viz obrázek 1.3), kruhová válcová plocha, kulová plocha... Speciální plochy vznikají rotací kružnice okolo osy či jejím šroubováním. Rotací kružnice okolo osy, která leží v rovině kružnice, ale kružnici neprotíná, vzniká anuloid. O anuloidu jsme se již částečně zmínili v první kapitole. Lze ho také zařadit mezi plochy rotační. O tzv. cyklických šroubových plochách si povíme později.

Dalším kriteriem rozdělení ploch může být také druh pohybu. Budeme tedy opět uvažovat vytvoření plochy pomocí spojitého pohybu, ale tentokrát nás nebude zajímat typ tvořící

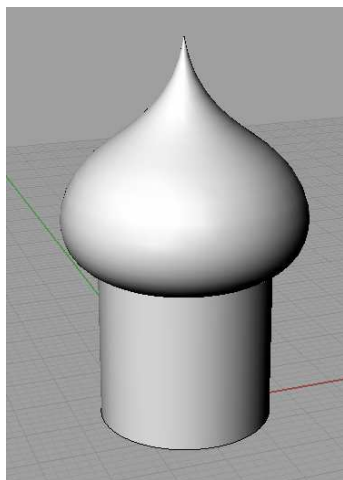
křivky, ale **druh pohybu**, kterému je tvořící křivka podrobena. Dostáváme tyto základní skupiny ploch:

2.3 Rotační plochy

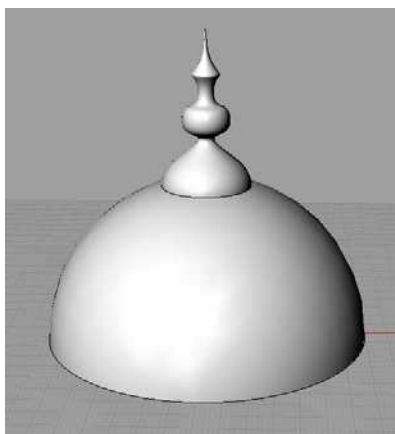
Křivka, která rotuje okolo pevné přímky (osy), vytvoří *rotační plochu*. Přitom tvořící křivka musí být různá od osy otáčení a kružnic otáčení.

Použití rotačních ploch v praxi je veliké. Prozatím vynecháme rotační válcové a kuželové plochy a uvedeme si alespoň některé příklady užití ploch ostatních.

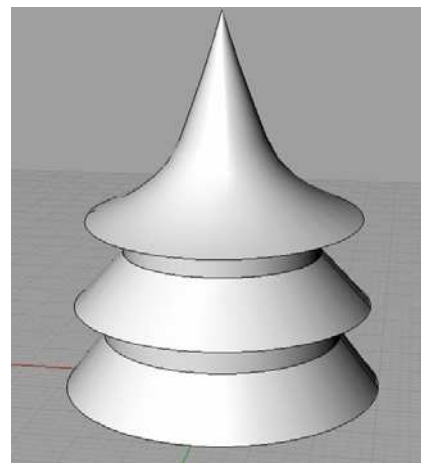
S rotačními plochami se můžeme v architektuře setkat opět jako s plochami, které se používají k zastřešování. Na obrázcích 2.18 - 2.20 se můžeme podívat na možnosti zakončení částí staveb s kruhovým půdorysem. Další příklady využití viz obrazová příloha.



Obrázek 2.18



Obrázek 2.19



Obrázek 2.20

2.4 Šroubové plochy

Vykoná-li křivka šroubový pohyb, dostáváme *šroubové plochy*. Přitom šroubový pohyb definujeme jako pohyb složený z rovnoměrného rotačního pohybu okolo osy a rovnoměrného posunutí ve směru osy.

Šroubové plochy můžeme dále rozdělit na přímkové a cyklické. V prvním případě je tvořící křivkou přímka, ve druhém kružnice.

2.4.1 Přímkové šroubové plochy

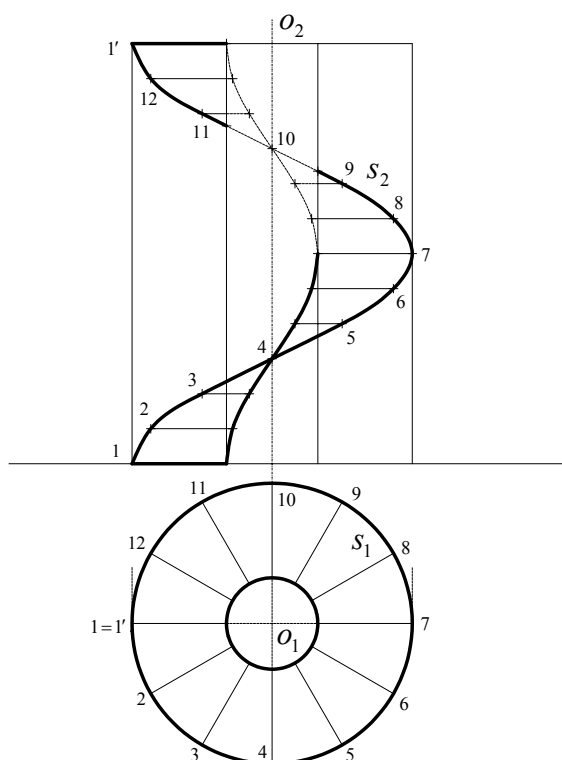
a) Přímá uzavřená přímková šroubová plocha

Definice 2.9. *Přímá uzavřená přímková šroubová plocha (přímý šroubový konoid) vzniká šroubováním přímky, která pravouhle protíná osu šroubového pohybu.*

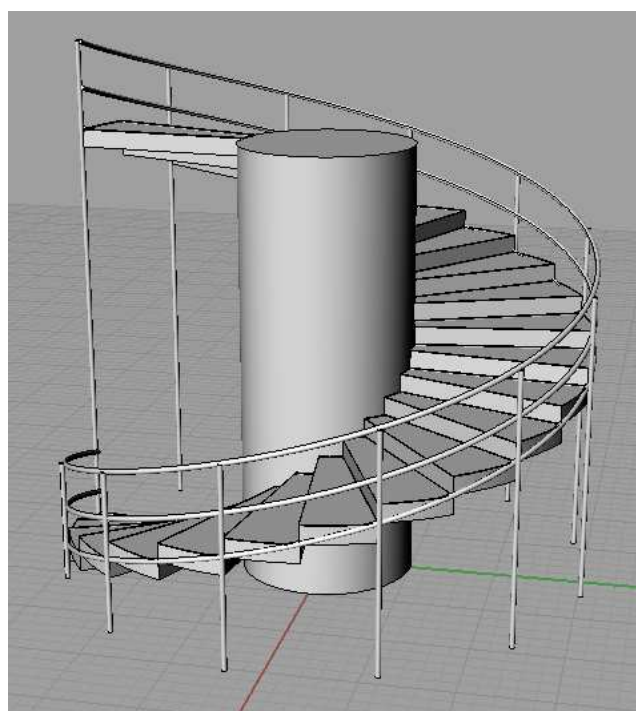
Definici uvádí Urban [8] - 167.

Na obrázku 2.21 je plocha sestrojena v Mongeově promítání. Je omezená dvěma válcovými plochami. Z nárysu je zřejmé, že jednotlivé polohy tvořící přímky jsou rovnoběžné s půdorysnou. Jde tedy o přímkovou plochu, která má tři řídící útvary a to osu o , šroubovici s a řídící rovinu π . Protože řídící přímka o je kolmá k řídící rovině, nazývá se plocha též přímý šroubový konoid.

Ve stavební praxi se s touto plochou můžeme setkat u točitých schodišť či v poschodových garážích jako s plochou spojující dvě podlaží. Použití této plochy u točitého schodiště můžeme vidět na obrázku 2.22.



Obrázek 2.21: Přímá uzavřená přímková šroubová plocha



Obrázek 2.22: Točité schodiště

b) Kosouhlá uzavřená přímková šroubová plocha

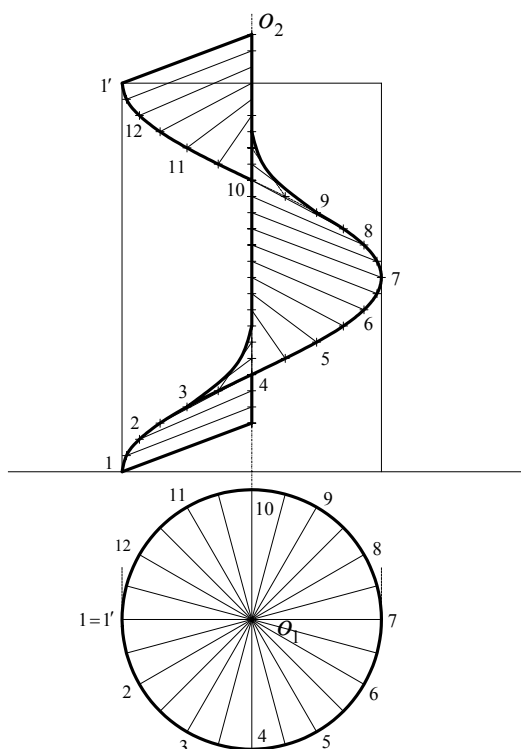
Definice 2.10. *Kosouhlá uzavřená přímková šroubová plocha (vývrtková plocha) vzniká šroubováním přímky, která protíná osu šroubového pohybu a svírá s ní úhel $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$.* ■

Definici je možné nalézt například v Urban [8] - 169.

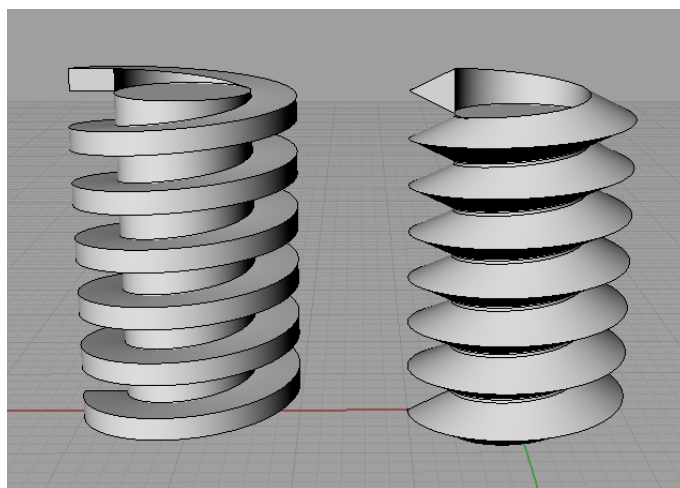
Podívejme se na obrázek 2.23, kde je tato plocha zobrazena v Mongeově promítání.

Obě uzavřené přímkové šroubové plochy se objevují v různých obměnách na šroubech a vrtácích. Jestliže šroubujeme trojúhelník ležící v osové rovině, dostáváme dvě kosoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy, které tvoří šroub s tzv. ostrým závitem. Pokud šroubujeme obdélník či čtverec ležící v osové rovině, jeho strany vytvoří dvě přímé uzavřené přímkové šroubové plochy a vzniká tak šroub s tzv. tupým závitem, viz obrázek 2.24.

Mezi přímkové šroubové plochy patří ještě další speciální plochy, které však už tentokrát jmenovat nebudeme.



Obrázek 2.23: Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha



Obrázek 2.24: Možné použití uzavřených přímkových šroubových ploch u šroubů

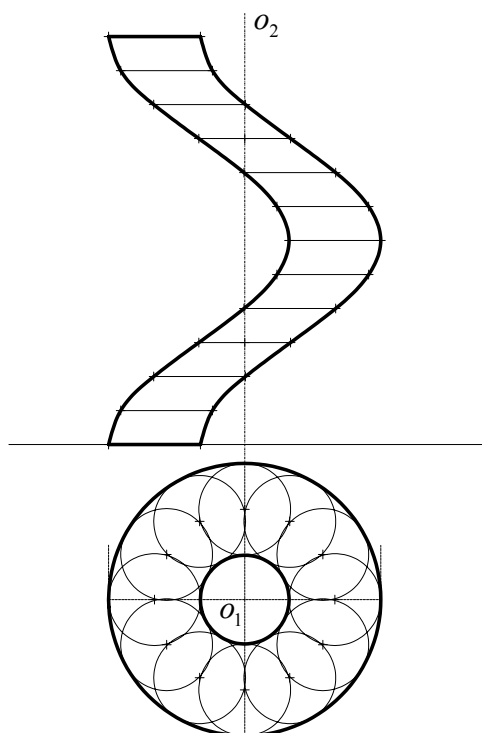
2.4.2 Cyklické šroubové plochy

Definice 2.11. *Normální cyklická šroubová plocha (vinutý sloupek) vzniká šroubováním kružnice, která leží v rovině kolmé k ose šroubového pohybu a jejíž střed neleží na ose. ■*

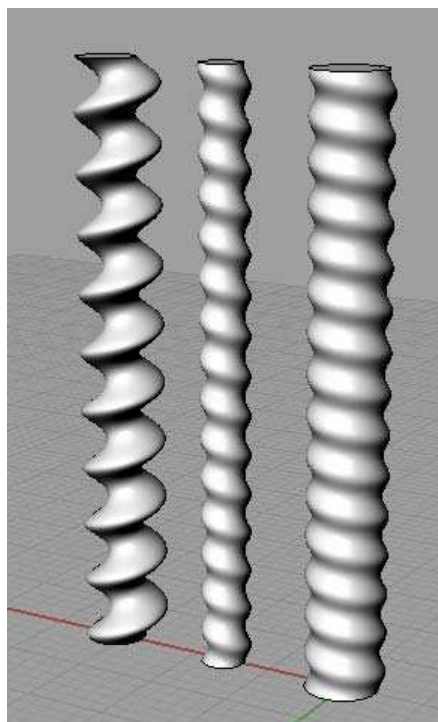
Definici nalezneme čtenář například v Urban [8] - 175.

Na obrázku 2.25 můžeme tuto plochu vidět v Mongeově promítání. Na obrázku 2.26 je ukázáno použití plochy v architektuře jako ozdobného sloupku (především baroko).

Opět mezi cyklické šroubové plochy patří další speciální plochy, které tentokrát vynecháme.



Obrázek 2.25: Normální cyklická šroubová plocha



Obrázek 2.26: Příklady ozdobných sloupů

2.5 Translační plochy

Vykoná-li křivka translační pohyb, dostáváme *translační plochy*. Translační pohyb definujeme jako pohyb, při kterém všechny body tvořící křivky proběhnou navzájem shodné dráhy.

Tyto plochy se využívají opět k zaklenutí velkých prostorů. Nejčastěji můžeme vidět plochy kruho-eliptické či kruho-parabolické. Tvořící křivkou je zde kružnice, jejíž každý bod opisuje při translačním pohybu shodné elipsy či paraboly. Přitom průměry řídicích i tvořících kuželoseček jsou větší než průměry stran obdélníkového půdorysu, který zastřešujeme. Používá se opět jen část plochy nad půdorysem.

