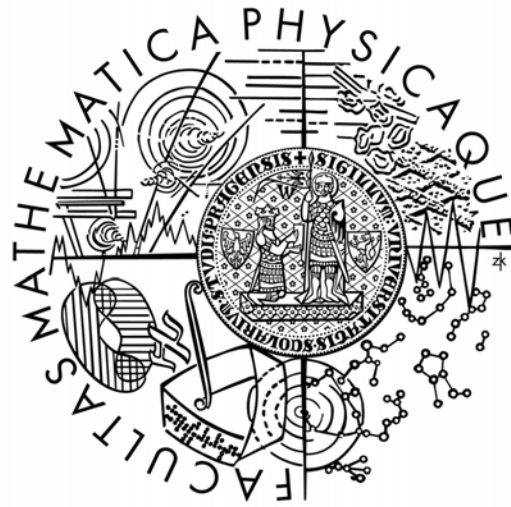


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jana Vecková

Klínové plochy

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: PhDr. Alena Šarounová, CSc.

Studijní program: *Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro střední školy,
matematika – deskriptivní geometrie*

V této části mám možnost poděkovat těm, díky nimž jsem napsala tuto diplomovou práci. Tímto všem děkuji. Speciální poděkování však patří mé učitelce deskriptivní geometrie PhDr. Aleně Šarounové, CSc., která se postarala o mé deskriptivní vzdělání, vybrala mi toto téma ke zpracování a vedla mě při mé práci. Nerada bych zapomněla na RNDr. Milana Kočandrleho, CSc., jež mi velkou měrou pomohl s početní a formální stránkou mé práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze 26.3.2003

Jana Vecková

Název práce: Klínové plochy

Autor: Jana Vecková

Katedra: Didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: PhDr. Alena Šarounová, CSc., Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze,
Sokolovská 83, Praha 8

e-mail vedoucího: sarounov@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Text je určen studentům druhého ročníku učitelství deskriptivní geometrie na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze jako doplňkový studijní text. Práce obsahuje většinu známých klínových ploch, tři druhy Hacarovy plochy a klínové plochy tvořící klenbu. Ke každé ploše je sestavena obecně její rovnice a vykreslen obrázek (někdy i několik) v softwaru Maple. V příloze jsou uvedeny některá matematická tvrzení i s důkazy o klínových plochách a pět fotografií modelů klínových ploch. Na přiloženém CD je celá práce ve formátu *.pdf* a zdrojové programy ke všem obrázkům, které jsou použité v mé práci.

Klíčová slova: klínová plocha, Hacarova plocha, klenba

Title: Sphenoid surfaces

Author: Jana Vecková

Department: Didactics of mathematics

Supervisor: PhDr. Alena Šarounová, CSc., Katedra didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, Sokolovská 83, Praha 8

Supervisor's e-mail address: sarounov@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: My textual matter is intended for students of teaching of descriptive geometry at Mathematical and Physical faculty of Charles University in Prague as supplementary tuitional text. This thesis includes preponderance of known sphenoid surfaces, three types of Hacar's surfaces and sphenoid surfaces that form vault. There is universally formed an equation to every surface. And also a figure (sometimes several figures as well) of that surface is drawn in detail in the software Maple. In appendix there are given some theses also with proofs about the sphenoid surfaces and five photos of models of sphenoid surfaces. On an enclosed CD there is this thesis in *.pdf* format and source language of every figures used in my thesis

Keywords: sphenoid surface, Hacar's surface, vault

Obsah:

Úvod.....	4
Předmluva.....	5
Použité značení.....	11
1. Přejchod od parabolické válcové plochy k Hacarově ploše.....	12
2. Hacarova plocha prvního druhu.....	22
3. Hacarova plocha druhého druhu.....	29
4. Hacarova plocha třetího druhu.....	41
5. Klínové plochy.....	49
6. Klenba jako klínová plocha.....	66
7. Užití klínových ploch.....	90
Přílohy: Trocha teorie na závěr.....	95
Fotografie.....	102
Závěr.....	107
Seznam použité literatury.....	108

Úvod

Tématem mé diplomové práce jsou *klínové plochy*. Některé z nich stavitelé používali v praxi již dávno k vyplňování křížové klenby nad obdélníkem. Teoretické popisy nejjednodušších typů klínových ploch se objevují ve 2. polovině 40. let 20. století ve výzkumných pracích profesora Bedřicha Hacara, po němž se některé z ploch jmenují, i když se takovému označení profesor Hacar bránil. V této době řeší profesor Hacar nejvýhodnější konstrukce skořepinových tvarů střech velkých rozpětí a jak se ukáže řešení opravdu našel a právě mezi klínovými plochami.

V roce 1950 vychází v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky článek doktora Františka Kadeřávka s názvem *O skupinách ploch, které mají stejné charakteristické vlastnosti*. Poprvé se tu objevuje termín *klínové plochy*. Doktor Kadeřávek zde uvádí různé typy klínových ploch s jejich geometrickým vytvořením pomocí afinního vztahu včetně obecných rovnic a dalších vlastností.

V roce 1955 tentýž vědecký časopis publikuje i článek Václava Havla *O klínových plochách*. V tomtéž roce vychází kniha *Geometrie v technice a umění*, jejíž součástí je i článek Václava Havla a Františka Haranta *O některých vlastnostech klínových ploch*. Tento článek ukazuje jednoduché rysy klínových ploch i jejich vyjádření rovnicí. Nutno podotknout, že rysy se týkají pouze stavebně využitelných částí ploch. O dva roky později je publikována kniha trojice autorů František Kadeřávek, Václav Havel a František Harant *Plochy stavebně inženýrské praxe*, jejíž jedna kapitola je věnována i klínovým plochám. Její přílohy však dokumentují stavbu haly s využitím žeber z části hyperbolického paraboloidu doplněného o konoid (na snímcích se nejedná o dotykový konoid).

Do své práce jsem se snažila zahrnout, co jsem v téměř 50 let starých učebnicích postrádala. Obrázky v textu použité jsou vytvořené v programu Maple V Release 5. Tento program umožňuje vykreslení plochy po zadání její rovnice. Takovým modelem lze libovolně otáčet v prostoru a je tedy velmi jednoduché vytvořit si představu o tvaru zvolené plochy. V sestavování rovnic ploch jsem postupovala pomaleji, abych více přiblížila techniku konstrukcí klínových ploch obecně, ale zároveň jsem chtěla stále ukazovat na charakteristickou vlastnost klínových ploch – jejich vytváření pomocí afinity.

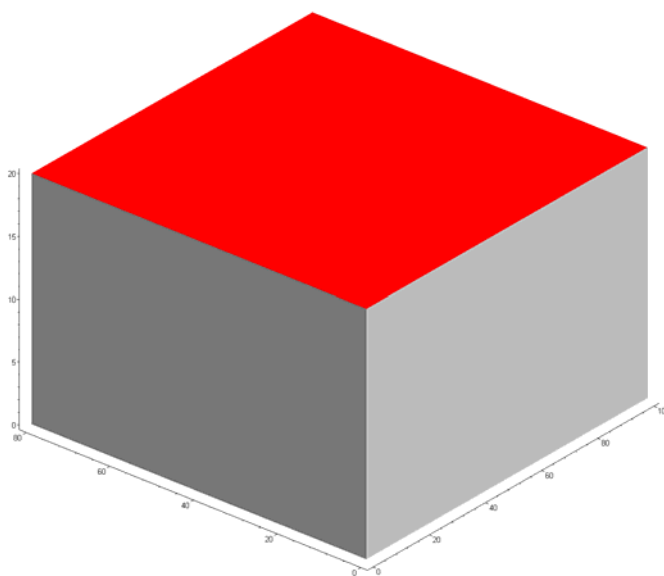
K dobrému pochopení tohoto studijního materiálu, který je určen k výuce a rozšíření znalostí studentů 2. ročníku učitelství kombinace matematika-deskriptivní geometrie na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, je nutné zvládat základní pojmy deskriptivní geometrie (půdorys, nárys, otočení, afinita,...). K sestavování rovnic jsem použila znalosti z analytické geometrie (čtenář si vystačí se znalostmi ze střední školy). V některých pasážích početně ověřuji domněnky pomocí analytické geometrie. Tyto výpočty nejsou nutné k pochopení zbývajících textů a čtenář, kterého tyto myšlenky neosloví, je může přeskochit. Zbytek čtenářů by pak měly obohatit o poznatek, že existuje poměrně jednoduchá teorie ke zkoumání intuitivně předpokládaných vlastností.

Předmluva

Než se pustíme do přesného seřídění poměrně velkého množství rozmanitých ploch stejných vlastností, kterým byl dán název klínové, podívejme se nejprve, proč bychom se o plochy takového typu měli zajímat.

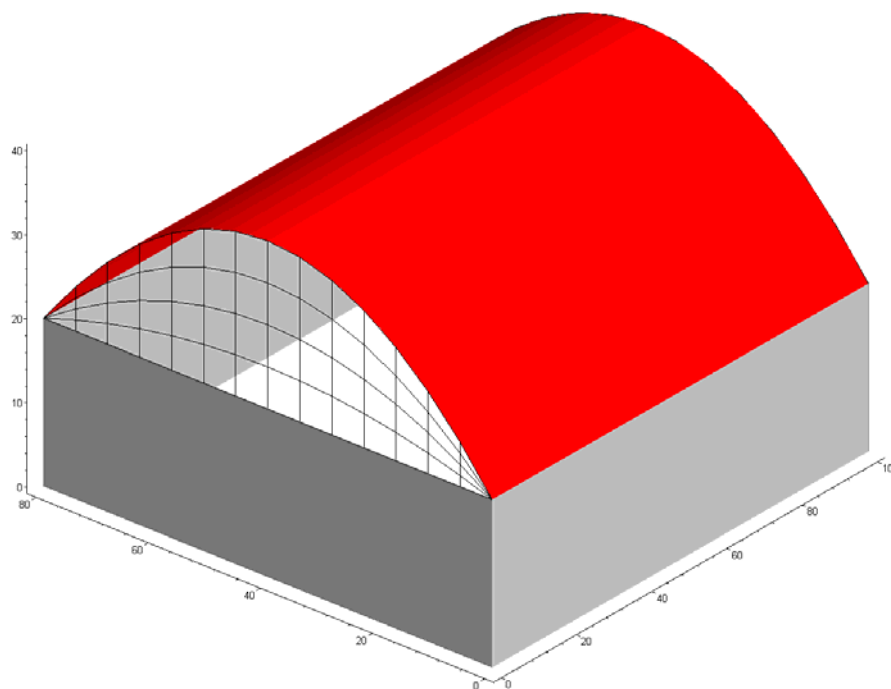
Mějme zadán prvotní úkol: Zastřešte tovární halu s obdélníkovým půdorysem o rozměrech 100m a 80m a s minimální výškou 20m.

Nejjednodušším zastřešením je vodorovná rovina. Jako stavitelé bychom však byli nuceni vyřešit problém, jak zajistit pevnost tak rozlehlé vodorovné střechy (pravděpodobně využitím podpěrných pilířů, jež mohou následně vadit v rozmístění mnohdy velikých strojních zařízení) a jak docílit správného odvádění dešťové vody (střecha nemůže být jako ideální vodorovná rovina, protože by z ní voda nestékala, ale lze využít pilířů zároveň jako svodů dešťové vody a upravit vhodně spád). Jako provozovatelé bychom byli nuceni ještě navíc vyřešit dostatek světla (pomocí oken ve střeše nebo umělým osvětlením, které není ani zdravé ani ekonomické).



Obrázek 1: Zastřešení pomocí roviny

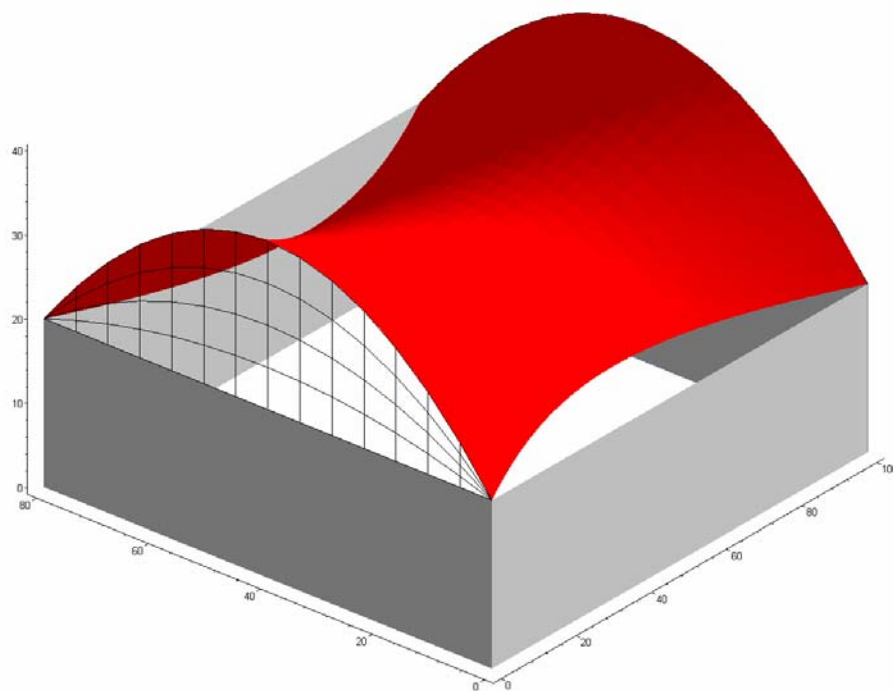
Naskýtá se tedy možnost využít složitější typ plochy s lepšími vlastnostmi. Odtok dešťové vody lze jednoduše vyřešit vyzdvihnutím střechy vzhůru podél roviny souměrnosti pozednic (křivka, v tomto případě úsečka, na níž dosedá střecha), např. těch delších. Jednodušeji řečeno využijeme část parabolické válcové plochy.



Obrázek 2: Zastřešení pomocí parabolické válcové plochy

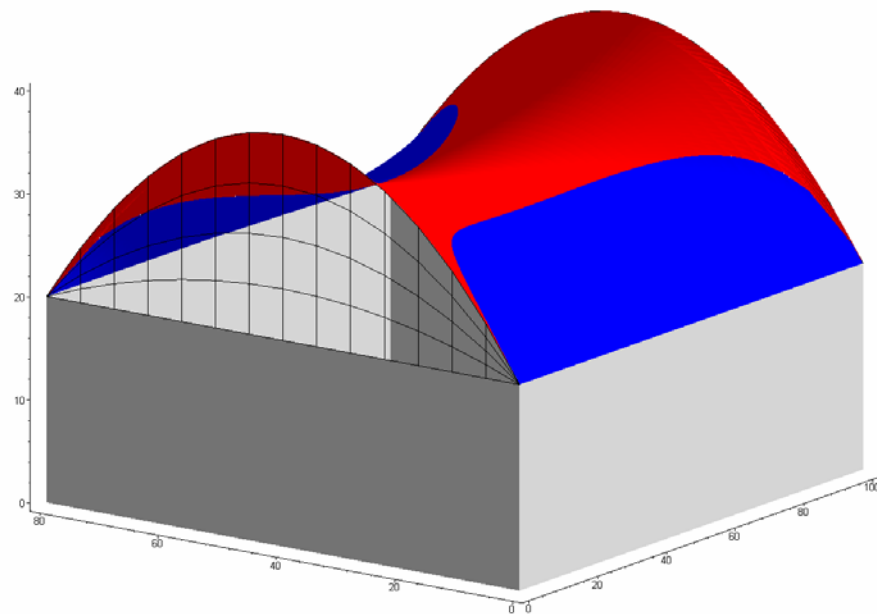
Mřížoví, které je v obrázku 2 naznačeno černým rastrem částečně řeší i problém světla v hale, protože okna jsou pouze na dvou protilehlých stranách.

Dalším možným řešením daného problému je použití hyperbolického paraboloidu. Předchozí parabolická válcová plocha je plochou translační – posouváme parabolu po přímce tak, že každé dvě paraboly této plochy leží v rovinách rovnoběžných. Budeme-li opět posouvat zdola otevřenou parabolu po shora otevřené parabole stejným způsobem jako v případě parabolické válcové plochy, získáme translační plochu hyperbolického paraboloidu. Musíme se ale vypořádat s nevýhodou této plochy.



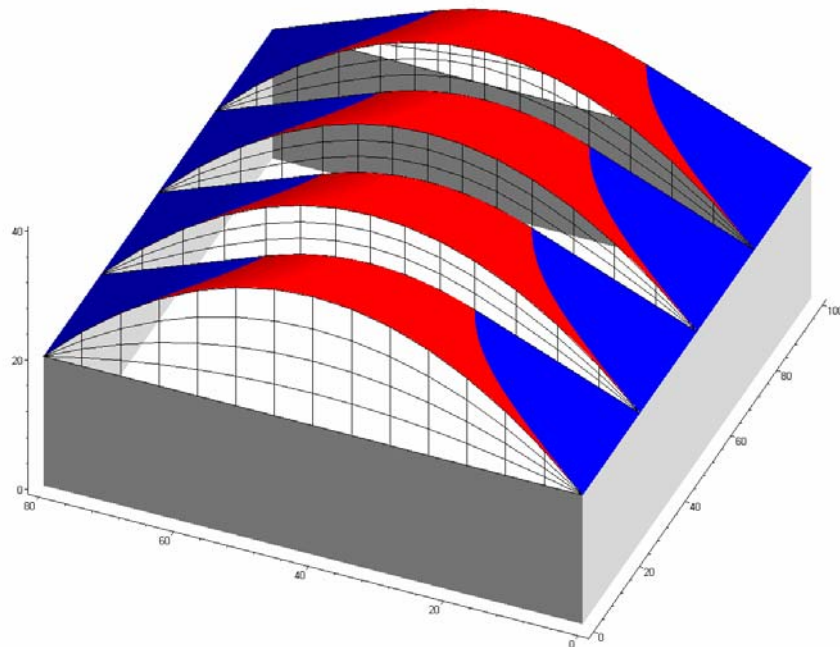
Obrázek 3: Zastřešení pomocí hyperbolického paraboloidu

Z obrázku 3 je patrné, že námi vybraná plocha potřebuje ještě další úpravu, protože nenesedá na boční stěny budovy. To lze napravit dotykovým konoidem po obou stranách budovy. Řídící přímkou konoidu je hrana budovy, řídící rovinou je rovina okna a třetí podmínkou je, aby se přímky konoidu dotýkaly hyperbolického paraboloidu. Plochu hyperbolického paraboloidu i plochu dotykového konoidu „zkrátíme“ k dotykové křivce obou ploch. Mezera je vyplněna! Díky tomu, že konoid byl konstruován jako dotykový, vytvořené spojení ploch je navíc i dostatečně „hladké“ (vektory prvních derivací v bodech, kde se plochy stýkají, ve směru řídících rovin konoidu mají též směr).



Obrázek 4: Zastřešení pomocí hyperbolického paraboloidu a dotykových konoidů

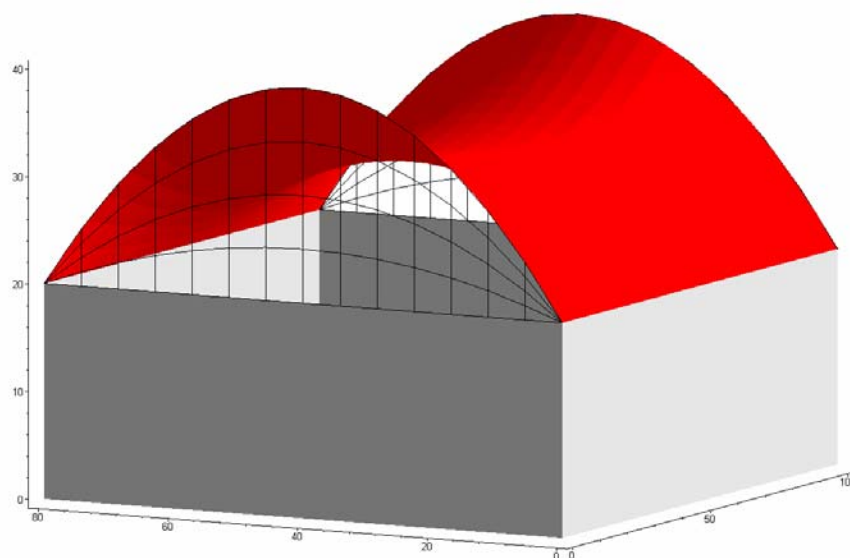
Jistě si všimneme, že toto mnohem složitěj řešení nepřináší o nic více světla než řešení na obrázku 2. Stačí ale použít část takto zkonstruované střechy jako jedno žebro, které zařadíme v několika kopiích jedno za druhým.



Obrázek 5: Zastřešení totožnými částmi plochy hyperbolického paraboloidu a dotykových konoidů

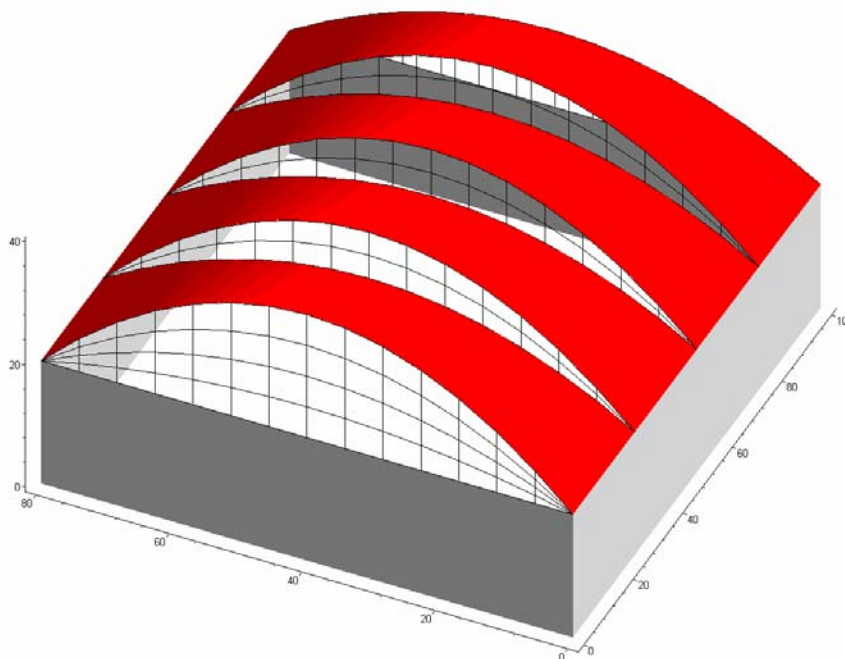
Mezi jednotlivými žebry vznikají mezery, které lze vyplnit okny a tím získat uvnitř haly velké množství světla. Hraničními křivkami jsou parabola a křivka složená s paraboly a dvou částí tečen k této parabole. Není tedy úplně snadné zkonstruovat okenní výplně.

A dostáváme se k jednoduchému řešení daného příkladu. Využijeme Hacarovu plochu prvního druhu. Tvarem se podobá ploše hyperbolického paraboloidu, jen jednotlivé paraboly „roztáhneme“ nebo „zúžíme“ podle šířky budovy.



Obrázek 6: Zastřešení s využitím Hacarovy plochy prvního druhu

A provedeme-li stejnou „fintu“ s jedním opakujícím se žebrem dostaneme téměř ideální řešení zadaného problému.



Obrázek 7: Zastřešení totožnými částmi Hacarovy plochy

Použité značení

Důležité značky použité v této diplomové práci:

\mathbf{R} ... reálná čísla,

$\langle ?, ? \rangle$... uzavřený reálný interval,

$(?, ?)$... otevřený reálný interval,

$\langle ?, ? \rangle, (?, ?)$... polouzavřené intervaly,

$\{?, ?, \dots\}$... množiny určené výčtem,

\setminus ... množinové odčítání,

\cap ... množinový průnik,

\cup ... množinové sjednocení,

$\langle ?, ? \rangle \times \langle !, ! \rangle$... kartézský součin dvou uzavřených reálných intervalů (interval v \mathbf{R}^2)

$\begin{pmatrix} ? & ? \end{pmatrix}$... matice typu (1,2)

$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$... matice typu (2,2),

\mathbf{E}^3 ... třírozměrný eukleidovský prostor,

$[?, ?, ?]$... souřadnice bodu,

$(?, ?, ?)$... souřadnice vektoru.

$(x = 0), [F(x, y, z) = 0]$... množina bodů vyhovujících rovnici uvnitř závorek (tvar závorek je čistě účelný)

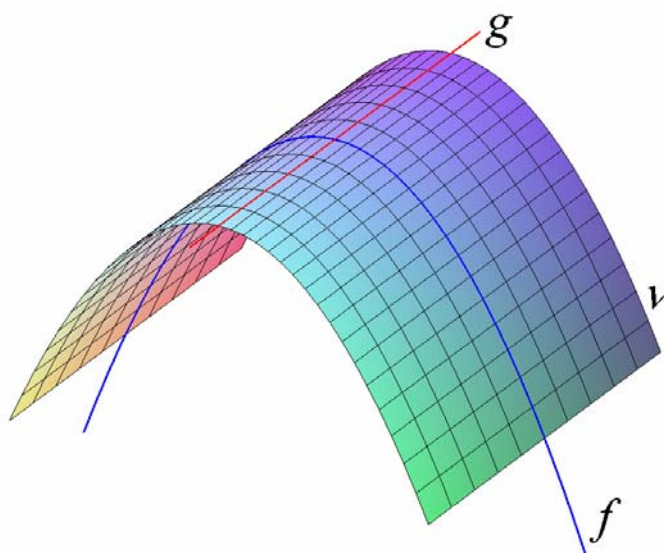
1. Přejchod od parabolické válcové plochy k Hacarově ploše

Příklad, který je uveden v předmluvě, naznačuje, jakým způsobem se dostaneme ke klínovým plochám. Vyjdeme z parabolické válcové plochy, ukážeme, jak se z parabolické válcové plochy dá změnou jediného definujícího parametru dostat k ploše hyperbolického paraboloidu. Sestavíme i rovnice dotykového konoidu k hyperbolickému paraboloidu a odhalíme jednu zvláštnost tohoto konoidu. Poté nás čeká již Hacarova plocha prvního druhu.

Mějme pravouhlou pravotočivou soustavu souřadnic se souřadnicovými osami x , y , z . Dále uvažujme parabolu f v rovině $y = 0$ s rovnicí $-2p(z - n) = x^2$, kde p je kladná reálná konstanta a n reálná konstanta. Využijeme-li nástrojů diferenciální geometrie máme bodovou funkci jedné reálné proměnné $f(x) = \left[x, 0, -\frac{1}{2p}x^2 + n \right]$.

Parabolickou válcovou plochu definujeme jako plochu translační, kde pevná křivka je přímka g v rovině $x = 0$ s rovnicí $z = n$ a hybnou křivkou je parabola f . V každém okamžiku translačního pohybu se parabola f nachází v rovině kolmé k přímce g . Přičemž parabola f se pohybuje po přímce g stále svým vrcholem.

V každé rovině $y = y_0$, kde y_0 je libovolná reálná konstanta, se nachází parabola shodná s parabolou f . Nezáleží tedy na hodnotě, kterou nabývá y -ová souřadnice. Parabolickou válcovou plochu v lze vyjádřit rovnicí $-2p(z - n) = x^2$ nebo bodovou funkcí dvou proměnných $v(x, y) = \left[x, y, -\frac{1}{2p}x^2 + n \right]$.

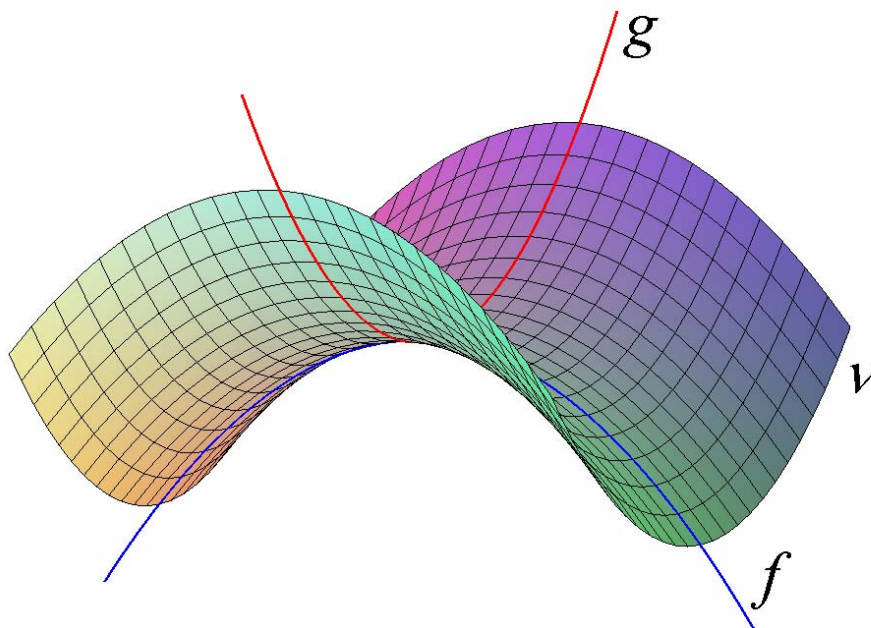


Obrázek 1.1: Parabolická válcová plocha

Plochu hyperbolického paraboloidu definujeme rovněž jako translační plochu, kdy pevnou křivkou je parabola g v rovině $x = 0$ s rovnicí $2q(z - n) = y^2$ a pohybující se křivkou je parabola f v rovině $y = 0$ s rovnicí $-2p(z - n) = x^2$, kde p, q jsou kladné reálné konstanty a n je reálná konstanta. Parabola f se pohybuje svým vrcholem po parabole g tak, že jednotlivá umístění paraboly f při translačním pohybu leží v rovinách rovnoběžných s rovinou $y = 0$. Chceme-li nyní vědět, jak vypadá rovnice paraboly f posunutá do roviny $y = y_0$, kde y_0 je reálná libovolná konstanta, podél paraboly g , zjistíme nejprve souřadnice vrcholu V_{y_0} posunuté paraboly f_{y_0} . Protože V_{y_0} leží na parabole g , jsou jeho souřadnice $\left[0, y_0, \frac{1}{2q}y_0^2 + n\right]$. Parabola f_{y_0} má rovnici $-2k\left(z - \frac{1}{2q}y_0^2 - n\right) = x^2$, kde k je kladná reálná konstanta, kterou lehce dopočteme, víme-li, že paraboly f a f_{y_0} mají stejný tvar (stejnou vzdálenost ohniska od řídicí přímky). Tedy $k = p$. Hyperbolický paraboloid v vyjádříme rovnicí:

$$z = -\frac{1}{2p}x^2 + \frac{1}{2q}y^2 + n, \quad (1.1)$$

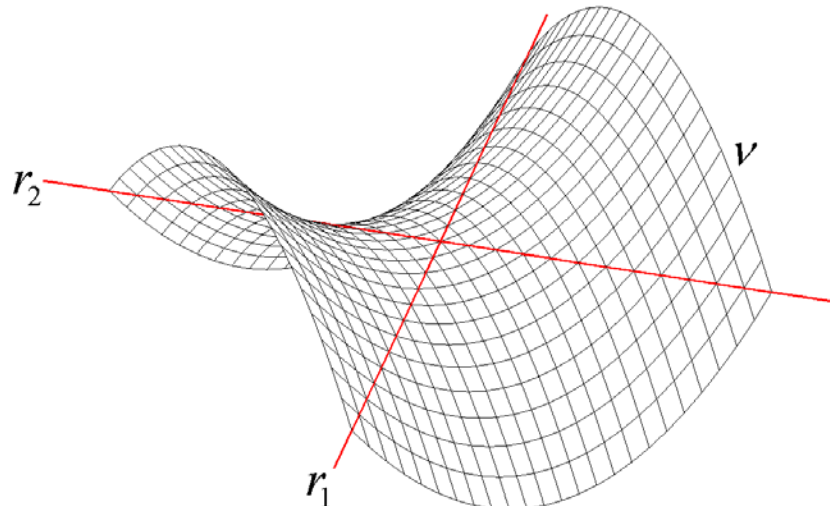
při jejíž konstrukci využíváme faktu, že y_0 bylo pevné ale zároveň libovolné.



Obrázek 1.2: Hyperbolický paraboloid

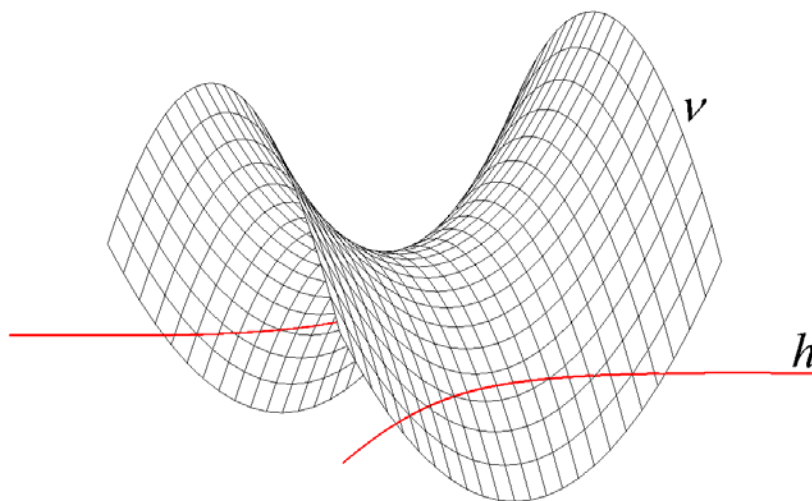
Navíc si vypočteme a graficky znázorníme tři případy, které mohou nastat při řezu hyperbolického paraboloidu ν rovinou α s rovnicí $z = c$, kde c je libovolná reálná konstanta. Možné případy:

1. $c = n \dots$ dvě různoběžky $r_1 : y = -\sqrt{\frac{q}{p}}x$ a $r_2 : y = \sqrt{\frac{q}{p}}x$,



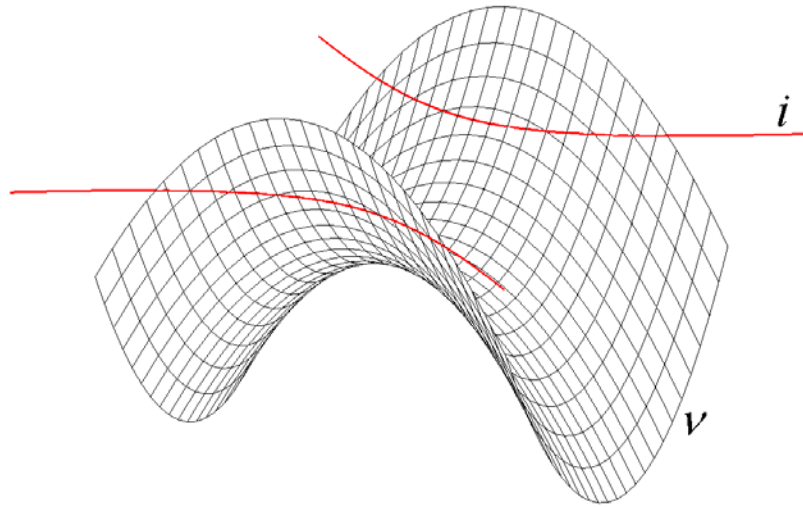
Obrázek 1.3: Řez hyperbolického paraboloidu – první případ

2. $c < n \dots$ hyperbola $h : \frac{x^2}{2p(n-c)} - \frac{y^2}{2q(n-c)} = 1$,



Obrázek 1.4: Řez hyperbolického paraboloidu – druhý případ

3. $c > n \dots$ hyperbola i : $-\frac{x^2}{2p(c-n)} + \frac{y^2}{2q(c-n)} = 1$.



Obrázek 1.5: Řez hyperbolického paraboloidu – třetí případ

Ani v jednom případě nejsou řezem hyperbolického paraboloidu ν rovinou α dvě rovnoběžné přímky (chtěli jsme plochu využít jako zastřešení budovy nad obdélníkovým půdorysem). Jedním z řešení je již zmiňovaná plocha dotykového konoidu. Pro naše potřeby uvažujme pouze n kladné a reálné. Řídící přímka konoidu τ necht' je přímka a ležící v rovině $z=0$ s rovnicí $x=c$, kde c je kladná reálná konstanta (vzdálenost přímky a od roviny $x=0$ vlastně určuje vzdálenost pozednice od jedné z rovin souměrnosti půdorysu budovy). Zadání řídicí křivky nahradíme podmínkou, že hledáme dotkový konoid k hyperbolickému paraboloidu ν . Řídící rovinou konoidu τ budiž rovina $y=0$.

Ještě zbývá přesněji omezit konstantu c . Abychom mohli vést alespoň jednu tečnu z některého z bodů přímky a , např. z bodu A , je třeba, aby tento ležel vně příslušné paraboly řezu hyperbolického paraboloidu ν rovinou $y=y_0$, v níž leží i bod A . Vedeme-li řez hyperbolického paraboloidu rovinou $\alpha: z=0$, získáme hyperbolu (upozorníme, že $n > 0$ a podle předchozího rozboru případů je řezem hyperbola) $h: \frac{x^2}{2pn} - \frac{y^2}{2qn} = 1$. Nejbližší bod této hyperboly k počátku soustavy souřadné má vzdálenost $\sqrt{2pn}$. Tedy $c > \sqrt{2pn}$.

Necht' jsou splněny výše uvedené předpoklady. Konstruujme tečny jednotlivě vždy v rovinách $\beta_{y_0}: y=y_0$, kde y_0 je reálná konstanta, která navíc splňuje další omezení. Spočítejme hraniční hodnoty y_0 . Najdeme průsečíky přímky a a hyperbolického paraboloidu. Takové body splňují rovnice:

$$\begin{aligned} z &= 0, \\ x &= c, \\ z &= -\frac{1}{2p}x^2 + \frac{1}{2q}y^2 + n. \end{aligned}$$

Jednoduchým dosazením (nezapomínejme, že $c > \sqrt{2pn}$) získáme dvojici průsečíků: $Y_1 = \left[c, -\sqrt{\frac{q}{p}c^2 - 2nq}, 0 \right]$, $Y_2 = \left[c, \sqrt{\frac{q}{p}c^2 - 2nq}, 0 \right]$. Odtud plyne podmínka, že $y_0 \in \left\langle -\sqrt{\frac{q}{p}c^2 - 2nq}, \sqrt{\frac{q}{p}c^2 - 2nq} \right\rangle$.