2.6 Klínové plochy

Pokud se při spojitém pohybu bude křivka spojitě měnit a to tak, že do další polohy převedeme tvořící křivku kolineací nebo afinitou, dostaneme *kolineační* nebo *afinní plochy*. Zde nás budou zajímat pouze některé speciální, které se nazývají *klínové plochy*.

Definice 2.12. *Klínové plochy* jsou vytvořeny proměnnými křivkami $k_1, k_2, k_3 \dots$ s vlastnostmi:

- křivky $k_1, k_2, k_3 \dots$ leží v rovinách rovnoběžných s řídicí rovinou,
- křivky $k_1, k_2, k_3 \dots$ protínají řídicí rovinnou křivku m ,

c) kolmé průměty křivek $k_1, k_2, k_3 \dots$ na řídicí rovinu jsou ve vztahu *pravoúhlé afinity*. ■

Tuto definici uvádí Setzer [7] - 51.

Klínové plochy se ve stavební praxi mohou používat jako části střech či klenby nad obdélníkovým půdorysem.

Plochy vznikají nejenom pohybem křivky, ale také *pohybem jiné plochy*. Dostaneme tak další typ ploch:

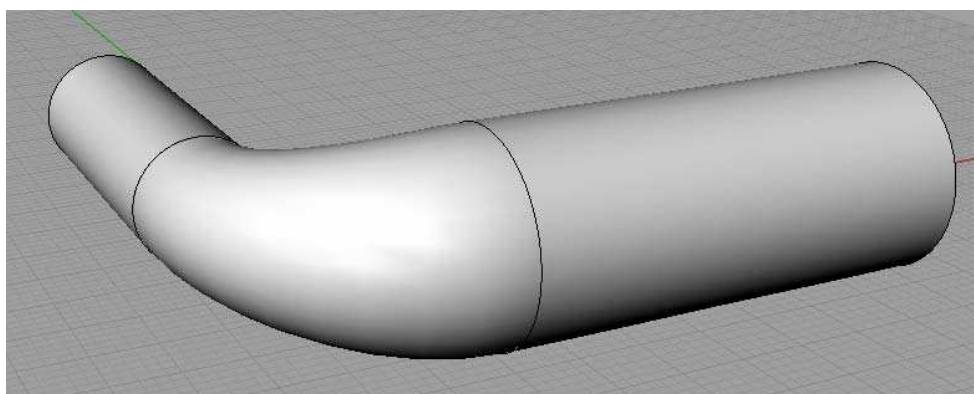
2.7 Obalové plochy

Vykoná-li plocha spojitý pohyb, při kterém se také může měnit a existuje-li plocha, která se dotýká všech ploch jednoparametrické soustavy ploch vzniklých tímto pohybem, nazýváme ji *obalová plocha*. Obalová plocha se dotýká tvořící plochy v každé její poloze podél křivky, které říkáme *charakteristika*. Na obalovou plochu můžeme potom nahlížet jako na jednoparametrickou soustavu charakteristik. Tvořící plocha a obalová plocha mají ve všech bodech společné charakteristiky společné tečné roviny.

Definice 2.13. *Pohybuje-li se kulová plocha svým středem po dané křivce, nazveme plochu **plochou rourovou**.* ■

Definice je uvedena v Piska, Medek [6] - 207.

Poloměr pohybující se kulové plochy se může spojitě měnit nebo může být konstantní. Zřejmě nejvýznamnější použití těchto ploch je u potrubí. Přitom rourová plocha proměnného poloměru se užívá ke spojení dvou válcových potrubí nestejného průměru, viz obrázek 2.27.



Obrázek 2.27: Rourová plocha jako potrubí

Dalším způsobem vytvoření ploch může být tzv. *sčítání ploch*. Mluvíme potom o *součtových plochách*.

Další detailní informace týkající se klasifikace ploch a jejich vytvoření nalezneme v Urban [8] nebo v Piska, Medek [6].

Nutno podotknout, že existují plochy, které lze vytvořit více způsoby. Tedy některé plochy můžeme zařadit zároveň do více kategorií podle uvedeného rozdělení.

O rozvinutelných plochách a jejich vytvoření se podrobněji zmíníme v následující kapitole.

Kapitola 3

Rozvinutelné plochy

3.1 Vytvoření a základní vlastnosti

Rozvinutelné plochy patří mezi přímkové plochy, tj. plochy vytvořené spojitým pohybem přímky. Jak už bylo zmíněno v předchozím, rozvinutelné plochy definujeme jako plochy, jejichž všechny přímky jsou *torzální*.

3.1.1 Rozvinutelné plochy jako obalové plochy

Rozvinutelné plochy můžeme zavést několika způsoby. My je budeme vyšetřovat jako *obalové plochy*.

Rozvinutelné plochy mají na rozdíl od ostatních ploch jen jednoparametrickou soustavu tečných rovin. Plyne to z toho, že rozvinutelné plochy jsou přímkové plochy a tedy jde o jednoparametrickou soustavu přímek v prostoru a podél každé přímky plochy existuje jen jediná tečná rovina. Na rozvinutelné plochy můžeme tedy nahlížet jako na obalové plochy jednoparametrických soustav jejich tečných rovin, přičemž charakteristiky jsou povrchové přímky plochy.

Poznámka 3.1. Uveďme si ještě pojem tzv. oskulační roviny, který budeme později ještě několikrát využívat.

Mějme danou prostorovou křivku k . V bodě T křivky k sestrojme tečnu t a v blízkém okolí bodu T zvolme další bod A . Každá rovina, která prochází tečnou t prostorové křivky k v bodě T , je tečnou rovinou křivky v bodě T a tedy i rovina α určená tečnou t v bodě T a bodem A je tečnou rovinou křivky k v bodě T . Při $A \rightarrow T$ dostáváme limitní polohu roviny α , označme ji τ . Rovina τ se nazývá *oskulační rovina* dané křivky k v bodě T .

Z definice oskulační roviny plyne, že oskulační rovinou rovinné křivky je rovina, ve které křivka leží.

Další detailní informace je možné nalézt v Urban [8] - 26. ■

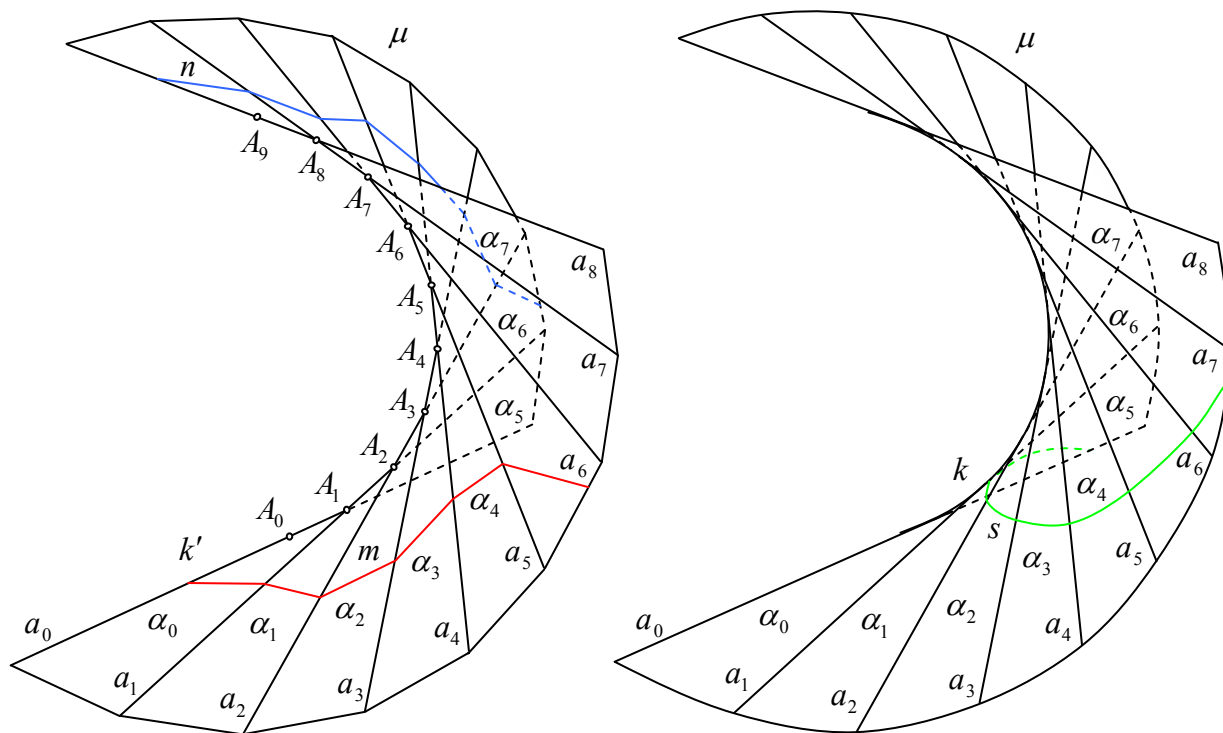
Věta 3.1. *Obaluje-li jednoparametrická soustava rovin plochu, pak je tato plocha rozvinutelná.* ■

Mějme prostorovou křivku k a nahraďme ji vepsaným prostorovým mnohoúhelníkem k' s vrcholy A_0, A_1, A_2, \dots (Pozn. Prostorovým mnohoúhelníkem rozumíme prostorovou lomenou čáru.) Označíme-li spojnice sousedních vrcholů $a_0 = A_0A_1, a_1 = A_1A_2, a_2 = A_2A_3, \dots$, potom vždy dvě sousední přímky a_i, a_{i+1} pro $i = 0, 1, 2 \dots$ jsou navzájem různoběžné a

určují roviny $\alpha_0 = (a_0, a_1)$, $\alpha_1 = (a_1, a_2)$, $\alpha_2 = (a_2, a_3)$, ..., které obsahují vždy tři po sobě jdoucí body $A_0 A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$, $A_2 A_3 A_4$, ... Dostali jsme tak mnohostěn $\mu = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Je zřejmé, že mnohostěn μ můžeme bez deformace (tj. bez toho, aniž bychom daný mnohostěn porušili, přetrhli nebo museli posouvat jednotlivé části vůči druhým) rozvinout postupným otáčením kolem přímk a_0, a_1, a_2, \dots do roviny (viz například Harant, Havel [2] - 35). Pokud na mnohostěnu μ uvažujeme libovolné prostorové mnohoúhelníky m, n , po rozvinutí přejdou do rovinných mnohoúhelníků. Přitom platí, že se délka lomené čáry určující hranici mnohoúhelníků v rovině bude rovnat délce lomené čáry v prostoru.

Zvyšujeme-li bez omezení počet vrcholů vepsaného prostorového mnohoúhelníka k' tak, aby délky jeho stran $A_0 A_1, A_1 A_2, A_2 A_3, \dots$ konvergovaly k nule, přejde mnohoúhelník k' v prostorovou křivku k . Přímky a_0, a_1, a_2, \dots přejdou v tečny křivky k a roviny $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ přejdou v oskulační roviny křivky k . Mnohostěn μ tedy přešel do soustavy oskulačních rovin prostorové křivky k a je tvořen tečnami prostorové křivky k , ale základní vlastnosti mu zůstaly. To znamená, že ho opět můžeme rozvinout bez deformace do roviny. Opět platí, že délka libovolné křivky plochy μ se po rozvinutí nezmění.

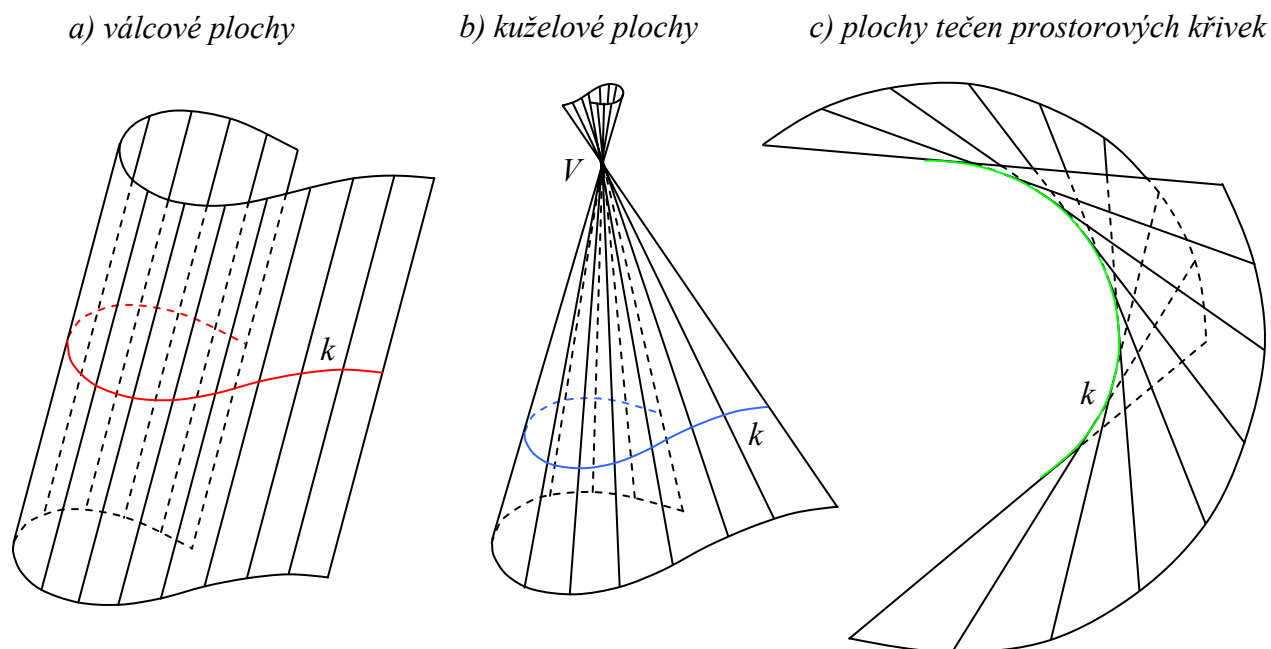
Obě situace můžeme vidět na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Vznik rozvinutelné plochy

Věta 3.2. *Jediné přímkové plochy rozvinutelné jsou a) válcové plochy, b) kuželové plochy, c) plochy tečen prostorových křivek. ■*

Důkaz nalezneme čtenář v Urban [8] - 69.



Obrázek 3.2: Rozvinutelné plochy

Na všech rozvinutelných plochách existují singulární body. Válcové plochy mají právě jeden singulární bod a to nevlastní bod řídicího směru. Kuželové plochy mají také právě jeden singulární bod, kterým je vrchol kuželové plochy. Plochy tečen prostorové křivky k mají křivku singulárních bodů a to právě křivku k , kterou nazýváme *hranou vratu*.

Tečnou rovinu rozvinutelné plochy podél její přímky p v regulárním bodě T určujeme přímkou p a tečnou v bodě T libovolné křivky plochy procházející bodem T a nedotýkající se v T přímkou p .