V rovině β_{y_0} leží bod $A_{y_0} \in a$ a parabola f_{y_0} s rovnicí $z = -\frac{1}{2p}x^2 + \frac{1}{2q}y_0^2 + n$, již můžeme považovat také za reálnou funkci z reálné proměnné x . Směrnice tečny k parabole f_{y_0} v bodě T_{y_0} je $z' = -\frac{1}{p}x_0$, kde bod T_{y_0} je bodem dotyku tečny t_{y_0} a paraboly f_{y_0} a má souřadnice $\left[x_0, y_0, -\frac{1}{2p}x_0^2 + \frac{1}{2q}y_0^2 + n \right]$. Protože je osa každé paraboly f_{y_0} rovnoběžná se souřadnicovou osou z , tečna z bodu A_{y_0} k parabole f_{y_0} není rovnoběžná s osou z a zapíšeme rovnici tečny ve směrnicovém tvaru:

$$t_{y_0} : z = -\frac{1}{p}x_0(x - c). \quad (1.2)$$

Dosadíme-li za z z rovnice (1.2) tečny t_{y_0} do rovnice (1.1), získáme po úpravě kvadratickou rovnici:

$$\frac{1}{2p}x^2 - \frac{x_0}{p}x + \frac{cx_0}{p} - \frac{y_0^2}{2q} - n = 0. \quad (1.3)$$

Protože t_{y_0} je tečna, je diskriminant $\frac{1}{p^2}x_0^2 - \frac{2c}{p^2}x_0 + \frac{y_0^2}{pq} + \frac{2n}{p}$ kvadratické rovnice (1.3) nulový. Při řešení nulového diskriminantu získáme hodnoty x_0 a souřadnice bodů dotyku:

$$T_{y_01} = \left[c - \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y_0^2 - 2np}, y_0, \frac{c}{p} \left(\sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y_0^2 - 2np} - c \right) + \frac{1}{q}y_0^2 + 2n \right],$$

$$T_{y_02} = \left[c + \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y_0^2 - 2np}, y_0, -\frac{c}{p} \left(\sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y_0^2 - 2np} + c \right) + \frac{1}{q}y_0^2 + 2n \right].$$

Pro přehlednost označme ještě $k = \frac{1}{q}y_0^2 + 2n$. Potom se nám předcházející vyjádření dotkových bodů zjednoduší na:

$$T_{y_01} = \left[c - \sqrt{c^2 - kp}, y_0, \frac{c}{p} \left(\sqrt{c^2 - kp} - c \right) + k \right],$$

$$T_{y_02} = \left[c + \sqrt{c^2 - kp}, y_0, -\frac{c}{p} \left(\sqrt{c^2 - kp} + c \right) + k \right].$$

Všimněme si, že x -ové souřadnice bodů T_{y_01} jsou pro libovolná y_0 vždy nejvýše rovna c a x -ové souřadnice bodů T_{y_02} jsou pro libovolná y_0 alespoň rovna c (tuto úvahu využijeme při zjednodušování rovnice plochy). Dosadíme hodnoty $x_{01} = c - \sqrt{c^2 - kp}$,

$x_{02} = c + \sqrt{c^2 - kp}$ do rovnice (1.2) a plochu dotykového konoidu τ vyjádříme dvěma rovnicemi:

$$z = \frac{\sqrt{c^2 - kp} - c}{p}(x - c),$$

$$z = -\frac{\sqrt{c^2 - kp} + c}{p}(x - c).$$

Dosadíme za pomocnou proměnnou k :

$$z = -\frac{1}{p}\left(c - \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y_0^2 - 2np}\right)(x - c),$$

$$z = -\frac{1}{p}\left(c + \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y_0^2 - 2np}\right)(x - c).$$

Námi zvolené y_0 bylo však libovolné. Necháme-li jej probíhat interval $\left\langle -\sqrt{\frac{q}{p}c^2 - 2nq}, \sqrt{\frac{q}{p}c^2 - 2nq} \right\rangle$, vyjádříme plochu τ dotykového konoidu, jako sjednocení množin bodů, které vyhovují dvěma rovnicím:

$$\left[z = -\frac{1}{p}\left(c - \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y^2 - 2np}\right)(x - c) \right] \cup \left[z = -\frac{1}{p}\left(c + \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y^2 - 2np}\right)(x - c) \right].$$

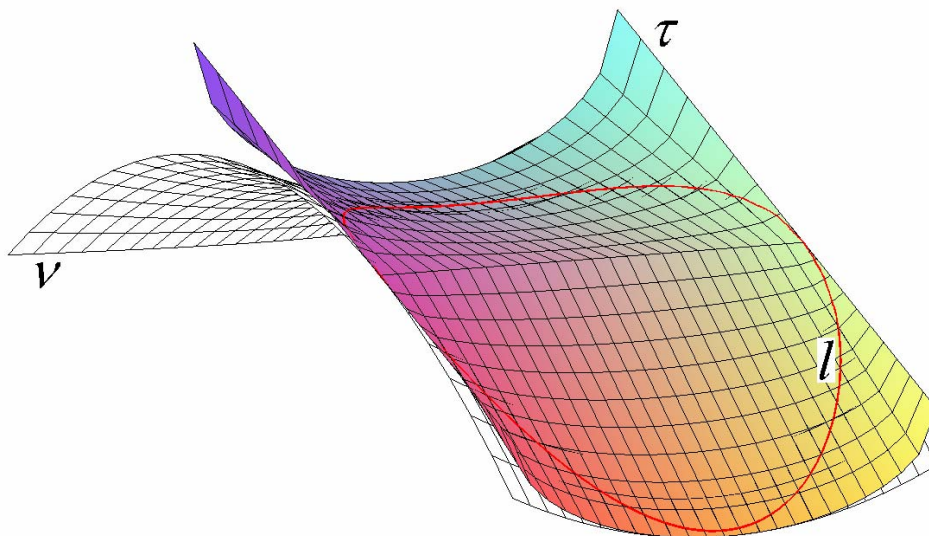
Nebo i rovnicí jedné:

$$\left[z + \frac{1}{p}\left(c - \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y^2 - 2np}\right)(x - c) \right] \cdot \left[z + \frac{1}{p}\left(c + \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y^2 - 2np}\right)(x - c) \right] = 0,$$

a po úpravách:

$$pqz^2 + 2nqx^2 + c^2y^2 + x^2y^2 - 2cxy^2 - 2c^2qz + 2cqxz - 4cnqx + 2c^2nq = 0.$$

Plocha dotykového konoidu podle námi sestavené rovnice:



Obrázek 1.6: Dotykový konoid k hyperbolickému paraboloidu

Jak jsme získali dotykovou křivku l ? Nezapomínejme, že jsme vyjádřili souřadnice dotkových bodů $T_{y_0,1}$, $T_{y_0,2}$ v závislosti na y_0 . Necháme-li probíhat y_0 celý přípustný interval, získáme v jazyce diferenciální geometrie bodovou funkci jedné reálné proměnné, která vyjadřuje dotykovou křivku l (opět se skládá ze dvou rovnic):

$$l_1(y) = \left[c - \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y^2 - 2np}, y, \frac{c}{p} \left(\sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y^2 - 2np} - c \right) + \frac{1}{q}y^2 + 2n \right],$$

$$l_2(y) = \left[c + \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y^2 - 2np}, y, -\frac{c}{p} \left(\sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y^2 - 2np} + c \right) + \frac{1}{q}y^2 + 2n \right].$$

Ještě se v souvislosti s křivkou l podíváme na jednu zajímavost. Zkusme zjistit, jak vypadá půdorys této křivky! V předchozích vyjádření stačí uvažovat z -ovou souřadnici nulovou a dostaneme hledané vyjádření bodovou funkcí jedné reálné proměnné. Převědeme-li toto vyjádření bodovou funkcí jedné reálné proměnné do jazyka algebraické geometrie, určitě postřehneme onu zajímavost:

$$x - c = -\sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y^2 - 2np},$$

$$x - c = \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y^2 - 2np}.$$

V prvním případě jsou obě strany záporné nebo nulové ($x \leq c$) a ve druhém obě nezáporné ($x \geq c$). Můžeme obě rovnice upravit na tvar:

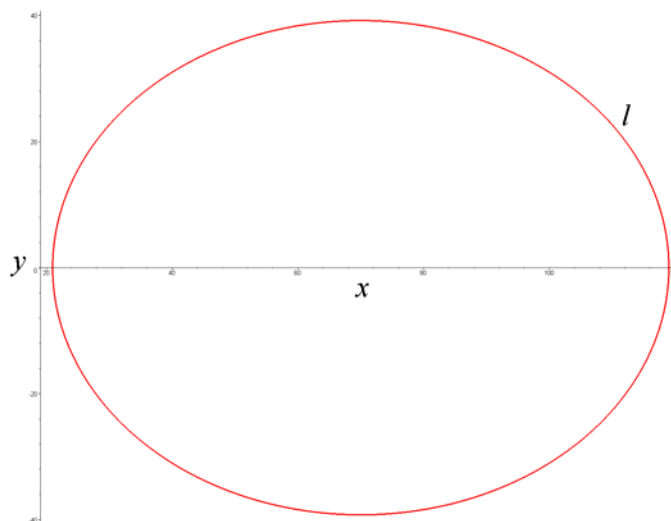
$$|x - c| = \sqrt{c^2 - \frac{p}{q}y^2 - 2np}$$

a obě strany umocníme a upravíme do tvaru:

$$\frac{(x - c)^2}{c^2 - 2np} + \frac{y^2}{q(c^2 - 2np)} = 1.$$

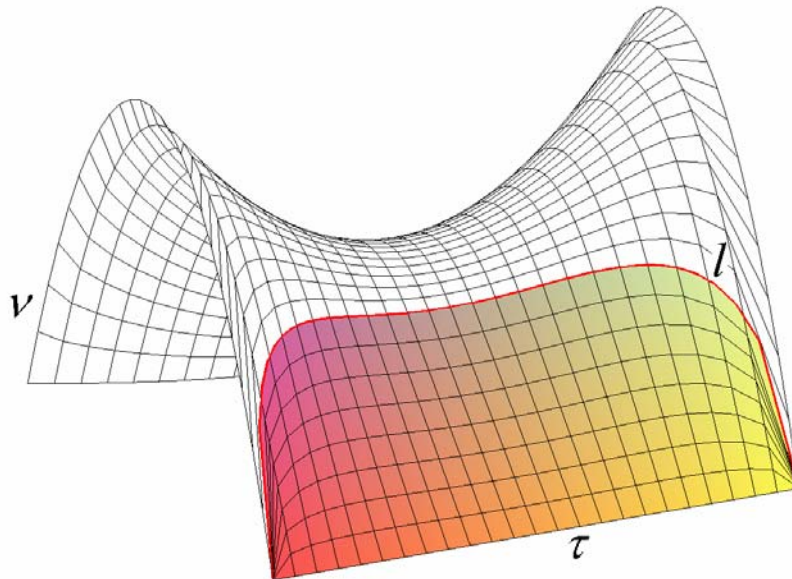
p

Pro $p = q$ je získaná rovnice rovnicí kružnice a v případě $p \neq q$ rovnicí elipsy.



Obrázek 1.7: Půdorys dotykové křivky

Stavebně se využívá jen „polovina“ dotykového konoidu. Část hyperbolického paraboloidu ν , ohraničeného poloprostorem s hraniční rovinou $z = 0$ v kladném směru osy z , ořízneme podél dotykové křivky l (taktéž omezené na daný poloprostor) a sesadíme ho s plochou dotykového konoidu τ (omezíme ho týmž poloprostorem a ořízneme podél stejné části křivky l).



Obrázek 1.8: Část dotykového konoidu

Odstranili jsme zásadní nedostatek hyperbolického paraboloidu na jedné straně. Obdobně se nedostatek snadno odstraní na straně druhé. Po všech úpravách dostaneme požadované zastřešení s danými vlastnostmi. Členění střechy uvedené v předmluvě získáme jednoduše omezením intervalu a „kopírováním“ získaného žebra několikrát ze sebou.

Daleko jednodušeji vytvoříme plochu daných vlastností jako Hacarovu plochu ν prvního druhu. Zachováme úvodní zadání jednou přímkou a jednou parabolou:

$$a: (x = c) \cap (z = 0),$$

$$g: [2q(z - n) = y^2] \cap (x = 0),$$

kde c , q jsou kladné reálné konstanty a n uvažujme nadále pouze kladné, reálné a konstantní.

Tvořícími křivkami Hacarovy plochy prvního druhu at' jsou paraboly h_0 (kdybychom dovolili navíc konstantu n nulovou, je v rovině $y = 0$ tvořící křivka plochy přímkou a nikoliv parabolou – tento případ tedy dořešíme samostatně) v rovinách $\beta_{y_0}: y = y_0$, kde y_0 je libovolná, reálná, ale pevně zvolená konstanta. Vrcholy parabol h_{y_0} necht' leží na parabole g , osu mají rovnoběžnou s osou z a necht' paraboly h_{y_0} procházejí body $[c, y_0, 0]$. Z těchto podmínek je již jednoduché sestavit rovnici Hacarovy plochy ν .

Vrcholy V_{y_0} parabol h_{y_0} mají souřadnice $\left[0, y_0, \frac{1}{2q}y_0^2 + n\right]$. Zbývá dopočítat parametr těchto parabol. Rovnici zatím napíšeme takto:

$$h_{y_0} : \left[p \left(z - \frac{1}{2q}y_0^2 - n \right) = x^2 \right] \cap (y = y_0),$$

kde p je nyní parametr parabol h_{y_0} vynásobený dvěma včetně znaménka, které udává otevřenost paraboly („+“ shora otevřená nebo „-“ zdola otevřená – odpovídá termínům konvexní a konkávní). Neuvažujeme p nulové (jedná se přece o parabolu). Nyní využijeme vlastnosti, že paraboly h_{y_0} procházejí body $[c, y_0, 0]$ a dosazením do naší primitivní rovnice dopočteme neznámou p :

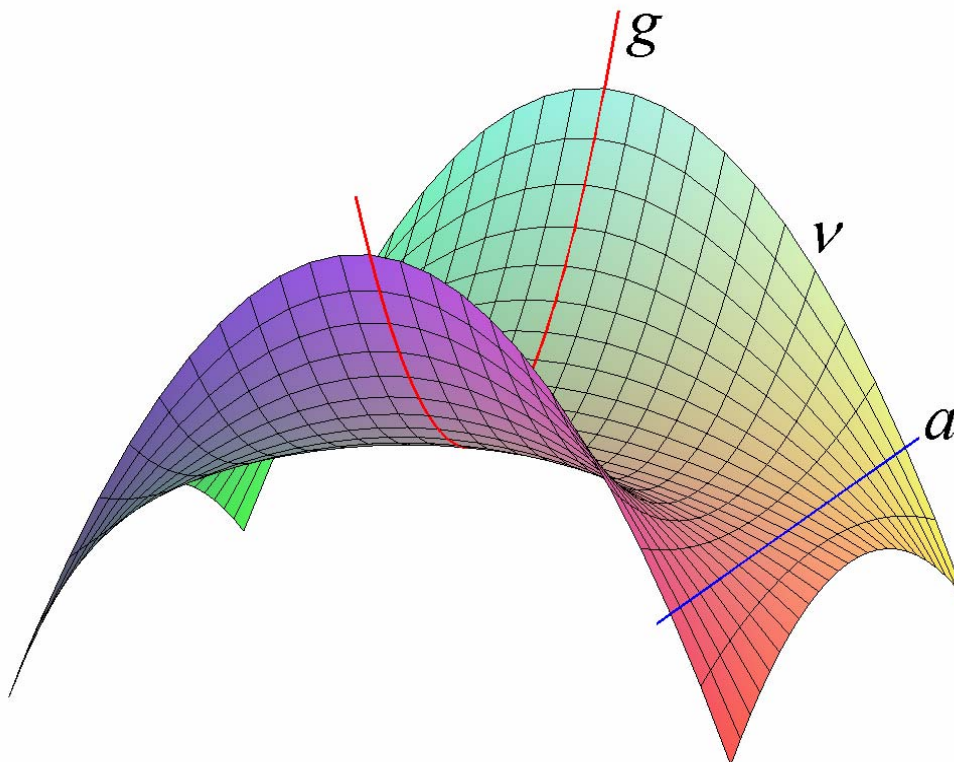
$$p = -2 \frac{c^2 q}{y_0^2 + 2nq}.$$

Rovnice parabol h_{y_0} :

$$\left[-2 \frac{c^2 q}{y_0^2 + 2nq} \left(z - \frac{1}{2q}y_0^2 - n \right) = x^2 \right] \cap (y = y_0).$$

Necháme-li probíhat y_0 celou reálnou osu, získáme rovnici Hacarovy plochy prvního druhu:

$$v : z = -\frac{1}{2c^2q}x^2y^2 - \frac{n}{c^2}x^2 + \frac{1}{2q}y^2 + n. \quad (1.4)$$

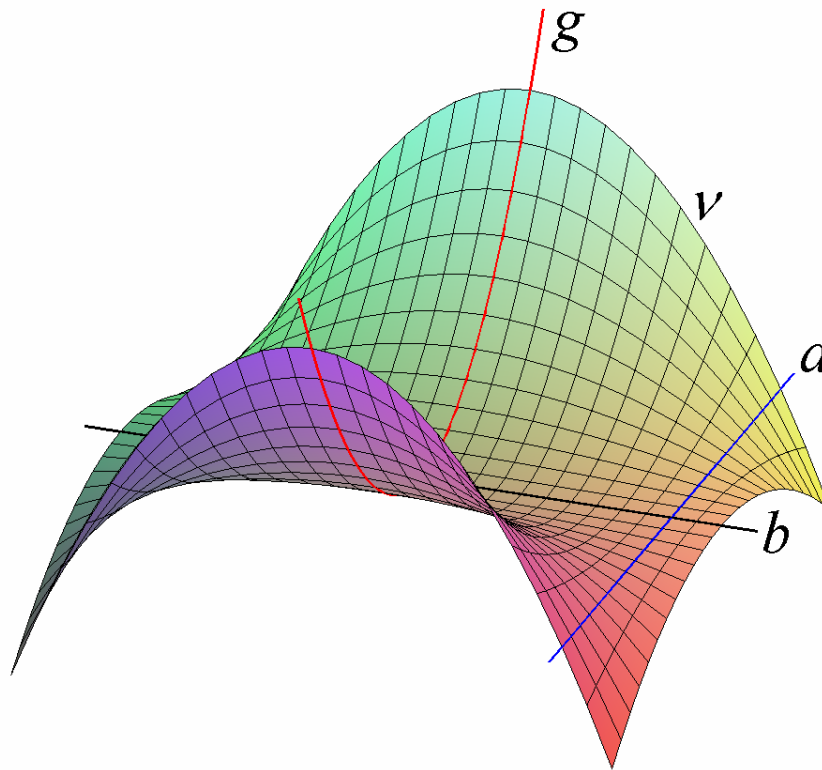


Obrázek 1.9: Hacarova plocha prvního druhu

Pro případ, že $n = 0$, jsou h_0 v rovinách β_0 paraboly kromě možnosti, kdy $y_0 = 0$, neboť tehdy je h_0 přímkou, označme ji b , s rovnicí $(y = 0) \cap (z = 0)$. Dosadíme-li do získané rovnice Hacarovy plochy:

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ n &= 0, \end{aligned}$$

dostaneme tvar: $z = 0$. Tedy i námi dříve odvozená rovnice vyhovuje. Přímkou b říkáme v takovém speciálním případě *táhlo*.



Obrázek 1.10: Hacarova plocha prvního druhu s táhlem

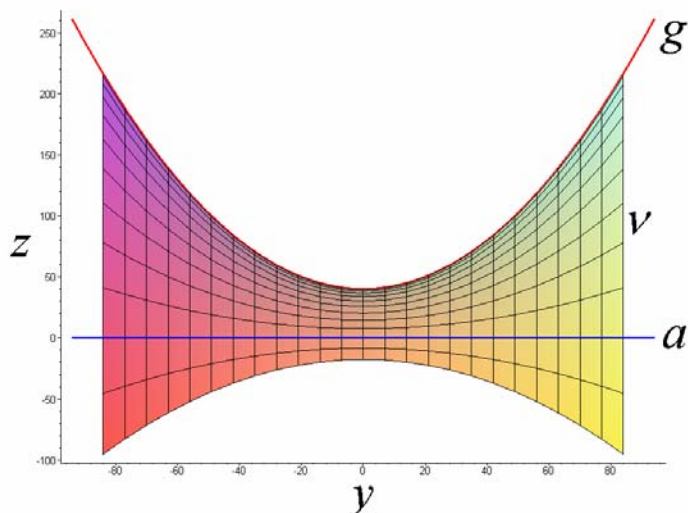
2. Hacarova plocha prvního druhu

V minulé kapitole jsme dospěli k rovnici (1.4) Hacarovy plochy prvního druhu. V této kapitole prozkoumáme její vlastnosti a dojdeme k definici Hacarovy plochy prvního druhu jako plochy klínové.

Připomeňme ještě rovnici (1.4) Hacarovy plochy prvního druhu ν a význam jednotlivých proměnných v ní uvedených.

- Rovnice (1.4) plochy... $\nu : z = -\frac{1}{2c^2q}x^2y^2 - \frac{n}{c^2}x^2 + \frac{1}{2q}y^2 + n$.
- Řídící parabola... $g : (x=0) \cap [2q(z-n) = y^2]$, kde q je kladné reálné číslo (parametr paraboly g) a n je nezáporné reálné číslo.
- Řídící přímka... $a : (x=c) \cap (z=0)$, kde c je kladná reálná konstanta.

Nejprve prozkoumejme bokorys námi vytvořené Hacarovy plochy prvního druhu.



Obrázek 2.1: Hacarova plocha prvního druhu (bokorys)

Zdá se, že jedním systémem ortogonální sítě křivek na Hacarově ploše prvního druhu ν jsou (až na jisté výjimky) paraboly. Zdání ale často klame, proto si naši domněnku ověříme. Řežeme plochu ν rovinou $\alpha : x = k$, kde k je libovolná reálná konstanta. Je-li $k = 0$, je zřejmé, že křivka řezu je přímo parabola g . Je-li $k = c$, křivkou řezu je přímka a (jedna z výjimek). Zvolíme-li $k = -c$, dostaneme opět přímku (symetricky položená k přímce a podle roviny $x = 0$). Nyní mějme $k \neq \pm c$. Rovnice křivek jsou:

$$(x = k) \cap \left[\frac{2c^2q}{c^2 - k^2} \left(z - n + \frac{k^2n}{c^2} \right) = y^2 \right].$$

Ne náhodou jsme upravili rovnici do námi známého tvaru rovnic parabol.

Zkoumejme ještě vztah mezi křivkami na ν v rovinách $\alpha_i : x = k_i$ a $\alpha_j : x = k_j$, kde k_i, k_j jsou reálné konstanty. Rovnice těchto křivek jsou:

$$g_i : (x = k_i) \cap \left[\frac{2c^2 q}{c^2 - k_i^2} \left(z - n + \frac{k_i^2 n}{c^2} \right) = y^2 \right],$$

$$g_j : (x = k_j) \cap \left[\frac{2c^2 q}{c^2 - k_j^2} \left(z - n + \frac{k_j^2 n}{c^2} \right) = y^2 \right].$$

Jak jsme již ukázali, jsou rovnice kromě případů, kdy $k_i = \pm c$ nebo $k_j = \pm c$, rovnicemi parabol. Nadále uvažujeme $k_i \neq \pm c, k_j \neq \pm c$. Předpokládejme ještě, že $|k_i| \neq |k_j|$ (díky symetrii celé situace jsou v takových případech tvarově shodné křivky řezu). Promítněme nyní kolmým rovnoběžným promítáním obě křivky do roviny $\alpha_0 : x = 0$ a označme tyto průměty \bar{g}_i, \bar{g}_j . Definujme v rovině α_0 (až do odvolání se pohybujeme v této rovině, čímž značně zjednodušíme zápis) zobrazení φ jako kolmou afinitu s osou

$o : z = 0$ a dvojicí odpovídajících si bodů v tomto zobrazení \bar{V}_i, \bar{V}_j . $\bar{V}_i = \left[0, n - \frac{k_i^2 n}{c^2} \right]$

je vrchol paraboly \bar{g}_i . Obdobně $\bar{V}_j = \left[0, n - \frac{k_j^2 n}{c^2} \right]$ je vrcholem paraboly \bar{g}_j . Zobrazíme

nyní parabolu \bar{g}_i zobrazením φ . Uvažujme libovolný bod $\bar{Y}_i = [y_i, z_i]$ paraboly \bar{g}_i (navíc platí $z_i = \left(1 - \frac{k_i^2}{c^2} \right) \left(\frac{y_i^2}{2q} + n \right)$). Jeho obrazem v zobrazení φ je bod $\bar{Y}_j = [y_i, z_j]$

(připomeňme, že se jedná o kolmou afinitu, proto je y -ová souřadnice bodu \bar{Y}_j rovna y -ové souřadnici bodu \bar{Y}_i). Dopočteme neznámou z_j a rozhodneme, zda bod \bar{Y}_j náleží parabole \bar{g}_j . Nyní můžeme využít aparátu analytické geometrie a sestavit rovnice zobrazení φ :

- zobrazení φ zadáme třemi dvojicemi odpovídajících si bodů (vzorů a obrazů):

$$\bar{A} = [0; 0] \mapsto \bar{\bar{A}} = [0; 0],$$

$$\bar{B} = [1; 0] \mapsto \bar{\bar{B}} = [1; 0],$$

$$\bar{V}_i = \left[0, n \left(1 - \frac{k_i^2}{c^2} \right) \right] \mapsto \bar{V}_j = \left[0, n \left(1 - \frac{k_j^2}{c^2} \right) \right].$$

- Ještě je nutné ukázat, že trojice

$$\bar{A}, \bar{B}, \bar{V}_i \tag{2.1}$$

$$\text{i trojice } \bar{\bar{A}}, \bar{\bar{B}}, \bar{V}_j \tag{2.2}$$

jsou nekolineární body. Když $k_i \neq \pm c, k_j \neq \pm c$ a n je kladné, je podmínka splněna.

Když $n = 0$, pak vrcholy všech tvořících parabol v rovinách $\alpha_i = k_i$, resp. $\alpha_j = k_j$, leží v rovině $z = 0$. Po kolmém rovnoběžném promítání do roviny α_0 leží promítnuté vrcholy na ose afinity φ a jsou samodružnými body tohoto zobrazení. V takovém případě zvolíme jako třetí pár dvojici odpovídajících si bodů na parabolách \bar{g}_i, \bar{g}_j , které však nejsou jejich vrcholy, např.

$$\bar{W}_i = \left[1, \frac{1}{2q} \left(1 - \frac{k_i^2}{c^2} \right) \right] \mapsto \bar{W}_j = \left[1, \frac{1}{2q} \left(1 - \frac{k_j^2}{c^2} \right) \right].$$

Možnosti, že jedna z konstant k_i, k_j nebo obě jsou rovny hodnotám $\pm c$ dořešíme později.

- Zapsáno maticovým zápisem vyjádříme obecně zobrazení φ :

$$\begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix},$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, p_1, p_2$ jsou reálné konstanty.

- Jednotlivé neznámé v matici postupným dosazením souřadnic tří dvojic vypočteme:

$$\begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{c^2 - k_j^2}{c^2 - k_i^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Rozepsáním matice získáme rovnice zobrazení, do nichž dosadíme:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \bar{y} \\ \bar{z} &= \bar{z} \frac{c^2 - k_j^2}{c^2 - k_i^2} \\ \hline y_i &= y_i \\ z_j &= z_i \frac{c^2 - k_j^2}{c^2 - k_i^2} \end{aligned}$$

Protože $z_i = \left(1 - \frac{k_i^2}{c^2} \right) \left(\frac{y_i^2}{2q} + n \right)$, je $z_j = \left(1 - \frac{k_j^2}{c^2} \right) \left(\frac{y_i^2}{2q} + n \right)$. Dosazením y_i do rovnice

paraboly \bar{g}_j získáme totožné vyjádření hodnoty z_j . Shrňme naše poznání: Promítneme-li kolmo libovolné dvě paraboly plochy v rovinách rovnoběžných s rovinou α_0 do roviny α_0 , nalezneme mezi těmito průměty vztah kolmé afinity s osou v souřadnicové ose y .

Nemusíme však využít znalostí o rovnicích zobrazení v geometrii. Stačí, když pomocí analytické geometrie popíšeme deskriptivní konstrukci obrazu libovolného bodu v afinitě:

- Zvolme opět libovolný bod $\bar{Y}_i = \left[y_i, \left(1 - \frac{k_i^2}{c^2} \right) \left(\frac{y_i^2}{2q} + n \right) \right]$ paraboly \bar{g}_i , který je různý od vrcholu \bar{V}_i . Jeho obrazem ve zvolené afinitě nechť je bod $\bar{Y}_j = [y_i, z_j]$.

- Sestavíme obecnou rovnici přímky $\overline{V}_i\overline{Y}_i$ (směrový vektor $\overline{\overline{V}_i\overline{Y}_i} = \left(y_i, \frac{y_i^2}{2q} \left(1 - \frac{k_i^2}{c^2} \right) \right)$,

normálový vektor $\vec{n}_i = \left(\frac{y_i^2}{2q} \left(1 - \frac{k_i^2}{c^2} \right), -y_i \right)$ a absolutní člen dopočteme dosazením

bodů \overline{V}_i):

$$\frac{y_i^2}{2q} \left(1 - \frac{k_i^2}{c^2} \right) y - y_i z + n y_i \left(1 - \frac{k_i^2}{c^2} \right) = 0.$$

- Spočteme průsečík \overline{P} přímky $\overline{V}_i\overline{Y}_i$ a osy afinity (při výpočtu využijeme podmíněk, že $k_i \neq \pm c$ a $y_i \neq 0$):

$$\overline{P} = \left[-\frac{2nq}{y_i}, 0 \right].$$

- Sestavíme obecnou rovnici přímky $\overline{P}\overline{V}_j$ (směrový vektor $\overline{\overline{P}\overline{V}_j} = \left(\frac{2nq}{y_i}, n \left(1 - \frac{k_j^2}{c^2} \right) \right)$, normálový vektor $\vec{n}_j = \left(n \left(1 - \frac{k_j^2}{c^2} \right), -\frac{2nq}{y_i} \right)$ a absolutní člen dopočteme opět dosazením bodů \overline{V}_j):

$$n \left(1 - \frac{k_j^2}{c^2} \right) y - \frac{2nq}{y_i} z + \frac{2n^2q}{y_i} \left(1 - \frac{k_j^2}{c^2} \right) = 0.$$

- Do rovnice přímky $\overline{P}\overline{V}_j$ dosadíme za y hodnotu y_i a vyloučené z udává hodnotu z_j :

$$z_j = \left(1 - \frac{k_j^2}{c^2} \right) \left(\frac{y_i^2}{2q} + n \right).$$

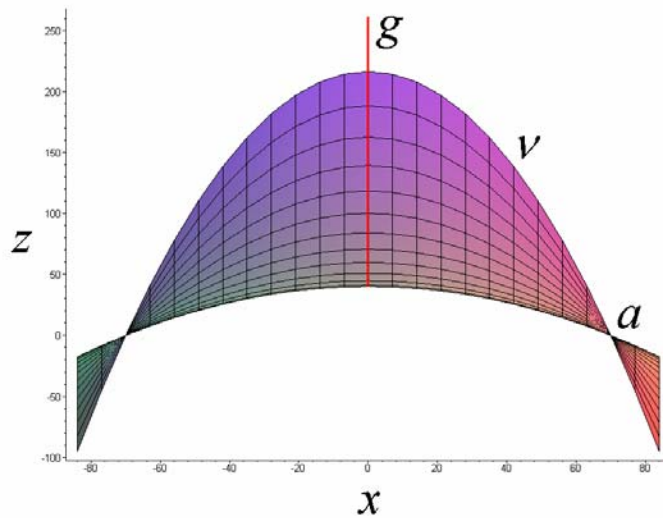
Jiným způsobem jsme došli k témuž závěru.

Když se pohybujeme ještě v rovině α_0 , prozkoumejme ještě případ, kdy některá z konstant k_i , k_j je rovna konstantě c :

- Necht' $k_i = c$ (resp. $k_i = -c$) a zároveň $k_j \neq \pm c$. Pak zobrazení mezi průměty \overline{a} , \overline{g}_j křivek a , g_j do roviny α_0 považujeme za projekci.
- Necht' $k_i = \pm c = k_j$ (zahrnuje i případy, kdy $k_i = \pm c$ a $k_j = \mp c$). V těchto případech je zobrazení mezi průměty identitou.

Vyšetřili jsme všechny možné situace, které mohly nastat. Řekněme tedy, že až na konečně mnoho případů jsou kolmé průměty řezů Hacarovy plochy prvního druhu ν rovinami rovnoběžnými s rovinou α_0 do roviny α_0 ve vztahu kolmé afinity s osou afinity v souřadnicové ose y .

Opustíme nyní rovinu α_0 a vraťme se do Eukleidovského prostoru E_3 . Postupně nyní k nárysu Hacarovy plochy ν .



Obrázek 2.2: Hacarova plocha prvního druhu (nárys)

I na nárysu Hacarovy plochy ν vidíme, že druhým systémem ortogonálních křivek jsou paraboly. Stačí, když povedeme řez libovolnou rovinou $\beta: y=l$, kde l je libovolná reálná konstanta (dosadíme do rovnice (1.4) za y hodnotu konstanty l a vhodně upravíme):

$$-\frac{2c^2q}{l^2 + 2nq} \left(z - \frac{l^2}{2q} - n \right) = x^2.$$

Podobně ověříme afinitu jako u bokorysu. Vezmeme libovolné dva řezy h_i, h_j plochy ν rovinami $\beta_i: y=l_i, \beta_j: y=l_j$, kde l_i, l_j jsou libovolné reálné konstanty a platí, že $|l_i| \neq |l_j|$ (jinak dostáváme místo afinních vztahů identitu), a ověříme vztahy mezi kolmými průměty \bar{h}_i, \bar{h}_j řezů h_i, h_j do roviny $\beta_0: y=0$ pomocí rovnic pro afinní zobrazení.

- Dále se pohybujeme v rovině β_0 a pro zjednodušení zápisů nadále používáme uspořádané dvojice s x -ovou a z -ovou souřadnicí.
- Definujeme afinní zobrazení ψ třemi dvojicemi odpovídajících si bodů:

$$\begin{aligned} \bar{C} = [0;0] &\mapsto \bar{\bar{C}} = [0;0], \\ \bar{D} = [1;0] &\mapsto \bar{\bar{D}} = [1;0], \end{aligned}$$

$$\bar{V}_i = \left[0, \frac{l_i^2}{2q} + n \right] \mapsto \bar{V}_j = \left[0, \frac{l_j^2}{2q} + n \right] \text{ (body } \bar{V}_i, \bar{V}_j \text{ jsou vrcholy parabol } \bar{h}_i, \bar{h}_j \text{).}$$

- Ještě bychom měli ukázat, že obě trojice bodů

$$\bar{C}, \bar{D}, \bar{V}_i \tag{2.3}$$

$$\text{a } \bar{\bar{C}}, \bar{\bar{D}}, \bar{V}_j \tag{2.4}$$

nejsou kolineární. To je jednoduché pokud n je kladná konstanta. Pokud je n nulové, pak je trojice (2.3), resp. (2.4), kolineární pouze v případě, že l_i je nulové, resp. l_j je nulové, což ale znamená, že bod \bar{V}_i , resp. \bar{V}_j , je bodem osy afinity ψ (při $n=0$ se jedná o Hacarovu plochu prvního druhu s táhlem) – v takovém případě stačí vzít libovolnou jinou dvojici bodů parabol jako v případě dvojic (2.1) a (2.2).

- Vezměme obecně rovnici libovolného zobrazení v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

kde $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, q_1, q_2$ jsou reálná čísla.

- Dopočteme dosazením definujících dvojic všechny koeficienty rovnice pro zobrazení ψ :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{l_j^2 + 2nq}{l_i^2 + 2nq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Na parabole \bar{h}_i zvolme libovolný bod $\bar{X}_i = [x_i, z_i]$, kde

$$z_i = -\frac{l_i^2 + 2nq}{2c^2q} x_i^2 + \frac{l_i^2 + 2nq}{2q}.$$

- Bod \bar{X}_i se zobrazením ψ zobrazí do bodu $\bar{X}_j = [x_j, z_j]$, kde $z_j = z_i \frac{l_j^2 + 2nq}{l_i^2 + 2nq}$ ze soustavy rovnic zobrazení ψ .

- Dosadíme za z_i a $z_j = -\frac{l_j^2 + 2nq}{2c^2q} x_i^2 + \frac{l_j^2 + 2nq}{2q}$.

- Jednoduchou kontrolou zjistíme, že bod \bar{X}_j leží na parabole \bar{h}_j .

Vraťme se do prostoru \mathbf{E}_3 . Zjistili jsme, že Hacarova plocha prvního duhu obsahuje dva systémy křivek se speciálními vlastnostmi. Plochám, které mají takové vlastnosti (neobsahují vždy oba dva systémy afinních křivek) se říká *klínové plochy*. Uvedme však definici matematicky a přesně.

Definice 1: Klínová plocha

Nechť je dán pravouhlý souřadnicový systém s osami x , y , z . Označme α , β roviny, které jsou dány rovnicemi:

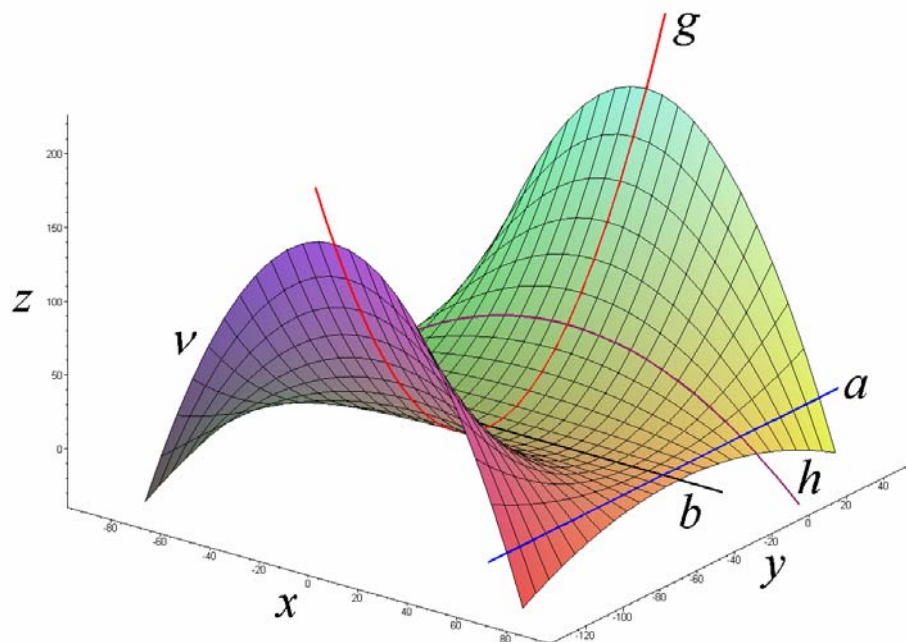
$$\begin{aligned}\alpha &: x = 0, \\ \beta &: y = 0.\end{aligned}$$

Označme rovinné křivky g , h v rovinách α , β . Necht' mají navíc tyto křivky společný průsečík, který leží na ose z . Plochu κ nazveme *klínovou plochou*, jestliže je tvořena křivkami h_{y_0} , které leží v rovinách $\beta_{y_0} : y = y_0$, kde y_0 je reálná konstanta. Každá z křivek h_{y_0} splňuje následující vlastnosti:

- 1) h_{y_0} protíná křivku g
- 2) a její pravouhlý průmět \bar{h}_{y_0} do roviny β je s křivkou h ve vztahu kolmé afinity v rovině β s osou afinity v souřadnicové ose x
- 3) nebo pro konečně mnoho případů je h_{y_0} přímka.

Každá plocha ν se nazývá *klínová*, jestliže ji lze umístit v prostoru tak, že nově umístěná plocha ν' má stejné vlastnosti jako výše uvedená klínová plocha κ .

Poznámka 1: Hacarova plocha prvního druhu s táhlem, jak si ji můžeme prohlédnout na obrázku 1.10, je také klínovou plochou, protože ji lze umístit tak, aby splňovala požadavky definice 1. Můžeme ji definovat pomocí paraboly g a paraboly h , což vidíme na následujícím obrázku 2.3, na němž jsou pro lepší představivost vyznačeny obrazy souřadnicových os (skutečné osy by procházely obrázkem a to by ho zpřehlednilo).



Obrázek 2.3: Hacarova plocha prvního druhu s táhlem jako plocha klínová

3. Hacarova plocha druhého druhu

Už jsme poznali, jak vypadá Hacarova plocha prvního druhu i jaké má vlastnosti. Tato kapitola je věnována Hacarově ploše druhého druhu, která je určitou obměnou Hacarovy plochy prvního druhu.

Hacarova plocha prvního druhu ν byla zadána řídicí parabolou g v rovině $x = 0$ a řídicí přímkou a v rovině $x = c$, kde c byla kladná reálná konstanta. Tvořícími křivkami plochy ν byly paraboly (v konečně mnoha případech přímky) v rovinách $y = y_0$, kde y_0 byla libovolná reálná konstanta, s vrcholy na parabole g , protínající přímkou a a s osou rovnoběžnou se souřadnicovou osou z . Změníme-li tvar řídicí křivky a získáme jiné zajímavé plochy. Mezi nimi je i Hacarova plocha druhého druhu. Plocha μ ať je určena řídicí konvexní parabolou g v rovině $x = 0$ a řídicí konkávní parabolou a v rovině $x = c$. Tvořícími křivkami μ jsou paraboly (v konečně mnoha případech přímky) v rovinách $y = y_0$ s vrcholy na parabole g , protínající parabolou a a s osou rovnoběžnou se souřadnicovou osou z . Z různých vzájemných poloh parabol g a a dostáváme různé tvary plochy μ .

Zadejme si proto řídicí útvary plochy μ rovnicemi:

- Řídicí parabola g je zadána průnikem roviny a obecné válcové plochy $g : (x = 0) \cap [2q(z - n) = y^2]$, kde q je kladná reálná konstanta a n je reálná konstanta.
- Řídicí parabola a je zadána podobně jako parabola g : $a : (x = c) \cap [-2p(z - m) = y^2]$, kde c , p jsou kladné reálné konstanty a m je reálná konstanta.

Mohou však nastat tři různé situace:

- 1) $n = m$,
- 2) $n < m$,
- 3) $n > m$.

Vyřešíme zvlášť všechny tři případy:

- 1) Tvořící křivka v rovině $y = 0$ je přímka $h : (y = 0) \cap (z = n)$ (zjistíme to jednoduše, když považujeme křivku h za tvořící parabolou v rovině $\beta : y = 0$, pak má ale svůj vrchol ve stejné výši jako její jiný bod různý od vrcholu, což je spor s vlastností vrcholu paraboly). Tvořící křivky h_{y_0} v rovinách $\beta_{y_0} : y = y_0$, kde y_0 je nenulová

reálná konstanta, jsou paraboly s vrcholem $V_{y_0} = \left[0, y_0, \frac{1}{2q} y_0^2 + n \right]$ na parabole g ,

procházející bodem $A_{y_0} = \left[c, y_0, -\frac{1}{2p} y_0^2 + n \right]$ paraboly a a s osou rovnoběžnou se

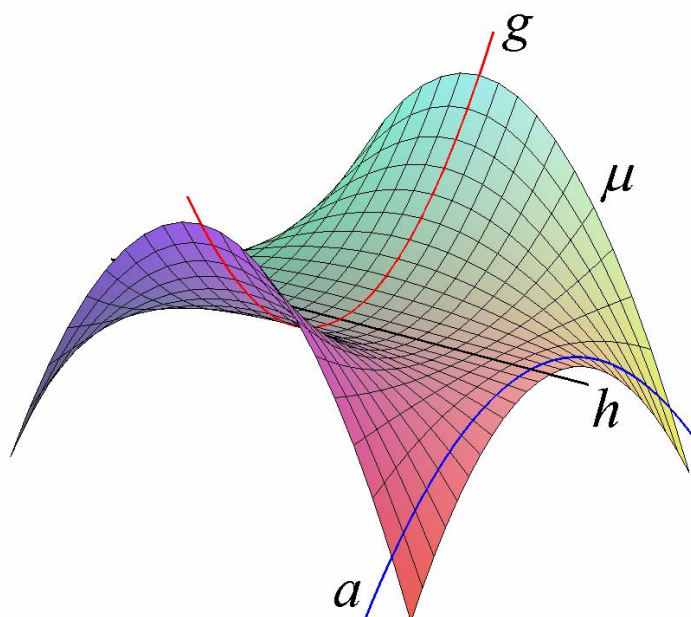
souřadnicovou osou z . Z těchto údajů sestavíme rovnice tvořících parabol:

$$h_{y_0} : (y = y_0) \cap \left[-\frac{2c^2 pq}{y_0^2(p+q)} \left(z - \frac{1}{2q} y_0^2 - n \right) = x^2 \right].$$

Necháme-li probíhat y_0 celou reálnou osu kromě nuly, Plochu μ vyjádříme takto:

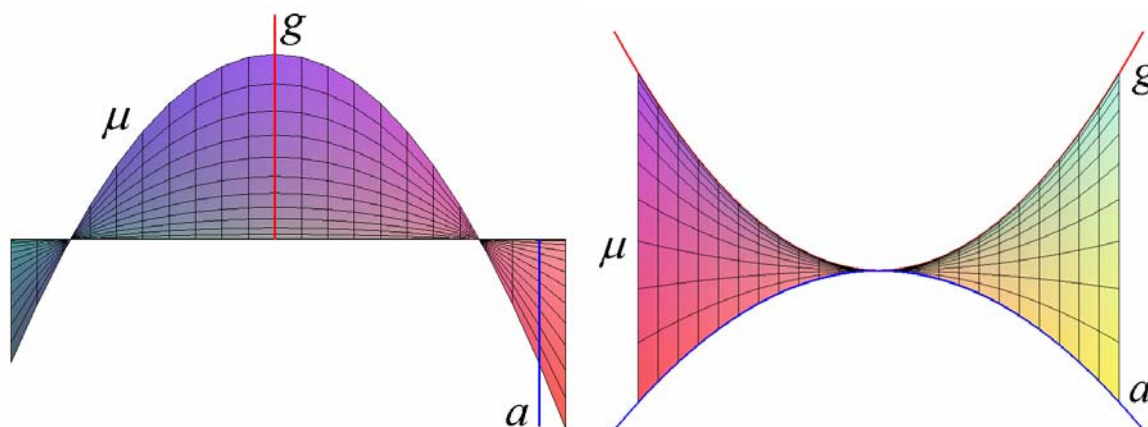
$$\mu : z = -\frac{p+q}{2c^2 pq} x^2 y^2 + \frac{1}{2q} y^2 + n. \tag{3.1}$$

Když do rovnice (3.1) dosadíme za $y = 0$ získáme rovnici přímky h . Rovnice (3.1) je rovnicí plochy μ , pro libovolné reálné hodnoty proměnných x a y .



Obrázek 3.1: Plocha zadaná dvěma parabolami s vrcholy ve stejné výši

Na Hacarově ploše ν prvního druhu ležely dvě důležité přímky, kvůli nimž je tato plocha významná. Zkusme se zamyslet, zda plocha μ obsahuje jiné přímky kromě přímky h . Pomůžeme si pohledem na nárys a bokorys plochy μ .



Obrázek 3.2: Plocha zadaná dvěma parabolami s vrcholy ve stejné výši (nárys a bokorys)

Plocha μ by mohla obsahovat kromě přímky h (je vidět při pohledu z boku) ještě dvě jiné přímky (vidíme je dobře na nárysu plochy). Pro lepší přesvědčivost ale rovnice přímek vypočteme. Uvažujme libovolný bod $P = [p_1, p_2, p_3]$ v prostoru a libovolný nenulový vektor $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$, které určují hledanou přímku s , jejíž parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned}x &= p_1 + s_1 t \\y &= p_2 + s_2 t, \quad t \in \mathbf{R}, \\z &= p_3 + s_3 t\end{aligned}$$

dosadíme do rovnice (3.1) plochy μ . Pro jednoduchost zápisu označíme:

$$\begin{aligned}k_1 &= -\frac{p+q}{2c^2 pq}, \\k_2 &= \frac{1}{2q}.\end{aligned}$$

Rovnice po úpravě vzhledem k parametru t přímky s :

$$\begin{aligned}t^4(k_1 s_1^2 s_2^2) + t^3(2k_1 p_1 s_1 s_2^2 + 2k_1 p_2 s_1^2 s_2) + \\+ t^2(k_1 p_1^2 s_2^2 + 4k_1 p_1 p_2 s_1 s_2 + k_1 p_2^2 s_1^2 + k_2 s_2^2) + \\+ t(2k_1 p_1^2 p_2 s_2 + 2k_1 p_1 p_2^2 s_1 + 2k_2 p_2 s_2 - s_3) + \\+ (k_2 p_2^2 + k_1 p_1^2 p_2^2 - p_3 + n) = 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

Aby přímka s byla součástí plochy μ , musí být rovnice (3.2) splněna pro libovolnou reálnou hodnotu parametru t . To nastane právě tehdy, když jsou všechny koeficienty polynomu z levé strany rovnice (3.2) proměnné t nulové:

$$k_1 s_1^2 s_2^2 = 0, \quad (3.3)$$

$$2k_1 s_1 s_2 (p_1 s_2 + p_2 s_1) = 0, \quad (3.4)$$

$$k_1 p_1^2 s_2^2 + 4k_1 p_1 p_2 s_1 s_2 + k_1 p_2^2 s_1^2 + k_2 s_2^2 = 0, \quad (3.5)$$

$$2k_1 p_1^2 p_2 s_2 + 2k_1 p_1 p_2^2 s_1 + 2k_2 p_2 s_2 - s_3 = 0, \quad (3.6)$$

$$k_2 p_2^2 + k_1 p_1^2 p_2^2 - p_3 + n = 0. \quad (3.7)$$

Protože $k_1 < 0$, z rovnice (3.3) vyplývají dvě možnosti:

1a) $s_1 = 0$. Pak je rovnice (3.4) splněna. Z rovnice (3.5) po dosazení za s_1 zbude $s_2^2(k_1 p_1^2 + k_2) = 0$.

1a1) Když $s_2 = 0$. Z rovnice (3.6) vyjde, že $s_3 = 0$. Směrový vektor \vec{s} je nulový. Nulový vektor však neurčuje přímku.

1a2) Necht' $s_2 \neq 0$. Protože $k_1 < 0$, je $p_1^2 = -\frac{k_2}{k_1}$. Po dosazení za p_1^2 do

rovnice (3.6) vyplývá, že $s_3 = 0$, a do rovnice (3.7), že $p_3 = n$.

Dostáváme bod ${}^1P = \left[-\sqrt{-\frac{k_2}{k_1}}, p_2, n\right]$, resp. ${}^2P = \left[\sqrt{-\frac{k_2}{k_1}}, p_2, n\right]$,

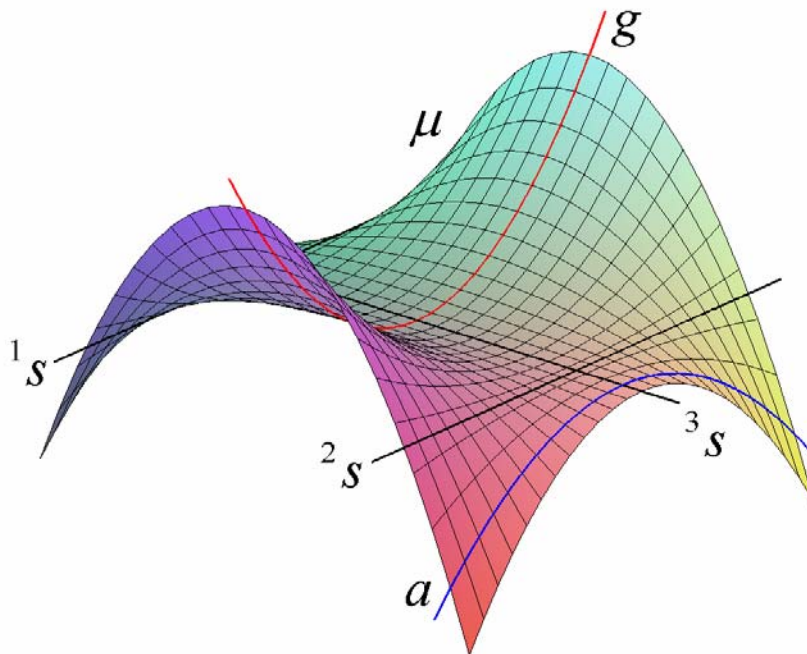
a směrový vektor ${}^1\vec{s} = (0, s_2, 0)$, resp. ${}^2\vec{s} = {}^1\vec{s}$, přímky 1s , resp. přímky 2s .

1b) Druhá možnost je, že $s_1 \neq 0$, neboli $s_2 = 0$. Rovnice (3.4) je splněna. Po dosazení za s_2 do rovnice (3.5) získáme $k_1 p_2^2 s_1^2 = 0$. Jelikož předpokládáme, že $s_1 \neq 0$, a víme, že $k_1 < 0$, pak $p_2 = 0$. Z rovnice (3.6) vypočteme, že $s_3 = 0$, a z rovnice (3.7), že $p_3 = n$. Bod ${}^3P = [p_1, 0, n]$ a směrový vektor ${}^3\vec{s} = (s_1, 0, 0)$ dávají přímku 3s .

Na první pohled to vypadá, že jsme přímky neurčili jednoznačně. Nezapomínejme však, že ani parametrické vyjádření přímky v prostoru není jednoznačné. Všechna možná umístění bodu 1P , resp. bodu 2P , jsou na přímce ${}^1p: \left(x = -\sqrt{-\frac{k_2}{k_1}}\right) \cap (z = n)$, resp. na přímce ${}^2p: \left(x = \sqrt{-\frac{k_2}{k_1}}\right) \cap (z = n)$. Směrový vektor ${}^1\vec{s}$ je zároveň i směrovým vektorem přímek ${}^1p, {}^2p$. Stejně je tomu i u bodu 3P , jež může ležet kdekoli na přímce ${}^3p: (y = 0) \cap (z = n)$, jejímž směrovým vektorem je i vektor ${}^3\vec{s}$. Následné parametrické vyjádření přímek ${}^1s, {}^2s, {}^3s = h$ je proto pouze jedno z mnoha možných.

$$\begin{array}{lll} x = -c\sqrt{\frac{p}{p+q}} & x = c\sqrt{\frac{p}{p+q}} & x = t \\ {}^1s: y = t & , t \in \mathbf{R}, & {}^2s: y = t & , t \in \mathbf{R}, & {}^3s: y = 0, t \in \mathbf{R}. \\ z = n & & z = n & & z = n \end{array}$$

Pohledem na obrázek, zjistíme, že jsme vytvořili jiným způsobem Hacarovu plochu prvního druhu s táhlem.



Obrázek 3.3: Hacarova plocha prvního druhu s táhlem

Jestliže jsme vytvořili Hacarovu plochu prvního druhu, jsme schopni převést rovnici (3.1) na tvar (1.4). Protože Hacarova plocha prvního druhu byla v prvním případě (viz. kapitola 2) zadána parabolou a přímkou v rovině $z = 0$, sjednotíme zadání z kapitoly 2 se zadáním z této kapitoly (přímka leží v rovině $z = n$) tak, že položíme $n = 0$. Naším úkolem je nyní srovnat rovnice:

$$v: z = -\frac{1}{2c_1^2 q} x^2 y^2 + \frac{1}{2q} y^2, \quad (3.8)$$

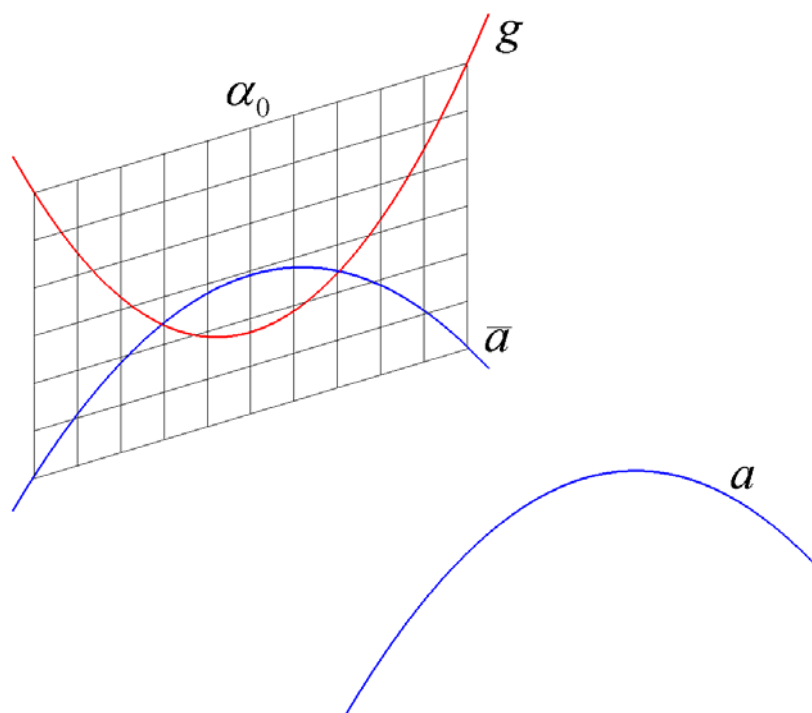
$$\mu: z = -\frac{p+q}{2c_2^2 pq} x^2 y^2 + \frac{1}{2q} y^2. \quad (3.9)$$

Rovnice (3.8), resp. rovnice (3.9), je modifikovaná rovnice (1.4), resp. rovnice (3.1). Označili jsme však konstanty c z rovnic (3.8), (3.9) indexy, protože má konstanta c v každé rovnici jinou hodnotu. Z obrázku 3.3 a z parametrického vyjádření přímky 2s je patrné, že $c_1^2 = c_2^2 \frac{P}{p+q}$. Dosadíme-li za c_1^2 do rovnice (3.8), získáme rovnici (3.9), čehož jsme chtěli docílit.

- 2) Vzhledem k tomu, že parabola g je shora otevřená, parabola a zdola otevřená a $n < m$, pak plocha obsahuje dvě přímky v rovinách $\beta_1 : y = y_1$, $\beta_2 : y = y_2$. Hodnoty y_1, y_2 vypočteme jednoduše jako y -ové souřadnice průsečíků kolmého průmětu \bar{a} paraboly a do roviny $\alpha_0 : x = 0$ a paraboly g :

$$y_1 = -\sqrt{\frac{2pq(m-n)}{p+q}},$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{2pq(m-n)}{p+q}}.$$



Obrázek 3.4: Průmět paraboly

Rovnice přímek plochy $\bar{\mu}$ (z -ovou souřadnici roviny, v níž leží přímky h_1, h_2 plochy $\bar{\mu}$, dopočteme dosazením do jedné z rovnic parabol g nebo a):

$$h_1 : \left(z = \frac{mp+nq}{p+q} \right) \cap \left(y = -\sqrt{\frac{2pq(m-n)}{p+q}} \right), \quad (3.10)$$

$$h_2 : \left(z = \frac{mp+nq}{p+q} \right) \cap \left(y = \sqrt{\frac{2pq(m-n)}{p+q}} \right). \quad (3.11)$$

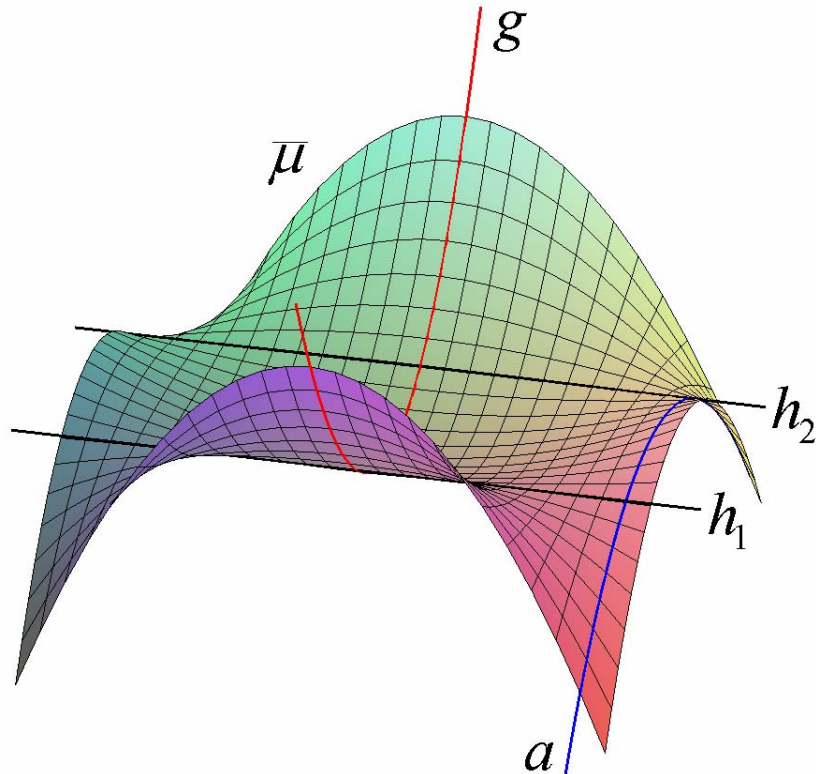
V rovinách $\beta_{y_0} : y = y_0$, kde $y_0 \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \pm \sqrt{\frac{2pq(m-n)}{p+q}} \right\}$, leží tvořící paraboly h_{y_0} plochy $\bar{\mu}$ s vrcholem $V_{y_0} = \left[0, y_0, \frac{1}{2q} y_0^2 + n \right]$ na parabole g . Paraboly h_{y_0} dále procházejí bodem $A_{y_0} = \left[c, y_0, -\frac{1}{2p} y_0^2 + m \right]$ a mají osu rovnoběžnou se souřadnicovou osou z . Nyní z těchto údajů vytvoříme rovnice parabol h_{y_0} :

$$h_{y_0} : (y = y_0) \cap \left[\frac{2c^2 pq}{2pq(m-n) - y_0^2(p+q)} \left(z - \frac{1}{2q} y_0^2 - n \right) = x^2 \right].$$

Necháme-li probíhat y_0 celou \mathbf{R} kromě $\pm \sqrt{\frac{2pq(m-n)}{p+q}}$, dostaneme vyjádření plochy na těchto intervalech:

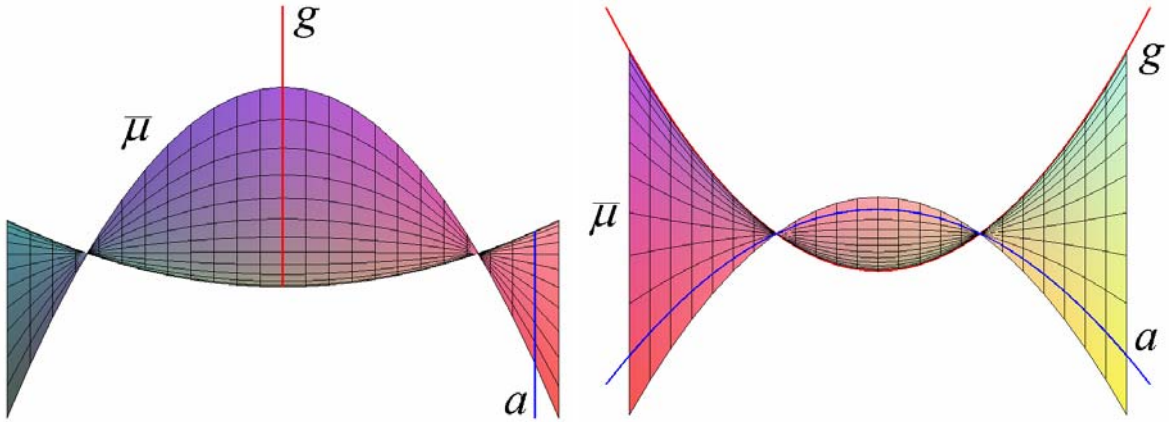
$$\bar{\mu} : z = -\frac{p+q}{2c^2 pq} x^2 y^2 + \frac{m-n}{c^2} x^2 + \frac{1}{2q} y^2 + n. \quad (3.12)$$

Když dosadíme za $y^2 = \frac{2pq(m-n)}{p+q}$ do rovnice (3.12) získáme vyjádření přímek (3.10) a (3.11). Rovnice (3.12) je rovnicí plochy $\bar{\mu}$ na celém \mathbf{R} .



Obrázek 3.5: Plocha zadaná dvěma parabolami s rozdílnou výškou vrcholů

Jako u předešlé plochy μ zkusme najít všechny přímky, které plocha $\bar{\mu}$ obsahuje. Pro ilustraci si prohlédneme nárys i bokorys plochy $\bar{\mu}$:



Obrázek 3.6: Plocha zadaná dvěma parabolami s rozdílnou výškou vrcholů (nárys a bokorys)

Uvažujme opět libovolný bod $P = [p_1, p_2, p_3]$, kde $p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{R}$, v prostoru a libovolný nenulový vektor $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$, kde $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{R}$ a $\vec{s} \neq (0, 0, 0)$. Parametrické vyjádření přímky s dané bodem P a směrovým vektorem \vec{s} je:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + s_1 t \\ s: y &= p_2 + s_2 t, \quad t \in \mathbf{R}. \\ z &= p_3 + s_3 t \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aby přímka s ležela na ploše $\bar{\mu}$, je rovnice (3.12) po dosazení z rovnic (3.13) splněna pro libovolnou hodnotu parametru t . Pro jednoduchost zápisu označme:

$$k_1 = -\frac{p+q}{2c^2 pq}, \quad k_2 = \frac{m-n}{c^2}, \quad k_3 = \frac{1}{2q}.$$

Po dosazení z rovnic (3.13) do rovnice (3.12) dostáváme:

$$\begin{aligned} & t^4 (k_1 s_1^2 s_2^2) + t^3 (2k_1 p_1 s_1 s_2^2 + 2k_1 p_2 s_1^2 s_2) + \\ & + t^2 (k_1 p_1^2 s_2^2 + k_1 p_2^2 s_1^2 + 4k_1 p_1 p_2 s_1 s_2 + k_2 s_1^2 + k_3 s_2^2) + \\ & + t (2k_1 p_1^2 p_2 s_2 + 2k_1 p_1 p_2^2 s_1 + 2k_2 p_1 s_1 + 2k_3 p_2 s_2 - s_3) + \\ & + (k_1 p_1^2 p_2^2 + k_2 p_1^2 + k_3 p_2^2 - p_3 + n) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Aby byla rovnice (3.14) splněna pro libovolné $t \in \mathbf{R}$, jsou všechny koeficienty polynomu proměnné t na pravé straně rovnice (3.14) rovny nule:

$$k_1 s_1^2 s_2^2 = 0, \quad (3.15)$$

$$2k_1 s_1 s_2 (p_1 s_2 + p_2 s_1) = 0, \quad (3.16)$$

$$k_1 (p_1 s_2 + p_2 s_1)^2 + 2k_1 p_1 p_2 s_1 s_2 + k_2 s_1^2 + k_3 s_2^2 = 0, \quad (3.17)$$

$$2k_1 p_1 p_2 (p_1 s_2 + p_2 s_1) + 2k_2 p_1 s_1 + 2k_3 p_2 s_2 - s_3 = 0, \quad (3.18)$$

$$k_1 p_1^2 p_2^2 + k_2 p_1^2 + k_3 p_2^2 - p_3 + n = 0. \quad (3.19)$$

Jelikož $k_1 < 0$, pak pro rovnici (3.15) nastanou dvě možná řešení:

2a) $s_1 = 0$. Rovnice (3.16) platí. Z rovnice (3.17) dostáváme $s_2^2 (k_1 p_1^2 + k_3) = 0$.

Mohou nastat opět dva případy:

2a1) $s_2 = 0$. Pak ale z rovnice (3.18) vyplývá, že $s_3 = 0$. Takové řešení nepotřebujeme, neboť by byl směrový vektor \vec{s} nulový.

2a2) Nebo $s_2 \neq 0$. Pak $p_1^2 = -\frac{k_3}{k_1}$. Z rovnice (3.18) dostáváme, že $s_3 = 0$,

a z rovnice (3.19), že $p_3 = n - \frac{k_2 k_3}{k_1}$. Body ${}^1P = \left[-\sqrt{-\frac{k_3}{k_1}}, p_2, n - \frac{k_2 k_3}{k_1} \right]$,

resp. ${}^2P = \left[\sqrt{-\frac{k_3}{k_1}}, p_2, n - \frac{k_2 k_3}{k_1} \right]$, a směrové vektory ${}^1\vec{s} = (0, s_2, 0)$, kde

$s_2 \neq 0$, resp. ${}^2\vec{s} = {}^1\vec{s}$, určují přímky 1s , resp. 2s .

2b) Nebo $s_1 \neq 0$. Pak z rovnice (3.15) vyplývá, že $s_2 = 0$. Rovnice (3.16) je tímto splněna. V upravené rovnici (3.17) je $s_1^2(k_1 p_2^2 + k_2) = 0$. Jelikož $s_1 \neq 0$, pak jedinou možností je, aby $p_2^2 = -\frac{k_2}{k_1}$. Podle rovnice (3.18) je $s_3 = 0$ a z rovnice

(3.19) je $p_3 = n - \frac{k_2 k_3}{k_1}$. Odtud získáváme přímku 3s , resp. 4s , zadanou

jedním jejím bodem ${}^3P = \left[p_1, -\sqrt{-\frac{k_2}{k_1}}, n - \frac{k_2 k_3}{k_1} \right]$, resp.

${}^4P = \left[p_1, \sqrt{-\frac{k_2}{k_1}}, n - \frac{k_2 k_3}{k_1} \right]$, a směrovým vektorem ${}^3\vec{s} = (s_1, 0, 0)$, kde $s_1 \neq 0$,

resp. ${}^4\vec{s} = {}^3\vec{s}$.

Shrneme-li předchozí výpočty zjistíme, že existují čtyři přímky plochy zadané jedním jejím bodem a směrovým vektorem. Jejich parametrické vyjádření je opět jedním z mnoha možných:

$$x = -c \sqrt{\frac{p}{p+q}}$$

$${}^1s: y = t, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$z = \frac{mp + nq}{p + q}$$

$$x = t$$

$${}^3s: y = -\sqrt{\frac{2pq(m-n)}{p+q}}, \quad t \in \mathbf{R},$$

$$z = \frac{mp + nq}{p + q}$$

$$x = c \sqrt{\frac{p}{p+q}}$$

$${}^2s: y = t, \quad t \in \mathbf{R},$$

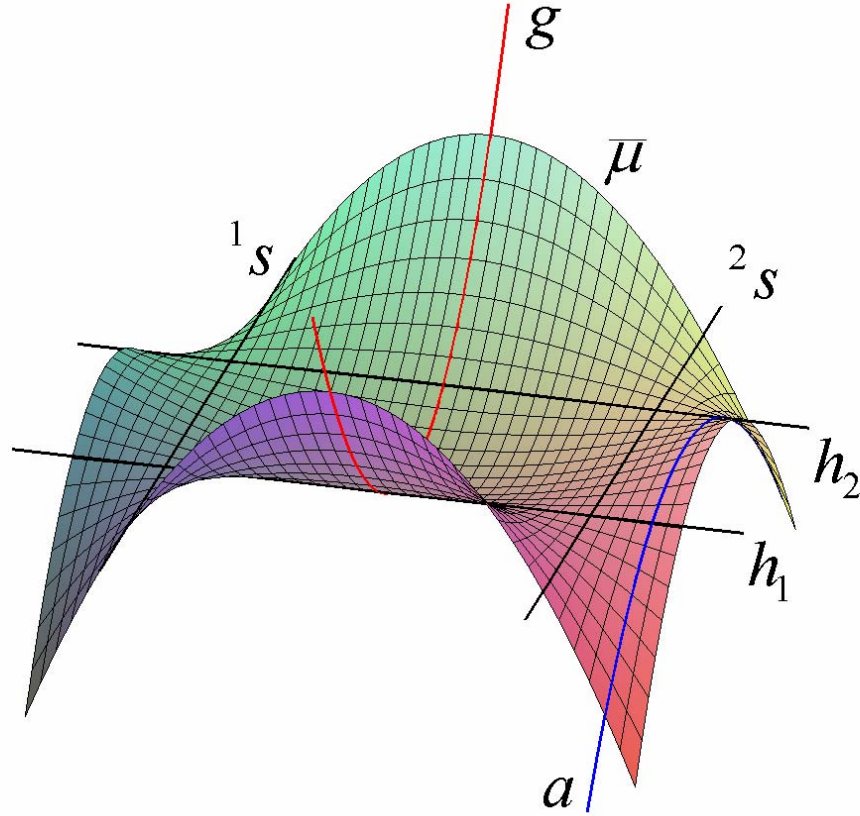
$$z = \frac{mp + nq}{p + q}$$

$$x = t$$

$${}^4s: y = \sqrt{\frac{2pq(m-n)}{p+q}}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

$$z = \frac{mp + nq}{p + q}$$

Podotkněme ještě, že ${}^3s = h_1$ a ${}^4s = h_2$. Protože plocha $\bar{\mu}$ obsahuje čtyři přímky, nejedná se již o Hacarovu plochu prvního druhu, která obsahuje nejvýše tři přímky. Ale ani toto ještě není Hacarova plocha druhého druhu. Plochu $\bar{\mu}$ nazýváme *parabolicko-parabolická klínová plocha*.



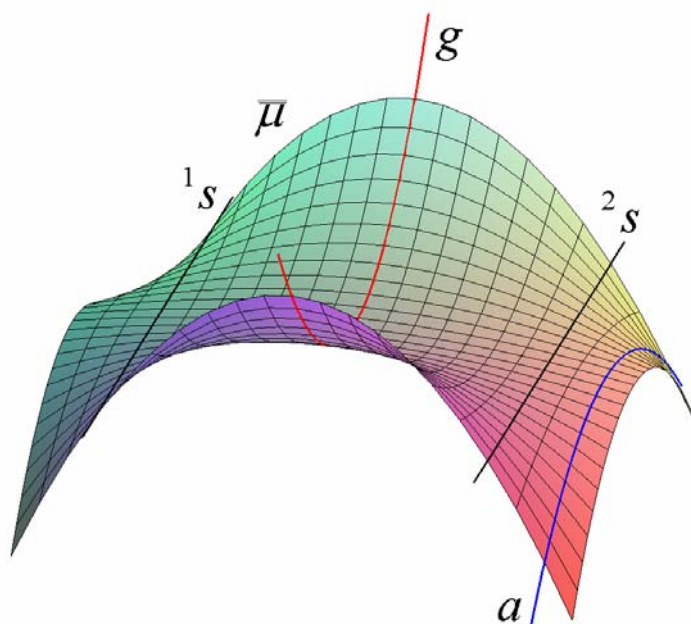
Obrázek 3.7. Parabolicko-parabolická klínová plocha

- 3) Protože parabola g je shora otevřená, parabola a zdola otevřená a $n > m$, jsou tvořícími křivkami h_{y_0} v rovinách $\beta_{y_0} : y = y_0$ paraboly s vrcholy $V_{y_0} = \left[0, y_0, \frac{1}{2q} y_0^2 + n \right]$, osou rovnoběžnou s osou z a procházející bodem $A_{y_0} = \left[c, y_0, -\frac{1}{2p} y_0^2 + m \right]$. Rovnice parabol h_{y_0} sestavíme jako v minulých případech:

$$h_{y_0} : (y = y_0) \cap \left[-\frac{2c^2 pq}{2pq(n-m) + y_0^2(p+q)} \left(z - \frac{1}{2q} y_0^2 - n \right) = x^2 \right].$$

Necháme-li probíhat y_0 celou reálnou osu získáme rovnici plochy:

$$\bar{\mu} : z = -\frac{p+q}{2c^2 pq} x^2 y^2 + \frac{m-n}{c^2} x^2 + \frac{1}{2q} y^2 + n. \quad (3.20)$$



Obrázek 3.8: Plocha zadaná dvěma parabolami s rozdílnou výškou vrcholů

Zkoumejme jako u předešlých dvou případů, jaké přímky tato třetí varianta obsahuje. Mějme opět bod $P = [p_1, p_2, p_3]$, kde p_1, p_2, p_3 jsou reálná čísla, v prostoru a vektor $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$, kde $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{R}$, ale zároveň $\vec{s} \neq (0, 0, 0)$. Ať bod P a směrový vektor \vec{s} určují přímku s . Spočtěme, za jakých podmínek, splňuje rovnici (3.20) plochy $\bar{\mu}$. Dosadíme za proměnné z parametrického vyjádření, jaké je v bodě (3.13), do rovnice (3.20). Označme-li opět pro jednoduchost $k_1 = -\frac{p+q}{2c^2 pq}$, $k_2 = \frac{m-n}{c^2}$, $k_3 = \frac{1}{2q}$, je výsledný polynom totožný s polynomem (3.14), protože rovnice (3.20) je stejná jako rovnice (3.12). Aby přímka s ležela na ploše $\bar{\mu}$, musí platit soustava rovnic, která je shodná se soustavou rovnic (3.15) až (3.19). Vyřešíme jednotlivé případy. Protože $k_1 < 0$, nastanou z (3.15) dva možné případy.

3a) V prvním případě $s_1 = 0$. Rovnice (3.16) platí. Po dosazení má rovnice (3.17) tvar $s_2^2(k_1 p_1^2 + k_3) = 0$. Potom buď:

3a1) $s_2 = 0$. Pak z rovnice (3.18) $s_3 = 0$ a směrový vektor přímky s je nulový (tedy neurčuje přímku).

3a2) Nebo $s_2 \neq 0$. Pak $p_1^2 = -\frac{k_3}{k_1}$ a z rovnice (3.18) $s_3 = 0$. Z (3.19) máme

$p_3 = n - \frac{k_2 k_2}{k_1}$. Přímky 1s , 2s plochy $\bar{\mu}$ jsou určeny např. body

$${}^1P = \left[-c \sqrt{\frac{p}{p+q}}, 0, \frac{mp+nq}{p+q} \right], \quad {}^2P = \left[c \sqrt{\frac{p}{p+q}}, 0, \frac{mp+nq}{p+q} \right]$$

a směrovými vektory ${}^1\vec{s} = (0, 1, 0) = {}^2\vec{s}$.

3b) Ve druhém případě $s_1 \neq 0$. Pak ale z (3.15) je $s_2 = 0$. Rovnice (3.16) je splněna. Po dosazení do (3.17) je $s_1^2(k_1 p_2^2 + k_2) = 0$. Protože $s_1 \neq 0$, pak $p_2^2 = -\frac{k_2}{k_1}$, ale $k_1 < 0$ a $k_2 < 0$, neplatí z této větve žádné reálné řešení.

Našli jsme Hacarovu plochu druhého druhu? Porovnejme rovnici (1.4) Hacarovy plochy prvního druhu a rovnici (3.20). Kvůli nejednoznačnosti označíme v každém případě konstanty c , n indexy.

$$v : z = -\frac{1}{2c_1^2 q} x^2 y^2 - \frac{n_1}{c_1^2} x^2 + \frac{1}{2q} y^2 + n_1, \quad (3.21)$$

$$\bar{\mu} : z = -\frac{p+q}{2c_2^2 pq} x^2 y^2 + \frac{m-n_2}{c_2^2} x^2 + \frac{1}{2q} y^2 + n_2. \quad (3.22)$$

Jak jsme ukázali, v rovině $x = c_2 \sqrt{\frac{p}{p+q}}$ leží přímka 2s plochy $\bar{\mu}$. V rovině

$x = c_1$ leží řídicí přímka a plochy v . Obě plochy obsahují právě dvě různé přímky (neuvažujeme-li táhlo). Kdyby byly rovnice (3.21), (3.22) rovnicemi téže plochy,

platilo $c_1 = c_2 \sqrt{\frac{p}{p+q}}$. Konstanta n_1 určuje vzdálenost vrcholu řídicí paraboly g

plochy v od roviny $z = 0$, v níž leží přímky plochy v . Vzdálenost vrcholu řídicím paraboly g plochy $\bar{\mu}$ od roviny $z = \frac{mp+n_2q}{p+q}$, v níž leží přímky plochy $\bar{\mu}$, je

$n_2 - \frac{mp+n_2q}{p+q}$. Kdyby se jednalo o stejné plochy, pak by $n_1 = -\frac{p}{p+q}(m-n_2)$.

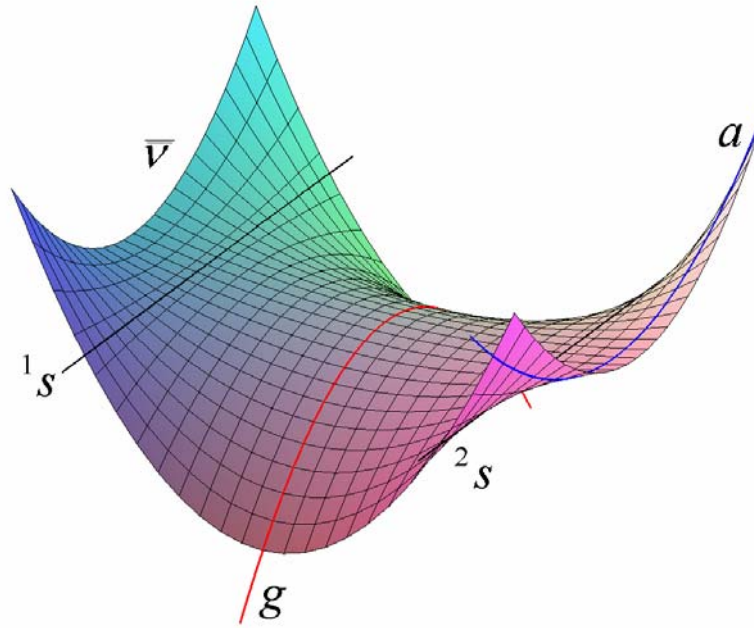
Navíc by plocha v byla posunuta o vektor $\left(0, 0, \frac{mp+n_2q}{p+q}\right)$. Zkusme za tyto hodnoty dosadit do rovnice (3.21).

$$v^* : z = -\frac{1}{2q \frac{c_2^2 p}{p+q}} x^2 y^2 - \frac{-\frac{p}{p+q}(m-n_2)}{\frac{p}{p+q} c_2^2} x^2 + \frac{1}{2q} y^2 + \left(n_2 - \frac{mp+n_2q}{p+q}\right) + \frac{mp+n_2q}{p+q}.$$

Rovnice (3.21), (3.22) určují tutéž plochu. Zdá se, že jsme nenašli vyjádření druhého typu Hacarovy plochy. Řešení je daleko prostší. Hacarova plocha prvního druhu se používá k zastřešování. Hacarova plocha druhého druhu se naopak využívá k podepírání. Obě tyto plochy mají stejné vyjádření rovnicí a právě dvě rovnoběžné různé přímky (neuvažujeme-li táhlo). Hacarova plocha druhého druhu je stejná jako Hacarova plocha prvního druhu, když ji zobrazíme souměrně podle roviny, v níž leží ony dvě rovnoběžky (v tomto případě podle $z = 0$). Podívejme se na výsledek. Rovnice Hacarovy plochy druhého druhu:

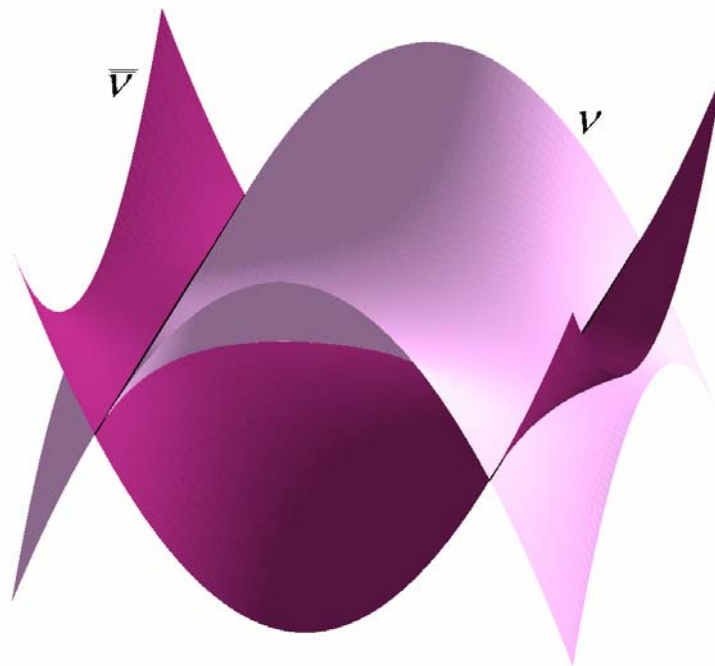
$$\bar{v} : z = \frac{1}{2cq} x^2 y^2 + \frac{n}{c} x^2 - \frac{1}{2q} y^2 - n,$$

když má řídicí parabola g rovnici $g : (x=0) \cap [2q(z+n) = y^2]$ a řídicí přímka $a : (x=c) \cap (z=0)$.



Obrázek 3.9: Hacarova plocha druhého druhu

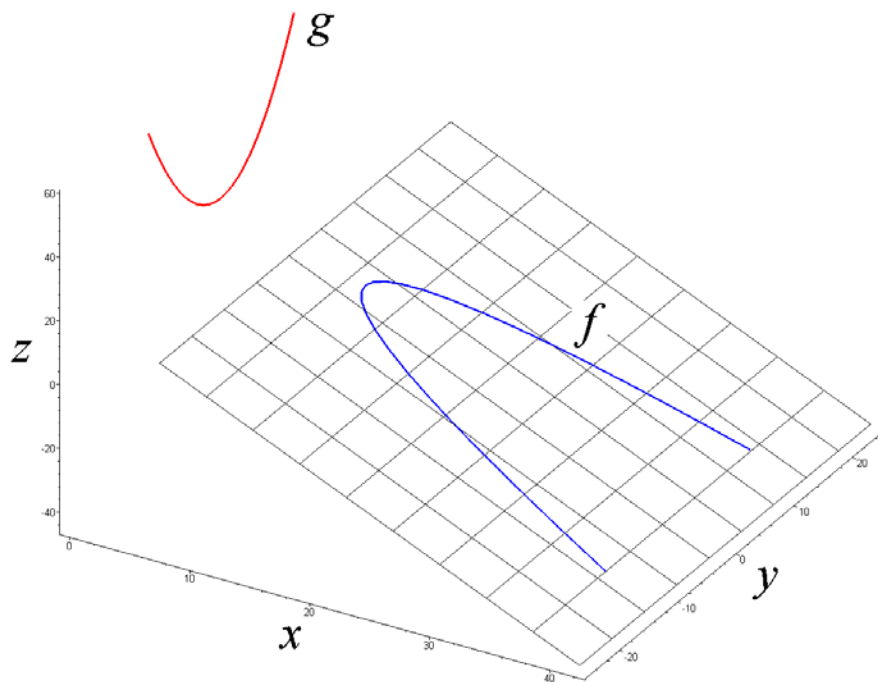
Pro srovnání ještě obě Hacarovy plochy.