3.1.2 Rozvinutelná plocha spojující dvě dané křivky

Rozvinutelné plochy můžeme určovat i jinak. Platí, že rozvinutelná plocha je určena, jsou-li dány *dvě její křivky*.

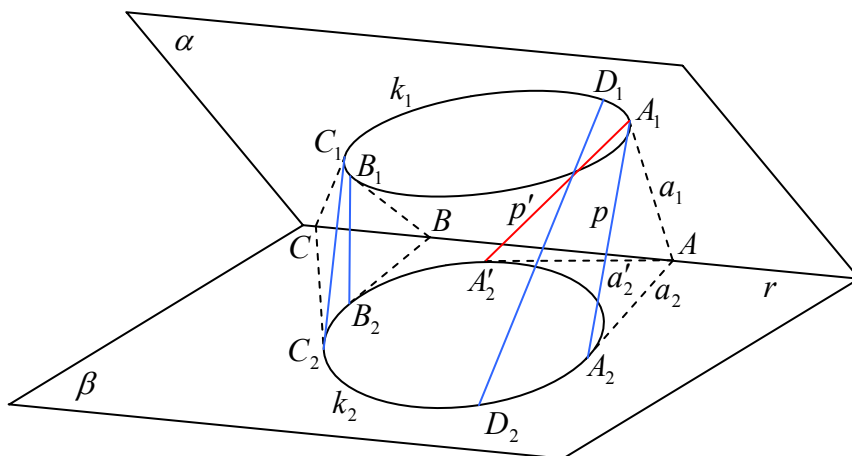
Rozvinutelnou plochu tečen prostorové křivky k jsme vytvořili spojitým pohybem její oskulační roviny jako obalovou plochu.

Nyní budeme pohyb roviny řídit podmínkou, aby pohybuje se rovina τ byla zároveň tečnou rovinou daných dvou křivek k_1, k_2 . Křivky k_1, k_2 mohou být jak rovinné tak prostoro-
rové a nazýváme je *řídícími křivkami*. Každá poloha pohybuje se roviny τ obsahuje dvě tečny daných řídicích křivek k_1, k_2 , které se protínají. Přímka p , která spojuje body dotyku těchto tečen je tvořící přímkou rozvinutelné plochy. Pohybuje se rovina τ je tečnou rovinou rozvinutelné plochy podél přímky p .

Chceme-li v libovolném bodě A_1 křivky k_1 sestavit tvořící přímku p rozvinutelné plochy, sestavíme kuželovou plochu κ s vrcholem v bodě A_1 a o řídicí křivce k_2 . Tečnou a_1 křivky k_1 v bodě A_1 vedeme tečnou rovinu τ k pomocné kuželové ploše κ . Dotyková přímka p na kuželové ploše je tvořící přímkou a rovina τ je tečnou rovinou rozvinutelné plochy, protože obsahuje tečnu a_1 křivky k_1 v bodě A_1 a tečnu a_2 křivky k_2 v bodě A_2 , který na křivce k_2 vytkne přímka p .

Jsou-li křivky k_1, k_2 rovinnými křivkami v rovinách α a β můžeme tečné roviny τ a přímky p rozvinutelné plochy určené křivkami k_1, k_2 sestavit snadno (obrázek 3.3). V libovolném bodě A_1 křivky k_1 sestavíme tečnu a_1 ke křivce k_1 a průsečíkem $A = a_1 \cap r$, kde $r = \alpha \cap \beta$, vedeme tečnu a_2 s bodem dotyku A_2 ke křivce k_2 . Přímka $p = A_1A_2$ je tvořící přímkou rozvinutelné plochy, rovina $\tau = (a_1a_2)$ je tečná rovina rozvinutelné plochy podél její přímky p .

Bodem A_1 křivky k_1 prochází tolik tvořících přímek rozvinutelné plochy, kolik lze přímkou a_1 vést tečných rovin ke kuželové ploše κ . Toto platí pro všechny body křivky k_1 . To znamená, že křivkou k_1 (stejně pro k_2) prochází více plášťů plochy. Toto tvrzení je možné nalézt například v Kadeřávek, Klíma, Kounovský [3] - 532.

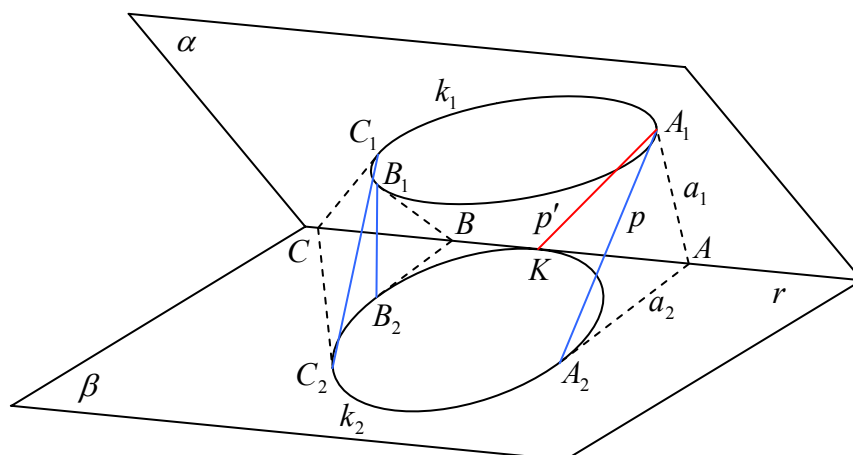


Obrázek 3.3: Rozvinutelná plocha určená dvěma řídicími křivkami

Jsou-li křivky k_1, k_2 kuželosečkami (obrázek 3.3), pak bodem A_1 (A_2) kuželosečky k_1 (k_2) procházejí dvě přímky rozvinutelné plochy (na obrázku 3.3 odlišeno barvou), které náležejí plášťům různých ploch. Přímky volíme podle účelu plochy. Kuželosečky k_1, k_2 jsou průniky těchto dvou plášťů.

Dotýká-li se řídicí křivka k_1 průsečnice r , pak se plocha rozpadá na rozvinutelnou plochu a rovinu β . Dotykový bod křivky k_1 a průsečnice r označme K . Potom dotykový

bod K tečen sestrojených proměnným bodem na průsečnici r se nemění a všechny tvořící přímky, které z něho vycházejí, tedy leží v rovině β křivky k_2 . Tento případ můžeme vidět na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4

3.2 Rozvinutí rozvinutelných ploch

Definice 3.1. *Rozvinutím* plochy do roviny budeme rozumět takové analytické zobrazení plochy na rovinu, které bod plochy zobrazuje na bod roviny a zachovává délky křivek (a jejich úhly). ■

Definici 3.1. je možné nalézt v Urban [8] - 75.

Věta 3.3. *Každou rozvinutelnou plochu lze rozvinout do roviny.* ■

Věta 3.3. je uvedena například v Piska, Medek [6] - 118.

Při rozvinutí rozvinutelné plochy vlastně rozvíjíme každou její křivku. Sestrojujeme tedy body a tečny rozvinutých křivek.

Poznámka 3.2. Zavedeme ještě další pojem, který nám usnadní rozvinutí křivek plochy.

V souladu s literaturou, například Piska, Medek [6] - 19, 29 nebo Urban [8] - 17, 28, si proto ještě uvedme několik definic.

Zvolme si libovolný regulární bod T na rovinné křivce k a sestrojme v něm tečnu t a normálu n . Zvolme si další dva body A, B na křivce k , různé od bodu T . Body A, B, T prochází jediná kružnice (přímka) l . Při $A \rightarrow T$ a $B \rightarrow T$ po křivce dostaneme limitní polohu kružnice l , kterou označíme k_T . Kružnice k_T se nazývá *oskulační kružnice*. Její střed S leží na normále n . Poloměr ρ oskulační kružnice nazýváme *poloměrem křivosti* a střed S

středem křivosti křivky k v jejím regulárním bodě T . Číslo $\frac{1}{\rho}$ nazýváme *křivostí* křivky v bodě T , které udává velikost zakřivení křivky v bodě.

Oskulační kružnici zavádíme proto, že se v dostatečně malém okolí bodu T velmi málo liší od křivky k , a proto můžeme v tomto okolí bodu T křivku k oskulační kružnicí nahradit.

Prostorová křivka má na rozdíl od rovinné křivky dvě křivosti. My si nadefinujeme pouze tzv. první křivost (flexi).

Postupovat budeme podobně jako u křivek rovinných. Na křivce k si zvolíme kromě bodu T další dva body A , B a sestrojíme kružnici l , která prochází body A , B , T . Při $A \rightarrow T$ a $B \rightarrow T$ dostáváme limitní polohu kružnice l , kterou označíme k_T . Pokud kružnice k_T existuje, nazývá se *oskulační kružnice* a leží v oskulační rovině křivky k . Její střed S leží na hlavní normále křivky k v bodě T . Poloměr ρ oskulační kružnice nazýváme *poloměrem flexe* a střed S *středem flexe* křivky k v jejím regulárním bodě T . Číslo $\frac{1}{\rho}$ nazýváme *první křivostí (flexí)* křivky v bodě T . ■

Ted' když známe křivost křivky plochy, můžeme dokonce snadno stanovit křivost jejího obrazu v rozvinutí. S tím také souvisí další dvě věty, jejichž důkazy nalezneme čtenář v Urban [8] - 75.

Věta 3.4. *Přímky rozvinutelné plochy při jejím rozvinutí do roviny se zobrazí opět jako přímky.* ■

Věta 3.5. *Při rozvinutí rozvinutelné plochy do roviny se zachovává křivost její hrany vratu.* ■

Nyní si uveďme velmi důležitou větu, která vyjadřuje vztah mezi křivostí křivek na rozvinutelné ploše a jejich křivostí po rozvinutí plochy (viz například Urban [8] - 76).

Věta 3.6 (Catalanova). *Křivost k_0 v bodě M_0 obrazu l_0 křivky l rozvinutelné plochy κ při jejím rozvinutí do κ_0 v rovině se rovná první křivosti křivky l v bodě M násobené kosínem úhlu φ , který svírá oskulační rovina křivky l v bodě M s tečnou rovinou plochy v bodě M , tj.:*

$$(3.1) \quad k_0 = k_1 \cos \varphi. \quad \blacksquare$$

Speciálně:

a) Je-li l přímka rozvinutelné plochy κ , to znamená, že $k_1 = 0$, potom také $k_0 = 0$ a tedy l_0 je přímka.

b) Je-li oskulační rovina křivky l rozvinutelné plochy κ v jejím bodě M zároveň tečnou rovinou plochy κ v témže bodě, pak křivost jejího obrazu l_0 v M_0 při rozvinutí plochy κ se rovná první křivosti křivky l v bodě M , tj.: $k_1 = k_0$.

c) Je-li oskulační rovina křivky l rozvinutelné plochy κ v jejím bodě M kolmá k tečné rovině plochy κ v témže bodě, pak obraz l_0 křivky l při rozvinutí plochy κ má v obrazu M_0 bodu M inflexní bod, tj.: $k_0 = 0$ a tedy l_0 je přímka. ■

Definice 3.2. *Geodetickou křivkou plochy rozumíme křivku, v jejímž každém bodě je oskulační rovina kolmá k příslušné tečné rovině plochy.* ■

Definice je převzata z Piska, Medek [6] - 120.

Z bodu c) tedy plyne, že geodetické křivky rozvinutelné plochy se při rozvinutí plochy do roviny zobrazí do přímek. Tvrzení platí i obráceně. Je-li obrazem křivky rozvinutelné plochy při jejím rozvinutí do roviny přímka, pak je křivka geodetickou křivkou plochy.

3.3 Rozvinutí válcových ploch

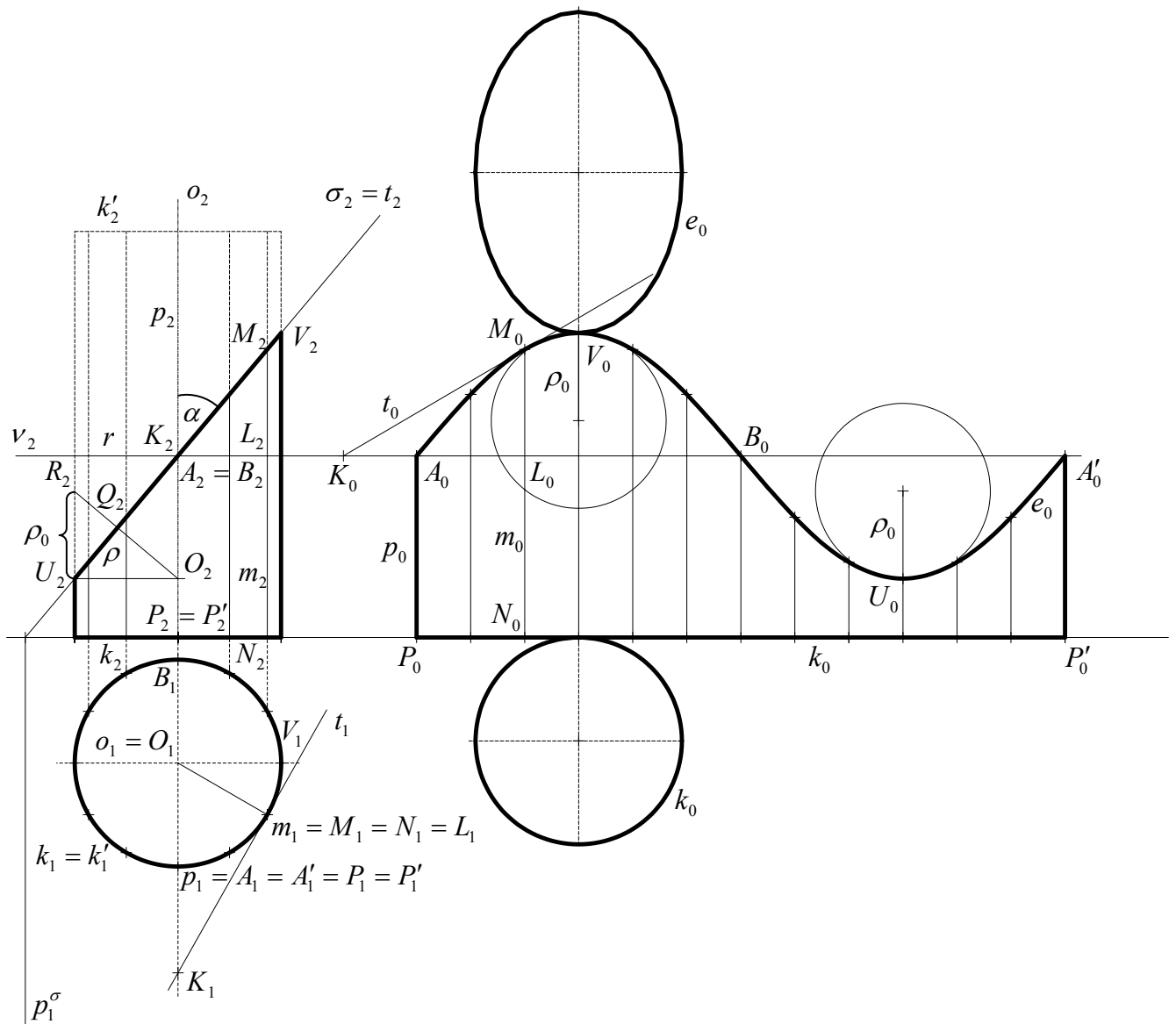
V tomto oddíle se budeme zabývat rozvíjením rotačních válcových ploch a základních křivek, které na nich leží. Podíváme se také na rozvinutí kosé plochy válce. Ke každému rozvinutí doplníme též podstavu. Ke konstrukcím využijeme již zmíněnou Catalanovu větu.