Obrázek 3.10: Hacarova plocha prvního a druhého druhu

4. Hacarova plocha třetího druhu

Hacarovu plochu prvního a druhého druhu ještě doplníme o třetí druh. Při hledání Hacarovy plochy druhého druhu jsme vyčerpali možnosti, kdy jedna řídicí parabola byla v rovině $x = 0$ a druhá řídicí parabola v rovině $x = c$. Přejdeme nyní k ještě obecnějšímu případu. Mějme dánu řídicí parabolu $g : (x = 0) \cap [2p(z - n) = y^2]$, kde p, n jsou kladné reálné konstanty, a řídicí parabolu $f : (ax + cz - ac = 0) \cap [2q(x - m) = y^2]$, kde a je reálná konstanta a c, m, q jsou kladné reálné konstanty.



Obrázek 4.1: Zadání Hacarovy plochy třetího druhu

Tvořícími křivkami h_{y_0} plochy \bar{v} v rovinách $\beta_{y_0} : y = y_0$, kde $y_0 \in \mathbf{R}$, jsou přímky, pokud některé body parabol g, f mají v rovině β_{y_0} stejnou z -ovou souřadnici. To zjistíme, vyřešíme-li rovnici:

$$\frac{1}{2p} y_0^2 + n = -\frac{a}{2cq} y_0^2 + \frac{a}{c} (c - m). \quad (4.1)$$

(4.1) po úpravě:

$$y_0^2 (ap + cq) = 2pq(ac - am - cn). \quad (4.2)$$

Řešení rovnice (4.2) rozdělme do tří případů.

1) Buď $ap + cq < 0$. Aby rovnice (4.2) měla řešení je buď $m = c$ nebo $(0 < m < c) \wedge \left(a \leq \frac{cn}{c-m}\right)$ nebo $(0 < c < m) \wedge \left(a \geq \frac{cn}{c-m}\right)$. Pak

$y_0 = \pm \sqrt{\frac{2pq(ac - am - cn)}{ap + cq}}$ a tvořící přímky (ne nutně různé) jsou:

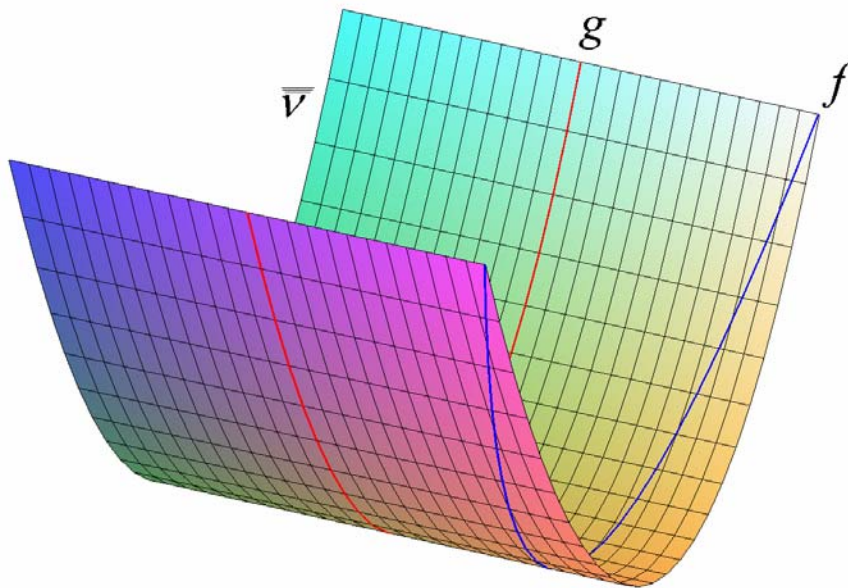
$$h_{\pm \sqrt{\frac{2pq(ac-am-cn)}{ap+cq}}} : \left[y = \pm \sqrt{\frac{2pq(ac-am-cn)}{ap+cq}} \right] \cap \left[z = \frac{a(np+cq-mq)}{ap+cq} \right]. \quad (4.3)$$

2) Nebo $ap + cq = 0$. Pak $(0 < c < m) \wedge \left(a = \frac{cn}{c-m}\right)$ a navíc $p = \frac{q(m-c)}{n}$. V tomto případě $y_0 \in \mathbf{R}$ a tvořící přímky jsou:

$$h_{y_0} : (y = y_0) \cap \left(z = \frac{n}{2q(m-c)} y_0^2 + n \right).$$

Plocha $\overline{\overline{V}}$ je plochou válcovou a má rovnici:

$$\overline{\overline{V}} : z = \frac{n}{2q(m-c)} y^2 + n.$$



Obrázek 4.2: Hacarova plocha třetího druhu jako plocha válcová

Poznámka 2: Otázkou zůstává, zda je možné považovat parabolickou válcovou plochu za Hacarovu plochu. Definicí Hacarovy plochy to však neodporuje a my ji v tomto případě považujeme za jeden z typů Hacarovy plochy třetího druhu.

3) Nebo $ap + cq > 0$. Pak buď $(0 < m < c) \wedge \left(a \geq \frac{cn}{c-m}\right)$ nebo

$(0 < c < m) \wedge \left(a \leq \frac{cn}{c-m}\right)$. Na Hacarově ploše třetího druhu leží přímky s rovnicemi (4.3).

V ostatních případech necht' jsou tvořícími křivkami h_{y_0} paraboly s vrcholy $V_{y_0} = \left[0, y_0, \frac{1}{2p} y_0^2 + n \right]$ na řídicí parabole g , osou rovnoběžnou se souřadnicovou osou

z a procházející bodem $A_{y_0} = \left[\frac{1}{2q} y_0^2 + m, y_0, -\frac{a}{2cq} y_0^2 + \frac{a}{c}(c-m) \right]$ řídicí paraboly f .

Paraboly h_{y_0} mají rovnice:

$$h_{y_0} : (y = y_0) \cap \left\{ -\frac{cp(y_0^2 + 2mq)^2}{2q[y_0^2(ap + cq) - 2pq(ac - am - cn)]} \left(z - \frac{1}{2p} y_0^2 - n \right) = x^2 \right\}.$$

V takovém případě je rovnice Hacarovy plochy třetího druhu $\overline{\overline{v}}$:

$$\overline{\overline{v}} : z = -\frac{2q(ap + cq)}{cp} \cdot \frac{x^2 y^2}{(y^2 + 2mq)^2} + \frac{4q^2(ac - am - cn)}{c} \cdot \frac{x^2}{(y^2 + 2mq)^2} + \frac{1}{2p} y^2 + n. \quad (4.4)$$

Ještě ověříme, že rovnice (4.4) je splněna i v případě, kdy tvořícími křivkami jsou přímky. Dosazením za $y^2 = \frac{2pq(ac - am - cn)}{ap + cq}$ do (4.4):

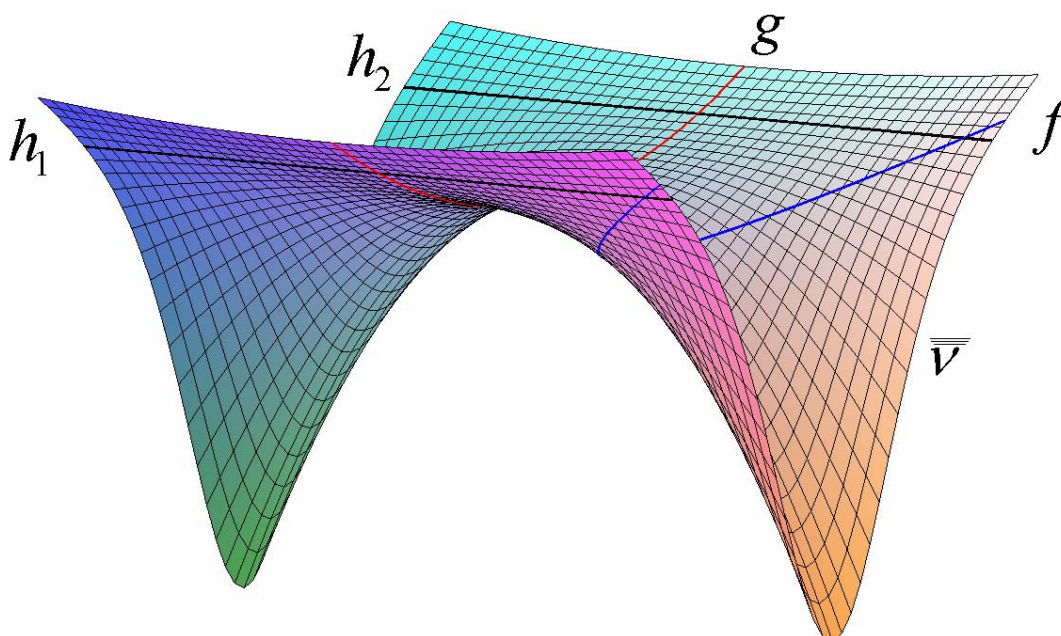
$$z = \frac{a(cq - mq + np)}{ap + cq},$$

což odpovídá rovnici přímky z (4.3).

Ke každé možnosti z 1) a z 3) Hacarovy plochy třetího druhu si nyní prohlédneme obrázek.

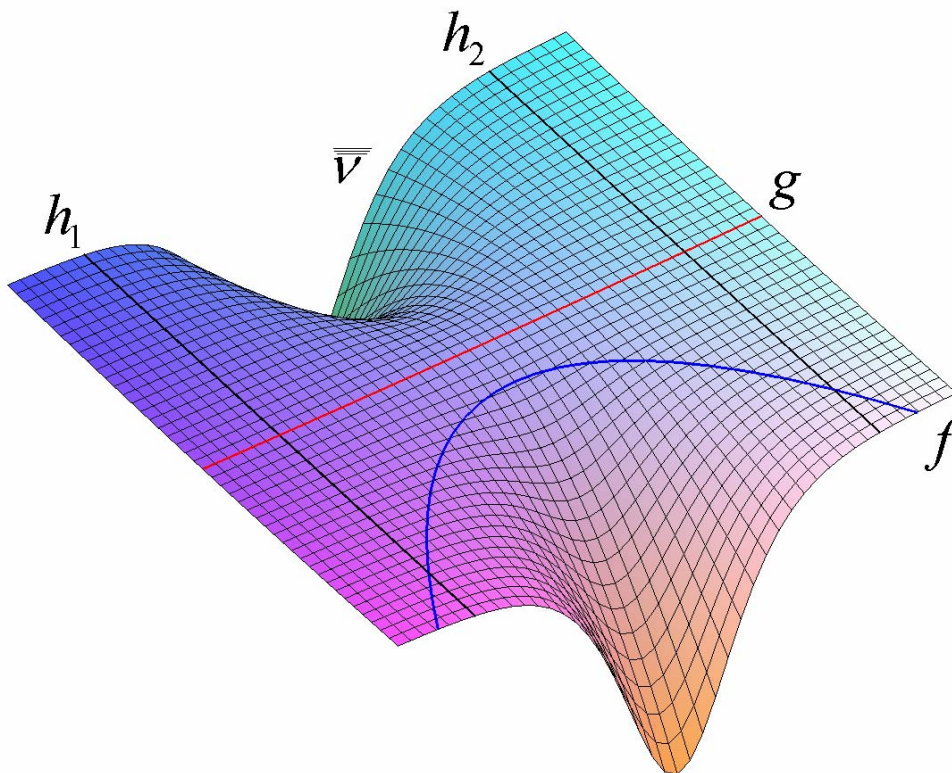
1) $ap + cq < 0$ a navíc:

1a) $m = c$,



Obrázek 4.3: Hacarova plocha třetího druhu – první typ

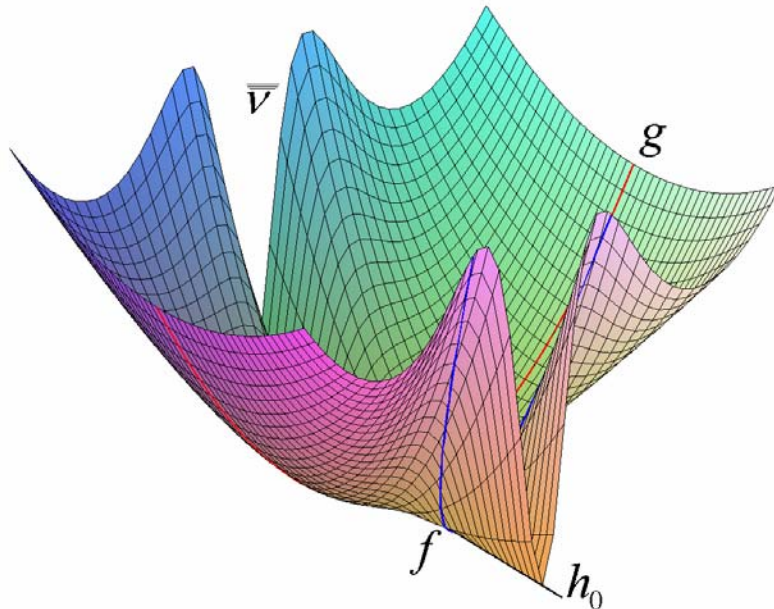
1b) $0 < m < c$ a zároveň $a \leq \frac{cn}{c-m}$. Zde se dá ještě ukázat, že rovnost $a = \frac{cn}{c-m}$ nenastává, protože zároveň platí, že $a < -\frac{q}{p}c$, tedy $np + q(c-m) < 0$, což vede ke sporu. V dalším obrázku je tedy voleno $a < \frac{cn}{c-m}$.



Obrázek 4.4: Hacırova plocha třetího druhu – druhý typ

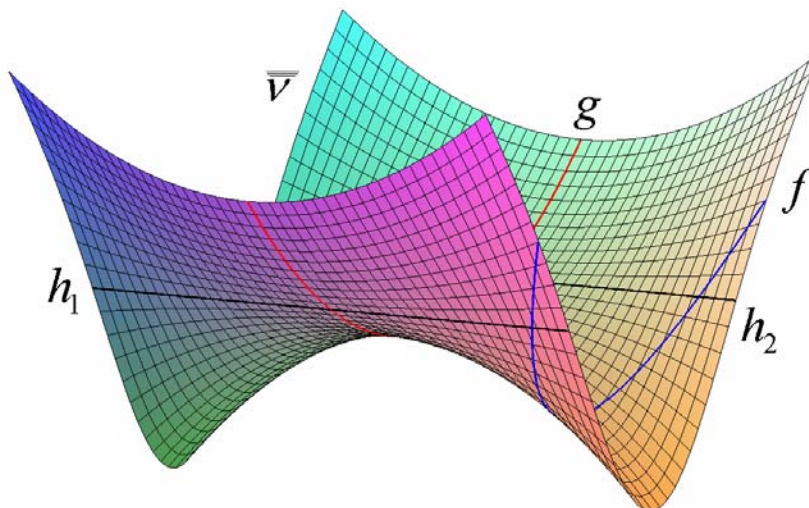
1c) $0 < c < m$ a zároveň $a \geq \frac{cn}{c-m}$. Ještě rozdělme případy, kdy:

1c1) $a = \frac{cn}{c-m}$,



Obrázek 4.5: Haccarova plocha třetího druhu – třetí typ

1c2) nebo $a > \frac{cn}{c-m}$.

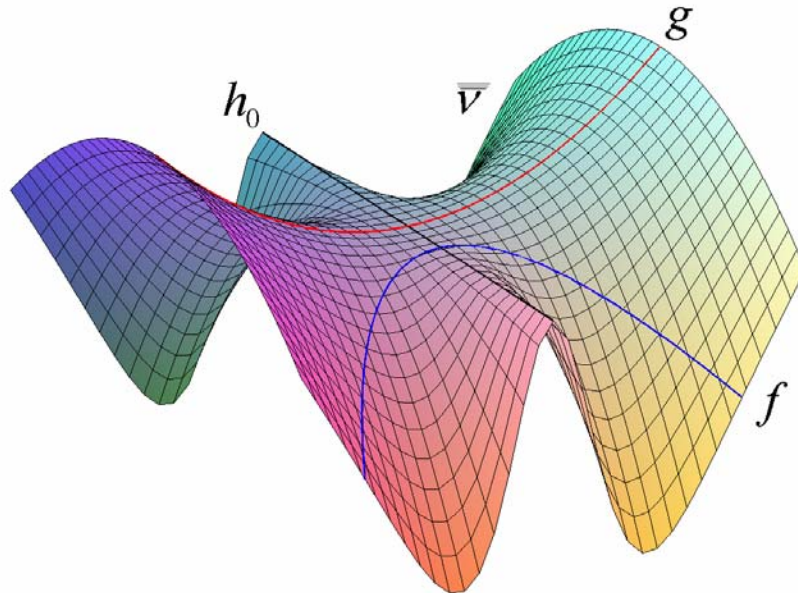


Obrázek 4.6: Haccarova plocha třetího druhu – čtvrtý typ

3) $ap + cq > 0$ a navíc:

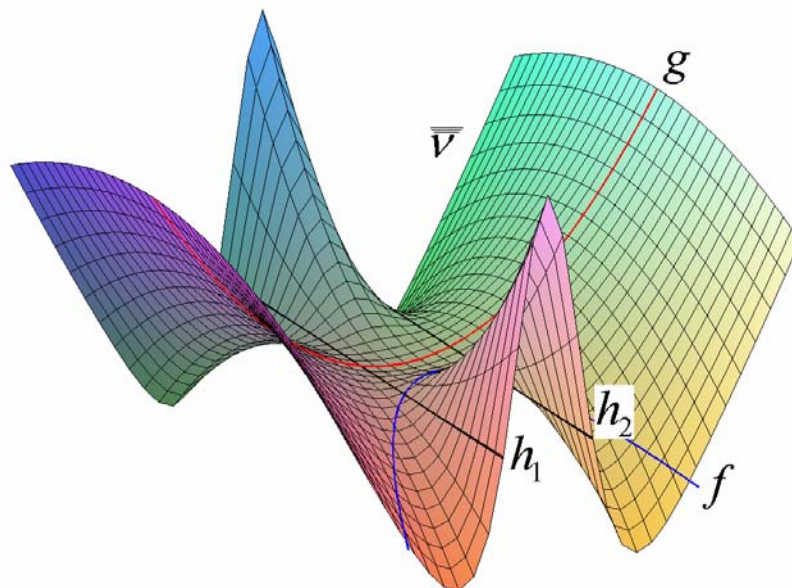
3a) $0 < m < c$ a zároveň $a \geq \frac{cn}{c-m}$. Ukažme opět obrázky obou zajímavých možností. Buď:

3a1) $a = \frac{cn}{c-m}$,



Obrázek 4.7: Hacarova plocha třetího druhu – pátý typ

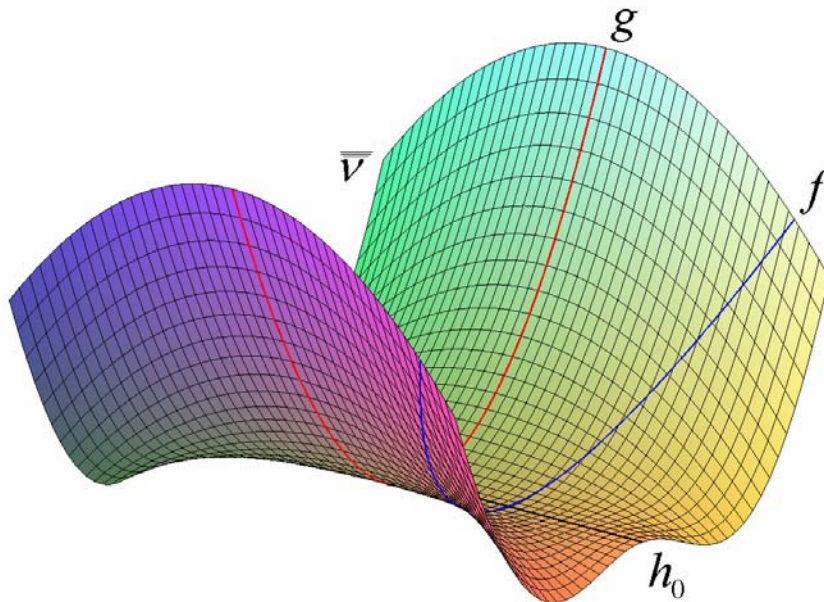
3a2) nebo $a > \frac{cn}{c-m}$.



Obrázek 4.8: Hacarova plocha třetího druhu – šestý typ

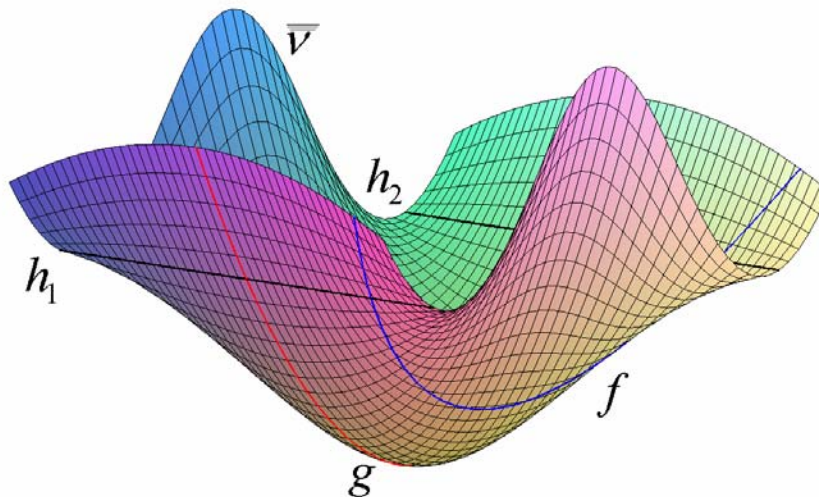
3b) $0 < c < m$ a zároveň $a \leq \frac{cn}{c-m}$. Bud':

$$3b1) a = \frac{cn}{c-m},$$



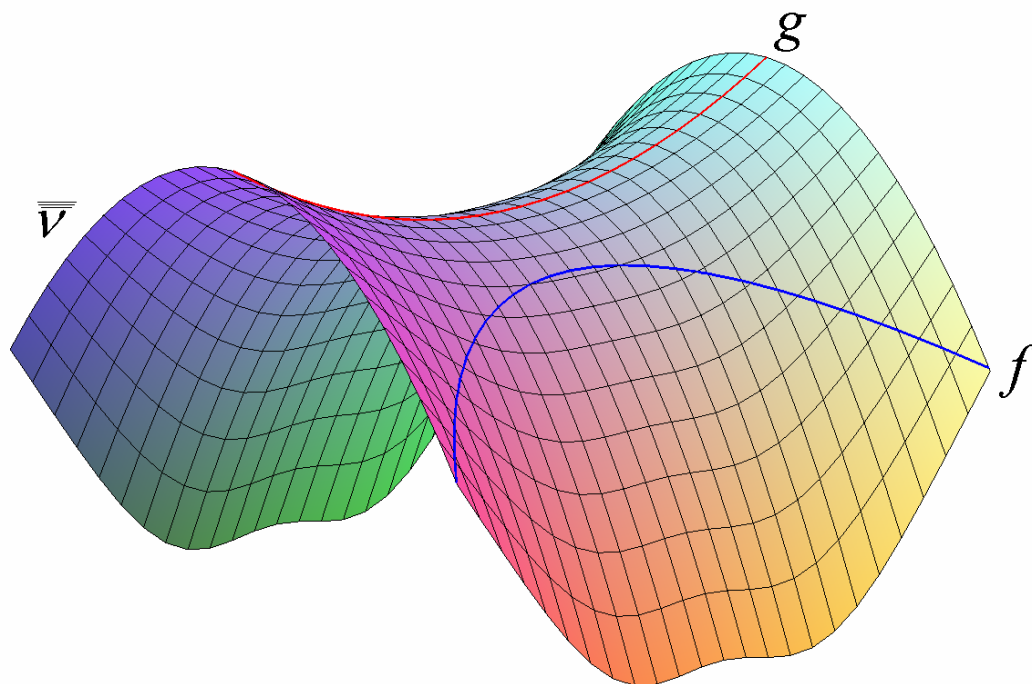
Obrázek 4.9: Hacarova plocha třetího druhu – sedmý typ

3b2) nebo $a < \frac{cn}{c-m}$.



Obrázek 4.10: Hacarova plocha třetího druhu – osmý typ

Nejklasičtější vyobrazení Hacarovy plochy třetího druhu představuje následující obrázek. Oproti předchozím plochám je mnohem „klidnější“.



Obrázek 4.11: Hacarova plocha třetího druhu – devátý typ

5. Klínové plochy

Již ve druhé kapitole jsme definovali klínové plochy. Nyní je načase uvést více příkladů. Ve druhé kapitole jsme se setkali s Hacarovou plochou prvního druhu a ve třetí kapitole s parabolicko-parabolickou klínovou plochou. Obě patří mezi klínové plochy podle naší definice 1.

Vlastnosti klínové plochy parabolicko-parabolické jsme poměrně podrobně vyšetřili ve třetí kapitole. Proto jen zopakujeme její rovnici (3.12) a uvedeme její definici tak, aby odpovídala definici 1. Klínovou plochu parabolicko-parabolickou $\bar{\mu}$ jsme zavedli pomocí řídicí paraboly g s rovnicí $(x=0) \cap [2q(z-n)=y^2]$, kde q je kladná reálná konstanta a n je reálná konstanta, a řídicí paraboly $a: (x=c) \cap [-2p(z-m)=y^2]$, kde c, q jsou kladné reálné konstanty a m je reálná konstanta, pro kterou platí $n < m$. Odvodili jsme rovnici plochy:

$$\bar{\mu}: z = -\frac{p+q}{2c^2 pq} x^2 y^2 + \frac{m-n}{c^2} x^2 + \frac{1}{2q} y^2 + n. \quad (3.12)$$

Zkusme získat rovnici křivky h na ploše $\bar{\mu}$, která leží v rovině $\beta: y=0$. Její rovnice je jednoduchá a je to rovnice konvexní paraboly:

$$h: (y=0) \cap \left[\frac{c^2}{m-n} (z-n) = x^2 \right].$$

Křivky g, h mají společný průsečík $[0,0,n]$ na ose z . Ještě zbývá ověřit afinní vztah mezi řezy. Zde se odvoláme na postup z kapitoly 2, kde jsme ověřovali tento vztah u Hacarovy plochy prvního druhu, a na konstrukci tvořících parabol této plochy $\bar{\mu}$.

Ještě bych ráda upozornila čtenáře, že se v literatuře setkají s odlišným vyjádřením klínové plochy parabolicko-parabolické. Řídicí parabola g se zpravidla uvádí v konkávním tvaru $(x=0) \cap [-2q(z-n)=y^2]$ a řídicí parabola h taktéž v konkávním tvaru $(y=0) \cap \left[-\frac{c^2}{m-n} (z-n) = x^2 \right]$. Když se totiž díváme na rovnici plochy $\bar{\mu}$ jako

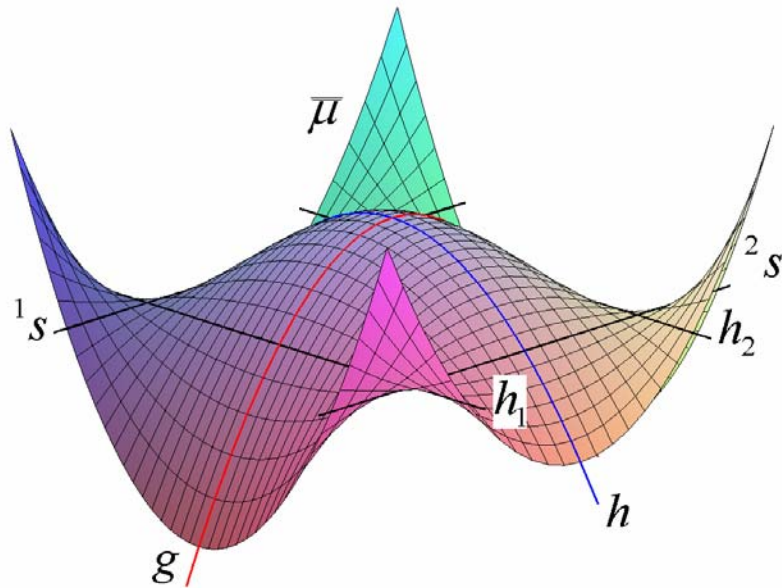
na funkci dvou proměnných, která zobrazuje kartézský součin množiny reálných čísel $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ do \mathbf{R} , pak místo lokálního minima v bodě $[x_0, y_0] = [0,0]$ funkce dvou

proměnných $\bar{f}(x,y) = -\frac{p+q}{2c^2 pq} x^2 y^2 + \frac{m-n}{c^2} x^2 + \frac{1}{2q} y^2 + n$ získáme lokální maximum

(pro stavaře je důležitější „kopeček“ než „dolíček“). Můžeme použít například souměrnost podle roviny $z=0$ a přejdeme tak k vyjádření:

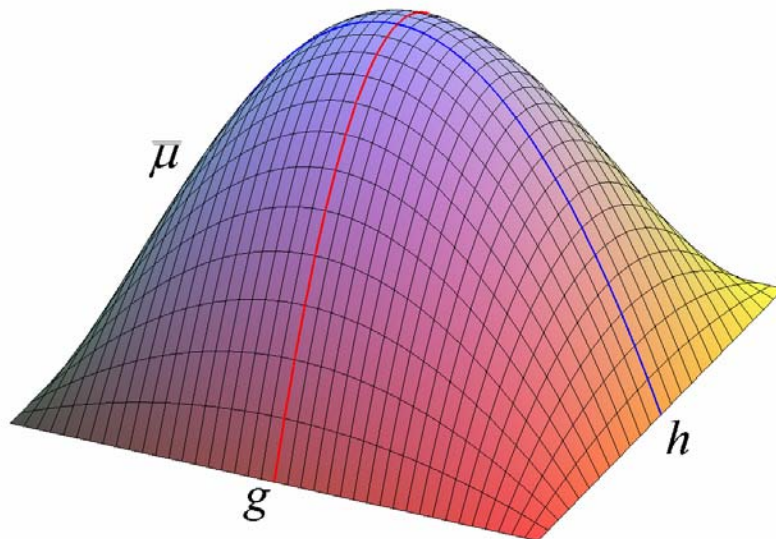
$$\bar{\mu}: z = \frac{p+q}{2c^2 pq} x^2 y^2 - \frac{m-n}{c^2} x^2 - \frac{1}{2q} y^2 - n.$$

Značení přímk v následujícím obrázku odpovídají značení z obrázku 3.7.



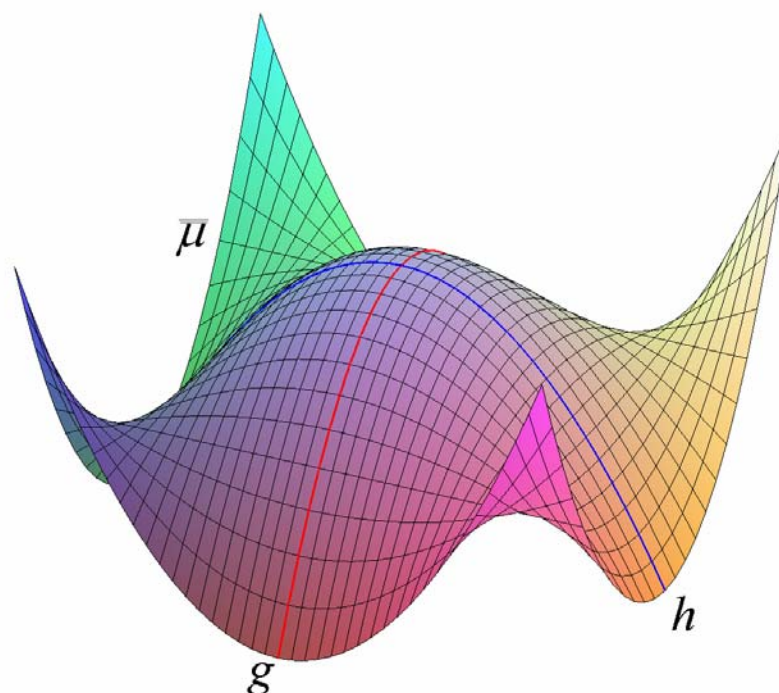
Obrázek 5.1: Parabolicko-parabolická klínová plocha

Stavebně využívanou částí je část plochy $\bar{\mu}$ ohraničená úsečkami. Představme si, že podél úseček plocha nasedá na obvodové zdivo nějaké budovy s obdélníkovým půdorysem. Jelikož oba systémy křivek na ploše tvoří paraboly, tečny k těmto parabolám v bodech dotyku s obvodovým zdivem nejsou v řádném případě svislé. Setkáme se však s případem elipticko-eliptické klínové plochy, u níž jsou tečné roviny v bodech dotyku s obvodovým zdivem svislé, a proto i taková plocha nasedá na zdivo „hladce“. U parabolicko-parabolické klínové plochy uvidíme jasný předěl mezi zdivem a plochou střechy.



Obrázek 5.2: Parabolicko-parabolická klínová plocha (stavebně používaná část)

Ještě je zajímavý pohled na tuto plochu nad větším dvourozměrným intervalem. Stavebně je však těžko uplatnitelný.



Obrázek 5.3: Parabolicko-parabolická klínová plocha - celek

Poznámka 3: Je patrné, že jméno klínové plochy, např. parabolicko-parabolická, je tvořeno přídavnými jmény podle typů křivek, které patří do jednoho a do druhého systému navzájem afinních křivek. Píší se s pomlčkou, která naznačuje, že obě přídavná jména jsou rovnocenná, protože i systémy křivek mají tytéž vlastnosti.

Seznámíme se s další klínovou plochou. Tou bude elipticko-eliptická klínová plocha. Jak název napovídá, tvořícími křivkami jsou elipsa g s rovnicí $(x=0) \cap (b^2 y^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2)$, kde a, b jsou kladné reálné konstanty, a elipsa h s rovnicí $(y=0) \cap (b^2 x^2 + d^2 z^2 = b^2 d^2)$, kde d je kladná reálná konstanta. Plochu konstruujeme podobně jako parabolicko-parabolickou. Zvolíme rovinu $\beta_0 : y = y_0$. Protože v tomto případě je křivka g uzavřená a definovaná pouze pro $y \in (-a, a)$, nechme probíhat y_0 interval $(-a, a)$. Aby křivky v rovinách β_0 byly navzájem afinní s elipsou h , je nutné, aby to byly též elipsy, měly střed na souřadnicové ose y , poloosu v rovině $z=0$ rovnou d a svůj vrchol na elipse g . Nyní je patrné, proč jsme vyloučili body $\pm a$. V obou případech nedostaneme elipsu, nýbrž úsečku. Můžeme ji považovat za jakýsi krajní „zdegenerovaný“ případ elipsy. Rovnice tvořících křivek h_{y_0} v rovinách β_0 :

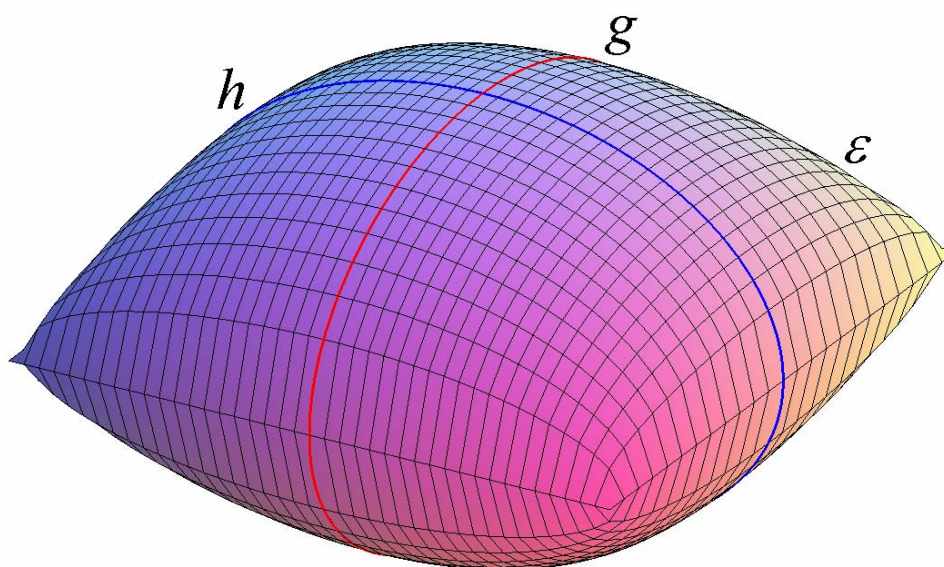
$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{a^2 z^2}{b^2(a^2 - y_0^2)} = 1.$$

Na intervalu $(-a, a)$ získáme implicitní rovnici plochy:

$$\varepsilon: z^2 = \frac{b^2}{a^2 d^2} x^2 y^2 - \frac{b^2}{d^2} x^2 - \frac{b^2}{a^2} y^2 + b^2. \quad (5.1)$$

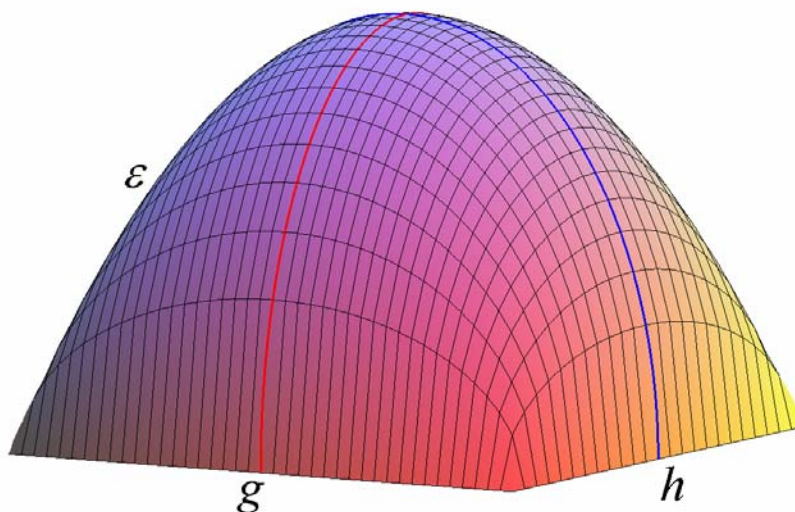
Explicitní rovnice plochy lze napsat, jestliže se omezíme vždy na jeden poloprostor ohraničený rovinou $z = 0$.

Ještě dořešme speciální případy, kdy $y_0 \in \{\pm a\}$. Když do rovnice (5.1) dosadíme za y^2 hodnotu a^2 , získáme rovnici $z = 0$, to by ale odpovídalo rovnicím úseček, které pro dané hodnoty y leží na ploše. Rovnice (5.1) tedy odpovídá rovnici celé plochy.



Obrázek 5.4: Elipticko-eliptická klínová plocha

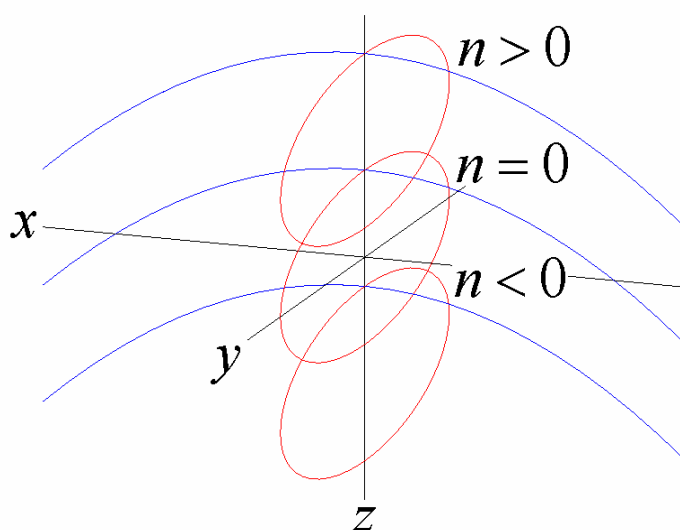
Stavebně je využitelná pouze „vrchní“ část plochy:



Obrázek 5.5: Elipticko-eliptická klínová plocha (stavebně používaná část)

Dále se seznámíme se třemi různými klínovými plochami téhož názvu. Jedná se o elipticko-parabolické klínové plochy. Všechny tři plochy obsahují jeden systém navzájem afinních elips a druhý systém navzájem afinních parabol. Vzájemná poloha řídící elipsy a řídící paraboly je ve všech třech případech stejná. Liší se pouze vzájemnou polohou křivek vůči souřadným rovinám, jimiž je nepřímo určená afinita mezi křivkami jednoho i druhého systému.

Mějme zadanou řídící elipsu g s rovnicí $(x=0) \cap [b^2 y^2 + a^2(z-n)^2 = a^2 b^2]$, kde a, b jsou kladné reálné konstanty a n je reálná konstanta, a řídící parabolu h s rovnicí $(y=0) \cap [-2p(z-n-b) = x^2]$, kde p je kladná reálná konstanta. Rovnice jsou voleny tak, že se křivky g, h protínají na ose z ve svých vrcholech. Volbou čísla n můžeme docílit všech vzájemných poloh skupiny křivek g, h vzhledem k souřadné rovině $z=0$.



Obrázek 5.6: Jednotlivé případy vzájemné polohy řídících křivek elipticko-parabolické klínové plochy a souřadné roviny

- 1) Řešme nejprve úlohu, kdy $n \geq 0$. Paraboly v rovinách $\beta_0 : y = y_0$, kde $y_0 \in \langle -a, a \rangle$, mají rovnice:

$$h_{y_0} : (y = y_0) \cap \left[2k \left(z - n \mp b \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{a^2}} \right) = x^2 \right]. \quad (5.2)$$

Ještě zbývá určit nenulovou reálnou konstantu k v (5.2). Protože předpokládáme $n \geq 0$ a protože parabola h je konkávní (protne souřadnicovou osu x), víme, že na parabolách h_{y_0} díky afinní závislosti leží bod $[\sqrt{2p(n+b)}, y_0, 0]$. Otázkou je zda může nastat situace, kdy vrchol nějaké uvažované paraboly h_{y_0} leží ve stejné výšce (má stejnou z -ovou souřadnici) jako bod $[\sqrt{2p(n+b)}, y_0, 0]$. Odpověď je ano:

vrchol paraboly h_{y_0} , když $0 \leq n \leq b$ a $|y_0| = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2}$. Předchozí rovnost ještě

můžeme upravit do tvaru $|y_0| = a \sqrt{1 - \frac{n^2}{b^2}}$, z něhož je lépe patrné, že $y_0 \in \langle -a, a \rangle$.

Protože paraboly h_{y_0} mají své osy rovnoběžné se souřadnicovou osou z , potom v případě, že má parabola svůj vrchol ve stejné výši jako její další bod není již parabolou, ale přímkou.

1a) Pokud $0 < b < n$, pak pro všechna $y_0 \in \langle -a, a \rangle$ vyjdou paraboly dvě a pro $y_0 \in \{\pm a\}$ vyjde jedna parabola vyhovující rovnici (5.2).

1b) Když $0 \leq n \leq b$, pak pro všechna $y_0 \in \langle -a, a \rangle \setminus \left\{ \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2} \right\}$ získáme dvě

paraboly, pro $y_0 \in \{\pm a\} \setminus \left\{ \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2} \right\}$ získáme jedinou parabolu, pro

$y_0 \in \langle -a, a \rangle \cap \left\{ \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2} \right\}$ získáme jednu parabolu a jednu přímku a pro

$y_0 \in \{\pm a\} \cap \left\{ \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2} \right\}$ jedinou přímku (uvědomme si, že tato situace nastane pouze, když $n = 0$).

1a) Pro všechny případy y_0 , když $0 < b < n$ a $y_0 \in \langle -a, a \rangle$ nebo když $0 \leq n \leq b$

a $y_0 \in \langle -a, a \rangle \setminus \left\{ \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2} \right\}$, je hodnota konstanty k :

$$k = -\frac{ap(n+b)}{an \pm b\sqrt{a^2 - y_0^2}}. \quad (5.3)$$

Pro snadnější komunikaci mějme rovnice dvě:

$$k = -\frac{ap(n+b)}{an + b\sqrt{a^2 - y_0^2}}, \quad (5.4)$$

$$k = -\frac{ap(n+b)}{an - b\sqrt{a^2 - y_0^2}}. \quad (5.5)$$

1b) Pro $0 \leq n \leq b$ a $y_0 \in \langle -a, a \rangle \cap \left\{ \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2} \right\}$ je hodnota konstanty k

(dosadíme za $y_0^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} n^2$ do rovnice (5.4)):

$$k = -\frac{p(n+b)}{2n}. \quad (5.6)$$

1c) Pro $0 \leq n \leq b$ a $y_0 \in \left\{ \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2} \right\}$ je rovnice tvořící přímky plochy:

$$h_{\pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2}} : \left(y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2} \right) \cap (z = 0). \quad (5.7)$$

Rovnice plochy po úpravách je:

$$\varepsilon_n : z = -\frac{an \pm b\sqrt{a^2 - y^2}}{2ap(n+b)}x^2 \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2} + n. \quad (5.8)$$

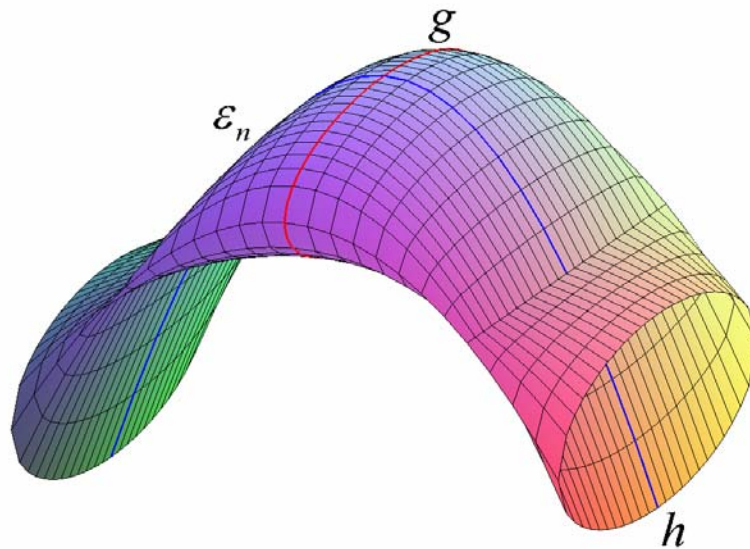
Zbývá nám dořešit jediný případ, kdy $0 \leq n \leq b$ a zároveň $y \in \left\{ \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - n^2} \right\}$.

Zkusme za tyto hodnoty y_0 dosadit do rovnice (5.8). Dostaneme rovnici:

$$z = (n \pm n) - \frac{n \pm n}{2p(n+b)}x^2 \quad (5.9)$$

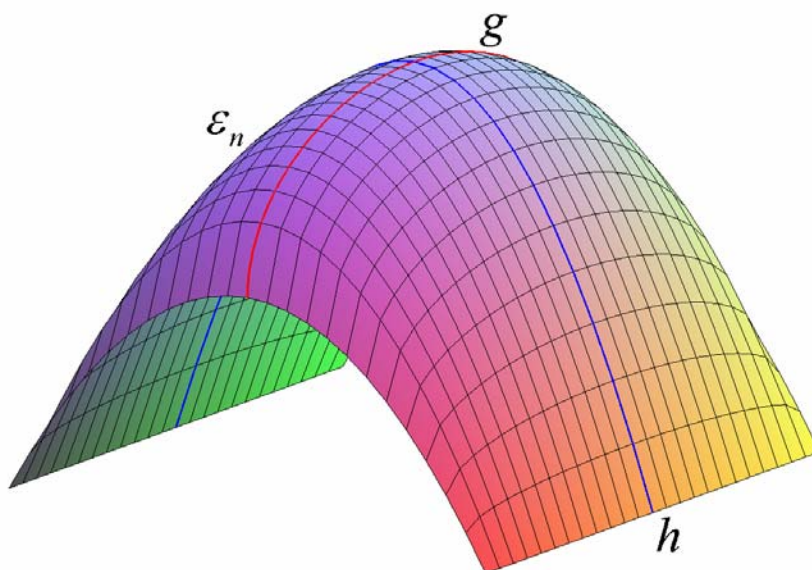
přímky (5.7) na ploše ε_n , pokud $n = 0$ nebo pokud si vybereme v (5.9) znaménka mínus, kde je výběr možný. Naše volba při výběru znaménka je správná, protože při odvozování hodnoty konstanty k pro tvořící parabolu v (5.6) jsme dosazovali do (5.4) (v (5.3) „horní“ znaménko). Získali jsme tak tvořící parabolu plochy. „Dolním“ znaménkům (5.8) odpovídá ta část plochy, která může obsahovat přímky, pokud $0 \leq n \leq b$. Pro všechna $y \in \langle -a, a \rangle$ a pro všechna $x \in \mathbf{R}$ vyhovuje rovnice (5.8) elipticko-parabolické klínové ploše.

Nejprve se podívejme na elipticko-eliptickou klínovou plochu pro $n > 0$.



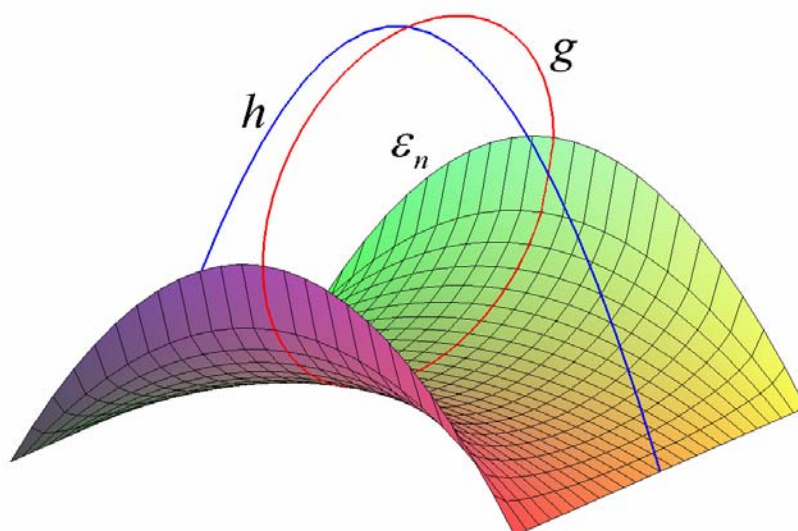
Obrázek 5.7: Elipticko-parabolická klínová plocha – první typ

Její stavebně využitelná část je ohraničena dvěma úsečkami a dvěma totožnými částmi paraboly. Následující obrázek 5.8 je pro hodnoty y z intervalu $\langle -a, a \rangle$, $|x| \leq \sqrt{2p(n+b)}$ a v rovnici (5.8) jsem uvažovala kladná znaménka, kde byla možná volba. Kdybychom uvažovali interval $\langle c, d \rangle \subset \langle -a, a \rangle$, kde $c < d$ a c, d jsou reálná čísla, byla by plocha ohraničena dvěma úsečkami a dvěma částmi, ne nutně shodných, parabol.



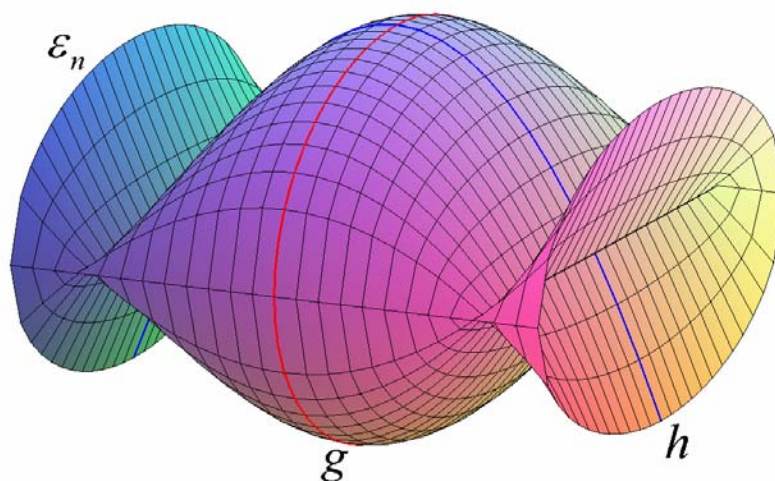
Obrázek 5.8: Elipticko-parabolická klínová plocha – první typ (stavebně využitelná část)

Ještě si prohlédněme jinou část tohoto typu plochy. Ať $y \in \langle -a, a \rangle$, $|x| \leq \sqrt{2p(n+b)}$ a v rovnici (5.8) volme záporná znaménka, kde máme možnost výběru. Na obrázku 5.9 uvidíme, že i tato část elipticko-parabolické klínové plochy je poměrně vhodnou stavebně využitelnou plochou, která je velmi podobná Hacarově ploše prvního druhu. Uvědomme si, že Hacarova plocha prvního druhu obsahuje dva systémy navzájem afinních parabol, ale plocha z obrázku 5.9 obsahuje jeden systém vzájemně afinních parabol a druhý systém vzájemně afinních elips. Při bližším pohledu na obrázek 5.9 je tento rozdíl patrný.



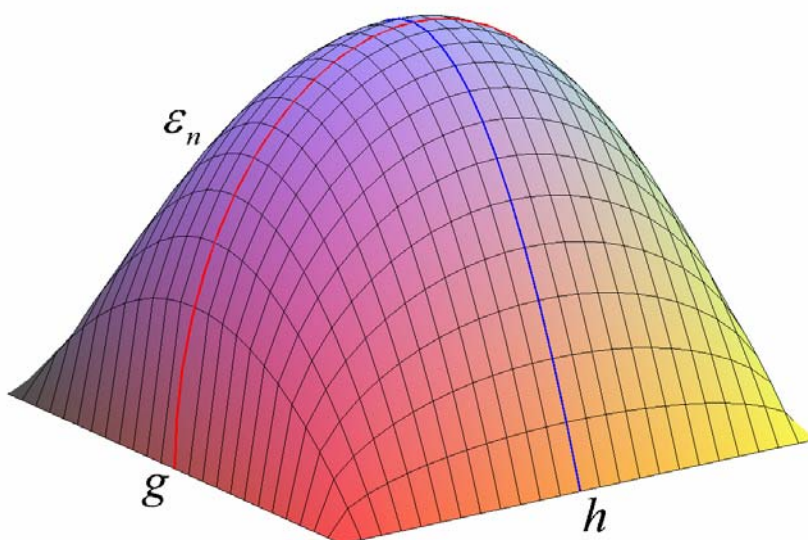
Obrázek 5.9: Elipticko-parabolická klínová plocha – první typ (další její stavebně využitelná část)

Nyní se podívejme na plochu ε_n , když $n = 0$.



Obrázek 5.10: Elipticko-parabolická klínová plocha – druhý typ

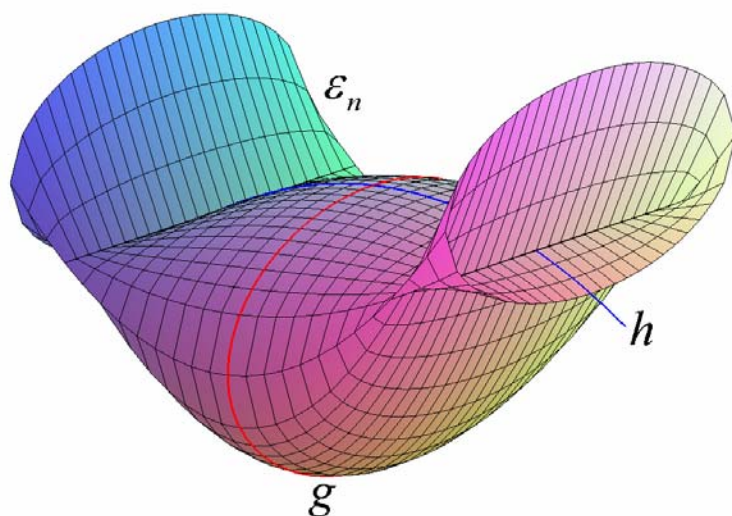
Stavebně využitelná část plochy ε_n z obrázku 5.10 je zobrazena pro hodnoty y z intervalu $\langle -a, a \rangle$ a $|x| \leq \sqrt{2bp}$, tudíž je plocha ohraničena čtyřmi úsečkami. V rovnici (5.8) jsem opět uvažovala kladná znaménka, kde je možné si vybrat. Zde nemá smysl, jako u obrázku 5.9 uvažovat v rovnici (5.8) záporná znaménka, kde máme možnost výběru, protože tento druhý typ elipticko-parabolické klínové plochy je souměrný podle souřadnicové roviny $z = 0$. Dostali bychom tedy stejný obrázek, ale symetricky překlopený podle zmíněné roviny.



Obrázek 5.11: Elipticko-parabolická klínová plocha – druhý typ (stavebně využitelná část)

- 2) Úloha, kdy $n < 0$ je poněkud složitější, protože řídicí parabola h neprotíná vždy souřadnicovou osu x , a my nemůžeme těchto výhodných průsečíků použít k rychlému sestavení rovnice plochy. Rozlišíme tedy tři případy.

- 2a) Když $n + b > 0$ můžeme využít rovnici (5.8), protože za tohoto předpokladu řídící parabola h protne souřadnicovou osu x ve dvou různých bodech a předchozí úvaha o afinním vztahu mezi parabolami je správná.



Obrázek 5.12: Elipticko-parabolická klínová plocha – třetí typ

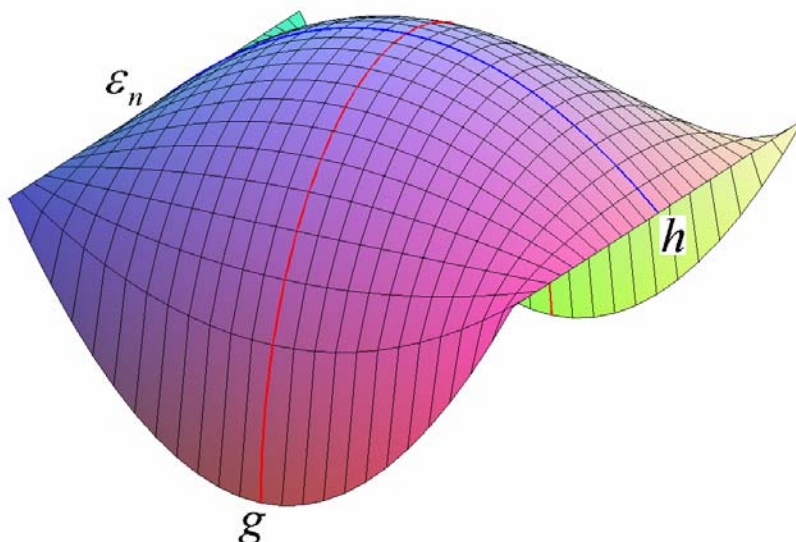
Na první pohled nám může třetí typ elipticko-parabolické klínové plochy připomínat typ první. Zaměříme-li se na obrázky 5.7, 5.8, 5.9 vidíme, že je systém vzájemně afinních parabol prvního typu tvořen pouze více či méně otevřenými konkávními parabolami. Když si pozorně prohlédneme obrázek 5.12, zjistíme, že systém afinních parabol plochy druhého typu obsahuje jak konkávní, tak konvexní paraboly. Nehádejme však, protože obrázky jsou vykresleny pro konkrétní čísla, a ověřme náš odhad výpočtem. Aby byly všechny paraboly na ploše z obrázku 5.7 konkávní, pak je konstanta k z vyjádření (5.3) stále záporná. Protože $ap(n+b) > 0$, pak stačí, aby

$n > \mp b \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{a^2}}$. Druhá nerovnost platí pro všechna $y \in \langle -a, a \rangle$, tedy speciálně

platí, když $y_0 = 0$ a hodnota odmocniny je maximální. Tedy paraboly na prvním typu elipticko-parabolické klínové ploše jsou konkávní pouze za předpokladu, že $n > \mp b$. Když uvažujeme první typ plochy a v rovnici (5.8) kladná znaménka, kde máme na výběr, jsou všechny paraboly konkávní. Předpokládáme-li v rovnici (5.8) záporná znaménka, kde máme na výběr, pak jsou všechny paraboly konkávní právě tehdy, když $n > b$. To byl odstrašující příklad, jak může konkrétní obrázek vést k mylným obecným závěrům.

Pokusme se najít nějakou stavebně využitelnou část třetího typu elipticko-parabolické klínové plochy.

2a1) Uvažujme nejprve $y \in \langle -a, a \rangle$, $|x| \leq \sqrt{2p(n+b)}$ a v rovnici (5.8) kladná znaménka, kde je možné si vybrat. Na obrázku 5.13 uvidíme, že tato část plochy by nebyla pro stavaře příliš praktická, nicméně je přesto ohraničena dvěma úsečkami a dvěma shodnými částmi paraboly.



Obrázek 5.13: Elipticko-parabolická klínová plocha – třetí typ („vrchní“ část)

Parabola h je konkávní a plocha z obrázku 5.13 je zakončena částmi konvexní paraboly. Můžeme tedy zúžením intervalu $\langle -a, a \rangle$ na interval

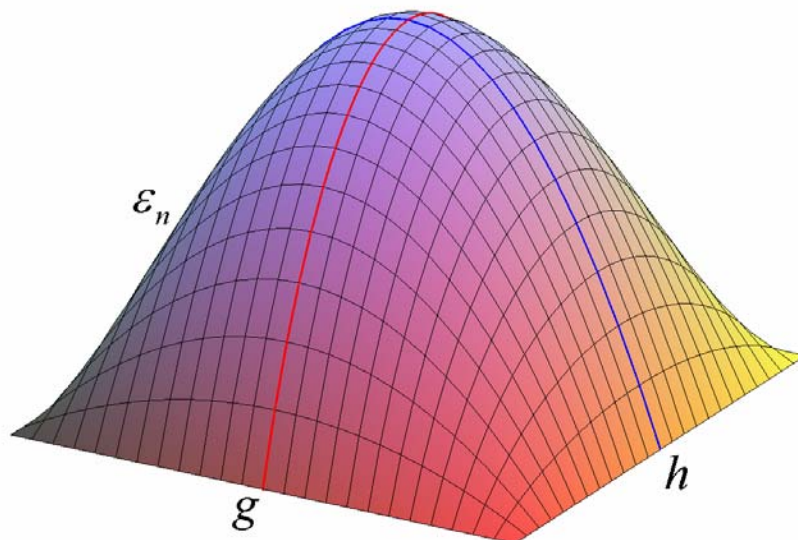
$\left\langle -\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - n^2}, \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - n^2} \right\rangle$ získat plochu ohraničenou čtyřmi úsečkami

(viz. obrázek 5.14). Protože je plocha vykreslena pouze na výřezu svého původního intervalu, je velmi těžce odlišitelná od parabolicko-parabolické klínové plochy (viz. obrázek 5.2). I když máme k dispozici oba systémy křivek na ploše, pak jen těžko rozeznáme část eliptické křivky od části parabolické křivky.

Bystrého čtenáře jistě napadlo, jak je možné, že přímky leží na „vrchní“ části plochy ε_n , kdežto z (5.9) plyne, že leží na „spodní“ části. Naši úvahu o třetím

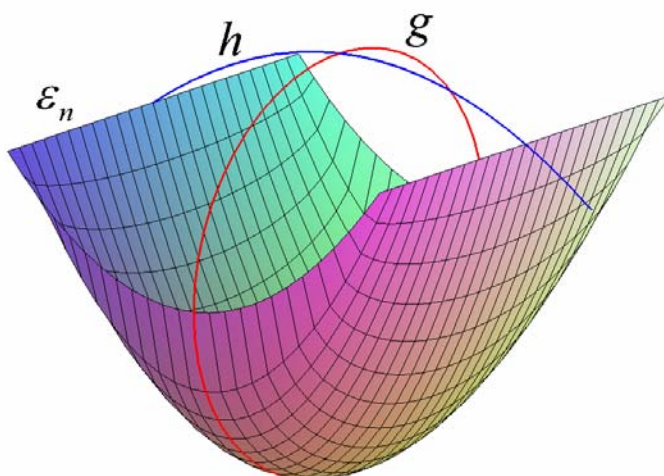
typu plochy ε_n jsme velice zkrátali. Při dosazování $y_0^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}n^2$ je

$\sqrt{n^2} = -n$. A dosazujeme do (5.5) („spodní“ znaménko v (5.3)). Tedy v případě 2a) „spodní“ část plochy neobsahuje přímky.



Obrázek 5.14: Elipticko-parabolická klínová plocha – třetí typ („vrchní“ část ohraničená čtyřmi úsečkami)

2a2) Ve druhém případě uvažujme tytéž podmínky pro hodnoty x , y a v rovnici (5.8) záporná znaménka.



Obrázek 5.15: Elipticko-parabolická klínová plocha – třetí typ („spodní“ část)

Poznámka 4: Myslím si, že třetí typ elipticko-parabolické klínové plochy nijak nerozšiřuje předchozí typy, protože tento třetí typ můžeme získat souměrností prvního typu podle souřadnicové roviny $z = 0$.

2b) Když $n + b = 0$, pak se řídicí křivky g , h protínají v počátku soustavy souřadnic. Zkusme postupovat jako obvykle. Předpokládejme, že v rovině $\beta_0 : y = y_0$, kde pro jednoduchost $y_0 \in (-a, a)$, leží tvořící parabola plochy ε_n , jejíž osa je rovnoběžná se souřadnicovou osou z a jejíž vrchol leží na řídicí elipse g (pro každou takovou rovinu β_0 bychom získali dvě paraboly).

Ještě nesmíme zapomenout na afinní vztah parabol $h_{y_0} \subset \beta_0$ a řídicí paraboly h . Posuneme-li rovinu β_0 ve směru souřadnicové osy y do roviny $\beta: y = 0$, pak vrchol posunuté paraboly \bar{h}_{y_0} by díky vztahu kolmé afinity v rovině β s osou afinity v souřadnicové ose x (připomeňme, že osa afinity je přímkou samodružných bodů tohoto afinního zobrazení) mezi \bar{h}_{y_0} , h splýval s vrcholem paraboly h (to ale pro žádné $y_0 \in (-a, a) \setminus \{0\}$ není splněno). Nedostáváme tedy pro tuto vzájemnou polohu řídicích křivek g, h vzhledem k souřadnicové rovině $z = 0$ žádnou klínovou plochu.

- 2c) V případě, že $n + b < 0$ neprotíná řídicí parabola h rovinu $z = 0$ a tudíž musíme pro zachování afinní závislosti mezi tvořícími křivkami $h_{y_0} \subset \beta_0$ využít jinou vlastnost. Rovnice tvořících parabol h_{y_0} v rovinách $\beta_0: y = y_0$, kde $y_0 \in \langle -a, a \rangle$:

$$h_{y_0}: (y = y_0) \cap \left[2k \left(z - n \mp \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2} \right) = x^2 \right] \quad (5.2)$$

Hodnotu nenulové reálné konstanty k dopočteme pomocí afinní závislosti řídicí paraboly h a posunuté tvořící paraboly \bar{h}_{y_0} ve směru souřadnicové osy y do roviny $\beta: y = 0$. Nejjednodušší je napsat rovnice kolmé afinity v rovině β s osou afinity v souřadnicové ose x . Afinita φ v rovině β je zadána dvěma trojicemi nekolineárních bodů:

$$\begin{aligned} [0, 0, 0] &\mapsto [0, 0, 0], \\ [1, 0, 0] &\mapsto [1, 0, 0], \\ V = [0, 0, n + b] &\mapsto \bar{V}_{y_0} = \left[0, 0, n \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2} \right]. \end{aligned}$$

Rovnice afinity φ v maticovém zápisu:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = (x \ z) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (p_1 \ p_2), \quad (5.10)$$

kde $a_{ij}, p_i, i, j \in \{1, 2\}$, jsou reálné konstanty. Dosazením souřadnic dvojic bodů, které určují zobrazení φ , do (5.10) získáme rovnice afinity:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = (x \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{an \pm b\sqrt{a^2 - y_0^2}}{a(n+b)} \end{pmatrix} + (0 \ 0). \quad (5.11)$$

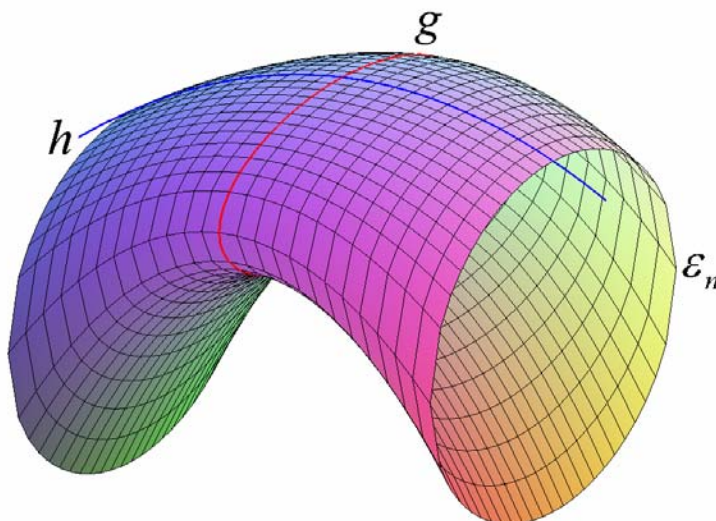
Když na parabole h zvolíme např. bod $\left[1, 0, -\frac{1}{2p} + n + b \right]$, dosazením do (5.11) získáme jeho obraz (bod paraboly \bar{h}_{y_0}) ve zobrazení φ :

$$\left[1, 0, \left(-\frac{1}{2p} + n + b \right) \frac{an \pm b\sqrt{a^2 - y_0^2}}{a(n+b)} \right]. \quad (5.12)$$

Pomocí (5.12) dopočteme konstantu k v (5.2):

$$k = -\frac{ap(n+b)}{an \pm b\sqrt{a^2 - y_0^2}}. \quad (5.13)$$

Všimněme si, že hodnota konstanty k v (5.13) je stejná jako v (5.3). Tedy i rovnice čtvrtého typu elipticko-parabolické klínové plochy, když $n+b < 0$ je stejná jako rovnice (5.8). Pro pevné hodnoty $a, b, n, p, n+b < 0$ získáme následující obrázek 5.16.



Obrázek 5.16: Elipticko-parabolická klínová plocha – čtvrtý typ

Stavební využití je problematické, protože čtvrtý typ elipticko-parabolické plochy neobsahuje přímky. K ověření nám stačí použít stejný postup jako ve třetí kapitole v rovnici (3.2). Zde je výpočet značně náročnější a byl zpracován počítačem, proto uveďme hlavní body. Máme-li přímku s danou bodem $P = [p_1, p_2, p_3]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$. Její parametrické vyjádření je:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + ts_1 \\ y &= p_2 + ts_2, \quad t \in \mathbf{R}. \\ z &= p_3 + ts_3 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Rovnice (5.8) představuje vlastně rovnice dvě, tedy jejich násobením dostaneme rovnici jedinou a navíc rovnici, která neobsahuje odmocniny, což je k dalšímu výpočtu příjemné. Nejprve upravme rovnici (5.8).

$$\varepsilon_n : \left[z + \frac{an + b\sqrt{a^2 - y^2}}{2ap(n+b)}x^2 - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2} - n \right] \cdot \left[z + \frac{an - b\sqrt{a^2 - y^2}}{2ap(n+b)}x^2 + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2} - n \right] = 0,$$

na tvar:

$$\varepsilon_n : [x^2 - 2p(n+b)]^2 \cdot [b^2(a^2 - y^2) - a^2n^2] - 4za^2p(n+b)[x^2n + p(n+b)(z - 2n)] = 0. \quad (5.15)$$

Z rovnic (5.14) dosadíme do rovnice (5.15) plochy ε_n . Výpočet je dosti rozsáhlý, proto uveďme pouze koeficienty u jednotlivých mocnin parametru t .

Koeficient u t^6 :

$$-b^2s_1^4s_2^2. \quad (5.16)$$

Koeficient u t^5 :

$$-2bs_1^3s_2(2p_1s_2 + p_2s_1). \quad (5.17)$$

Koeficient u t^4 :

$$s_1^2 \left[4s_2^2b^2p(n+b) - 2p_1s_2b^2(3p_1s_2 + 4p_2s_1) + \right. \\ \left. - p_2^2s_1^2b^2 - s_1^2a^2(n^2 - b^2) \right] \quad (5.18)$$

Koeficient u t^3 :

$$4s_1 \left[p(n+b)(2p_1s_2^2b^2 + 2p_2s_1s_2b^2 - s_1s_3a^2n) + \right. \\ \left. - p_1s_1^2a^2(n^2 - b^2) - p_1b^2(p_2^2s_1^2 + 3p_1p_2s_1s_2 + p_1^2s_2^2) \right] \quad (5.19)$$

Koeficient u t^2 :

$$4b^2p(n+b)(p_1^2s_2^2 + p_2^2s_1^2) - 4p^2(n+b)^2(s_2^2b^2 + s_3^2a^2) + \\ - 4s_1^2a^2p(n+b)(p_3n + b^2 - n^2) + \\ + 2p_1s_1(n+b)[8p_2s_2b^2p - 4s_3a^2np - 3p_1s_1a^2(n-b)] + \\ - p_1^2b^2(8p_1p_2s_1s_2 + 6p_2^2s_1^2 + p_1^2s_2^2) \quad (5.20)$$

Koeficient u t :

$$-2 \left[-4s_3a^2p^2(n-p_3)(n^2 + b^2) + 2p_1s_1a^2(2np - p_1^2)(b^2 - n^2) + \right. \\ + 4p_1p(p_3s_1a^2n - p_1p_2s_2b^2)(n+b) + p_1^4p_2s_2b^2 + \\ - 4a^2bnp(p_1s_1n - 2p_3s_3p) + 4p_1s_1b^3p(a^2 - p_2^2) + \\ - 4bp^2(2s_3a^2n^2 - p_2s_2b^3) - 2p_1p_2^2s_1b^2(2np - p_1^2) + \\ \left. + 4p_2s_2b^2np^2(n+2b) \right] \quad (5.21)$$

Absolutní člen:

$$4b^3p(a^2 - p_2^2)(bp - p_1^2) - 4np(np - p_1^2)(p_2^2b^2 + a^2n^2) + \\ + (p_1^4 + 8bnp^2)[a^2(b^2 - n^2) - p_2^2b^2] + 8p_3a^2n^2p^2(n+2b) + \\ - 4p_3^2a^2p^2(n^2 + b^2) + 4a^2np(b-p_3)(2p_3bp + p_1^2n) + \\ - 4p_1^2a^2bnp(p_3 + b) \quad (5.22)$$

Aby přímka s byla přímkou plochy, pak jsou všechny koeficienty (5.16), (5.17), (5.18), (5.19), (5.20), (5.21), (5.22) nulové.

2c1) Nejprve předpokládejme, že $s_1 = 0$. Pak jsou koeficienty (5.17), (5.18), (5.19) nulové. Kdyby byl koeficient (5.20) také nulový, pak by platilo (nezapomeňme, že pro elipticko-parabolickou klínovou plochu ε_n uvažujeme pouze $n+b \neq 0$):

$$s_3^2 = -\frac{s_2^2b^2(2bp + 2pn - p_1^2)^2}{4a^2p^2(b+n)^2}. \quad (5.23)$$

Aby s_3 bylo reálné, pak má zlomek (5.23) nulového čitatele. To nastane právě ve dvou případech.

2c1a) Když $s_2 = 0$, pak $s_3 = 0$ a směrový vektor přímky s je nulový. Nulový směrový vektor však neurčuje přímku.

2c1b) Když $p_1^2 = 2p(n+b)$, pak $s_3 = 0$. Aby p_1 bylo reálná, je nutné navíc předpokládat, že $n+b > 0$. Koeficient (5.21) je za těchto

předpokladů nulový. Aby byl i koeficient (5.22) nulový, pak je $p_3 = 0$.

2c2) Vyřešme nyní případ, kdy $s_1 \neq 0$. Pak $s_2 = 0$ a koeficienty (5.16), (5.17) jsou nulové. Koeficient (5.18) je nulový, když $p_2^2 = \frac{a^2(b^2 - n^2)}{b^2}$. Aby bylo p_2 reálné, je nutné předpokládat, že $|n| < b$. Koeficient (5.19) je nulový, když navíc $s_3 = 0$. Koeficient (5.20) je nulový, když $p_3 = 0$. Z těchto předpokladů jsou už koeficienty (5.21), (5.22) nulové.

Plocha ε_n může obsahovat až čtyři přímky s následujícím parametrickým vyjádřením:

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{2p(n+b)} & x &= t \\ y &= t & y &= \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad |n| < b. \\ z &= 0 & z &= 0 \end{aligned}$$

Protože u čtvrtého typu elipticko-parabolické klínové plochy je $n+b < 0$. Navíc $n < -b$, tedy $n < 0$ a $|n| > b$. Tento typ plochy neobsahuje přímky.

Ještě bych se ráda zmínila o **sinovo-sinové klínové ploše**. Mějme dány řídicí křivky g s rovnicí $(x=0) \cap (z = a \cos by)$, kde a, b jsou nenulové reálné konstanty, a h s rovnicí $(y=0) \cap (z = a \cos cx)$, kde c je nenulová reálná konstanta. V rovinách $\beta_0 : y = y_0$, kde $y_0 \in \mathbf{R} \setminus \bigcup_{l \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2b}(2l+1) \right\}$, leží sinusoidy h_{y_0} s rovnicemi $(y = y_0) \cap (z = k \cos cx)$, kde k je nenulová reálná konstanta. Využijeme-li afinní vztah, spočteme konstantu k , protože na křivce h_{y_0} leží bod $[0, y_0, a \cos by_0]$. Rovnice tvořících křivek je:

$$h_{y_0} : (y = y_0) \cap [z = a \cos(cx) \cos(by_0)]. \quad (5.24)$$

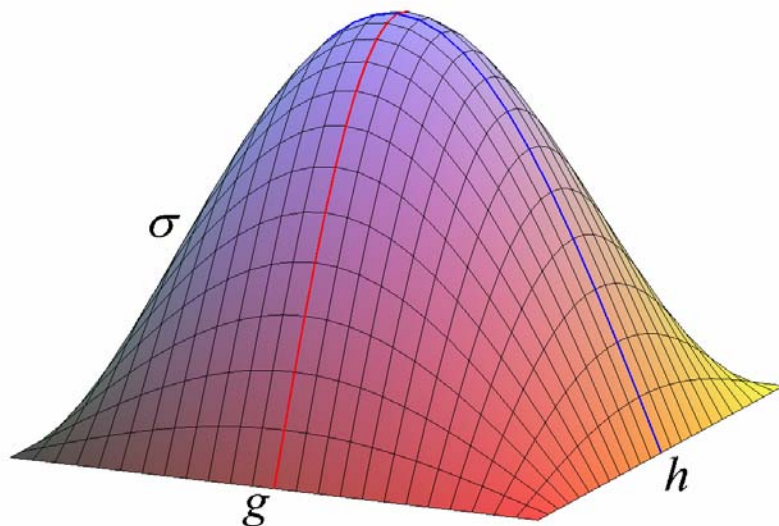
Ještě vyřešme případ, kdy $y_0 \in \bigcup_{l \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2b}(2l+1) \right\}$. Tvořícími křivkami jsou přímky s rovnicemi:

$$h_{\frac{\pi}{2b}(2l+1)} : \left[y = \frac{\pi}{2b}(2l+1) \right] \cap (z = 0). \quad (5.25)$$

Snadno ověříme, že rovnici:

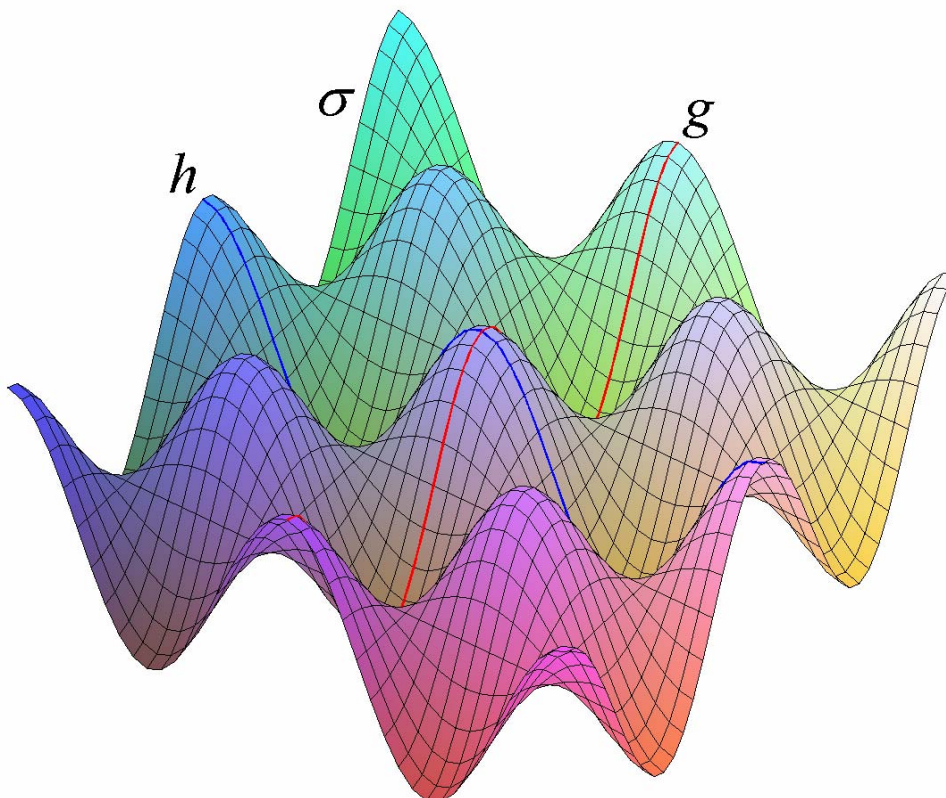
$$\sigma : z = a \cos(cx) \cos(by) \quad (5.26)$$

vyhovují rovnice křivek (5.24) i (5.25). Rovnice (5.26) je rovnicí sinovo-sinové klínové plochy σ . Pro zajímavost se nejprve podíváme na její stavebně využitelnou část.



Obrázek 5.17: Sinovo-sinová klínová plocha (část)

Tento výřez se velmi podobá části parabolicko-parabolické klínové plochy (např. obrázek 5.2) nebo části elipticko-parabolické klínové plochy (např. obrázek 5.14). Podívejme se nyní na část plochy σ nad větším dvourozměrným intervalem. Uvidíme, že má plocha mnoho lokálních extrémů.



Obrázek 5.18: Sinovo-sinová klínová plocha

6. Klenba jako klínová plocha

V této kapitole se seznámíme se skupinou ploch, které jsou s malými výjimkami klínovými plochami a odpovídají naší definici 1. Začneme nejprve několika příklady právě těchto ploch. Jedná se vesměs o klenby.

Klenby tohoto typu jsou řešením problému, kdy se kolmo kříží dvě klenuté chodby - hlavní chodba s výškou stropu $d + k$ a vedlejší chodby s výškami stropů $b + k$. Navíc můžeme požadovat, aby se klenby napojovaly například eliptickými oblouky.