Konstrukce rozvinutí samotného pláště rotačního válce je velice jednoduchá. Plášť válce s kruhovou podstavou o poloměru r a výškou v se rozvine do obdélníka o rozměrech v a $2\pi r$, což je obvod kružnice podstavy. Podíváme se proto na rozvinutí pláště rotačního válce seříznutého rovinou. Úloha tedy bude následující:

Příklad 3.1. Sestrojíme rozvinutí pláště rotačního válce seříznutého rovinou σ .

Rozvinutí budeme sestavovat v Mongeově promítání, viz obrázek 3.5. Přitom válec umístíme tak, aby jeho podstava ležela v půdorysně a aby rovina řezu σ byla kolmá k nárysně.

Rovinu σ volíme tak, aby úhel α , který svírá rovina σ s osou válcové plochy, byl prvkem intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Rovina σ protíná plášť válce v elipse e . Plášť válce rozvineme do tečné roviny válcové plochy, která prochází povrchovou přímkou p . Přitom elipsa e se rozvine do křivky e_0 . Podle Catalanovy věty víme, že povrchové přímky válcové plochy se při rozvinutí zobrazí opět na přímky (vzájemně rovnoběžné), což využijeme k sestavení bodů křivky e_0 . Podívejme se například na bod M , který leží na povrchové přímce m a zároveň je to bod elipsy e (je tedy průsečíkem přímky m a roviny σ). Jak už bylo zmíněno v předchozím, kružnice k se zobrazí do úsečky. Bod M_0 bude tedy ležet na m_0 , kde $m_0 \perp k_0$, a bude platit, že $|M_0N_0| = |M_2N_2|$.



Obrázek 3.5: Rozvinutí pláště rotačního válce seříznutého rovinou

Abychom dostali co nejpřesnější průběh křivky e_0 , využijeme vlastnosti, že rozvinutí zachovává velikosti úhlů, k sestrojení tečen křivky e_0 . V každém bodě křivky e_0 umíme navíc spočítat i křivost.

Tečnu t_0 křivky e_0 sestrojíme v bodě M_0 . Víme tedy, že úhel přímky t_0 a m_0 se rovná úhlu tečny t elipsy e a povrchové přímky m . Zkonstruujeme pomocnou rovinu ν , která je rovnoběžná s půdorysnou a protíná přímky m a t v bodech K, L . Je tedy zřejmé, že hledáme úhel v ΔKLM při vrcholu M . V rozvinutí stačí sestrojit $\Delta K_0L_0M_0$, pro který platí, že $|K_0L_0| = |K_1L_1|$. Hledaná tečna t_0 je potom určena body K_0 a M_0 .

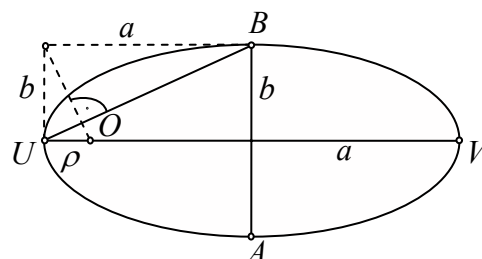
Sestrojme ještě oskulační kružnice pro body V_0 a U_0 . Abychom určili jejich poloměry, potřebujeme znát poloměry oskulačních kružnic elipsy e v bodech U a V a úhel φ osku-

lační roviny elipsy e v bodech U a V s tečnou rovinou plochy. Podívejme se tedy nejprve na bod U . Pro bod V bude konstrukce analogická. Elipsa e je rovinná křivka, a proto oskulační roviny v každém jejím bodě splývají s rovinou σ . Tečná rovina válce v bodě U je rovina kolmá k půdorysně a zároveň k nárysně (nárysná promítací rovina). Úhel φ tedy vidíme v náryse ve skutečné velikosti, $\varphi = \alpha$.

Poloměr ρ oskulační kružnice elipsy e v bodě U můžeme snadno spočítat. Z obrázku 3.6 odvodíme:

$$(3.1) \quad \frac{\rho}{b} = \frac{b}{a},$$

kde a je velikost hlavní poloosy, b je velikost vedlejší poloosy elipsy e a ρ je poloměr oskulační kružnice elipsy e v bodě U .



Obrázek 3.6: K odvození výpočtu poloměru oskulační kružnice elipsy e v bodě U

Víme, že poloměr válce je r , tedy $b = r$. Ze vztahu $\sin \alpha = \frac{r}{a}$, který lze jednoduše odvodit v náryse v obrázku 3.5, dostáváme

$$(3.2) \quad a = \frac{r}{\sin \alpha}.$$

Pokud dosadíme (3.2) do (3.1), získáváme vztah pro poloměr ρ oskulační kružnice:

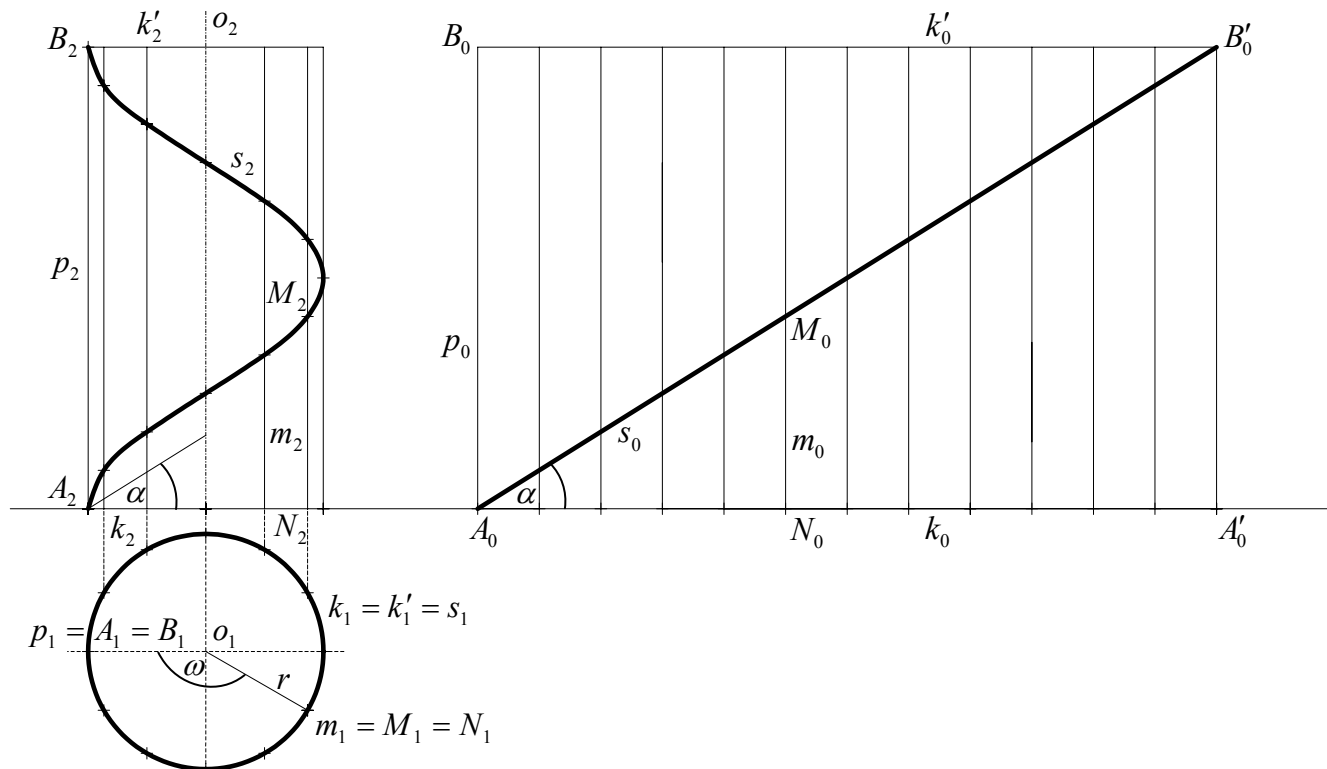
$$(3.3) \quad \rho = \left(\frac{\frac{r^2}{r}}{\frac{r}{\sin \alpha}} \right) = r \sin \alpha.$$

Z (3.3) plyne, že sestrojíme-li středem O kružnice plochy kolmici na rovinu řezu σ a jeho průsečík s rovinou σ označíme Q , bude bod Q středem oskulační kružnice elipsy e v bodě U . Průsečík téže kolmice s povrchovou přímkou plochy procházející bodem U označme R . Z Catalanovy věty snadno odvodíme vztah pro poloměr ρ_0 oskulační kružnice křivky e_0 v bodě U_0 :

$$(3.4) \quad \rho_0 = \left(\frac{\rho}{\cos \alpha} = \frac{r \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = r \tan \alpha.$$

V obrázku 3.5 jsou tedy poloměry ρ a ρ_0 určeny takto: $\rho = U_2 Q_2$ a $\rho_0 = U_2 R_2$. Inflexní body křivky e_0 jsou body A_0 , B_0 a A'_0 , což opět plyne z Catalanovy věty. Navíc lze dokázat, že křivka e_0 je obecná sinusoida. ■

Příklad 3.2. Sestrojíme rozvinutí pláště rotačního válce s jedním závitem pravotočivé šroubovice.



Obrázek 3.7: Rozvinutí pláště válce s jedním závitem pravotočivé šroubovice

Šroubovice je prostorová křivka, která je dráhou bodu při šroubovém pohybu. Předpokládáme, že bod neleží na ose o šroubového pohybu, v tomto případě bychom totiž dostali přímku.

Šroubojící bod je stále ve stejné vzdálenosti od osy o , proto šroubovice leží na rotační válcové ploše. Otočíme-li bod o úhel 2π , posune se současně ve směru osy o o výšku v . Platí tedy, že velikost posunutí z ve směru osy o je přímo úměrná velikosti ω úhlu, o který se bod otočí:

$$(3.5) \quad z = v_0 \omega,$$

kde v_0 je konstanta a nazýváme ji *redukovanou výškou závitů*. Lehce také odvodíme, že

$$(3.6) \quad v = 2\pi v_0.$$

Lze také dokázat, že tečny šroubovice svírají s rovinou kolmou k ose šroubovice konstantní úhel α , pro který platí:

$$(3.7) \quad \tan \alpha = \frac{v_0}{r},$$

Úhel α se nazývá *sklon šroubovice* a $\tan \alpha$ *spád šroubovice*. Šroubovice je tedy křivkou konstantního spádu.

Válec opět umístíme tak, aby jeho podstava ležela v půdorysně. Plášť válce rozvineme do tečné roviny válcové plochy, která prochází povrchovou přímkou p , viz obrázek 3.7. Obrazem s_0 závitů pravotočivé šroubovice s je úhlopříčka obdélníka, do kterého se rozvine plášť válce, s rozměry $2\pi r$ a v , kde r je poloměr kružnice podstavy a v je výška válce.

Zvolme pravoúhlou soustavu souřadnic $\{A_0; x, y\}$, kde $x = k_0$ a $y = p_0$. Dokažme nyní, že s_0 je přímka. Libovolný bod křivky s_0 vyjádříme takto:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} x &= (|A_0 N_0| = \overline{A_1 M_1}) = r\omega, \\ y &= (|M_0 N_0| = |M_2 N_2|) = z_M = v_0\omega, \end{aligned}$$

kde r je poloměr kružnice podstavy válce, v_0 redukovaná výška závitů a ω je úhel, o který se otočí přímka p kolem osy o . Tedy parametrické vyjádření křivky je $s_0 = [\omega r, v_0\omega]$. Pokud přejdeme k explicitnímu tvaru rovnice křivky s_0 , dostáváme

$$(3.9) \quad y = x \tan \alpha.$$

Z (3.9) plyne, že křivka s_0 je přímka svírající s osou x úhel α . Tedy šroubovice je geodetickou křivkou své nosné válcové plochy. ■

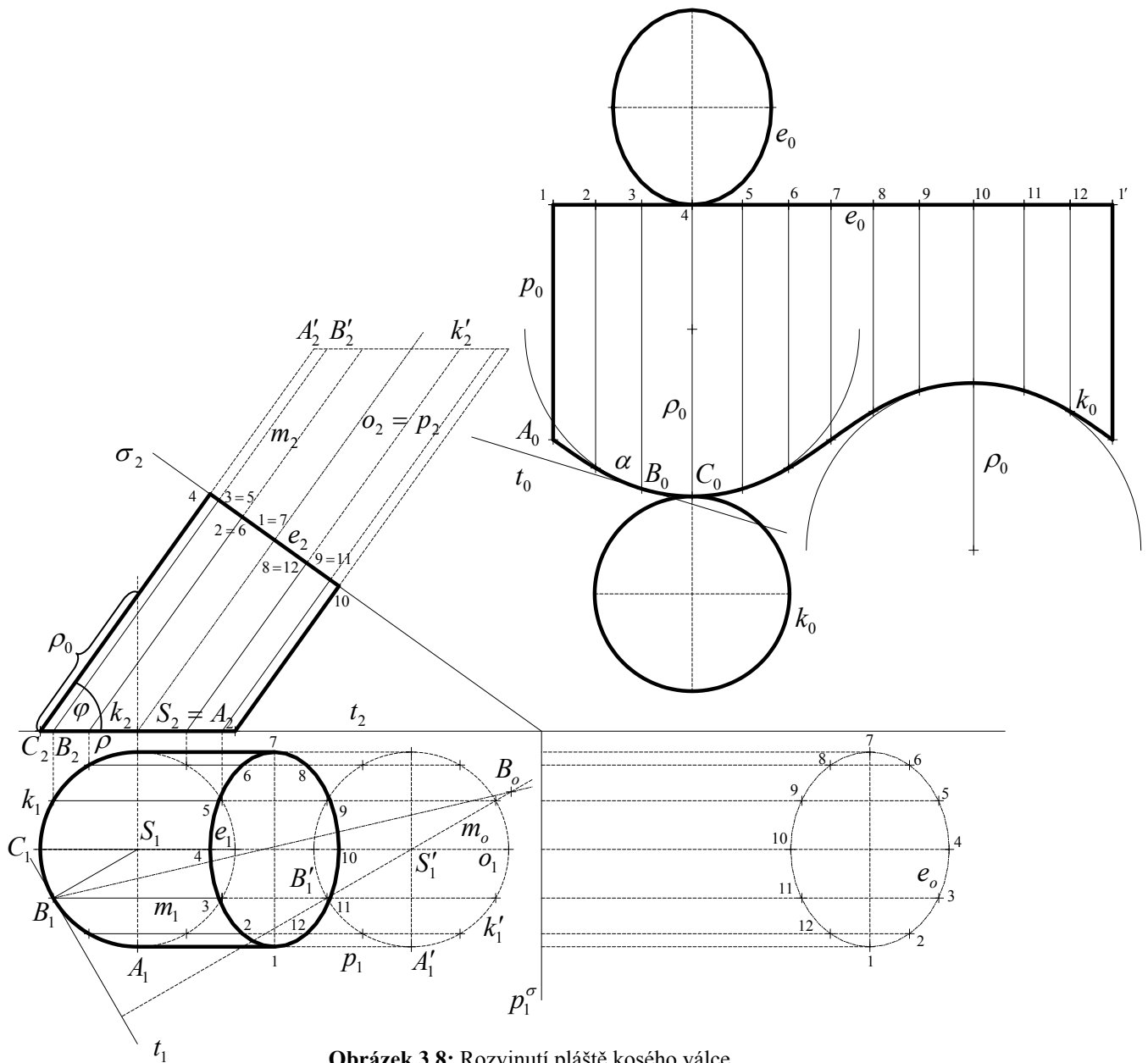
Příklad 3.3. Sestrojíme rozvinutí pláště kosého válce.