Mějme plochu ρ zadanou řídicí úsečkou g s rovnicí $(x=0) \cap (z=d) \cap (|y| \leq a)$, kde d je nezáporná reálná konstanta a a je kladná reálná konstanta, a řídicí elipsu e s rovnicí $(x=c) \cap (b^2 y^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2)$, kde b, c jsou kladné reálné konstanty. Rozdělme situaci na tři případy:

$$1) \quad b < d,$$

$$2) \quad b = d,$$

$$3) \quad b > d.$$

1) Tvořícími křivkami prvního typu plochy ρ necht' jsou elipsy h_{y_0} v rovinách $\beta_{y_0} : y = y_0$, kde $y_0 \in \langle -a, a \rangle$, s hlavním (resp. vedlejším) vrcholem ležícím na úsečce g a vedlejším (resp. hlavním) vrcholem ležícím na elipse e . Střed elipsy h_{y_0} je bod $\left[0, y_0, \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2} \right]$. Poloosa b_{y_0} ve směru souřadnicové osy z má velikost:

$$\left| d \mp \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2} \right|.$$

Poloosa ve směru souřadnicové osy x má velikost c . Pokud $b_{y_0} < c$, pak hlavní vrchol tvořící elipsy h_{y_0} leží na řídicí elipse e a vedlejší vrchol na řídicí přímce g . Když $b_{y_0} = c$, pak je tvořící křivkou h_{y_0} je přesněji kružnice. A v posledním případě, pokud $b_{y_0} > c$, hlavní vrchol tvořící elipsy h_{y_0} leží na řídicí úsečce g a vedlejší vrchol na řídicí elipse e . Rovnice tvořící křivky h_{y_0} je:

$$(y = y_0) \cap \left[\frac{x^2}{c^2} + \frac{\left(z \mp \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2} \right)^2}{\left(d \mp \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2} \right)^2} = 1 \right].$$

Rovnice prvního typu plochy ρ je následující:

$$\rho : \left(d \mp \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \right)^2 x^2 + c^2 \left(z \mp \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \right)^2 = c^2 \left(d \mp \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \right)^2. \quad (6.1)$$

Všimněme si, že rovnice (6.1) v sobě skrývá rovnice dvě. Kdybychom chtěli získat rovnici jedinou, uvažovali bychom nejprve rovnici:

$$\left(d - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \right)^2 (x^2 - c^2) + c^2 \left(z - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \right)^2 = 0 \quad (6.2)$$

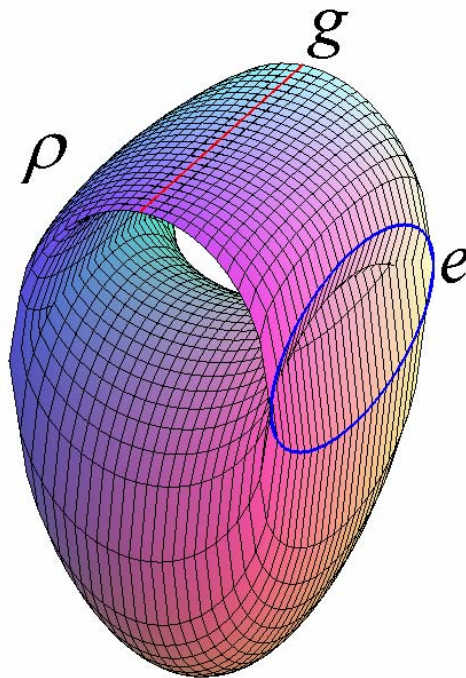
a druhou rovnicí:

$$\left(d + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}\right)^2 (x^2 - c^2) + c^2 \left(z + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}\right)^2 = 0. \quad (6.3)$$

Pak bychom vynásobili levé strany rovnic (6.2), (6.3) a položili bychom je rovny nule.

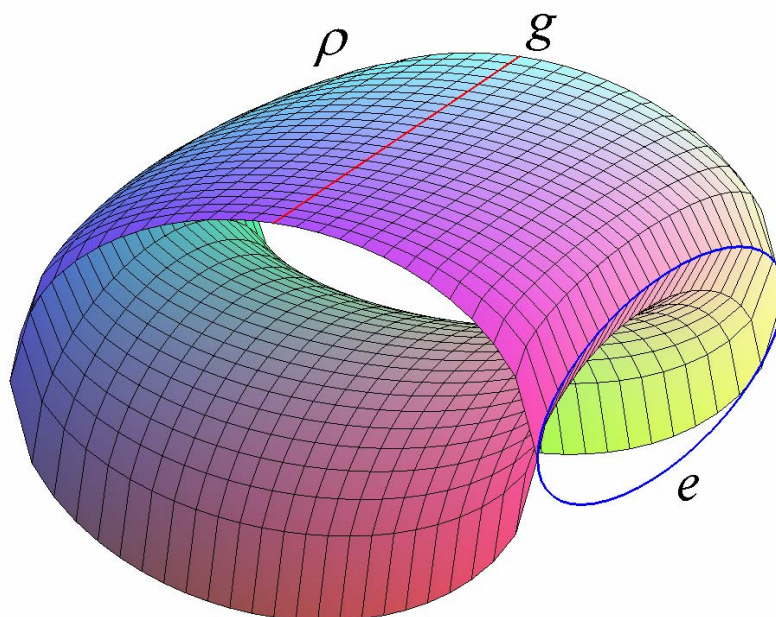
$$\left\{ (x^2 - c^2) \cdot [a^2 d^2 - b^2 (a^2 - y^2)] + c^2 [a^2 z^2 - b^2 (a^2 - y^2)] \right\}^2 + 4a^2 b^2 c^2 (x^2 - c^2) (d - z)^2 (a^2 - y^2) = 0 \quad (6.4)$$

Z algebraické rovnice (6.4) plochy ρ jednoduše určíme její stupeň, což odpovídá stupni plochy ρ . Plocha ρ je osmého stupně. Následující obrázek 6.1 se proto bude zdát trochu nepřehledný.



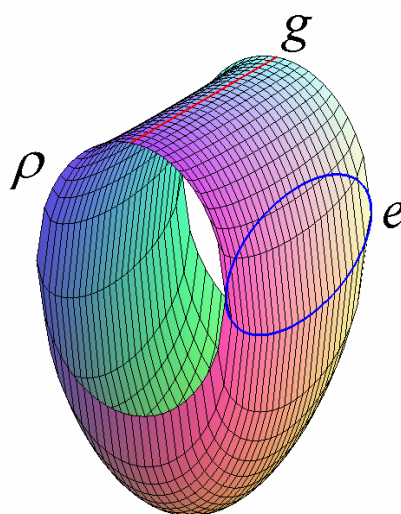
Obrázek 6.1: Klenba tvořená elipsami – první typ

Podívejme se na část prvního typu plochy ρ s rovnicí (6.2):



Obrázek 6.2: Klenba tvořená elipsami – první typ („vrchní“ část)

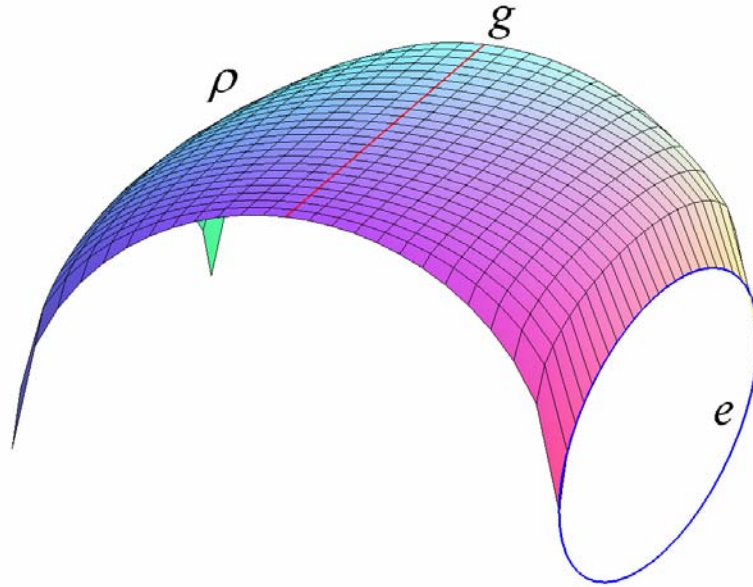
A nyní se podívejme na část prvního plochy ρ s rovnicí (6.3):



Obrázek 6.3: Klenba tvořená elipsami – první typ („spodní“ část)

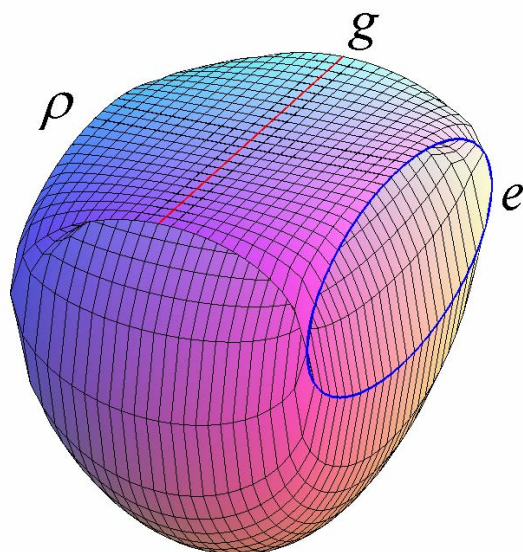
Stavebně využitelná část prvního typu plochy ρ má rovnici:

$$z = \left(d - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2}. \quad (6.5)$$



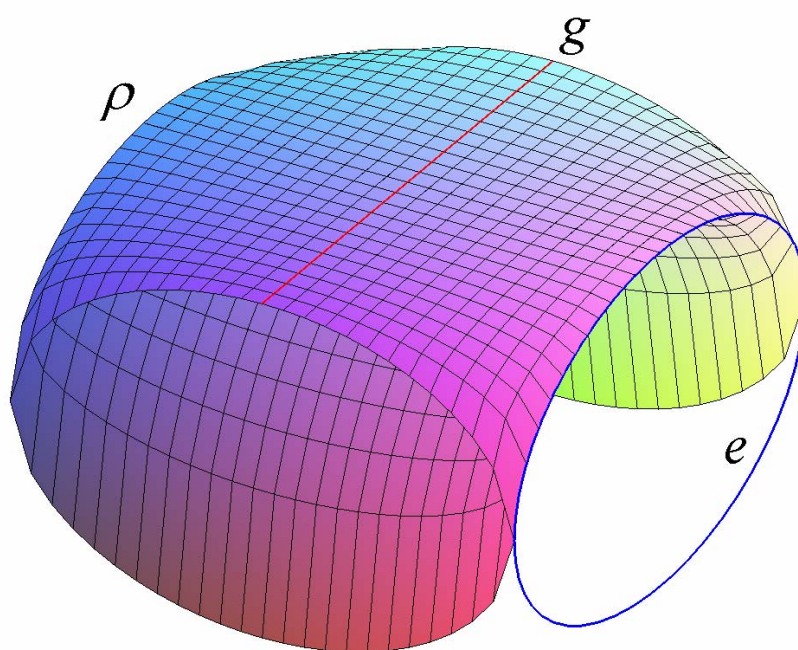
Obrázek 6.4: Klenba tvořená elipsami – první typ (stavebně použitelná část)

- 2) Ve druhém případě rovnice (6.1) vyhovuje pro $y \in \langle -a, a \rangle \setminus \{0\}$. Pro $y = 0$ jsou tvořícími křivkami úsečka 1h_0 s rovnicí $(y = 0) \cap (z = b) \cap (|x| \leq c)$ a elipsa 2h_0 s rovnicí $(y = 0) \cap \left[\frac{x^2}{c^2} + \frac{(z+b)^2}{4b^2} = 1 \right]$. Když ale dosadíme za $y = 0$ a $b = d$ do rovnice (6.2), získáme rovnici $(z-b)^2 = 0$ přímky dvojnásob počítané obsahující úsečku 1h_0 . Po dosazení za $y = 0$ a $b = d$ do (6.3), získáme rovnici $4b^2(x^2 - c^2) + c^2(z+b)^2 = 0$, která odpovídá rovnici elipsy 2h_0 . Rovnice (6.1), kde $b = d$, je zároveň rovnicí tohoto druhého typu plochy ρ .



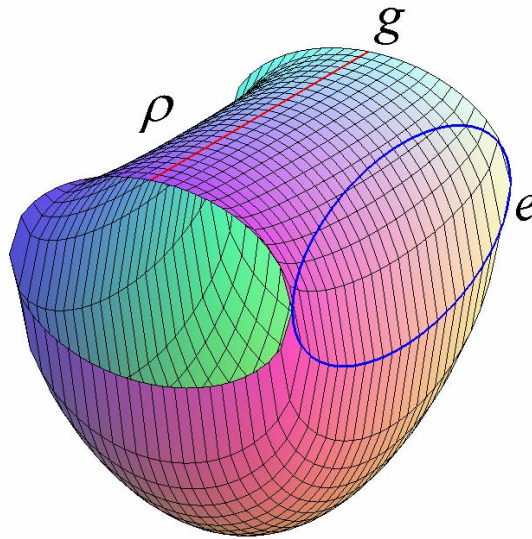
Obrázek 6.5: Klenba tvořená elipsami – druhý typ

Rovnici (6.2), kde $b = d$, části druhého typu plochy ρ odpovídá obrázek 6.6.



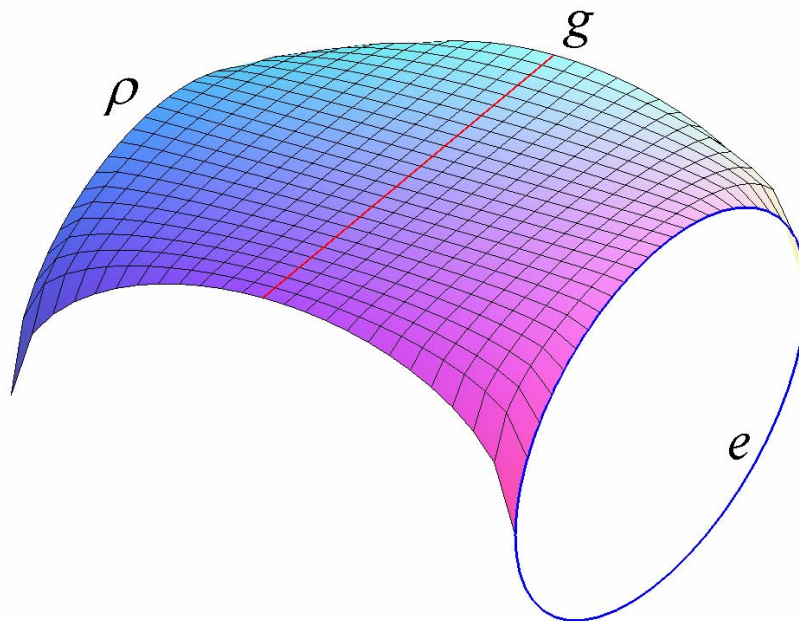
Obrázek 6.6: Klenba tvořená elipsami – druhý typ („vrchní“ část)

Druhý typ plochy ρ s rovnicí (6.3), kde $b = d$, je na obrázku 6.7.



Obrázek 6.7: Klenba tvořená elipsami – druhý typ („spodní“ část)

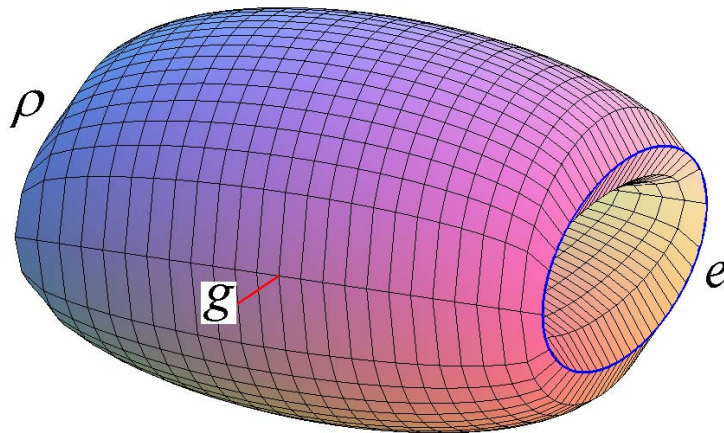
Stavebně využitelná část druhého typu plochy ρ je vyjádřena rovnicí (6.5), kde $b = d$.



Obrázek 6.8: Klenba tvořená elipsami – druhý typ (stavebně použitelná část)

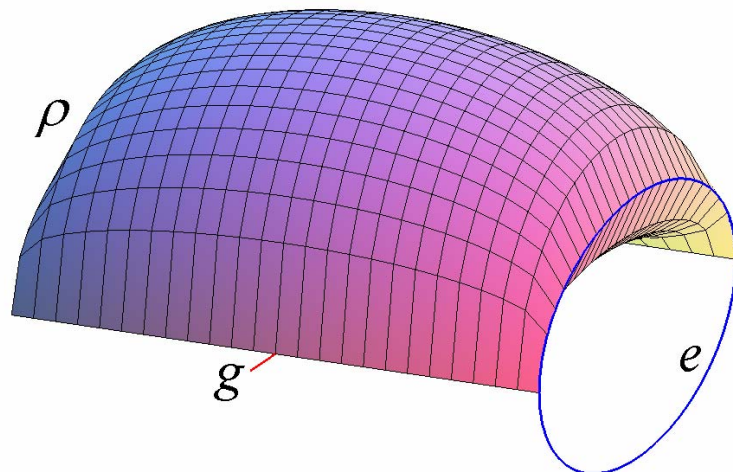
- 3) Třetí případ lze rozdělit ještě na dva typy klenby.
- 3a) V prvním případě buď $0 = d < b$. Rovnice (6.1), do níž dosadíme za $d = 0$, vyhovuje třetímu typu plochy ρ pro $y \in (-a, a)$. Pro $y \in \{\pm a\}$ jsou tvořícími křivkami třetího typu plochy ρ úsečky $h_{\pm a}$ s rovnicemi

$(y = \pm a) \cap (z = 0) \cap (|x| \leq c)$, o nichž musíme ukázat, že jejich rovnice vyhovují rovnici (6.1). Když do (6.1) dosadíme $d = 0$, $y^2 = a^2$, získáme rovnici $z^2 = 0$, což odpovídá rovnicím přímek dvojnásob počítaných, které obsahují úsečky $h_{\pm a}$. Podívejme se na celek třetího typu plochy ρ .

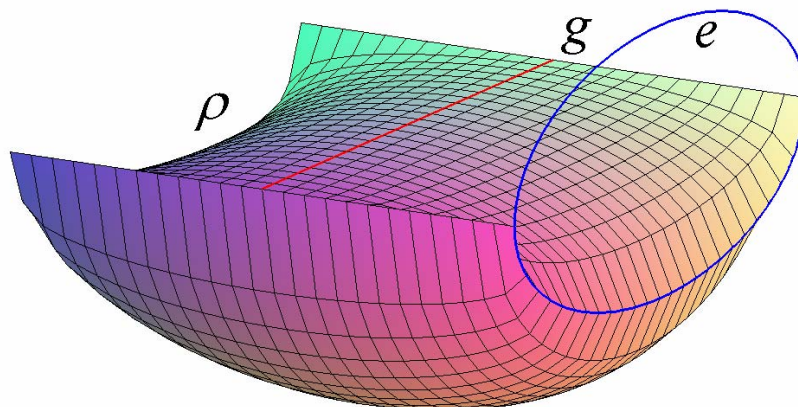


Obrázek 6.9: Klenba tvořená elipsami – třetí typ

Třetí typ plochy ρ je navíc symetrický podle roviny $z = 0$, jak uvidíme přesněji z následujících obrázků. Obrázek 6.10 odpovídá rovnici (6.2), v níž je $d = 0$, a obrázek 6.11 odpovídá rovnici (6.3), v níž je $d = 0$.

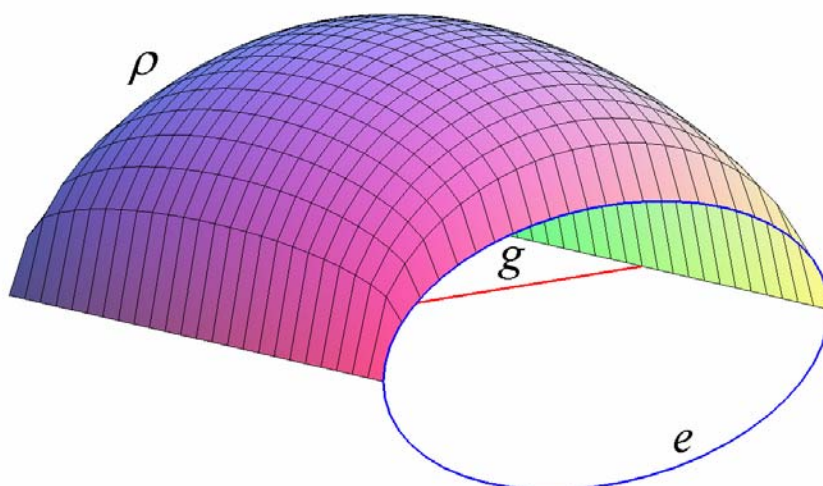


Obrázek 6.10: Klenba tvořená elipsami – třetí typ („vrchní“ část)



Obrázek 6.11: Klenba tvořená elipsami – třetí typ („spodní“ část)

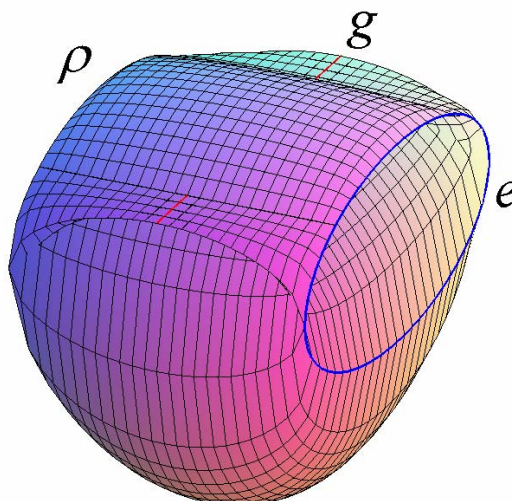
Část třetího typu plochy ρ , již by bylo možné využít jako klenbu, odpovídá rovnici (6.5), v níž opět $d = 0$. Tato plocha je poměrně podobná části elipticko-parabolické klínové plochy z obrázku 5.8. Okem patrný rozdíl je např. v hraničních křivkách ploch.



Obrázek 6.12: Klenba tvořená elipsami – třetí typ (stavebně použitelná část)

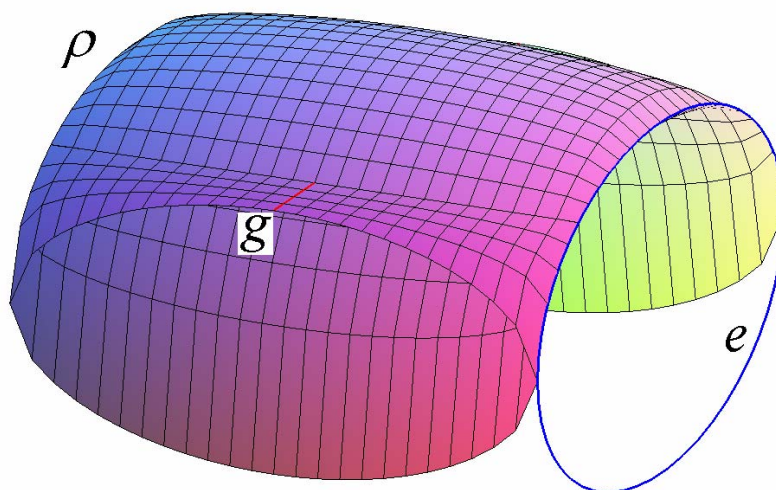
- 3b) Ve druhé případě buď $0 < d < b$. Rovnice (6.1) odpovídá čtvrtému typu plochy ρ pokud $y \in \langle -a, a \rangle \setminus \left\{ \pm a \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}} \right\}$. Pro hodnoty $y \in \left\{ \pm a \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}} \right\}$ ověříme, že úsečka ${}^1h_{\pm a \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}}}$ s rovnicí $\left(y = \pm a \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}} \right) \cap (z = d) \cap (|x| \leq c)$ a elipsa ${}^2h_{\pm a \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}}}$ s rovnicí $\left(y = \pm a \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}} \right) \cap \left[\frac{x^2}{c^2} + \frac{(z - d)^2}{4d^2} = 1 \right]$ vyhovují rovnici (6.1). Dosazením za $y^2 = a^2 - \frac{a^2 d^2}{b^2}$ do (6.2) dostaneme rovnici

$(z - d)^2 = 0$, která odpovídá úsečce ${}^1h_{\pm a\sqrt{1-\frac{d^2}{b^2}}}$, a do rovnice (6.3) dostaneme rovnici $4d^2(x^2 - c^2) + c^2(z + d)^2 = 0$, která odpovídá elipse ${}^2h_{\pm a\sqrt{1-\frac{d^2}{b^2}}}$. Čtvrtý typ plochy ρ vypadá následovně.

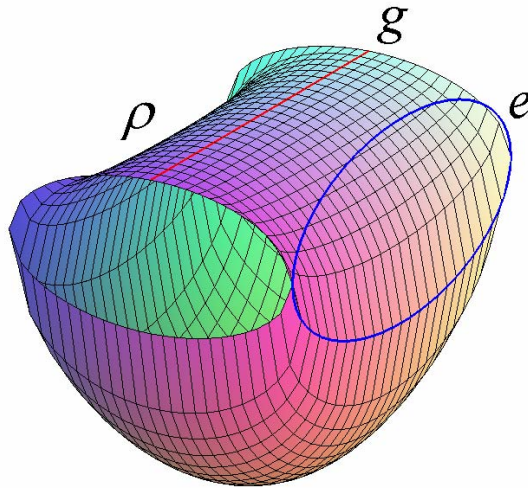


Obrázek 6.13: Klenba tvořená elipsami – čtvrtý typ

Obrázek 6.14 odpovídá rovnici (6.2) a obrázek 6.15 rovnici (6.3).

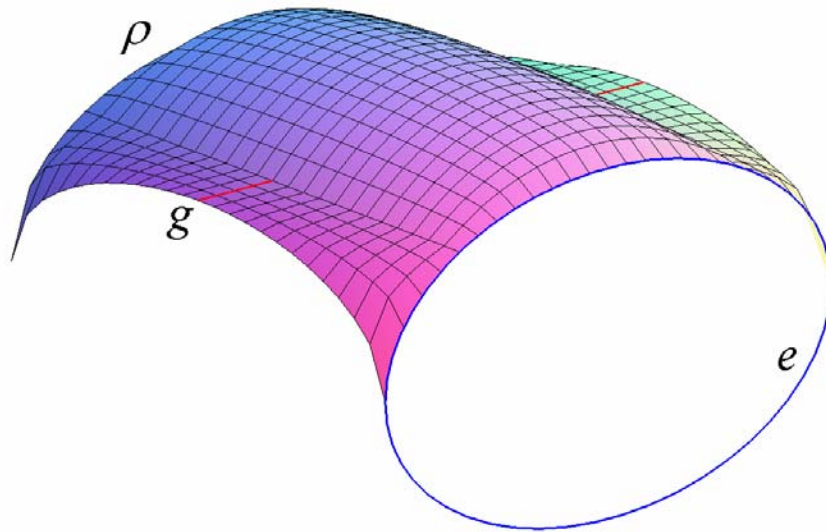


Obrázek 6.14: Klenba tvořená elipsami – čtvrtý typ („vrchní“ část)



Obrázek 6.15: Klenba tvořená elipsami – čtvrtý typ („spodní“ část)

Stavebně použitelná čtvrtého typu plochy ρ , která odpovídá rovnici (6.5), je opravdu zajímavou klenbou.



Obrázek 6.16: Klenba tvořená elipsami – čtvrtý typ (stavebně použitelná část)

Pokusme se plochu ρ zadat řídícími útvary jako klínovou plochu. Celou situaci posuňme o vektor $(0,0,-d)$, kvůli kolmé afinitě z definice 1. Posunutou plochu ρ označme $\bar{\rho}$, posunutou úsečku g označme \bar{g} a posunutou elipsu e označme \bar{e} . Nyní zbývá zvolit řídící křivky tak, aby plocha $\bar{\rho}$ odpovídala definici 1. Zachovejme značení z definice 1 a zvolme za řídící křivku v rovině $\alpha : x = 0$ stejnojmennou řídící úsečku \bar{g} plochy $\bar{\rho}$ (protože jsme plochu posunuli, má nyní rovnici $(x = 0) \cap (z = 0) \cap (|y| \leq a)$). Pokud $b \neq d$ zvolme za řídící křivku h z definice 1 ležící v rovině $\beta : y = 0$ s rovnicí:

$$h : (y = 0) \cap \left[\frac{x^2}{c^2} + \frac{(z + d \mp b)^2}{(d \mp b)^2} = 1 \right].$$

Křivky \bar{g} a h se protínají na souřadnicové ose z . Afinní vztah dvojice elips \bar{h}_{y_0} (tuto dvojici v některých případech tvoří úsečka a elipsa nebo jediná elipsa - z našich úvah je však vylučme), což jsou pravoúhlé průměty dvojice elips h_{y_0} do roviny β , a dvojice elips h ověříme jednoduše pomocí dělicího poměru. Označme elipsy tvořící křivku \bar{h}_{y_0} :

$${}^1\bar{h}_{y_0} : (y = 0) \cap \left[\frac{x^2}{c^2} + \frac{\left(z + d - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2} \right)^2}{\left(d - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2} \right)^2} = 1 \right],$$

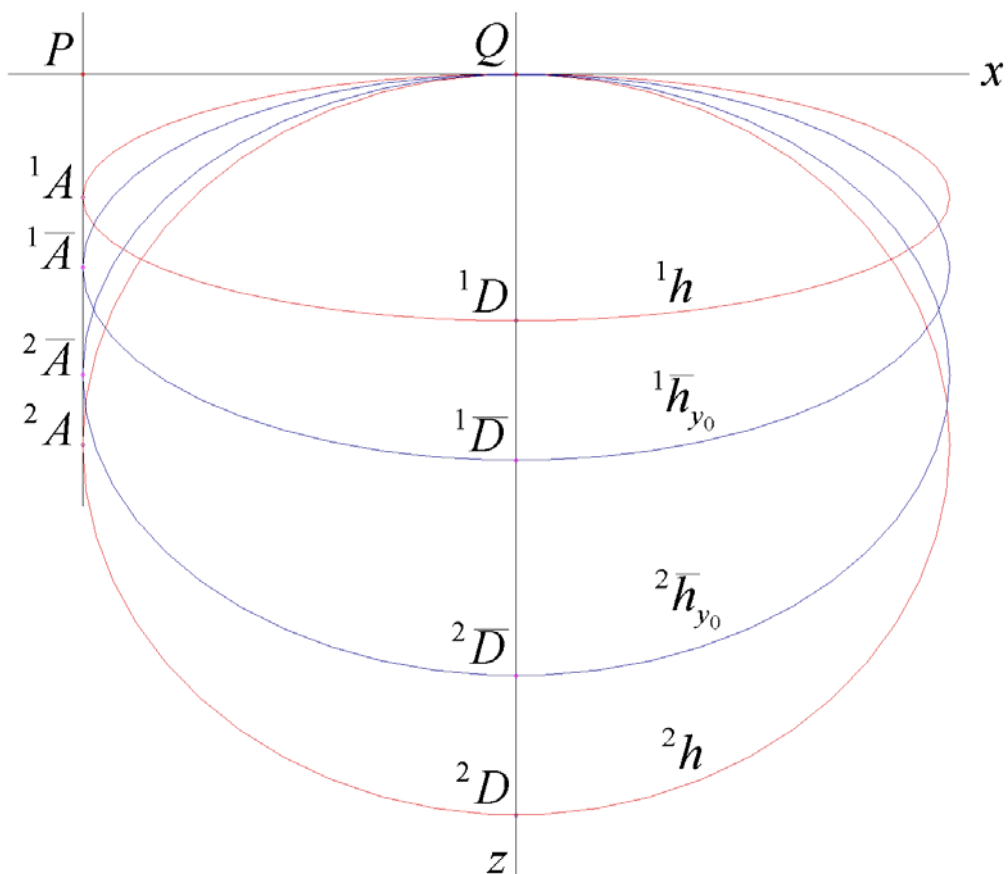
$${}^2\bar{h}_{y_0} : (y = 0) \cap \left[\frac{x^2}{c^2} + \frac{\left(z + d + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2} \right)^2}{\left(d + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y_0^2} \right)^2} = 1 \right].$$

Označme dále elipsy tvořící křivku h :

$${}^1h : (y = 0) \cap \left[\frac{x^2}{c^2} + \frac{(z + d - b)^2}{(d - b)^2} = 1 \right],$$

$${}^2h : (y = 0) \cap \left[\frac{x^2}{c^2} + \frac{(z + d + b)^2}{(d + b)^2} = 1 \right].$$

Uvažujeme-li vždy jednu elipsu z dvojice \bar{h}_{y_0} a jednu elipsu z dvojice h . Pak v rovině $y = 0$ je následující situace.



Obrázek 6.17: Afinita mezi elipsami

Upřesněme souřadnice v obrázku 6.17:

$$\begin{aligned}
 P &= [-c, 0, 0], \\
 Q &= [0, 0, 0], \\
 {}^1A &= [-c, 0, -d + b], \\
 {}^1D &= [0, 0, 2(-d + b)], \\
 {}^2A &= [-c, 0, -d - b], \\
 {}^2D &= [0, 0, -2(d + b)], \\
 {}^1\bar{A} &= \left[-c, 0, -d + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y_0^2} \right], \\
 {}^1\bar{D} &= \left[0, 0, 2\left(-d + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y_0^2} \right) \right], \\
 {}^2\bar{A} &= \left[-c, 0, -d - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y_0^2} \right], \\
 {}^2\bar{D} &= \left[0, 0, -2\left(d + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y_0^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Pro afinitu mezi elipsami ${}^1\bar{h}_{y_0}$ a 1h by platilo: $\frac{{}^1\bar{A}P}{{}^1AP} = \frac{{}^1\bar{D}Q}{{}^1DQ}$, což zjistíme po dosazení ze souřadnic bodů, že platí. Stejně tak pro ${}^2\bar{h}_{y_0}$ a 2h platí $\frac{{}^2\bar{A}P}{{}^2AP} = \frac{{}^2\bar{D}Q}{{}^2DQ}$. Dosazením, bychom také zjistili, že elipsy ${}^2\bar{h}_{y_0}$ a 1h nejsou afinní ve smyslu afinity z definice 1. Stejně tak i mezi ${}^1\bar{h}_{y_0}$ a 2h neplatí takový afinní vztah. Protože ale dvojici elips \bar{h}_{y_0} považujeme za jedinou křivku (stejně tak i h), musíme ověřit, zda si odpovídají jejich průsečíky v kolmé afinitě z definice 1. Musíme ukázat, že průsečíky dvojice elips h_{y_0} nezávisí na volbě y_0 (přitom nám postačí x -ová souřadnice průsečíků). Lze spočítat, že dvojice elips h_{y_0} se protínají v bodech s x -ovou souřadnicí $x=0$ nebo $|x| = \frac{c}{ad} \sqrt{a^2 d^2 - b^2 (a^2 - y_0^2)}$, což platí pro všechna $y_0 \in (-a, a)$, když $b > d$, a pro všechna $\frac{a}{b} \sqrt{d^2 - b^2} \leq |y_0| < a$, když $b < d$. Průsečíky tedy závisejí na volbě y_0 a neplatí afinní vztah mezi křivkami \bar{h}_{y_0} a h . Plocha ρ není klínovou plochou. Nicméně její části příslušné rovnicím (6.2), (6.3) jsou klínovými plochami. Za řídicí křivky pak stačí pokládat \bar{g} a vždy jednu z elips z h . Vyřešme zbývající případ. Pokud $b = d$, posuňme soustavu souřadnou o vektor $\left(0, -\frac{a}{2}, 0\right)$. Posunutou plochu $\bar{\rho}$ označme $\bar{\bar{\rho}}$ a posunutou úsečku \bar{g} označme $\bar{\bar{g}}$ (její rovnice je $(x=0) \cap (z=0) \cap \left(\left|y + \frac{a}{2}\right| \leq a\right)$). Za řídicí křivky zvolme úsečku $\bar{\bar{g}}$ křivku h v rovině β s rovnicí:

$$h : (y=0) \cap \left[\frac{x^2}{c^2} + \frac{\left(z \mp \frac{\sqrt{3}}{2} b\right)^2}{\left(d \mp \frac{\sqrt{3}}{2} b\right)^2} = 1 \right].$$

Stejně jako v předešlém případě i zde lze ukázat, že plocha $\bar{\bar{\rho}}$ není klínovou plochou, ale opět také platí, že části plochy ρ vyhovující rovnicím (6.2), (6.3) klínovými plochami jsou.

Zjistíme ještě, jakého druhu jsou křivky g_{x_0} v rovinách $\alpha_{x_0} : x = x_0$, kde $x_0 \in \langle -c, c \rangle$. Rovnice (6.1) lze napsat též ve tvaru:

$$b^2 \left(c \mp \sqrt{c^2 - x^2} \right)^2 (y^2 - a^2) + a^2 \left(cz \mp d \sqrt{c^2 - x^2} \right)^2 = 0. \quad (6.6)$$

V rovinách α_{x_0} leží elipsy ${}^1g_{x_0}$ s rovnicemi:

$$(x = x_0) \cap \left[\frac{y^2}{a^2} + \frac{\left(z + \frac{d}{c} \sqrt{c^2 - x_0^2} \right)^2}{\frac{b^2}{c^2} \left(c + \sqrt{c^2 - x_0^2} \right)^2} = 1 \right],$$

pro $x_0 \in \langle -c, c \rangle \setminus \{0\}$ elipsy $^2g_{x_0}$ s rovnicemi:

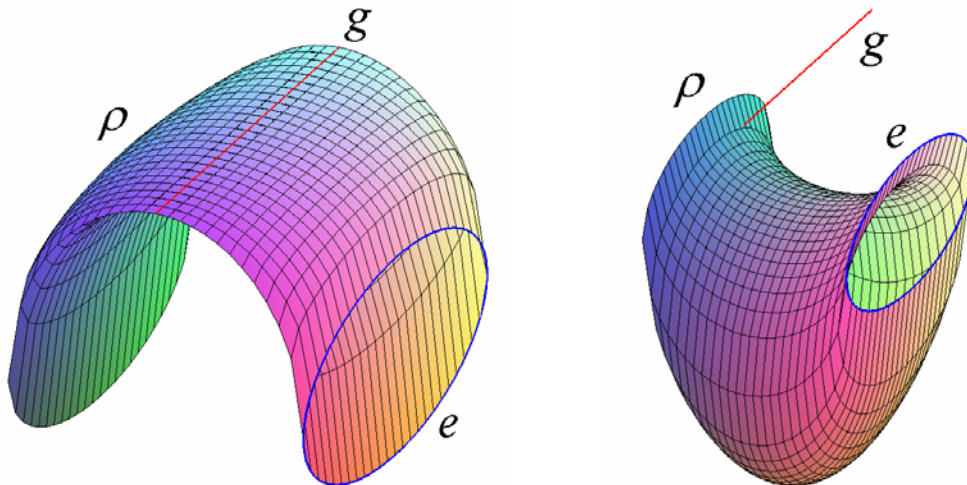
$$(x = x_0) \cap \left[\frac{y^2}{a^2} + \frac{\left(z - \frac{d}{c} \sqrt{c^2 - x_0^2} \right)^2}{\frac{b^2}{c^2} \left(c - \sqrt{c^2 - x_0^2} \right)^2} = 1 \right],$$

a pro $x_0 = 0$ přímka g dvojnásob počítaná s rovnicí $(x=0) \cap (z=d)$. Plochu ρ můžeme zapsat opět pomocí dvojice rovnic:

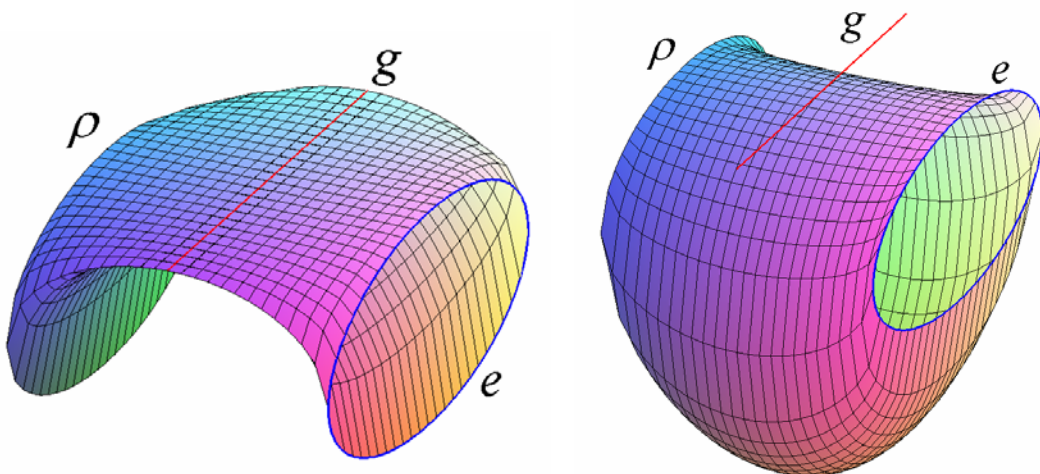
$$b^2 \left(c - \sqrt{c^2 - x^2} \right)^2 (y^2 - a^2) + a^2 \left(cz - d \sqrt{c^2 - x^2} \right)^2 = 0, \quad (6.7)$$

$$b^2 \left(c + \sqrt{c^2 - x^2} \right)^2 (y^2 - a^2) + a^2 \left(cz + d \sqrt{c^2 - x^2} \right)^2 = 0. \quad (6.8)$$

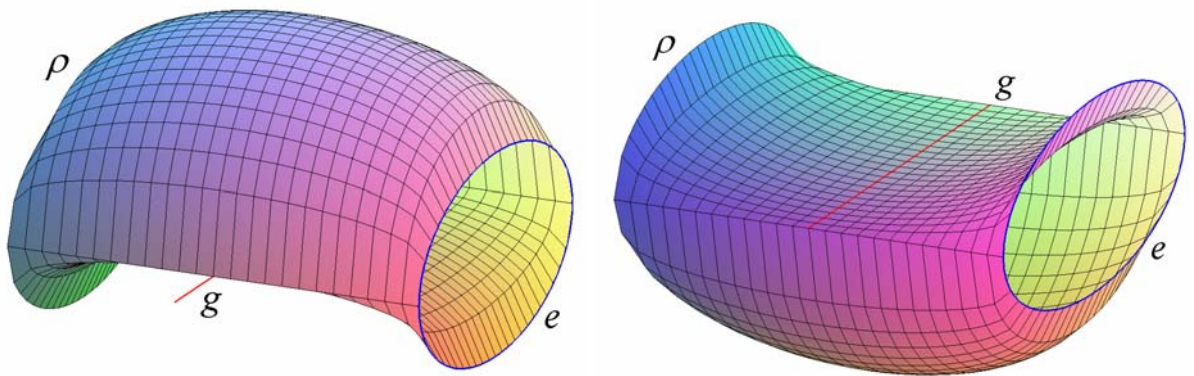
Ještě bychom se mohli podívat na části plochy ρ odpovídající rovnicím (6.7), (6.8). V obrázcích 6.18 až 6.21 odpovídá vždy první z obrázků rovnici (6.7) a druhý rovnici (6.8). Je zajímavé porovnat obrázky 6.18 až 6.21 s obrázky 6.2, 6.3, 6.6, 6.7, 6.10, 6.11, 6.14 a 6.15. Za zmínku pak stojí, že také části plochy ρ určené rovnicemi (6.7), (6.8) jsou klínovými plochami, při vhodném změně souřadné.



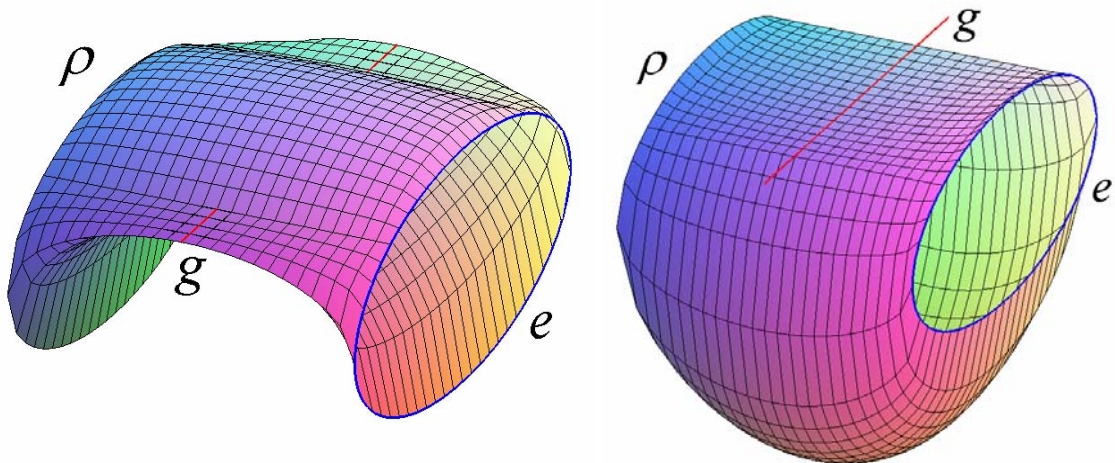
Obrázek 6.18: Klenba tvořená elipsami – první typ (části)



Obrázek 6.19: Klenba tvořená elipsami – druhý typ (části)



Obrázek 6.20: Klenba tvořená elipsami – třetí typ (části)



Obrázek 6.21: Klenba tvořená elipsami – čtvrtý typ (části)

Dalším typem klenby je obměna předchozí plochy ρ . Mějme tedy plochu π zadanou opět řídicí úsečkou $g : (x=0) \cap (z=d) \cap (|y| \leq a)$, kde a je kladná reálná konstanta a d je nezáporná reálná konstanta, a elipsou $e : (x=c) \cap (b^2 y^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2)$, kde b, c jsou kladné reálné konstanty. Tvořícími křivkami h_{y_0} nechť jsou paraboly v rovinách $\beta_{y_0} : y = y_0$, kde $y_0 \in \langle -a, a \rangle$, s vrcholem na úsečce g , protínající elipsu e a osou rovnoběžnou se souřadnicovou osou z . Vyřešíme opět tři případy:

- 1) $b < d$,
- 2) $b = d$,
- 3) $b > d$.

1) V tomto případě je rovnice paraboly:

$$h_{y_0} : (y = y_0) \cap \left[-\frac{ac^2}{ad \mp b\sqrt{a^2 - y_0^2}}(z - d) = x^2 \right].$$

Rovnice plochy π je:

$$\pi : z = -\frac{1}{ac^2} \left(ad \mp b\sqrt{a^2 - y^2} \right) x^2 + d. \quad (6.9)$$

Nebo můžeme rovnici (6.9) upravit vynásobením pravých stran rovnic:

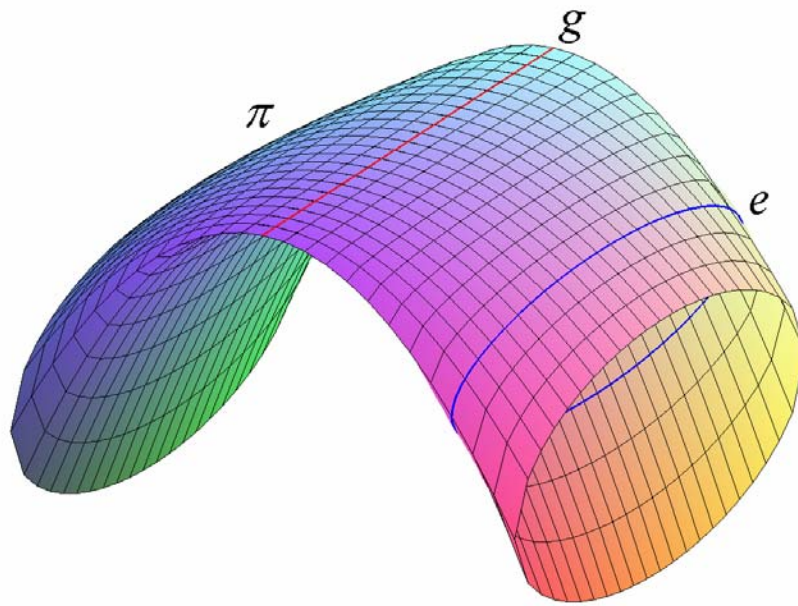
$$ac^2(z-d) + \left(ad - b\sqrt{a^2 - y^2} \right) x^2 = 0, \quad (6.10)$$

$$ac^2(z-d) + \left(ad + b\sqrt{a^2 - y^2} \right) x^2 = 0, \quad (6.11)$$

a položením tohoto součinu rovnému nule:

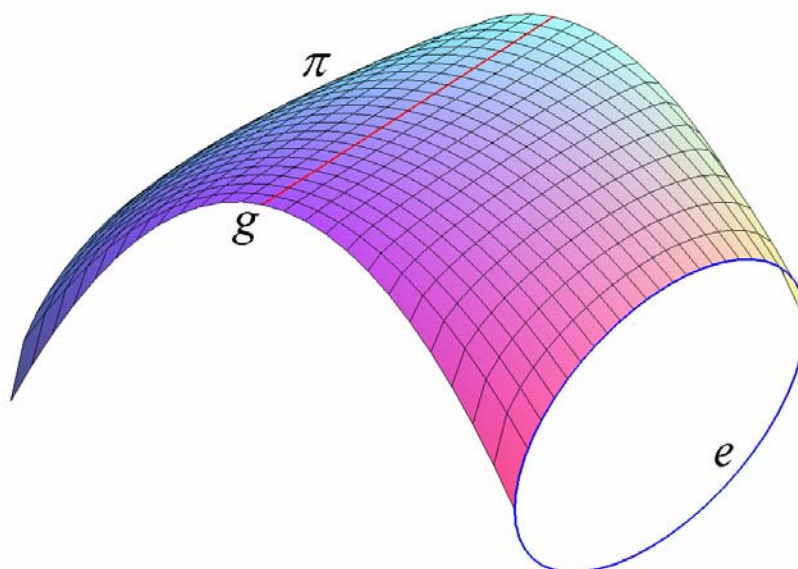
$$\pi : a^2 c^4 (z-d)^2 + 2a^2 c^2 dx^2 (z-d) + a^2 (d^2 - b^2) x^4 + b^2 x^4 y^2 = 0. \quad (6.12)$$

Z (6.12) je patrné, že plocha π je pouze šestého stupně.



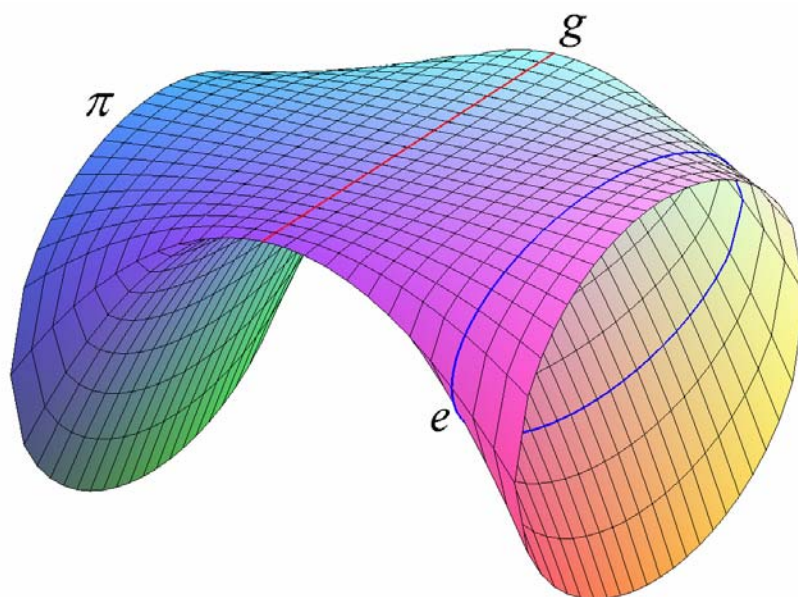
Obrázek 6.22: Klenba tvořená parabolami – první typ

Stavebně použitelná část prvního typu plochy π odpovídá rovnici (6.10). Trochu připomíná část prvního typu plochy ρ na obrázku 6.4.



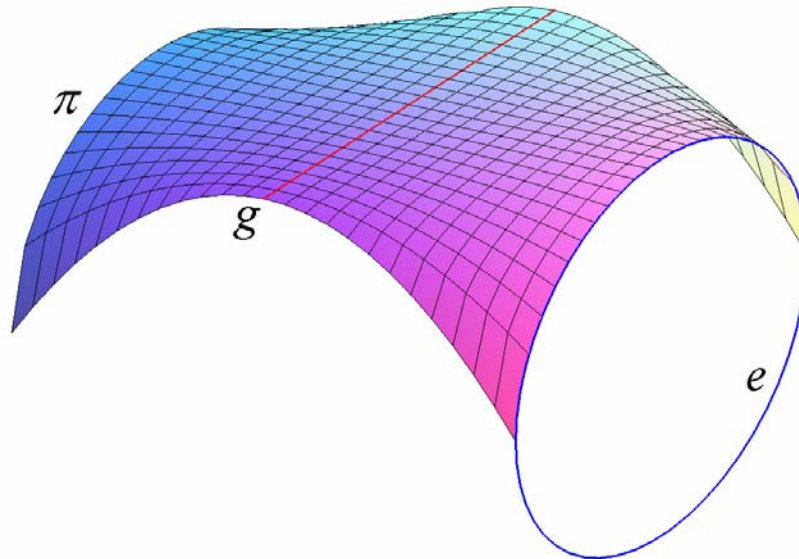
Obrázek 6.23: Klenba tvořená parabolami – první typ (stavebně využitelná část)

- 2) Rovnice (6.9) je rovnicí druhého typu plochy π pro $y \in \langle -a, a \rangle \setminus \{0\}$. Ověříme dosazením za $y = 0$ nejprve do (6.10), že rovnice přímky ${}^1h_0 : (y = 0) \cap (z = d)$ vyhovuje rovnici (6.10), a potom do (6.11), že rovnice paraboly ${}^2h_0 : -\frac{c^2}{2b}(z - b) = x^2$ vyhovuje rovnici (6.11). Rovnice (6.9) je rovnicí druhého typu plochy π .



Obrázek 6.24: Klenba tvořená parabolami – druhý typ

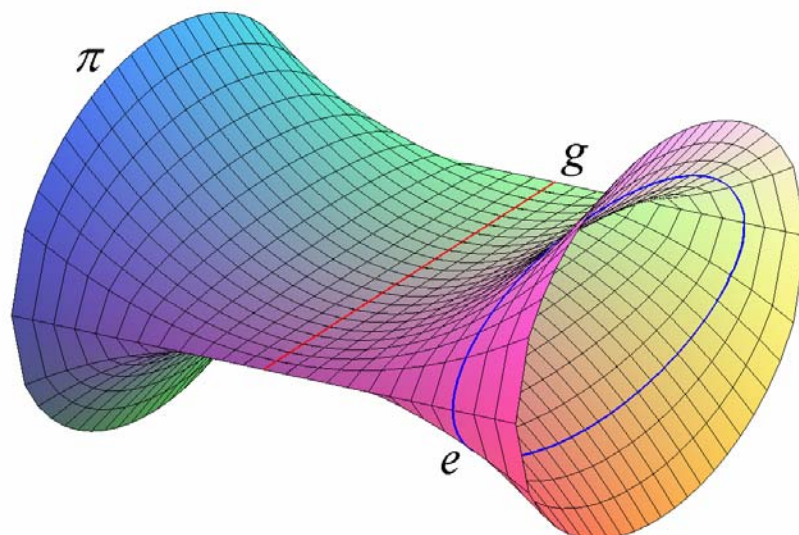
Stavebně používaná část druhého typu plochy π odpovídá rovnici (6.11), která je velmi podobná části plochy ρ z obrázku 6.8 (ta je však ohraničena eliptickými oblouky).



Obrázek 6.25: Klenba tvořená parabolami – druhý typ (stavebně využitelná část)

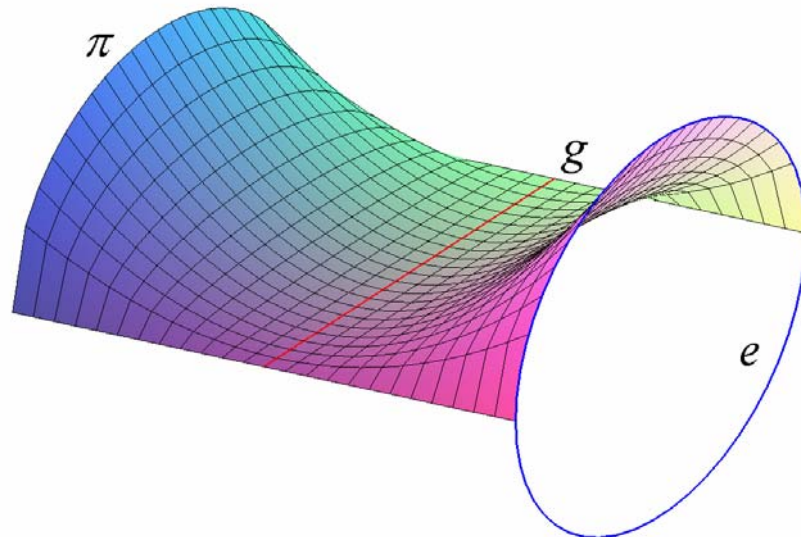
3) Třetí případ rozdělme opět na dva typy klenby.

3a) Když $0 = d < b$, rovnice třetího typu plochy π je stejná jako (6.9) pro $y \in (-a, a)$. Ověříme dosazením do (6.9), že rovnice přímek $h_{\pm a} : (y = \pm a) \cap (z = 0)$ vyhovují této rovnici. Rovnice (6.9) je zároveň rovnicí třetího typu plochy π .



Obrázek 6.26: Klenba tvořená parabolami – třetí typ

Stavebně využitelná část třetího typu plochy π odpovídající rovnici (6.10) trochu připomíná Hacarovu plochu prvního druhu s táhlem na obrázku 1.10 (Hacarova plocha prvního druhu obsahuje však pouze paraboly nebo přímky, kdežto třetí typ plochy π i elipsu) nebo elipticko-parabolickou klínovou plochu z obrázku 5.9 (ta ale obsahuje pouze dvě přímky).

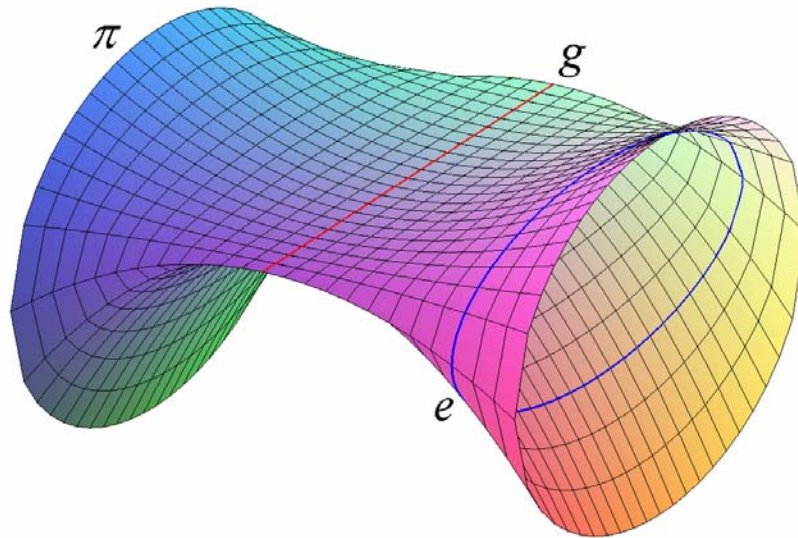


Obrázek 6.27: Klenba tvořená parabolami – třetí typ (stavebně využitelná část)

3b) Když $0 < d < b$, pak rovnice (6.9) je rovnicí čtvrtého typu plochy π pro $y \in \langle -a, a \rangle \setminus \left\{ \pm a \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}} \right\}$. Dosazením za $y^2 = a^2 \left(1 - \frac{d^2}{b^2} \right)$ nejprve do (6.10),

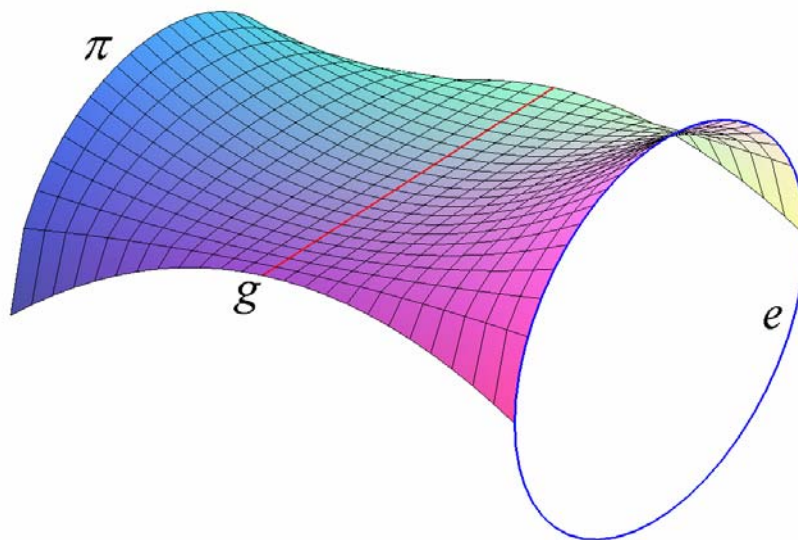
že rovnice přímek ${}^1h_{\pm a \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}}} : \left(y = \pm a \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}} \right) \cap (z = d)$ vyhovují rovnici (6.10), a potom do (6.11), že rovnice parabol ${}^2h_{\pm a \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}}} : \left(y = \pm a \sqrt{1 - \frac{d^2}{b^2}} \right) \cap \left[-\frac{c^2}{2d}(z - d) = x^2 \right]$ vyhovují rovnici (6.11).

Rovnice (6.9) je rovnicí čtvrtého typu plochy π .



Obrázek 6.28: Klenba tvořená parabolami – čtvrtý typ

Stavebně využitelná část čtvrtého typu plochy π odpovídá rovnici (6.10).



Obrázek 6.29: Klenba tvořená parabolami – čtvrtý typ (stavebně využitelná část)

Ukažme, že klenba tvořená parabolami je klínovou plochou. Protože v rovinách $y = y_0$, kde $y_0 \in \langle -a, a \rangle$ leží dvojice parabol nebo přímka a parabola, je obtížnější určit afinitu z definice 1. Křivky v rovinách $x = x_0$, kde $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, jsou elipsy, protože při konstantním x_0 lze rovnici (6.12) upravit na tvar:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{\left[z - d \left(1 - \frac{x_0^2}{c^2} \right) \right]^2}{\frac{b^2 x_0^4}{c^4}} = 1.$$

Když $x_0 = 0$, pak po dosazení do (6.12) získáme rovnici $(z-d)^2 = 0$, což je rovnice přímky dvojnásob počítané. Soustavu souřadnou nyní otočíme o 90° okolo souřadnicové osy z a poté posuňme ještě o vektor $(0, -c, -d)$. Otočenou a posunutou plochu π označme $\bar{\pi}$. Pokud $b \neq d$ vezměme jako řídicí křivky plochy $\bar{\pi}$ v rovině $\alpha : x = 0$ křivku (dvojici parabol):

$$\bar{g} : (x = 0) \cap \left[-\frac{c^2}{d \mp b} z = (y + c)^2 \right],$$

a v rovině $\beta : y = 0$ křivku:

$$h : (y = 0) \cap \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{(z + d)^2}{b^2} = 1 \right].$$

Křivky \bar{g} , h se protínají na souřadnicové ose z a v rovinách $\beta_{y_0} : y = y_0$ leží elipsy:

$$h_{y_0} : (y = y_0) \cap \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(z + \frac{d}{c^2} y_0^2 \right)^2}{\frac{b^2}{c^4} y_0^4} = 1 \right],$$

pro něž by se ukázal podobně jako u plochy $\bar{\rho}$ pomocí dělicího poměru afinní vztah mezi elipsami \bar{h}_{y_0} , což je pravoúhlý průmět elipsy h_{y_0} do roviny β , a h .

Další ukázkou klenby je velice zajímavá plocha \mathcal{G} tvořená hyperbolami a elipsami. Mějme v rovině $\gamma : z = 0$ dané dvě rovnoosé hyperboly rovnicemi $f_{\pm} : y = \pm \frac{k}{x}$, kde k je kladná reálná konstanta. Dále buď v rovině $\alpha : x = 0$ dána přímka $g : z = d$. Tvořícími křivkami plochy \mathcal{G} v rovinách $\beta_{y_0} : y = y_0$, kde $y_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, necht' jsou elipsy h_{y_0} se středy na souřadnicové ose y , s hlavními (resp. vedlejšími) vrcholy na hyperbolách f_{\pm} a s vedlejšími (resp. hlavními) vrcholy na přímce g . Jejich rovnice jsou:

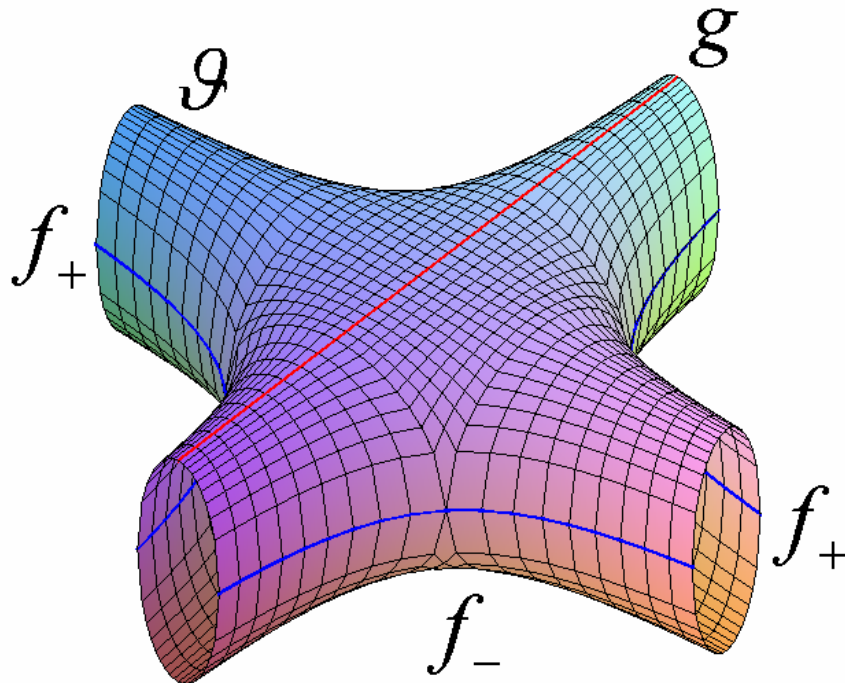
$$h_{y_0} : (y = y_0) \cap \left(\frac{x^2}{k^2} + \frac{z^2}{d^2} = 1 \right).$$

Rovnice plochy \mathcal{G} je pro $y_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$:

$$\mathcal{G} : z^2 = -\frac{d^2}{k^2} x^2 y^2 + d^2. \quad (6.13)$$

Pro $y_0 = 0$ je tvořící křivka h_0 dvojice rovnoběžných přímek s rovnicí $(y = 0) \cap (z^2 = d^2)$.

Když dosadíme za $y = 0$ do rovnice (6.13) získáme rovnici křivky h_0 , proto je rovnice (6.13) rovnicí plochy \mathcal{G} pro $y \in \mathbf{R}$.



Obrázek 6.30: Klenba určená hyperbolami

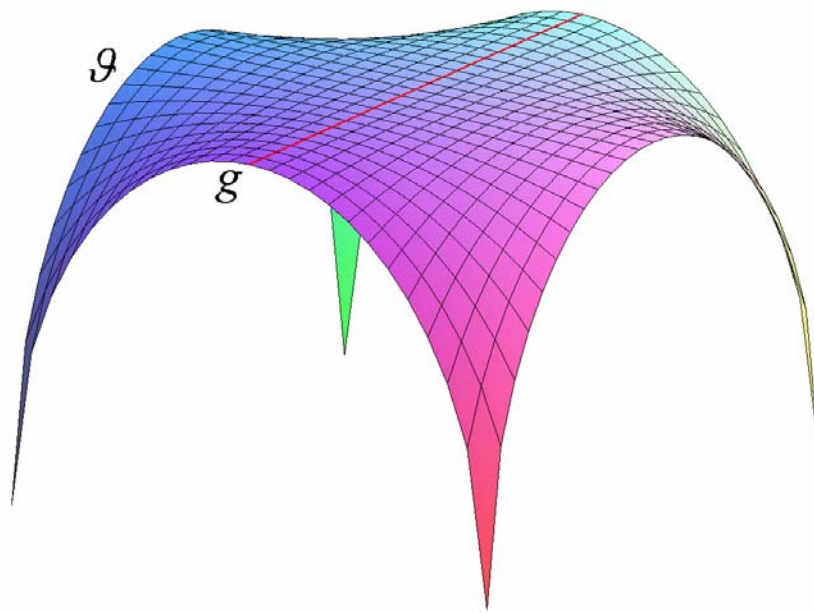
Podívejme se na část plochy \mathcal{G} s rovnicí:

$$z = d\sqrt{1 - \frac{x^2 y^2}{k^2}},$$

nad dvourozměrným intervalem $[x, y] \in \langle -d, d \rangle \times \langle -d, d \rangle$. Uvidíme, že tato část plochy \mathcal{G} na následujícím obrázku 6.30 je podobná části druhého typu klenby ρ tvořené elipsami z obrázku 6.8. Navíc, když se zaměříme na typ tvořících křivek plochy \mathcal{G} v rovinách $\alpha_{x_0} : x = x_0$, kde $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, zjistíme, že vyhovují rovnici:

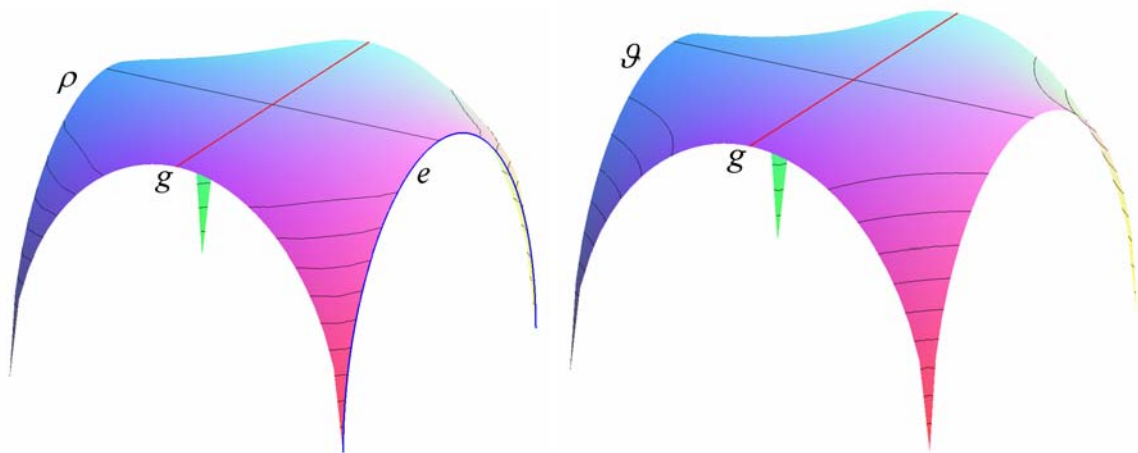
$$(x = x_0) \cap \left(\frac{y^2}{k^2} + \frac{z^2}{d^2} = 1 \right),$$

a jsou to tedy elipsy.



Obrázek 6.31: Klenba určená hyperbolami (stavebně využitelná část)

Lépe rozpoznáme rozdíl mezi plochami, když se podíváme na jejich „vrstevnice“. První plocha je část plochy ρ , druhá plocha je část plochy \mathcal{G} . Vrstevnicemi části plochy \mathcal{G} jsou hyperboly (v rovnici (6.13) je konstantní hodnota z), kdežto vrstevnice části plochy ρ viditelně hyperbolami nejsou.



Obrázek 6.32: Srovnání dvou druhů kleneb (stavebně využitelné části)

Poslední vlastnost plochy \mathcal{G} , kterou bychom měli zjistit, je, zda se jedná o klínovou plochu podle definice 1. Plochu \mathcal{G} otočíme o 90° okolo souřadnicové osy y a poté ještě posuneme o vektor $(-d, 0, 0)$. Takto transformovanou plochu \mathcal{G} označme $\overline{\mathcal{G}}$ a její rovnice je $d^2(y+d)^2 z^2 + k^2 x^2 = d^2 k^2$. Za řídicí křivku \overline{g} v rovině $\alpha : x = 0$ považujeme dvojici hyperbol s rovnicí $(x=0) \cap \left[z^2 = \frac{k^2}{(y+d)^2} \right]$ a za řídicí křivku h

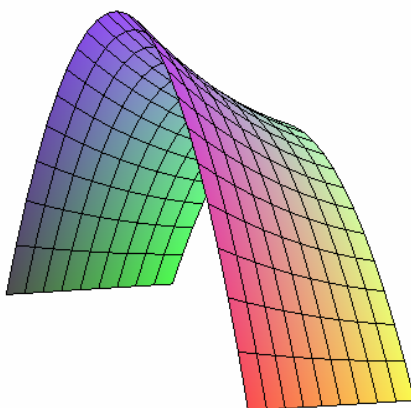
v rovině $\beta : y = 0$ elipsu s rovnicí $(y = 0) \cap \left(\frac{x^2}{d^2} + \frac{z^2}{\frac{k^2}{d^2}} = 1 \right)$. Pravoúhlé průměty \bar{h}_{y_0}

tvořících elips h_{y_0} v rovinách $\beta_{y_0} : y = y_0$, kde $y_0 \in \mathbf{R} \setminus \{-d\}$, do roviny jsou ve vztahu kolmé afinity s elipsou h . V rovině β_{-d} leží dvojice rovnoběžných přímek h_{-d} plochy $\bar{\mathcal{G}}$ s rovnicí $(y = -d) \cap (x^2 = d^2)$. Plocha $\bar{\mathcal{G}}$ je klínovou plochu.

7. Užití klínových ploch

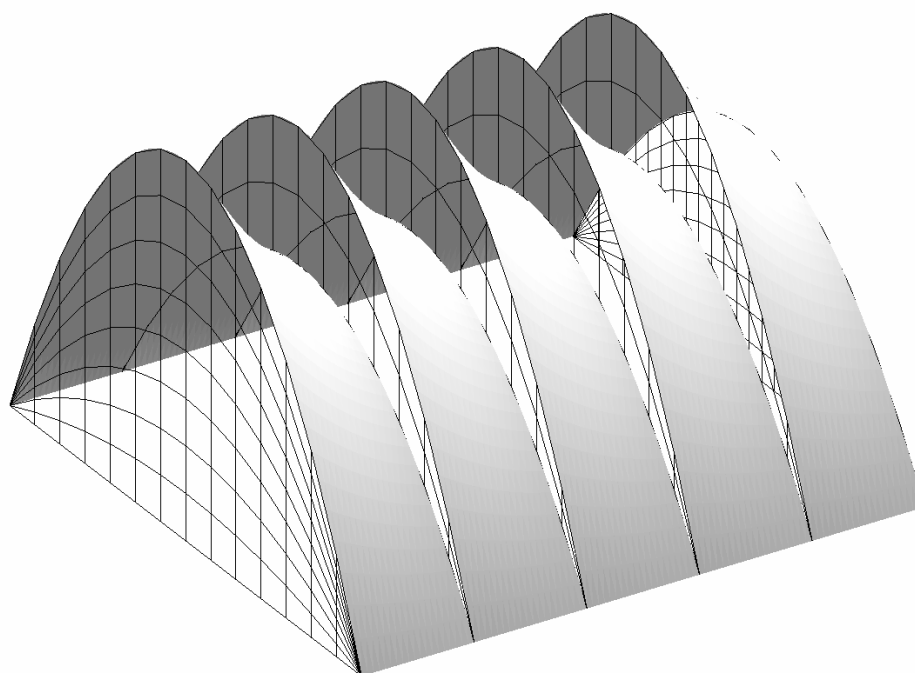
Na úvod poznamenejme, že se v praxi tyto plochy vyskytují velmi zřídka. Ač mnohé z nich vymyslel a matematicky popsal Čech Bedřich Hacar, nenašla jsem žádnou stavbu v České republice, kde byly tyto plochy využity. Ale jednoduchou představu si vytvoříme pomocí názorných příkladů.

Hacarova plocha prvního druhu nám poslouží k zaklenutí tovární haly velkého rozměru, jak je vidět z obrázku 7. Stačí nám pohled na jedno žebro.



Obrázek 7.1: Hacarova plocha prvního druhu

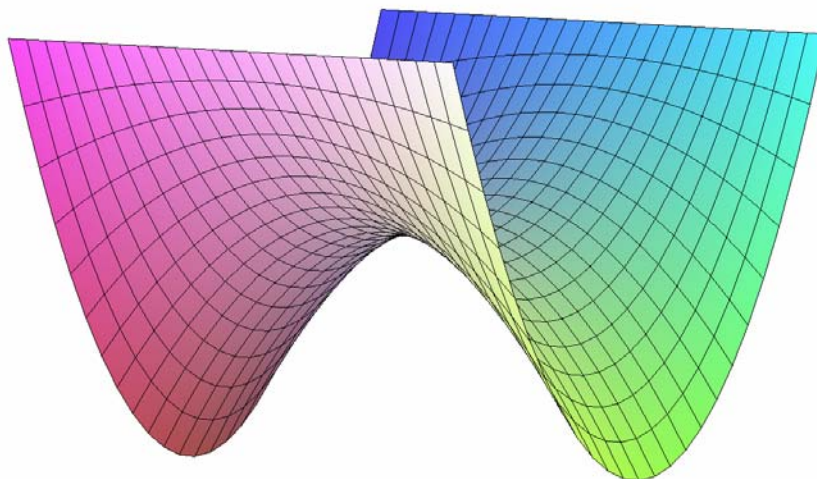
Zařadíme několik žebér za sebou. Protože používáme pouze část Hacarovy plochy prvního druhu, vzniká na jedné straně parabola s vrcholem o větší z -ové souřadnici než na druhé straně. Při řazení se mezi žebry vytvoří mezery, které po vyplnění skleněnými tabulkami poskytnou dostatečné množství světla v hale.



Obrázek 7.2: Zaklenutí tovární haly

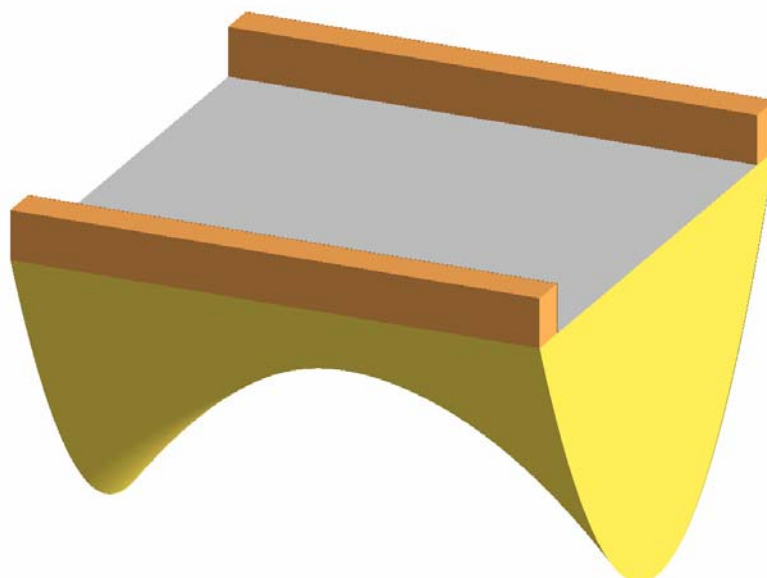
Takové zaklenutí bylo postaveno, ale místo klínových ploch stavaři využili hyperbolického paraboloidu a konoidu (nebyl dotykový), aby zaručili dosednutí k obvodovému zdivu úsečkou.

Použijeme Hacarovu klínovou plochu druhého druhu zakončenou dvěma částmi parabol a dvěma úsečkami.



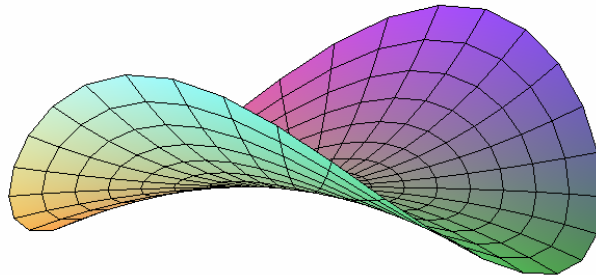
Obrázek 7.3: Hacarova plocha druhého druhu

Úsečky vytvoří krajnice silnice a zbytek plochy rozloží tlaky na silnici způsobené použitým materiálem a následně i dopravou po ní. Ukážeme si jednoduchou variantu se silnicí a svodidly podél.



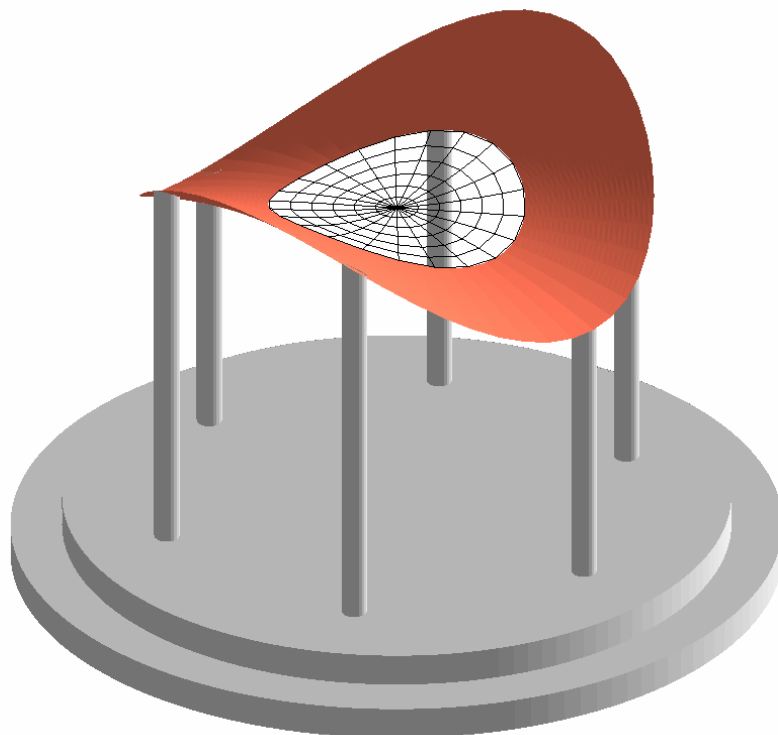
Obrázek 7.4: Návrh mostní podpěry

Využijeme část Hacarovy plochy prvního druhu, kterou jsme velice dobře prozkoumali ve 2. kapitole. Ač jsme se u klínových ploch snažili, aby byly nad obdélníkovými půdorysy zakončené úsečkami, uvažujme nyní klínovou plochu nad kruhem. (Poznamenejme ještě, že pro náš následující obrázek používáme cylindrické souřadnice. To se projeví na křivkách na ploše.)