Válec umístíme tak, aby jeho podstava ležela v půdorysně a jeho povrchové přímky byly rovnoběžné s nárysnou, viz obrázek 3.8. Plášť válce rozvineme do tečné roviny válcové plochy, která prochází povrchovou přímkou p . Z Catalanovy věty opět plyne, že povrchové přímky válcové plochy se zobrazí do vzájemně rovnoběžných přímek.

Sestrojíme pomocnou rovinu σ kolmou na povrchové přímky kosé válcové plochy, která protne plášť válce v elipse e . Při rozvinutí se elipsa e zobrazí do úsečky, jejíž délku zkonstruujeme přibližně, a kružnice k a k' do křivek k_0 a k'_0 , které sestrojíme bodově, tj. $|A_2 1| = |A_0 1_0|$.

K přesnějším konstrukcím křivek k_0 a k'_0 můžeme využít tečen. Vezměme si například bod B' a v něm tečnu t . Otočením tečné roviny (mt) do půdorysny dostáváme otočenou polohu m_0 přímky m . Úhel přímek t a m_0 se rovná skutečnému úhlu přímek t a m , který se při rozvinutí zachová.

Pro každý bod křivek k_0 a k'_0 bychom také mohli spočítat křivost. Konstrukce je provedena pro bod C_0 . ■



Obrázek 3.8: Rozvinutí pláště kosého válce

3.4 Rozvinutí kuželových ploch

V následující podkapitole se budeme věnovat rozvíjení rotačních kuželových ploch, křivek na nich ležících a také rozvinutí kosého kužele. Ke každému rozvinutí doplníme též podstavu.

Stejně jako u rotační válcové plochy je i zde rozvinutí samotného pláště rotačního kužele velice jednoduché. Plášť kužele se rozvine do kruhové výseče, jejíž poloměr se rovná délce strany kužele a jejíž oblouk se rovná obvodu základny. Středový úhel výseče je

$\omega = \frac{2\pi r}{s}$, kde r je poloměr kružnice podstavy a s je strana kužele. Přejděme tedy rovnou k úloze rozvinutí pláště rotačního kužele seříznutého rovinou.

Příklad 3.4. Sestrojme rozvinutí pláště rotačního kužele seříznutého rovinou σ .

Kužel umístíme tradičně tak, aby jeho podstava ležela v půdorysně a aby rovina řezu σ byla kolmá k nárysně, viz obrázek 3.9.

Víme, že řezem rotační kuželové plochy rovinou, která není vrcholová, ani není kolmá k ose kuželové plochy, je buď elipsa, parabola nebo hyperbola. Zvolme rovinu σ tak, abychom dostali parabolický řez kuželové plochy, tj. vrcholová rovina σ' , pro kterou platí $\sigma' \parallel \sigma$, se dotýká kuželové plochy podél povrchové přímky.

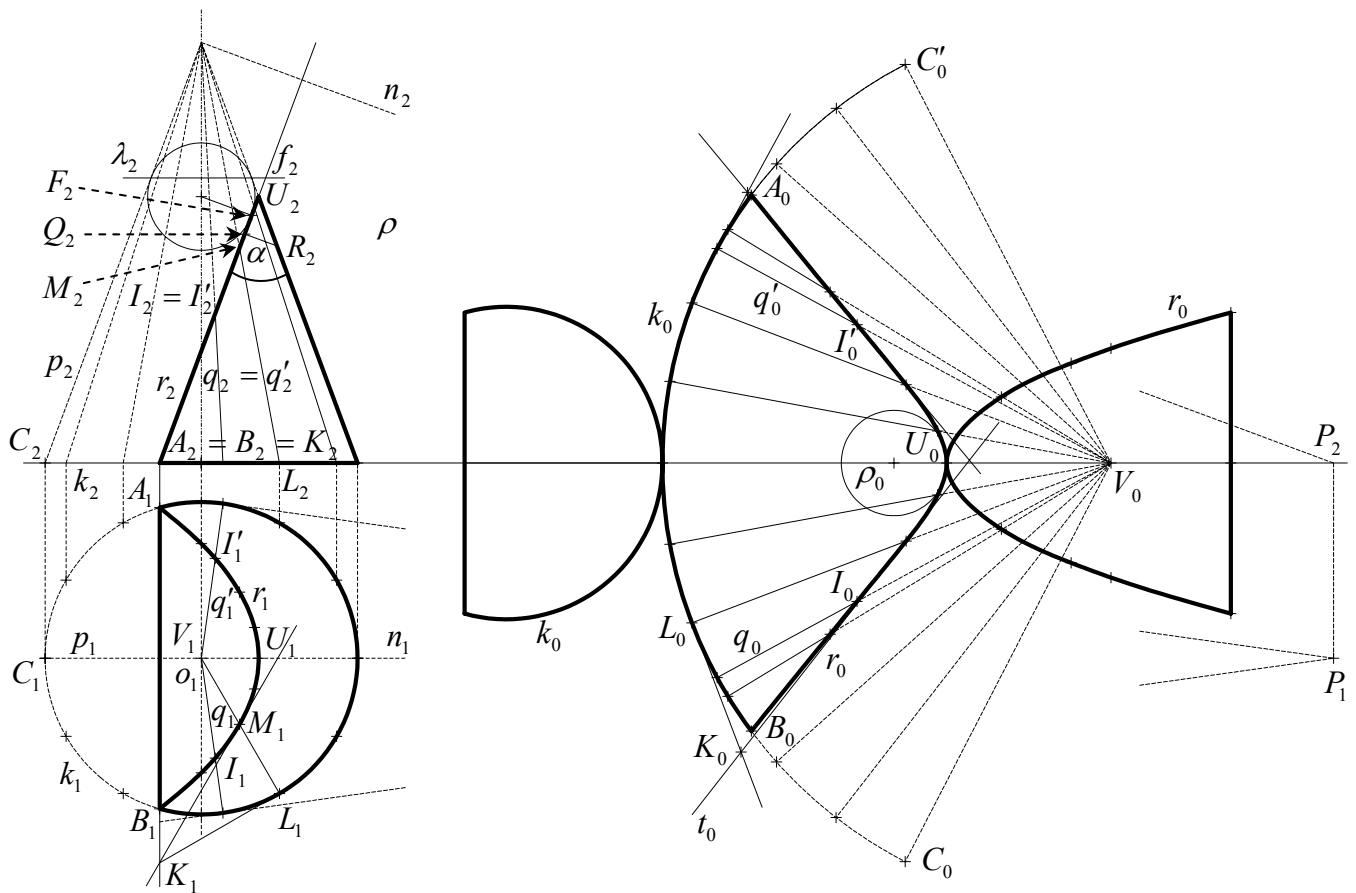
Plášť kužele rozvineme do tečné roviny kuželové plochy, která prochází povrchovou přímkou p . Přitom parabola r se rozvine do křivky r_0 , kterou budeme sestrojovat bodově. Z Catalanovy věty plyne, že povrchové přímky kuželové plochy se nám při rozvinutí zobrazí opět na přímky. Vezměme si tedy bod M , který leží na povrchové přímce m a zároveň je to bod paraboly p (tj. je průsečíkem přímky m a roviny σ). Bod M_0 leží na m_0 a platí, že $|V_0M_0| = |VM|$. Skutečnou velikost úsečky VM zjistíme v otočení.

K přesnějšímu sestrojení křivky r_0 využijeme opět tečen. Konstrukce je stejná jako u rozvíjení válce. Užijeme k tomu pravoúhlý $\triangle KLM$, což je patrné z obrázku 3.9.

Sestrojme ještě oskulační kružnici pro bod U_0 . Potřebujeme k tomu znát poloměr oskulační kružnice paraboly r v bodě U a úhel φ oskulační roviny paraboly r v bodě U s tečnou rovinou plochy. Parabola r je rovinná křivka, a proto oskulační roviny v každém jejím bodě splývají s rovinou σ . Tečná rovina kužele v bodě U je rovina kolmá k nárysně, která obsahuje povrchovou přímkou kužele procházející bodem U . Úhel φ tedy vidíme v náryse ve skutečné velikosti, $\varphi = \alpha$.

Poloměr ρ oskulační kružnice paraboly r v bodě U odvodíme. Je-li kuželová plocha prořata rovinou v parabole r , její ohnisko F je dotykový bod kulové plochy κ , která je vepsána kuželové ploše a dotýká se roviny řezu (tj. platí tzv. Quételetova-Dandelinova věta). Navíc platí, že pomocná rovina λ dotykové kružnice kulové plochy a kuželové plochy protíná rovinu řezu σ v řídicí přímce f paraboly r . Těmito pomocnými konstrukcemi dostáváme tzv. parametr paraboly r , který se rovná vzdálenosti bodů $|F_2f_2|$. Víme, že poloměr oskulační kružnice ve vrcholu paraboly r je roven parametru, tedy vzdálenost $|U_2Q_2|$ je hledaný poloměr ρ . Z Catalanovy věty už lehce odvodíme, že $\rho_0 = R_2U_2$.

Inflexní body křivky r_0 jsou opět určeny těmi body řezu, v nichž jsou tečné roviny plochy kolmé na oskulační rovinu. Tyto roviny procházejí přímkou n , což je kolmice na rovinu řezu vedená vrcholem V , a dotýkají se plochy podél přímek q a q' . Inflexní body jsou potom obrazy průsečíků $I = q \cap \sigma$ a $I' = q' \cap \sigma$. ■



Obrázek 3.9: Rozvinutí pláště rotačního kužele seříznutého rovinou

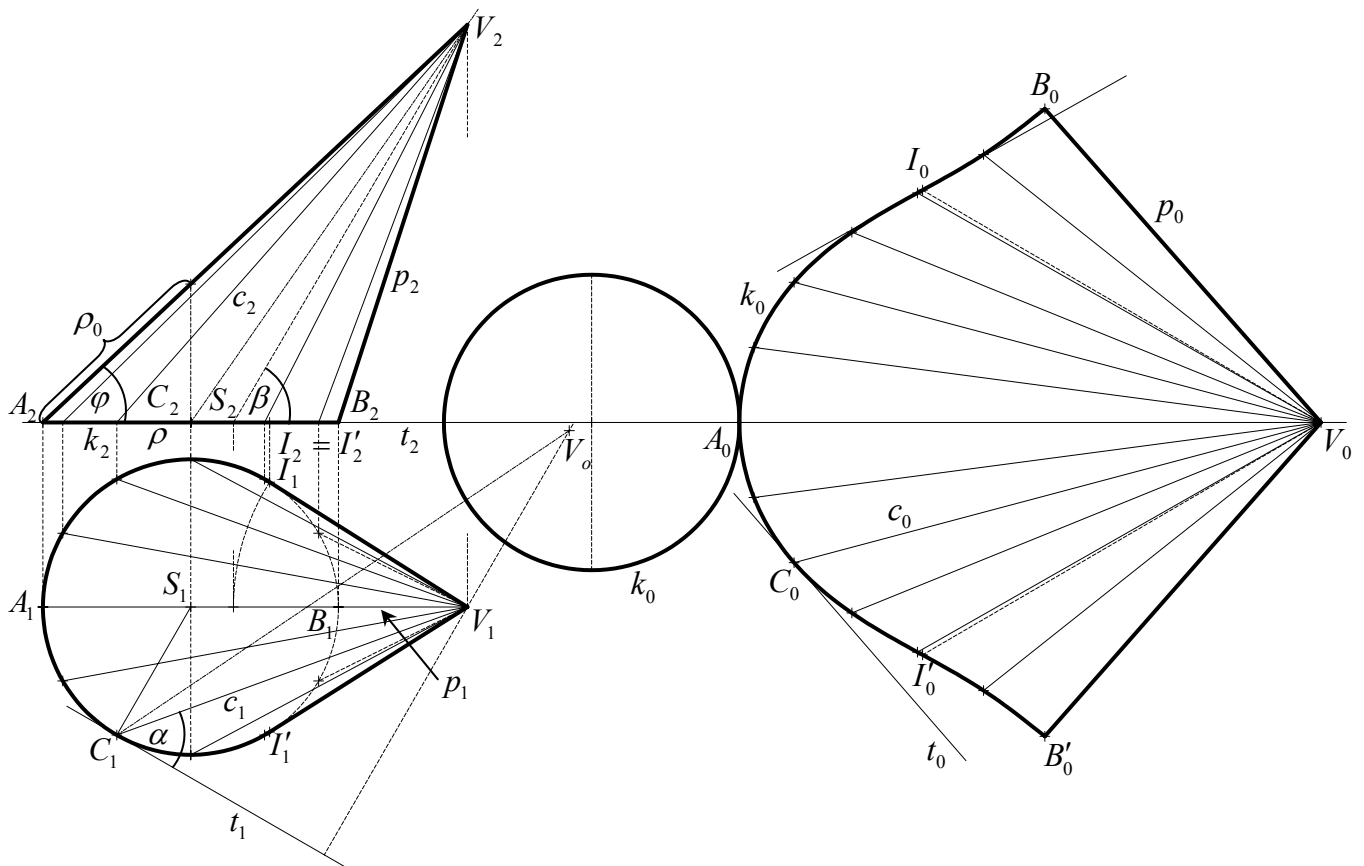
Příklad 3.5. Sestrojíme rozvinutí pláště kosého kužele.