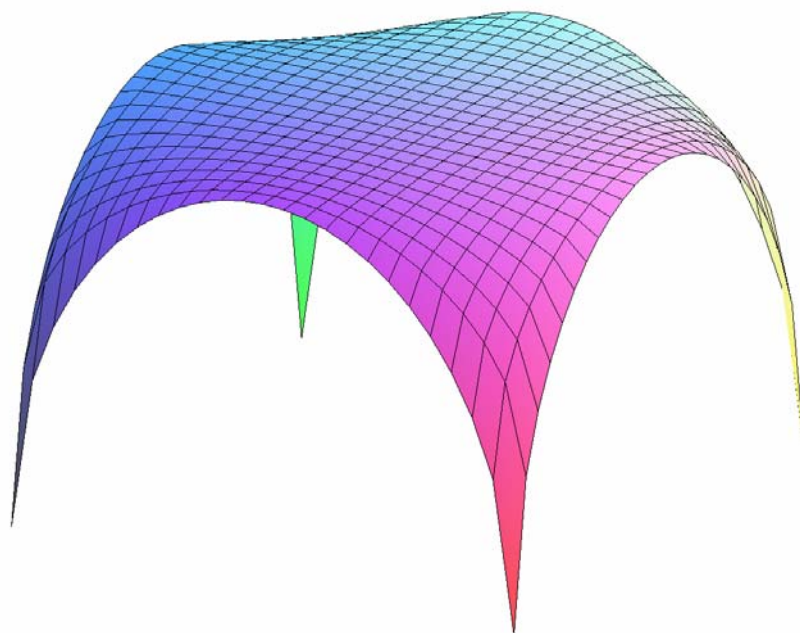
Obrázek 7.5: Klenba nad kruhovým půdorysem

Ukažme si nyní takovou plochu jako zastřešení jednoduchého altánku. Střechu zkombinujeme z několika materiálů. Pro její neobvyklý tvar použijeme měděný, vyztužený plech. „Oko“ uprostřed altánku je z ocelového mřížoví vyplněného malými skleněnými tabulkami. Sloupky a podstavec jsou betonové. Můžeme ale využít i celou řadu jiných vhodných materiálů.



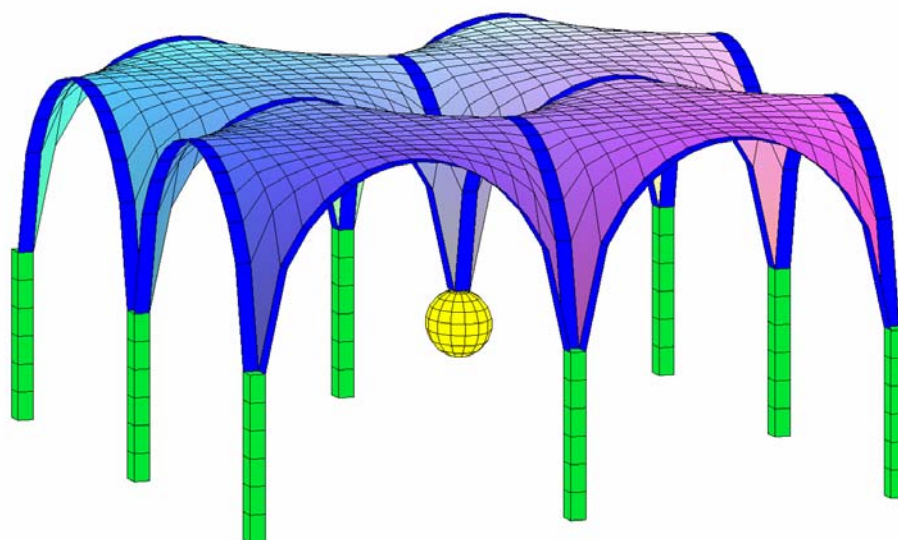
Obrázek 7.6: Návrh altánu

K zaklenutí nějakého prostoru můžeme též použít čtyři části klenby tvořené elipsami ohraničenou čtyřmi eliptickými oblouky, které zařadíme vedle sebe.

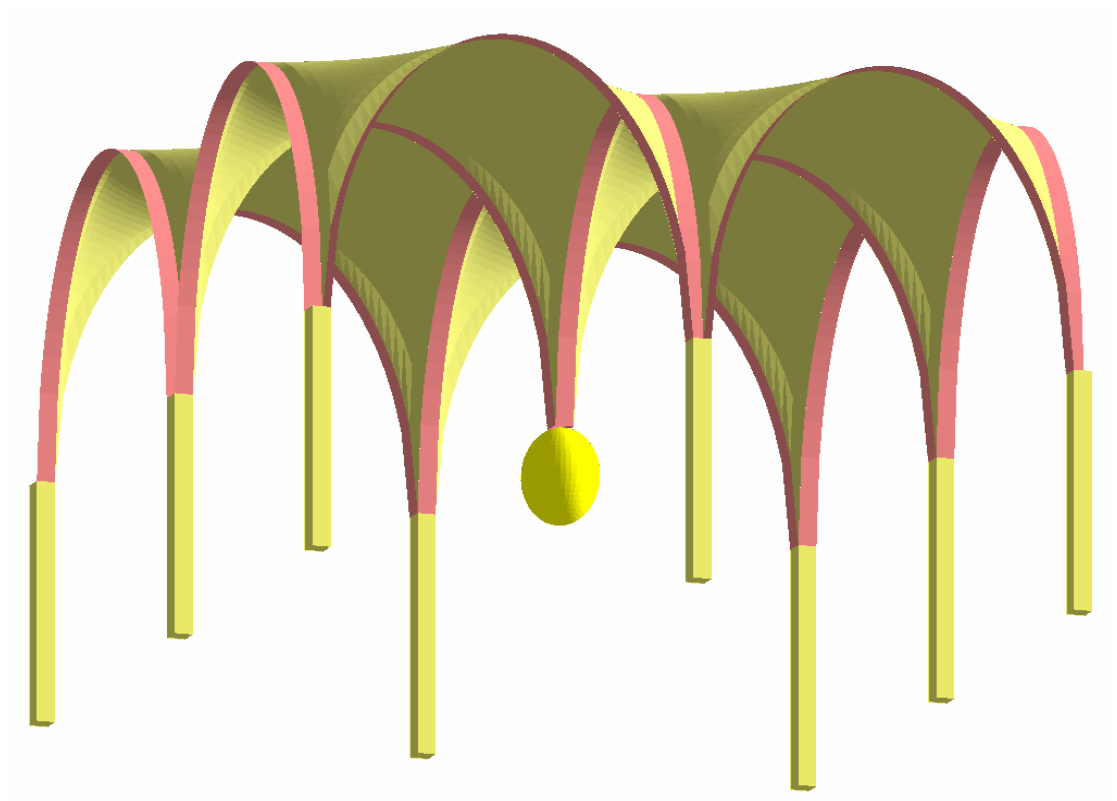


Obrázek 7.7: Část klenby

Doplníme částmi eliptických válcových ploch, lucernou tvaru kulové plochy a podpěrnými kvádrovými sloupy.



Obrázek 7.8: Rozvržení zaklenutí



Obrázek 7.9: Zaklenutí

Přílohy

Trocha teorie na závěr

Klínové plochy jsme v definici 1 zavádli geometricky a v některých případech bylo obtížné ověřit, že plocha, kterou jsme zkonstruovali, je opravdu plochou klínovou. Mnohem jednodušší, ale geometrii vzdálenější, je definovat tyto plochy typem rovnic, které ji vyjadřují, a potom už jen rovnice porovnávat (podobně jako jsme srovnávali rovnice Hacarových ploch v kapitole 3).

Doktor Václav Havel zavedl klínové plochy rovnicemi v [2]. Shrňme zjednodušeně jeho poznatky. Nadále předpokládejme pouze reálné funkce reálných proměnných. Definujeme *kolmou afinitu* v Eukleidovské rovině \mathbf{E}^2 jako zobrazení z \mathbf{E}^2 do \mathbf{E}^2 , existuje-li kartézská soustava souřadnic a nenulové reálné číslo k tak, že pro každý vzor $[x', y'] \in \mathbf{E}^2$ a jeho obraz $[x, y] \in \mathbf{E}^2$ platí: $x' = x$, $ky' = y$. Přímkou $y = 0$ nazvěme osou afinity, směr přímky $x = 0$ směrem afinity a číslo k charakteristikou afinity. Uvědomme, že afinity s daným směrem tvoří grupu a kolmé afinity s daným směrem její podgrupu (tato neobsahuje elaci). Obecná rovnice kolmé afinity v rovině \mathbf{E}^2 , v dané kartézské soustavě souřadnic a se směrem shodným se směrem přímky $x = 0$ je $x = x'$, $y = ky' + q$, kde k je opět charakteristika a osa afinity, když $k \neq 1$, je přímka $y = q/(1 - k)$.

Nadále předpokládáme, že funkce $f(x)$ je definována na množině $I_x \subseteq \mathbf{R}$ a funkce $g(y)$, $h(y)$ na množině $I_y \subseteq \mathbf{R}$. Označme $\kappa : z = f(x) \cdot g(y) + h(y)$ (je to množina bodů, které odpovídají dané rovnici).

Ukažme afinní vztah mezi množinami $N_1 : \kappa \cap (y = y_1)$ a $N_2 : \kappa \cap (y = y_2)$, kde $y_1, y_2 \in I_y$ jsou libovolná. Pokud neleží žádná z množin N_1 , N_2 na rovnoběžce s rovinou $z = 0$, pak lze množinu N_1 posunout rovnoběžně s rovinou $x = 0$ na množinu $N'_1 \subset (y = y_2)$ tak, že N'_1 je afinní s N_2 pro osu $(y = y_2) \cap (z = 0)$ a směr $(y = y_2) \cap (x = 0)$.

D ů k a z: Kdyby $g(y_1) = 0 = g(y_2)$, pak by $N_1 : [z = h(y_1)] \cap (y = y_1)$ i $N_2 : [z = h(y_2)] \cap (y = y_2)$ ležely na rovnoběžkách s rovinou $z = 0$ a tvrzení platí.

Nechť platí $g(y_1) \neq 0 \neq g(y_2)$. Posunutím o vektor $(0, y_2 - y_1, h(y_2)g(y_1)g(y_2)^{-1} - h(y_1))$ přejde N_1 v N'_1 . Jak jsme došli k první a ke druhé souřadnici je zřejmé. U třetí souřadnice vektoru jsme porovnávali rovnici $N_2 : [z = f(x)g(y_2) + h(y_2)] \cap (y = y_2)$ a $N_1 : [z = f(x)g(y_1) + h(y_1)] \cap (y = y_1)$. Množina $N'_1 : [z = f(x)g(y_1) + h(y_1) + p(y_1, y_2)] \cap (y = y_2)$, kde funkce $p(y_1, y_2)$ vyjadřuje posunutí. Protože z afinního vztahu platí:

$$k \cdot [f(x)g(y_1) + h(y_1) + p(y_1, y_2)] = f(x)g(y_2) + h(y_2),$$

je $k = g(y_2)g(y_1)^{-1}$ a $p(y_1, y_2) = h(y_2)g(y_1)g(y_2)^{-1} - h(y_1)$. Sestrojíme-li nyní afinitu s osou $(y = y_2) \cap (z = 0)$, směrem $(y = y_2) \cap (x = 0)$ a charakteristikou $g(y_2)g(y_1)^{-1}$, zobrazí se N'_1 na N_2 .

Navíc pokud nějaká plocha s rovnicí $z = F(x, y)$ obsahuje množiny vzájemně afinní jako výše, pak ji lze přepsat do tvaru $z = f(x) \cdot g(y) + h(y)$.

Nechť $F(x, y)$ je funkce definovaná na $I_x \times I_y$ (pro jisté množiny reálných čísel I_x, I_y). Nechť $N_1 : [z = F(x, y)] \cap (y = y_1)$, $N_2 : [z = F(x, y)] \cap (y = y_2)$, kde y_1, y_2 jsou libovolná z I_y , žádná z množin N_1, N_2 neleží na rovnoběžce s rovinou $z = 0$ a množinu N_1 lze posunout rovnoběžně s rovinou $x = 0$ na množinu $N'_1 \subset (y = y_2)$ tak, že N'_1 je afinní s N_2 pro osu $(y = y_2) \cap (z = 0)$ a směr $(y = y_2) \cap (x = 0)$. Potom lze přepsat rovnici $z = F(x, y)$ do tvaru $z = f(x) \cdot g(y) + h(y)$, kde funkce $f(x)$ je definována na množině I_x a funkce $g(y), h(y)$ na množině I_y .

D ů k a z: Pokud pro každé $y_0 \in I_y$ je $F(x, y_0)$ konstantní, pak je tvrzení zřejmé, protože množina $N_0 : [z = F(x, y)] \cap (y = y_0)$ leží na rovnoběžce s rovinou $z = 0$. Předpokládejme, že existuje neprázdná množina $I'_y \subset I_y$ tak, že pro každé $y_0 \in I'_y$ není $F(x, y_0)$ konstantní. Zvolme $y_1 \in I_y$ pevně a položme $f(x) = F(x, y_1)$. Pro libovolné $y_2 \in I'_y$ získáme $N_2 : [z = F(x, y_2)] \cap (y = y_2)$ posunutím $N_1 : [z = f(x)] \cap (y = y_1)$ a vhodnou afinitou. Posuňme N_1 rovnoběžně s přímkou $(x = 0) \cap (z = 0)$ do roviny $y = y_2$. Pak posunutá N_1 je $N'_1 : [z = f(x)] \cap (y = y_2)$. Pro afinitu mezi N'_1, N_2 platí rovnice: $x = x', k \cdot f(x) + q = F(x, y_2)$ (ze vztahu kolmé afinity existují taková čísla k, q). k, q jsou pak funkčními hodnotami nějakých funkcí $g(y), h(y)$. Dokažme jednoznačnost funkcí $g(y), h(y)$. Kdyby:

$$f(x)g(y) + h(y) = f(x)G(y) + H(y)$$

a zároveň $g(y) \neq G(y)$, pak $f(x) = [H(y) - h(y)] \cdot [g(y) - G(y)]^{-1}$ a funkce $f(x)$ je konstantní, protože pravá strana neobsahuje proměnnou x , což vede ke sporu. Tedy $g(y) = G(y)$ a $h(y) = H(y)$.

Další důležité tvrzení je o vlastnostech množin $M_0 : \kappa \cap (x = x_0)$. Přesněji řečeno v jakém případě jsou dvě takové množiny afinní.

Předpokládejme, že funkce $f(x), g(y), h(y)$ nejsou konstantní. Buď $M_1 : \kappa \cap (x = x_1), M_2 : \kappa \cap (x = x_2)$, kde x_1, x_2 jsou libovolná z I_x , a žádná z množin M_1, M_2 neleží na rovnoběžce s rovinou $z = 0$. Množinu M_1 lze posunout rovnoběžně s rovinou $y = 0$ na množinu $M'_1 \subset (x = x_2)$ tak, že M'_1 je afinní s M_2 pro osu $(x = x_2) \cap (z = 0)$ a směr $(x = x_2) \cap (y = 0)$, právě tehdy, když existují konstantní čísla A, B a platí:

$$g(y) = A \cdot h(y) + B. \quad (1)$$

D ů k a z: Dokažme nejdříve implikaci zprava doleva. Dosazením $g(y) = A \cdot h(y) + B$ do $\kappa : z = f(x)g(y) + h(y)$ dostaneme rovnici $z = h(y)[A \cdot f(x) + 1] + B \cdot f(x)$, které lze přepsat do tvaru $z = F(y) \cdot G(x) + H(x)$. Jednoduchou záměnou proměnných x a y lze použít důkaz, který jsme prováděli jako první.

Implikace zleva doprava je složitější. Je-li funkce $f(x_0)g(y) + h(y)$ pro každé $x_0 \in I_x$ konstantní, pak také g, h jsou konstantní, což odporuje předpokladu tvrzení. Existuje $x_1 \in I_x$ tak, že $f(x_1)g(y) + h(y)$ není konstantní. Ve druhém důkazu jsme odvodili (opět zaměníme proměnné), že pro každé $x \in I_x$ existují funkce $m(x), n(x)$ platí rovnice:

$$f(x)g(y) + h(y) = [f(x_1)g(y) + h(y)] \cdot m(x) + n(x). \quad (2)$$

Pokud:

1) pro jisté $x \in I_x$ platí $m(x)=1$, pak $[f(x)-f(x_1)] \cdot g(y) = n(x)$.

1a) Kdyby $f(x) \neq f(x_1)$, pak g je konstantní, což je v rozporu s předpokladem.

1b) Tedy je $f(x) = f(x_1)$ a rovnost (2) platí pro každé reálné $g(y)$.

Rovnice $m(x)=1$ nemůže platit pro každé $x \in I_x$, protože by to znamenalo, že f je konstantní.

2) Pokud pro jisté $x \in I_x$ platí $m(x) \neq 1$, pak:

2a) kdyby $f(x) = f(x_1)m(x)$, je $h(y)[m(x)-1] + n(x) = 0$ a h je konstantní funkce,

2b) a tedy platí $f(x) \neq f(x_1)m(x)$.

Z rovnice (2) vyloučíme $g(y)$:

$$g(y) = h(y) \cdot [m(x)-1] \cdot [f(x) - f(x_1) \cdot m(x)]^{-1} + n(x) \cdot [f(x) - f(x_1) \cdot m(x)]^{-1}.$$

Položme:

$$A(x) = [m(x)-1] \cdot [f(x) - f(x_1) \cdot m(x)]^{-1},$$

$$B(x) = n(x) \cdot [f(x) - f(x_1) \cdot m(x)]^{-1}.$$

Pak má předchozí tvar rovnice (2) tvar $g(y) = A(x) \cdot h(y) + B(x)$. Necht' $x_2, x_3 \in I_x$ jsou libovolné prvky, pro něž je $m(x_2) \neq 1 \neq m(x_3)$. Potom platí rovnice $h(y) \cdot A(x_2) + B(x_2) = h(y) \cdot A(x_3) + B(x_3)$. Kdyby $A(x_2) \neq A(x_3)$, pak by oproti předpokladu bylo h konstantní. Tedy $A(x_2) = A(x_3)$ a následkem toho také $B(x_2) = B(x_3)$. Pro každé $x \in I_x$, pro které platí $m(x) \neq 1$, jsou $A(x)$, $B(x)$ konstantní.

Aby byly splněny oba případy platí rovnice (1).

Ve vyloučených případech, kdy je některá z funkcí $f(x)$, $g(y)$, $h(y)$ konstantní, lze množinu M_1 posunout rovnoběžně s rovinou $y = 0$ na množinu $M'_1 \subset (x = x_2)$ tak, že M'_1 je afinní s M_2 pro osu $(x = x_2) \cap (z = 0)$ a směr $(x = x_2) \cap (y = 0)$ bez dalších předpokladů.

Rovnice $z = f(x) \cdot g(y) + h(y)$ je pak „symetrická“. Je-li f konstantní, pak je rovna $z = f \cdot g(y) + h(y)$. Je-li g konstantní, je $z = f(x) \cdot g + h(y)$. Je-li h konstantní, je $z = f(x) \cdot g(y) + h$. Jsou-li f , g konstantní, je $z = f \cdot g + h(y)$. Jsou-li f , h konstantní, je $z = f \cdot g(y) + h$. Jsou-li g , h konstantní, je $z = f(x) \cdot g + h$. Jsou-li f , g , h konstantní, je $z = f \cdot g + h$.

Předpokládejme, že *nekonstantní* funkce $f(x)$ je definována na množině I_x a funkce $g(y)$, $h(y)$ na intervalu I_y . Označme $\kappa : z = f(x) \cdot g(y) + h(y)$. Necht' má funkce z v každém bodě $I_x \times I_y$ spojitou parciální derivaci podle y . Pak také g , h mají v každém bodě I_y spojitou derivaci.

D ů k a z: Protože je f nekonstantní, existují čísla $x_1, x_2 \in I_x$ tak, že $f_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = f_2$.

Vyšetřujeme soustavu rovnic pro $g(y)$, $h(y)$:

$$m(y) = f_1 \cdot g(y) + h(y)$$

$$n(y) = f_2 \cdot g(y) + h(y)$$

Determinant soustavy je roven nenulovému výrazu $f_1 - f_2$ a platí:

$$g(y) = \frac{1}{f_1 - f_2} [m(y) - n(y)],$$

$$h(y) = \frac{1}{f_1 - f_2} [f_1 \cdot n(y) - f_2 \cdot m(y)].$$

Na pravých stranách je rozdíl spojitě diferencovatelných funkcí, protože platí:

$$\frac{d m}{d y} = \frac{\partial z}{\partial y}(x_1, y),$$

$$\frac{d n}{d y} = \frac{\partial z}{\partial y}(x_2, y).$$

Definujme explicitní plochu klínovou. Necht' jsou množiny I_x, I_y jednorozměrné oblasti. Funkce $f(x)$ necht' je definována na množině I_x a funkce $g(y), h(y)$ na množině I_y . Necht' mají funkce $f(x), g(y), h(y)$ všude spojitou derivaci. Označme $\kappa : z = f(x) \cdot g(y) + h(y)$. Pak plochu κ nazveme *explicitní klínovou plochou*.

Mezi explicitní plochy z těch, co jsme zmínili, patří parabolická válcová plocha, hyperbolický paraboloid, Hacarova plocha prvního, druhého i třetího druhu, Parabolicko-parabolická klínová plocha a sinovo-sinová klínová plocha.

Ještě nám zbývají klínové plochy, které nevyhovují definici explicitních klínových ploch. Kromě nich totiž ještě doktor Václav Havel ve své práci zavedl implicitní klínové plochy.

Nejprve definujme křivku a plochu. Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ je definovaná na dvourozměrné oblasti O_2 a má na O_2 spojitě a nikde současně nulové první parciální derivace. Má-li rovnice $f(x, y) = 0$ v O_2 alespoň jedno řešení, pak množinu $l : f(x, y) = 0$ nazveme křivkou. V trojrozměrném případě mějme funkci $f(x, y, z)$ definovanou nad trojrozměrnou oblastí O_3 , kde má tato funkce spojitě a nikde současně nulové všechny první parciální derivace. Má-li rovnice $f(x, y, z) = 0$ v O_3 alespoň jedno řešení, pak množinu $\lambda : f(x, y, z) = 0$ nazveme plochou.

Dále definujme funkce $G(y), H(y)$, které mají v jednorozměrné oblasti J spojitě první derivace, a pro každé $y \in J$ platí $G(y) \neq 0$. Buď $F(x, \bar{z})$ funkce definovaná na dvojrozměrné oblasti O_2 tak, že $l : F(x, \bar{z}) = 0$ je křivka v rovině uspořádaných dvojic $[x, \bar{z}]$. Pak funkce $F(x, z \cdot G(y) + H(y))$ je definovaná na oblasti $O_3 = \{[x, y, z] : [x, \bar{z}] \in O_2, y \in J, z \in (-\infty, +\infty), \bar{z} = z \cdot G(y) + H(y)\}$. Označme ještě $\mu : F(x, z \cdot G(y) + H(y)) = 0$.

Ještě bychom měli ukázat, že množina μ je plochou ve smyslu předchozí definice.

D ů k a z: Protože množina $F(x, \bar{z}) = 0$ určuje křivku ve smyslu předešlé definice, je množina $[F(x, \bar{z}) = 0] \cap O_2$ neprázdná. Existuje $[x_0, \bar{z}_0] \in O_2$ takové, že $F(x_0, \bar{z}_0) = 0$. Z rovnice $z = [\bar{z} - H(y_0)] \cdot G(y_0)^{-1}$ pak vyplývá, že pro každé $y_0 \in J$ je množina $\mu \cap (y = y_0)$ neprázdná. Snadné je ověřit, že existují spojitě parciální derivace:

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} = G(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}.$$

Tyto derivace se nemohou současně rovnat nule, protože rovnice $F(x, \bar{z})$ určuje křivku a současně nejsou derivace $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ nulové.

Plochu μ nazveme *implicitní klínovou plochou*.

Pokud je μ implicitní klínová plocha, pak pro libovolná $y_1, y_2 \in J$ a neprázdné množiny $N_1 : \mu \cap (y = y_1), N_2 : \mu \cap (y = y_2)$, lze křivku N_1 posunout rovnoběžně

s rovinou $x=0$ na křivku $N'_1 \subset (y=y_2)$ tak, že N'_1 je afinní s N_2 pro osu $(y=y_2) \cap (z=0)$ a směr $(y=y_2) \cap (x=0)$.

D ů k a z: Označme křivku $l: [F(x, z)=0] \cap (y=0)$. Posunutím o vektor $(0, y_0, H(y_0))$ přejde křivka l v křivku $l': [F(x, z+H(y_0))=0] \cap (y=y_0)$. Afinitou o ose $(y=y_0) \cap (z=0)$, směrem $(y=y_0) \cap (x=0)$ a charakteristikou $G^{-1}(y_0)$ se zobrazí křivka l' na křivku $N_0: \mu \cap (y=y_0)$. Křivky $N_1: \mu \cap (y=y_1)$, $N_2: \mu \cap (y=y_2)$ posuňme rovnoběžně s rovinou $x=0$ do roviny $y=y_0$ na křivky N'_1, N'_2 . Kolmá afinita mezi N'_1 a N_0 má stejnou osu jako kolmá afinita mezi N'_2 a N_0 . Skládáním zobrazení dostaneme i zobrazení mezi N'_1 a N'_2 .

Naopak když daná plocha μ neobsahuje rovnoběžky s přímkou $(x=0) \cap (y=0)$ a pro libovolná $y_1, y_2 \in J$ a neprázdné množiny $N_1: \mu \cap (y=y_1)$, $N_2: \mu \cap (y=y_2)$ lze křivku N_1 posunout rovnoběžně s rovinou $x=0$ na křivku $N'_1 \subset (y=y_2)$ tak, že N'_1 je afinní s N_2 pro osu $(y=y_2) \cap (z=0)$ a směr $(y=y_2) \cap (x=0)$, pak je μ implicitní klínovou plochou.

D ů k a z: Vyšetřujeme pouze taková y_0 pro něž je množina $N_0: \mu \cap (y=y_0)$ neprázdná. Pro každé takové y_0 existuje křivka $l: [F(x, z)=0] \cap (y=0)$ (daná jistou funkcí F), která posunutím rovnoběžným s rovinou $x=0$ přejde v křivku $l' \subset (y=y_0)$, jež je afinní s N_0 vzhledem k ose $(y=y_0) \cap (z=0)$ a směru $(y=y_0) \cap (x=0)$. To znamená (podle druhého tvrzení), že platí rovnice $z = Z \cdot G(y_0) + H(y_0)$, kde $G(y_0) \neq 0$, $H(y_0)$ jsou jistá reálná čísla a z, Z jsou třetí souřadnice odpovídajících si křivek l', N_0 . Tedy platí $\mu: F(x, z \cdot G(y) + H(y)) = 0$.

Kdybychom připustili v definici implicitní klínové plochy i ta y , pro něž $G(y=0)$, pak pro taková y může na rozšířené ploše μ ležet soustava rovnoběžek s rovnicí $F(x, H(y)) = 0$. Na těchto přímkách se pak mohou vyskytovat body, kde $\frac{\partial F}{\partial x} = G(y) = H'(y) = 0$. Taková y se vypouštějí, protože v definici plochy jsme se omezili na body, v nichž taková situace nenastane.

Stejně tak pokud v definici explicitní klínové plochy odstraníme z I_y všechna y , která anulují funkci $g(y)$, a takto zmenšenou oblast označíme I_y^+ , pak z příslušné explicitní plochy κ dostaneme plochu κ^+ o rovnici $f(x) - z \cdot g^{-1}(y) - h(y) \cdot g^{-1}(y) = 0$ vzhledem k oblasti $I_x \times I_y^+$. Tato plocha κ^+ je speciálním případem implicitní klínové plochy.

Ještě vyslovme speciální definici pro Hacarovu plochu.

V rovině $x=0$ definujeme p jakožto rovnoběžku s přímkou $(x=0) \cap (z=0)$ nebo jako parabolu s přímkou $(x=0) \cap (y=0)$. Dále definujeme p_I jako rovnoběžku s přímkou $(x=0) \cap (z=0)$ nebo jako parabolu v rovině rovnoběžné s přímkou $(x=0) \cap (z=0)$ tak, že její osa leží v rovině $y=0$. Necht' dále platí, že $p_I \cap (x=0) = \emptyset$. Pro každé reálné y_0 označme symbolem p_{y_0} :

- 1) přímkou určenou body $p \cap (y=y_0)$, $p_I \cap (y=y_0)$ v případě, že třetí souřadnice těchto bodů jsou stejné,

- 2) parabolu, jejíž osa je přímka $(x=0) \cap (y=y_0)$ a na níž leží body $p \cap (y=y_0)$, $p_I \cap (y=y_0)$ v případě, že třetí souřadnice těchto bodů jsou různé.

Plochu $\bigcup_{y_0 \in (-\infty, +\infty)} p_{y_0}$ nazveme *Hacarovou plochou*.

Doktor Havel odvodil rovnici Hacarovy plochy určením rovnic křivek $p : (z = Ay^2 + B) \cap (x = 0)$ a $p_I \subset (z = kx + q)$, kde průmět p_I do roviny $z = 0$ je $x = my^2 + n$ a A, B, m, n, k, q jsou konstanty. Aby platila podmínka $p_I \cap (x = 0) = \emptyset$ je konstanta n nenulová a $m = 0$ nebo $(m \neq 0) \wedge (m \cdot n > 0)$. V rovině $y = y_0$ platí pro křivku p_{y_0} rovnice:

$$z = \frac{k(my_0^2 + n) + q - (Ay_0^2 + B)}{(my_0^2 + n)^2} x^2 + Ay_0^2 + B,$$

kteřá po úpravě dá rovnici Hacarovy plochy ve tvaru:

$$z = \frac{(km - A)y^2 + kn + q - B}{(my^2 + n)^2} x^2 + Ay^2 + B.$$

Ještě také dořešil případ, kdy p_I je parabola v rovině rovnoběžné s přímkou $(x=0) \cap (y=0)$. Křivka p nechť si ponechá značení z předchozího. Křivka p_I nechť má v rovině $y = c$ rovnici $z = ay^2 + b$, kde $a, b, c \neq 0$ jsou konstanty. V rovině $y = y_0$ platí pro křivku p_{y_0} rovnice:

$$z = \frac{ay_0^2 + b - (Ay_0^2 + B)}{c^2} x^2 + Ay_0^2 + B,$$

kteřá po úpravě dá rovnici Hacarovy plochy ve tvaru:

$$z = \frac{(a - A)y^2 + b - B}{(my^2 + n)^2} x^2 + Ay^2 + B.$$

Z této rovnice je zřejmé, že na ploše v rovinách $x = x_0$ jsou rovněž paraboly nebo přímky.

Profesor Kadeřávek vyslovil domněnku, že Hacarova plocha obsahuje v obecném případě kromě parabol v rovinách $y = y_0$ ještě další systém parabol. Doktor Havel v této práci ukázal, že je správná.

D ů k a z: Čísla A, B nechť jsou konstantní a funkce $g(y)$ nechť má pro každé y spojitou derivaci.

Označme κ plochu určenou rovnicí $z = x^2 g(y) + Ay^2 + B$. Dále nechť jsou m, n, k, q konstanty, z nichž první dvě jsou nenulové a pro něž platí $m \cdot n > 0$ (mají stejné znaménko). V rovinách $y = y_0$ je na ploše κ systém parabol nebo přímek. Vyšetříme průmět průniku $(z = kx + q) \cap \kappa$ do roviny $z = 0$. Tento průmět má v rovině $z = 0$ rovnici $x^2 g(y) - kx + Ay^2 + B - q = 0$. Průmět obsahuje křivku $(x = my^2 + n) \cap (z = 0)$, právě tehdy, když platí $(my^2 + n)^2 g(y) - k(my^2 + n) + Ay^2 + B - q = 0$. Z této rovnice je ekvivalentní rovnice:

$$g(y) = \frac{(km - A)y^2 + kn + q - B}{(my^2 + n)^2}.$$

Nechť dále pro jisté konstanty m', n', k', q' , z nichž první dvě jsou nenulové a splňují rovnici $m \cdot n > 0$, platí:

$$\frac{(km - A)y^2 + kn + q - B}{(my^2 + n)^2} = \frac{(k'm' - A)y^2 + k'n' + q' - B}{(m'y^2 + n')^2}$$

identicky v x . Jsou-li čitatelé identicky rovni nule, dostáváme triviální případ válcové plochy nebo roviny. Není-li tomu tak, pak existuje nenulový faktor w tak, že platí:

$$mw = m'$$

$$nw = n'$$

$$(km - A)w^2 = k'm' - A$$

$$(kn + q - B)w^2 = k'n' + q' - B$$

tedy jsou splněny rovnice:

$$(km - A)w^2 - k'mw + A = 0$$

$$(kn + q - B)w^2 - k'nw - q' + B = 0$$

Tyto rovnice mají právě jediné řešení k' , q' . Tedy pro každé nenulové w obsahuje plocha κ parabolu $(z = k'x + q') \cap (x = mwy^2 + nw)$. Průměty těchto parabol do roviny $z = 0$ jsou kolmo afínní pro osu afinity $(x = 0) \cap (z = 0)$.

Fotografie

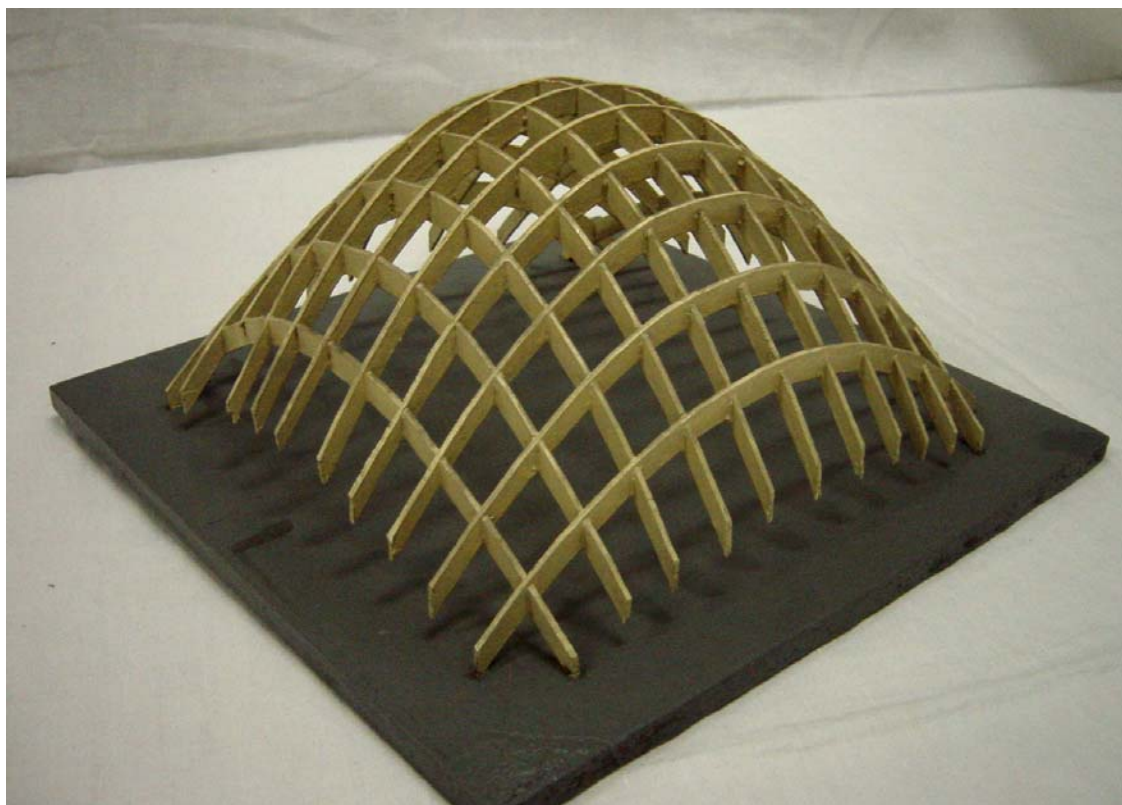
Všechny modely zapůjčil doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc., ze Stavební fakulty Českého vysokého učení technického k nafotografování a tímto mu velice děkuji.

Na první fotografii je práce studentů. Protože je plocha seříznuta, je obtížné poznat, zda jde opravdu o Hacarovu plochu třetího druhu nebo o plochu translační. Paraboly jsou však různých tvarů, přiklonila jsem se k Hacarově ploše. (Oč by to bylo jednodušší, kdyby měl model popisku.)



Fotografie 1: Pravděpodobně Hacarova plocha třetího druhu

Na druhé fotografii se bezpochyby jedná o parabolicko-parabolickou klínovou plochu.



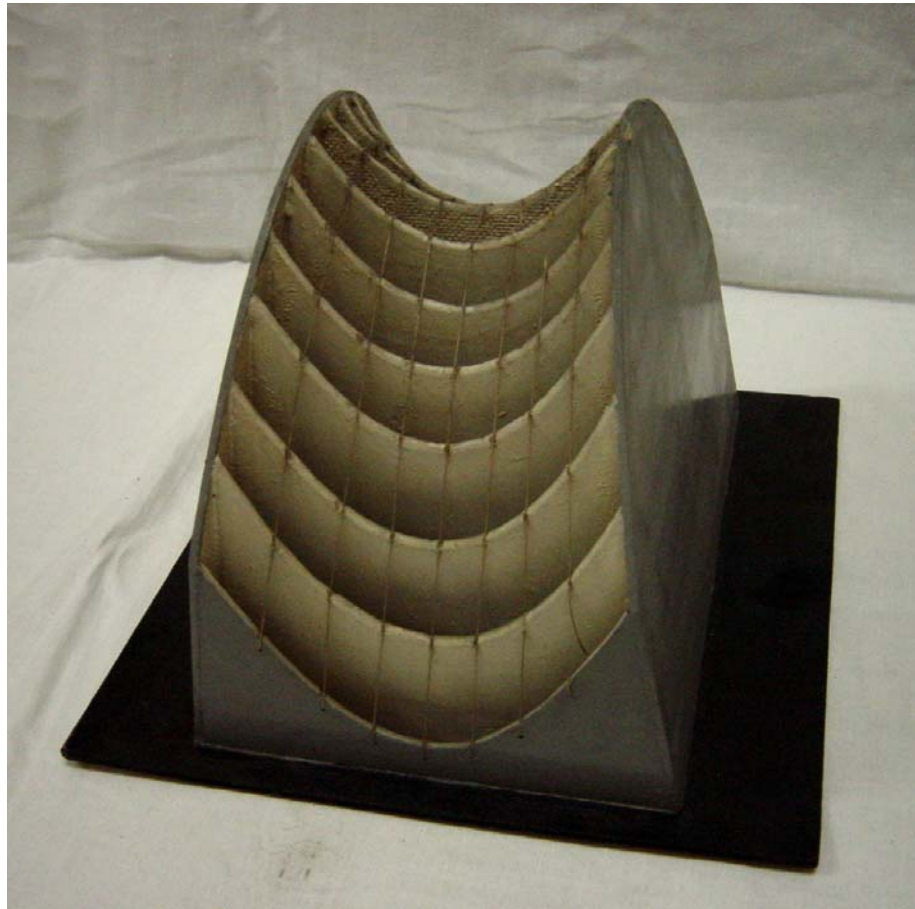
Fotografie 2: Parabolicko-parabolická klínová plocha

Třetí fotografie představuje část zastřešení, které je složeno dokonce ze tří druhů ploch. Modrá část je tvořena parabolicko-parabolickou klínovou plochou, červené části jsou dotykovými konoidy k parabolicko-parabolické klínové ploše a bílé výplně zborcených čtyřúhelníků napovídají, že jde o hyperbolický paraboloid.



Fotografie 3: Modrá parabolicko-parabolická klínová plocha, červené dotykové konoidy a bílé hyperbolické paraboloidy

Na čtvrté fotografii není příliš patrné, že šedivé boky nejsou tvořeny rovnoběžnými rovinami. Proto se nelehce určí, že tato plocha je Hacarovou plochou třetího druhu. Provázky pak představují jeden systém parabol na ploše a sololitové destičky druhý.



Fotografie 4: Hacarova plocha třetího druhu

Na páté fotografii je dřevěný model Hacarovy plochy prvního druhu s oběma systémy parabol.



Fotografie 5: Hacarova plocha prvního druhu

Závěr

Plochy v této práci jsou známé už několik desítek let, jsou prakticky využitelné a přesto jejich použití je téměř nulové. V bývalé Jugoslávii měla být zastřešena stavba Hacarovou plochou prvního druhu. Při stavbě však byly problémy s podpěrným systémem střechy a projekt byl změněn. Další stavba je údajně ve Francii. Ani o jedné z nich jsem však nenašla bližší údaje. U nás byly tyto plochy pouze popsány.

Co přát těmto plochám? Snad jen, aby našly větší uplatnění v praxi, na které již dlouho čekají.

Seznam použité literatury

- [1] Kadeřávek F. (1950): *O skupinách ploch, které mají stejné charakteristické vlastnosti*. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky ročník 75.
- [2] Havel V. (1955): *O plochách klínových I*. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky ročník 80. , strany 51-59.
- [3] Havel V., Harant F. (1955): *O některých vlastnostech klínových ploch*. Geometrie v technice a umění (sborník k 70. narozeninám prof. ing. Dr. Františka Kadeřávka). Státní nakladatelství technické literatury, Praha, strany 52-67.
- [4] Kadeřávek F., Havel V., Harant F. (1958): *Plochy stavebně inženýrské praxe*. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, strany 72-80.