Kužel opět umístíme tak, aby jeho podstava ležela v půdorysně, viz obrázek 3.10. Kužel nahradíme vepsaným n -bokým jehlanem, v našem případě $n=12$. Sestrojíme rozvinutí pláště vepsaného jehlanu a dostaneme tak přibližně síť kosého kužele. Z Catalanovy věty opět plyne, že se povrchové přímky kuželové plochy při rozvinutí zobrazí na přímky. Skutečné velikosti úseček $V1, V2, V3, \dots$ zjistíme otočením kolem půdorysně promítací přímky vrcholu V do roviny rovnoběžné s nárysnou. Obrazy bodů $1, 2, 3, \dots$ rozvinutého pláště jehlanu jsou přibližné polohy bodů křivky k_0 , do níž se rozvine kružnice k . Pokud chceme křivku k_0 stanovit přesněji, pak ke konstrukci nepoužijeme vepsaný jehlan, ale uijeme rektifikovaných oblouků $12, 23, 34, \dots$ kružnice k .

Ještě zkonstruujeme tečnu křivky k_0 , například v bodě C_0 . To znamená, že najdeme skutečnou velikost úhlu tečny t v bodě C a povrchové přímky c otočením tečné roviny (ct) do půdorysny.

Křivka k je kružnice, tedy v každém bodě má stejnou křivost. Vezměme si bod A . V něm tečná rovina plochy s oskulační rovinou, což je v našem případě půdorysna, svírá úhel φ , který vidíme ve skutečné velikosti v náryse. Potom poloměr oskulační kružnice křivky k_0 v bodě A_0 už snadno odvodíme v náryse.

Ještě se můžeme podívat na inflexní body křivky k_0 . Hledáme tedy opět body, v nichž jsou tečné roviny plochy kolmé na oskulační rovinu, zde půdorysnu. Na obrázku 3.10 jsou inflexní body označeny I_0, I'_0 , úhel β je úhel tečen křivky k_0 v bodech I_0 a I'_0 s přímkami V_0I_0 a $V_0I'_0$. ■



Obrázek 3.10: Přibližné rozvinutí pláště kosého kužele

3.5 Rozvinutí rozvinutelné šroubové plochy

V této sekci se budeme zabývat rozvíjením plochy tečen šroubovice s , která se též nazývá *rozvinutelná šroubová plocha*. Než přejdeme k samotnému rozvinutí, je nutné zmínit se o některých základních vlastnostech šroubovice a rozvinutelné šroubové plochy.

Z předchozího již známe některé vztahy pro šroubovici. Vypočítejme ještě její první křivost v obecném bodě. Vyjdeme přitom z jejích parametrických rovnic

$$(3.10) \quad x = r \cos \omega, \quad y = r \sin \omega, \quad z = v_0 \omega,$$

kde $r > 0$, $v_0 > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Jak se dokazuje v diferenciální geometrii je první křivost křivky $p(\omega)$ určena vztahem

$$(3.11) \quad k_1 = \frac{\|p'(\omega) \times p''(\omega)\|}{\|p'(\omega)\|^3},$$

kde vektory $p'(\omega)$ a $p''(\omega)$ jsou vektory první a druhé derivace parametrického vyjádření křivky. Po dosazení dostáváme

$$(3.12) \quad k_1 = \left(\frac{\|(-r \sin \omega, r \cos \omega, v_0) \times (-r \cos \omega, -r \sin \omega, 0)\|}{\left(\sqrt{r^2 \sin^2 \omega + r^2 \cos^2 \omega + v_0^2}\right)^3} = \frac{\|rv_0 \sin \omega, v_0 r \cos \omega, r^2\|}{\left(\sqrt{r^2 + v_0^2}\right)^3} = \right. \\ \left. = \frac{\sqrt{r^2 v_0^2 \sin^2 \omega + r^2 v_0^2 \cos^2 \omega + r^4}}{\left(\sqrt{r^2 + v_0^2}\right)^3} = \frac{\sqrt{r^2 v_0^2 + r^4}}{\left(\sqrt{r^2 + v_0^2}\right)^3} \right) = \frac{r}{r^2 + v_0^2}.$$

Křivost k_1 lze pomocí (3.7) zapsat také ve tvaru

$$(3.13) \quad k_1 = \left(\frac{r}{r^2 \tan^2 \alpha + r^2} = \frac{1}{r(\tan^2 \alpha + 1)} = \frac{1}{r\left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} + 1\right)} = \frac{1}{r\left(\frac{2}{1 + \cos 2\alpha}\right)} = \right. \\ \left. = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2r} \right) = \frac{\cos^2 \alpha}{r}.$$

Tím jsme dokázali, že 1. křivost šroubovice je konstantní.

Jak už bylo řečeno, rozvinutelná šroubová plocha je tvořena tečnami šroubovice s , která je pro plochu hranou vratu. Z předchozího také plyne, že rozvinutelná plocha šroubová vznikne též jako obalová plocha oskulačních rovin šroubovice s . Také víme, že tečny šroubovice s svírají s rovinou kolmou na její osu konstantní úhel α .

Lze dokázat následující větu.

Věta 3.7. *Řezy rovin rozvinutelnou šroubovou plochou kolmých k ose o rozvinutelné šroubové plochy jsou evolventy kružnice. ■*

Důkaz nalezne čtenář například v Drábek, Harant, Setzer [1] - 177.

Příklad 3.6. Sestrojme rozvinutí pravotočivé rozvinutelné šroubové plochy.

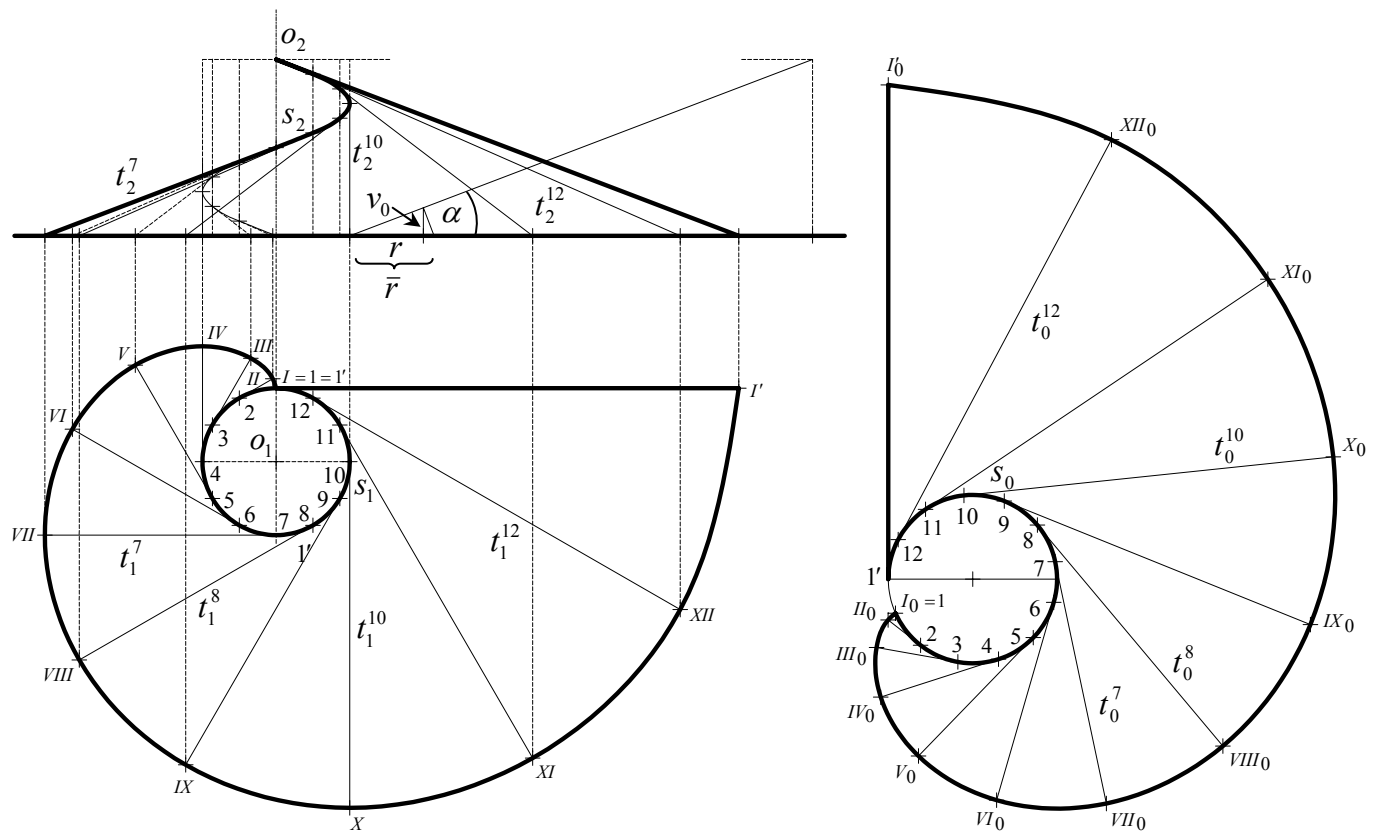
Úlohu budeme opět řešit v Mongeově promítání, viz obrázek 3.11. Zvolme tedy jeden závit pravotočivé šroubovice s osou kolmou k půdorysně. Sestrojme část rozvinutelné šroubové plochy ohraničené šroubovicí vratu, půdorysnou stopou (evolventou e) a tvořící přímkou t .

Platí, že tečné roviny této plochy jsou zároveň oskulačními rovinami dané šroubovice s a tedy z Catalanovy věty plyne, že křivost křivky s_0 rozvinuté šroubovice s bude rovna křivosti šroubovice s .

Šroubovice s má ve všech bodech konstantní křivost. Jediná rovinná křivka s konstantní křivostí různou od nuly je kružnice. Hrana s vratu se tedy rozvine do části kružnice s_0 o poloměru $\frac{r}{\cos^2 \alpha}$, kde r je poloměr válcové plochy a α je sklon šroubovice. Konstrukci poloměru najdeme v obrázku 3.11.

Skutečnou délku šroubovice s zjistíme rozvinutím válcové plochy, na které šroubovice leží, do její tečné roviny, viz příklad 3.2. Tuto délku nanese na kružnici s_0 například užitím Sobotkovy konstrukce. Tedy délky oblouků 12, 23, 34, ... šroubovice s se rovnají délkám oblouků $1_0 2_0, 2_0 3_0, 3_0 4_0, \dots$ kružnice s_0 . Tečny t^1, t^2, t^3, \dots v bodech 1, 2, 3, ... šroubovice s přejdou při rozvinutí do tečen $t_0^1, t_0^2, t_0^3, \dots$ v bodech $1_0, 2_0, 3_0, \dots$ kružnice s_0 .

Délky tečen měřené od hrany vratu s po evolventu e se nemění. Tedy v rozvinutí snadno získáme body I_0, II_0, III_0, \dots Z rovností $\overline{12} = \overline{II2}, \overline{13} = \overline{III3}, \overline{14} = \overline{IV2}, \dots$, které platí i po rozvinutí, plyne, že evolventa e se při rozvinutí zobrazí do evolventy e_0 kružnice s_0 . ■



Obrázek 3.11: Rozvinutí rozvinutelné šroubové plochy

Kapitola 4

Využití rozvinutelných ploch

V této kapitole si ukážeme některá využití rozvinutelných ploch v technické praxi. Podíváme se na použití těchto ploch jako přechodových ploch a ukážeme si také další možnosti upotřebení rozvinutelných ploch, například u kleneb.

4.1 Přechodové plochy

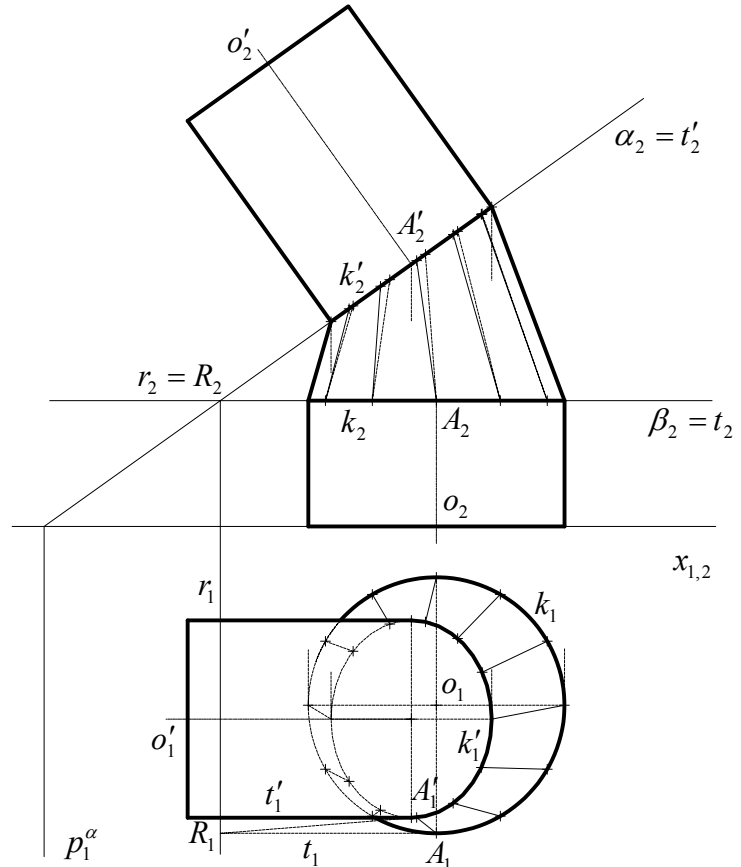
Rozvinutelné plochy se v praxi užívají například jako přechodové plochy mezi dvěma potrubími. Potrubí, která spojujeme rozvinutelnou přechodovou plochou přitom mohou mít různý průřez. Nejčastěji je to kružnice, elipsa, čtverec nebo obdélník.

Podívejme se tedy na některé příklady přechodových ploch.

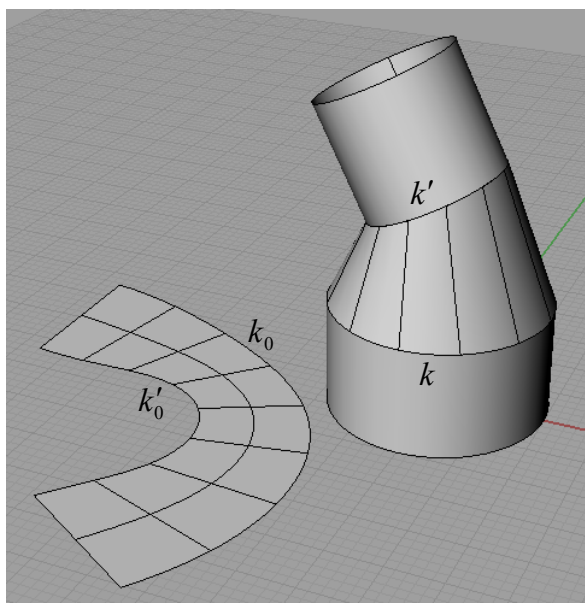
Příklad 4.1. Sestrojíme přechodovou rozvinutelnou plochu mezi dvěma rotačními válcovými plochami.

Příklad budeme řešit v Mongeově promítání, viz obrázek 4.1. Přechodová plocha bude určena průsečnými křivkami k a k' různoběžných rovin α a β a daných válcových ploch (k , k' jsou v našem případě kružnice). Při konstrukci tvořících přímek rozvinutelné plochy budeme postupovat stejně jako v oddíle 3.1.2. V libovolném bodě A křivky k sestrojíme tečnu t ke křivce k a najdeme průsečík R tečny t s přímkou r , kde $r = \alpha \cap \beta$. Bodem R vedeme tečnu t' s bodem dotyku A' ke křivce k' . Potom přímka $p = AA'$ je tvořící přímkou rozvinutelné plochy.

Tu samou plochu můžeme na obrázku 4.2 vidět v perspektivě, kde je navíc zobrazen její plášť rozvinutý do roviny. ■



Obrázek 4.1: Přechodová plocha mezi dvěma rotačními válcovými plochami



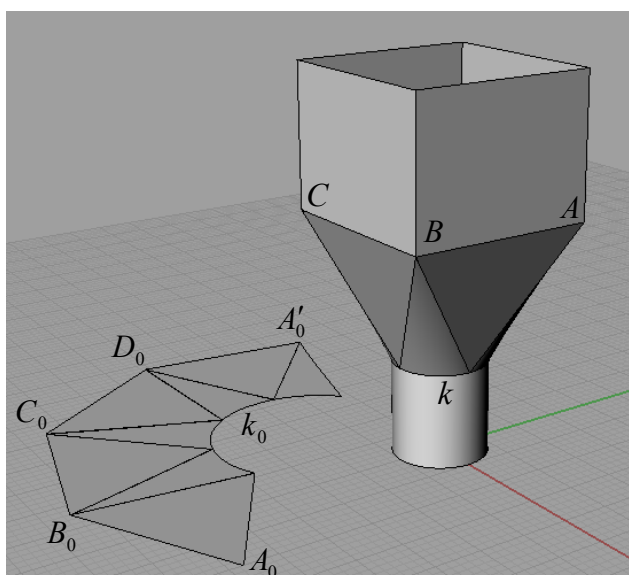
Obrázek 4.2: Přechodová plocha a její rozvinutí v perspektivě

Příklad 4.2. Sestrojme přechodovou rozvinutelnou plochu určenou daným čtvercem a kružnicí ležících v navzájem rovnoběžných rovinách.

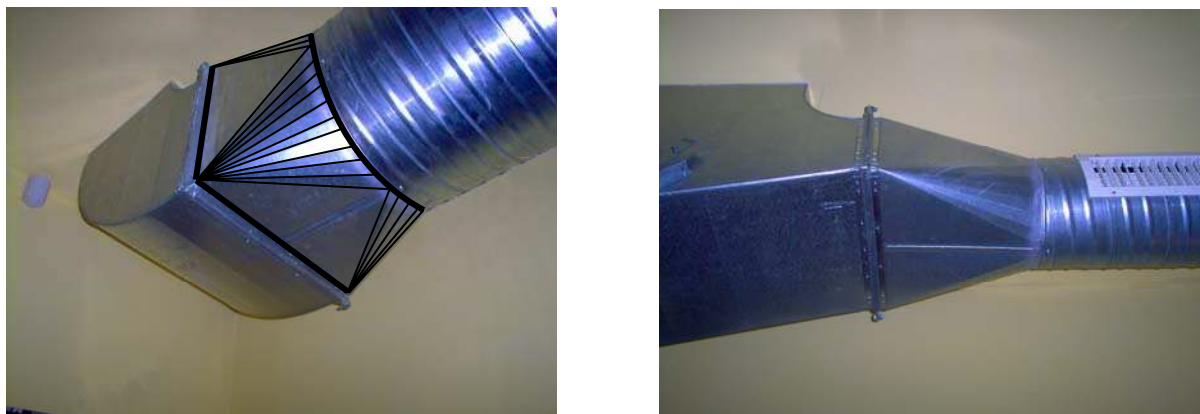
Příklad budeme tentokrát řešit pouze v perspektivě, viz obrázek 4.3. Stranami čtverce $ABCD$ vedeme tečné roviny k dané kružnici k . Z vrcholů A, B, C, D čtverce postupně promítneme čtvrtiny dané kružnice k . Dostáváme tak plášť plochy, který je složen z několika částí, ze čtyř trojúhelníků a ze čtyř částí kuželových ploch.

Tato plocha se v praxi často používá jako přechodová rozvinutelná plocha v násypce nebo jako plocha spojující dvě potrubí. Na obrázku 4.4 je fotografie této plochy využitě právě u potrubí.

Na obrázku 4.3 je též znázorněno rozvinutí této plochy do roviny. ■



Obrázek 4.3: Přechodová plocha určená kružnicí a čtvercem



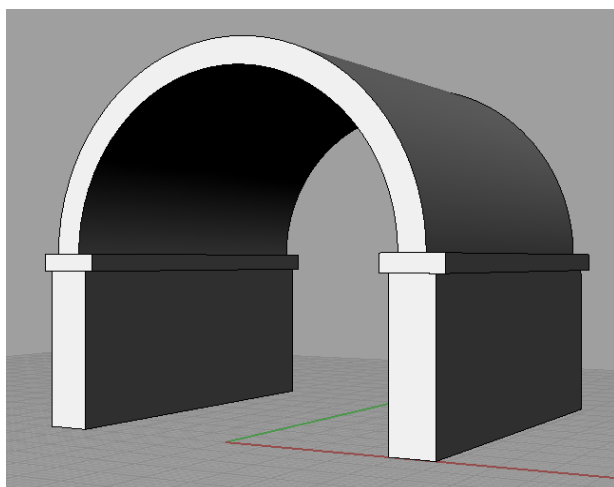
Obrázek 4.4: Přechodová rozvinutelná plocha spojující dvě potrubí o obdélníkovém a kruhovém průřezu
Vpravo jsou vyznačeny tvořící přímky plochy a křivky, které přechodová plocha spojuje

Další fotografie přechodových ploch je možné nalézt v obrazové příloze.

4.2 Klenby

S rozvinutelnými plochami se můžeme setkat také u kleneb. *Klenbami* nazýváme nosné stavební konstrukce, které se opírají o dané podpěry a uvolňují prostor pod sebou. Dříve byly klenby často zhotovovány z kamenných či cihlových dílců, v současné době jsou vyráběny z vyztuženého betonu.

Mezi nejjednodušší klenby patří *klenba valená*, kterou tvoří část rotační válcové plochy s vodorovnými tvořícími přímkami, viz obrázky 4.5 a 4.6. Tato klenba je typická pro románský sloh.



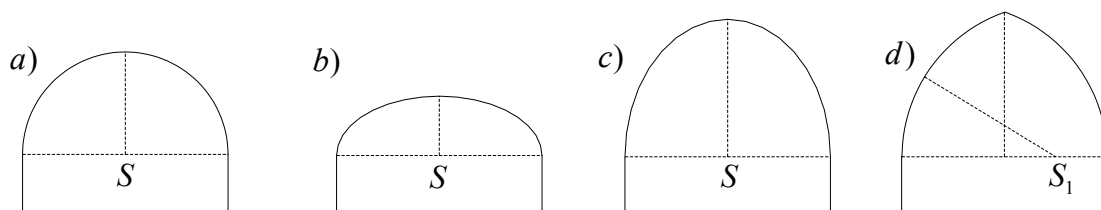
Obrázek 4.5: Valená klenba



Obrázek 4.6: Valená klenba u Negrelliho viaduktu v Praze - ČR

Valená klenba se užívá u takových staveb jako jsou například mosty, tunely, podjezdy, viadukty či akvadukty. Některá další využití jsou uvedeny v obrazové příloze.

Tvar klenebního oblouku může být také jiný než půlkružnice. Dostáváme pak různé válcové klenby. Na obrázku 4.7 jsou znázorněny některé typy klenebních oblouků.

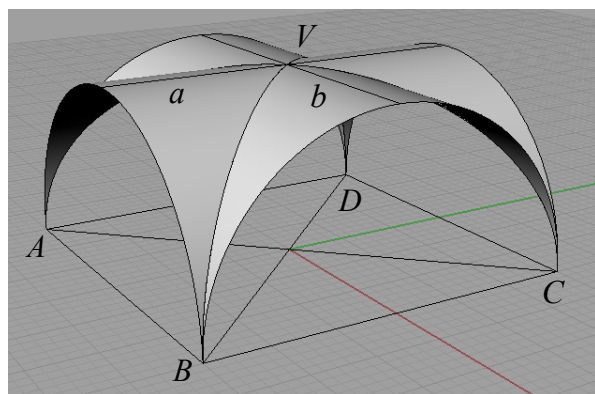


Obrázek 4.7: Klenební oblouky: a) polokružnice, b) stlačený oblouk - poloelipsa o vodorovné hlavní ose, c) převýšený oblouk - poloelipsa o vodorovné vedlejší ose, d) gotický oblouk - vytvořený ze dvou oblouků kružnic

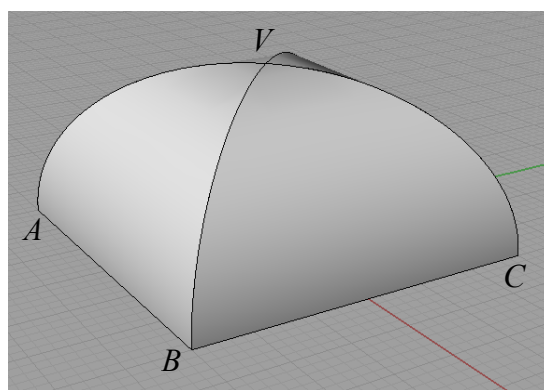
Velice důležitými klenbami jsou *křížová a klášterní klenba*. Obě tyto klenby vznikají průnikem dvou válcových kleneb.

Podívejme se na obrázek 4.8. Zde máme příklad klenby křížové tvořené dvěma rotačními válcovými plochami sestrojené nad čtvercovým půdorysem, tzv. travé. Povrchové přímky obou válcových ploch jsou rovnoběžné se stranami čtverce a jsou vedeny od řídicích polokružnic k poloelipsám, ve kterých se plochy protínají. Váha klenby je tedy přenesena do vrcholů čtverce. Ještě podotkneme, že nejvyšší povrchové přímky a a b obou válcových ploch se nazývají *vrcholnice klenby* a protínají se ve *vrcholu klenby* V .

Klášterní klenba je tvořena stejnými válcovými plochami jako klenba křížová, ale tentokrát jsou povrchové přímky vedeny pouze mezi průnikovými poloelipsami. Klášterní klenba je znázorněna na obrázku 4.9. Tentokrát je váha klenby přenášena na všechny strany čtverce.

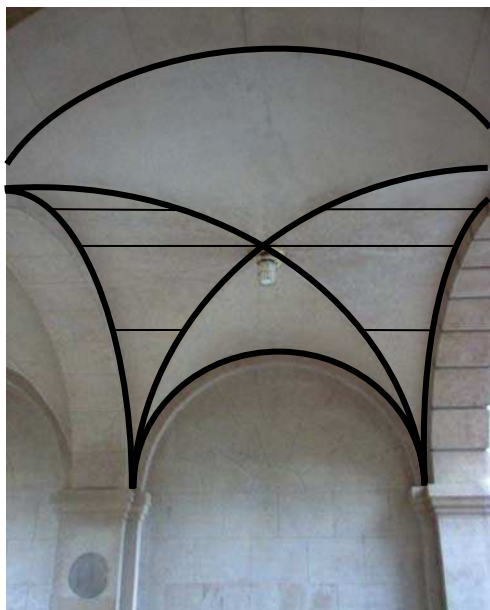


Obrázek 4.8: Křížová klenba



Obrázek 4.9: Klášterní klenba

Na obrázcích 4.10 a 4.11 se můžeme podívat na křížovou klenbu použitou v praxi. Na klenbu se v obou případech díváme zespodu. Na obrázku vlevo jsou navíc zvýrazněny tvořící přímky a průnikové křivky klenby. Další příklady křížové klenby uvádí obrazová příloha.



Obrázek 4.10: Křížová klenba s vyznačenými tvořícími přímkami a průsečnými křivkami

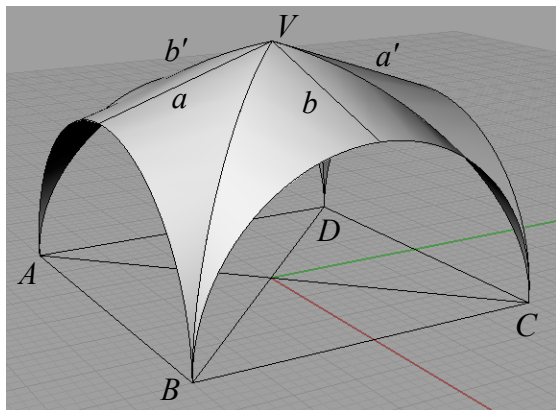


Obrázek 4.11: Křížová klenba

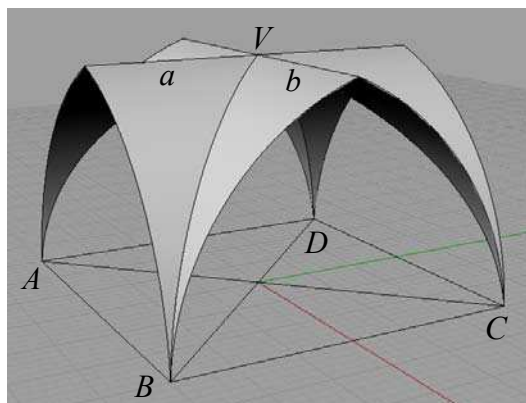
Další typy křížové klenby dostaneme, volíme-li místo vodorovných vrcholnic vrcholnice lomené. Tato situace je znázorněna na obrázku 4.12. Klenba vzniká průnikem dvou kosých válcových ploch a průnikové křivky jsou tentokrát čtvrtiny elips.

Na závěr si jmenujme ještě *gotickou křížovou klenbu*. Jeden ze znaků gotické architektury byl lomený oblouk, který nahradil kruhový oblouk architektury románské. Tedy gotická křížová klenba je tvořena čtyřmi shodnými rotačními válcovými plochami, jak vidíme na obrázku 4.13. Povrchové přímky válcových ploch jsou opět rovnoběžné se stranami čtverce, nad kterým je klenba sestrojena.

Podotkněme, že vrcholnice můžeme znovu volit jak vodorovné tak i lomené.



Obrázek 4.12: Křížová klenba s lomenými vrcholnicemi

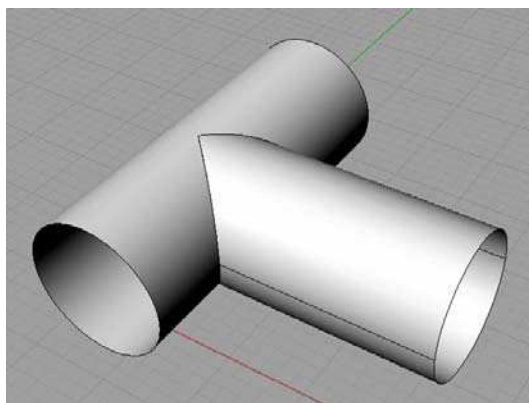


Obrázek 4.13: Gotická křížová klenba

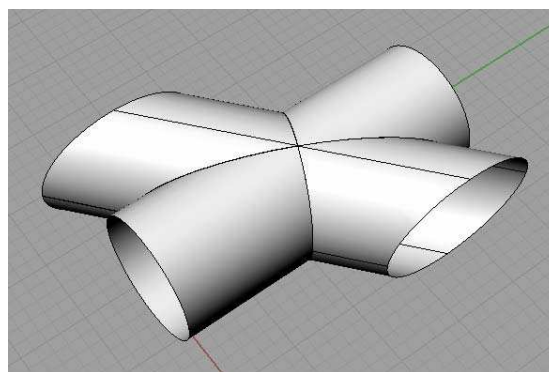
Gotickou křížovou klenbu nalezne čtenář opět v obrazové příloze.

4.3 Další užití rozvinutelných ploch

S válcovými a kuželovými plochami se v technické praxi setkáváme v mnoha případech. Uvedme si například různé typy potrubí, které vznikají vhodným kombinováním těchto ploch, viz obrázky 4.14 a 4.15.



Obrázek 4.14



Obrázek 4.15

Kromě potrubí, mají válcové a kuželové plochy další upotřebení u okapových ploch. Podívejme se tedy na některé fotografie.



Obrázek 4.16

Použití rozvinutelných ploch v technické praxi je veliké. V této kapitole jsme zdaleka nevyčerpali všechny možnosti jejich upotřebení. Další využití může čtenář nalézt v obrazové příloze.

Závěr

V bakalářské práci jsme podali přehled nejdůležitějších ploch používaných ve stavební praxi. Přitom jsme se zaměřili především na rozvinutelné plochy.

U každé plochy je uvedena její definice a u některých ploch jsou také popsány stručně jejich vlastnosti. U rozvinutelných ploch jsme uvedli několik příkladů rozvíjení ploch do roviny. Čtenář si může podle zkonstruovaných rozvinutí zhotovit modely těchto ploch. U některých ploch jsme také navrhli jejich možné užití v praxi.

K většině ploch zmiňovaných v této práci je připojen také obrázek, abychom si mohli danou plochu lépe představit. Obrazová příloha potom prezentuje využití některých ploch v technické praxi.

Bakalářská práce Plochy stavební praxe by měla být přínosem pro studenty a učitele deskriptivní geometrie a sloužit jako učební text, který spojuje teoretickou a praktickou stránku deskriptivní geometrie.

Obrazová příloha

V následující příloze si ukážeme některé příklady využití ploch zmiňovaných v této práci. Podíváme se na fotografie významných staveb z celého světa. Podrobněji se budeme zabývat opět plochami rozvinutelnými.

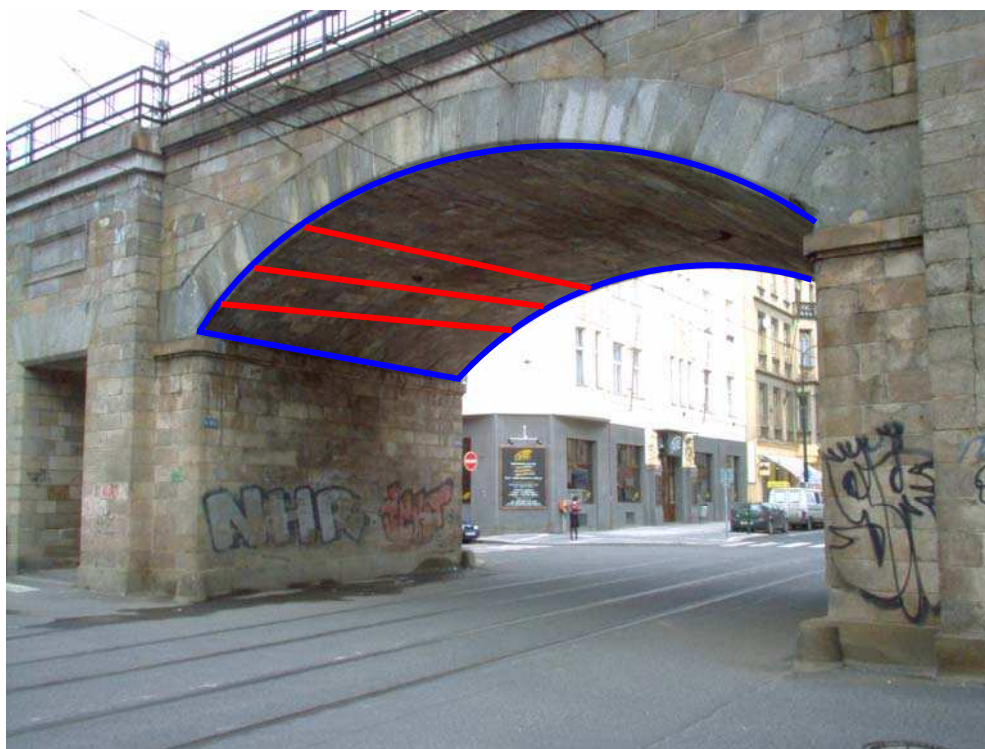
U každé fotografie je jmenován zdroj (internetová adresa), odkud byl daný snímek přejat. Ostatní fotografie jsem fotografovala sama.



Příloha.1: Chladicí věže ve tvaru rotačního jednodílného hyperboloidu - jaderná elektrárna Temelín - ČR
(<http://www.celysvet.cz/geometrie/3/chlad3.jpg>)



Příloha.2: Plocha šikmého průchodu na Negrelliho viaduktu v Praze - ČR



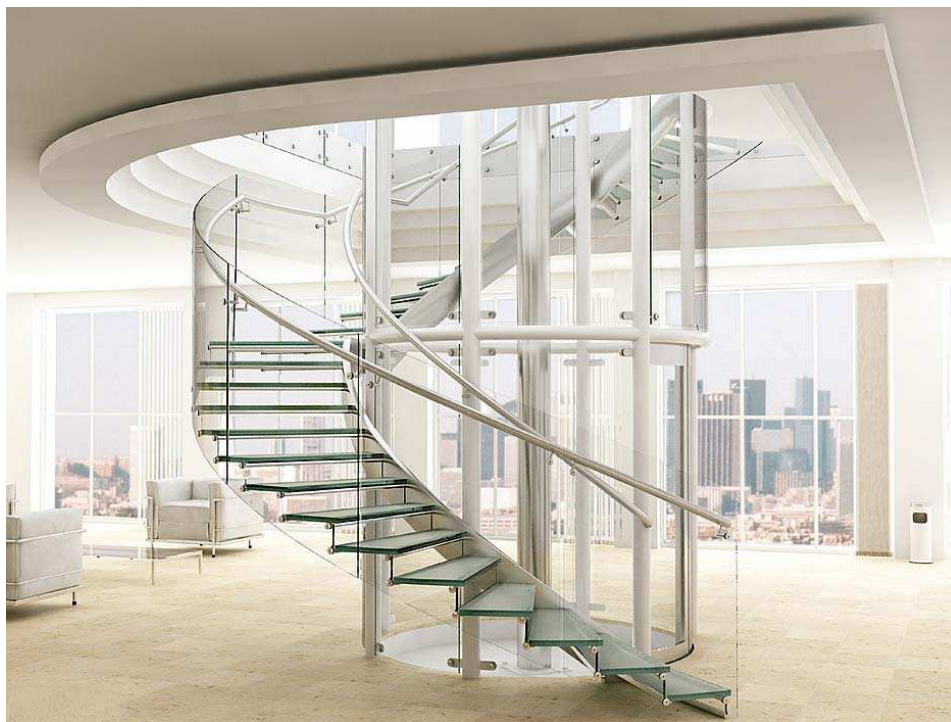
Příloha.3: Ta samá plocha s vyznačenými tvořícími přímkami a obrysem



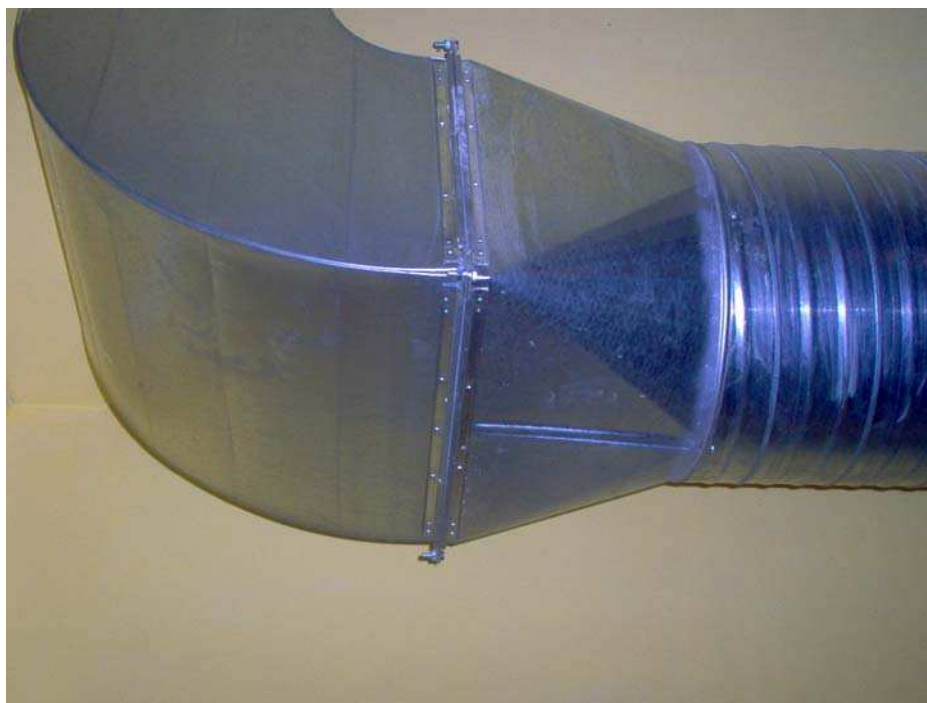
Příloha.4: Ukázka zastřešení rotačními plochami
Sacré-Coeur (kostel Nejsvětějšího srdce Ježíšova) v Paříži - Francie
(http://oregonstate.edu/groups/european/gallery/europe/Sacre_Coeur_3.html)



Příloha.5: Další příklad rotačních ploch použitých k zastřešení
Modrá mešita v Istanbulu - Turecko
(<http://www.turkeytravelcompany.com/istanbul-tours.htm>)



Příloha.6: Přímá uzavřená přímková šroubová plocha jako točité schodiště
(<http://forums.cgsociety.org/printthread.php?t=249214>)



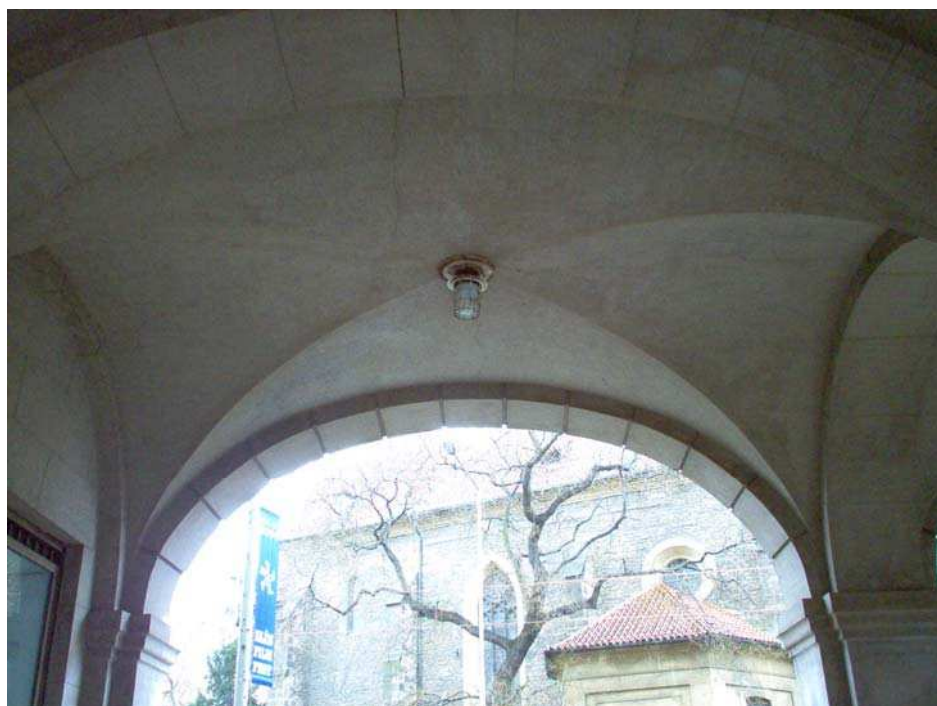
Příloha.7: Přechodová rozvinutelná plocha spojující dvě potrubí o obdélníkovém a kruhovém průřezu



Příloha.8: Použití částí válcových ploch na zámku v Louňovicích pod Bláníkem - ČR



Příloha.9: Valené klenby na mostě přes řeku Ticino v Pavii – Itálie
(<http://www.trekearth.com>)



Příloha.10: Křížová klenba v Praze - ČR



Příloha.11: Křížové klenby na Malostranském náměstí v Praze - ČR



Příloha.12: Gotické křížové klenby v katedrále Notre-Dame v Laonu - Francie
 (<http://www.trekearth.com>)



Příloha.13: Válcové plochy v Centre Pompidou v Paříži – Francie
 (<http://www1.cs.columbia.edu/~sedwards/photos/paris2002/Images/>)



Příloha.14: Válcové plochy jako okapové roury



Příloha 15: Válcové plochy jako okapové roury

Literatura

- [1] Drábek Karel, Harant František, Setzer Ota: Deskriptivní geometrie II. SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha a vydavatel'stvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1979.
- [2] Havel Václav, Harant František: Plochy stavebně-inženýrské praxe. Československá akademie věd, Praha, 1958.
- [3] Kadeřávek František, Klíma Josef, Kounovský Josef: Deskriptivní geometrie II. Československá akademie věd, Praha, 1954.
- [4] Kounovský Josef: Zborčené plochy. Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1947.
- [5] Piska Rudolf, Medek Václav: Deskriptivní geometrie I. SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha a nakladatel'stvo Alfa, Bratislava, 1972.
- [6] Piska Rudolf, Medek Václav: Deskriptivní geometrie II. SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha a vydavatel'stvo technickej literatúry, Bratislava, 1966.
- [7] Setzer Ota: Deskriptivní geometrie II. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1962.
- [8] Urban Alois: Deskriptivní geometrie II. SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha a Vydavatel'stvo technickej literatúry, Bratislava, 1967.