

MASARYKOVA UNIVERZITA  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA



# Plochy technické praxe

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Šárka Blaženková

Brno, 2006

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci vypracovala samostatně pouze za použití uvedené literatury.

## **Poděkování**

Na tomto místě bych ráda poděkovala doc. RNDr. Josefu Janyškovi, CSc., vedoucímu mé diplomové práce, za vedení, cenné rady a připomínky při zpracování daného tématu.

# Obsah

Úvod	6
<b>1 Křivky a plochy</b>	<b>7</b>
1.1 Rovinné křivky	7
1.2 Prostorové křivky	12
1.2.1 Šroubovice	17
1.3 Obecné vlastnosti ploch	19
1.4 Zobrazení ploch	24
1.5 Některé typy ploch	25
1.6 Přímkové plochy	26
<b>2 Rozvinutelné přímkové plochy</b>	<b>28</b>
2.1 Válcová a kuželová plocha	29
2.2 Šroubový torsus	30
2.3 Přechodové plochy a plochy konstantního spádu	34
<b>3 Zborčené plochy</b>	<b>37</b>
3.1 Zborčené kvadriky	42
3.1.1 Zborčený hyperboloid	43
3.1.2 Hyperbolický paraboloid	44
3.2 Konoidy	45
3.2.1 Plückerův a Küpperův konoid	45
3.2.2 Kruhový konoid	46
3.2.3 Kulový konoid	47
3.3 Catalanovy plochy	49
3.3.1 Freziérův cylindroid	49
3.4 Některé další zborčené plochy	50
3.4.1 Plocha šikmého průchodu	50
3.4.2 Plocha eliptického pohybu v prostoru	51
3.4.3 Montpelliérský oblouk	52
3.4.4 Marseilleský oblouk	53
3.4.5 Corne de vache	53
3.5 Přímkové šroubové plochy	54

---

3.5.1	Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha . . . . .	55
3.5.2	Pravoúhlá otevřená přímková šroubová plocha . . . . .	56
3.5.3	Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha . . . . .	56
3.5.4	Kosoúhlá otevřená přímková šroubová plocha . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Přímkové plochy v praxi</b>	<b>61</b>
4.1	Válcová a kuželová plocha . . . . .	61
4.2	Přechodové plochy a plochy konstantního spádu . . . . .	62
4.3	Zborcené kvadriky . . . . .	63
4.4	Konoidy . . . . .	66
4.5	Cylindroidy . . . . .	68
4.6	Plocha šikmého průchodu . . . . .	69
4.7	Plocha eliptického pohybu v prostoru . . . . .	69
4.8	Montpellierský a Marseillský oblouk . . . . .	70
4.9	Plocha corne de vache . . . . .	71
4.10	Šroubové plochy . . . . .	72
	<b>Závěr</b>	<b>74</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>76</b>
	<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>77</b>

# Úvod

Úkolem mojí diplomové práce je zpracovat téma: Přímkové plochy technické praxe. Text je koncipován jako učebnice pro střední školy technického typu, ale může posloužit i posluchačům učitelského studia deskriptivní geometrie. Mojí snahou je napsat text, který by se dal číst s porozuměním dané problematiky bez častého používání další pomocné literatury, kromě vhodné sbírky příkladů. S ohledem na středoškolské uplatnění této diplomové práce jsem se snažila vyvarovat využívání znalostí z odborných geometrických disciplín, především diferenciální a algebraické geometrie. Nevyhnutelnou nutností pro opravdové zvládnutí celého tématu však zůstává znalost zobrazovacích metod deskriptivní geometrie.

V první kapitole jsem stručně shrnula poznatky o rovinných křivkách. Čtenáři jsou připomenuty některé triviální konstrukce, které jsou při řešení přímkových ploch potřeba. Navazuje část o prostorových křivkách a jejich průmětech do roviny. Mezi nimi je vyzdvihnuta šroubovice. Bez její dobré znalosti se čtenář neobejde v částech o šroubových plochách. Do této kapitoly jsem dále zahrnula obecné poznatky o plochách, jejich zobrazení a rozlišení.

Druhá kapitola je věnovaná rozvinutelným přímkovým plochám. Tady jsem se nejvíce zaměřila na rozvinutelnou šroubovou plochu, přechodové plochy a plochy konstantního spádu. Kuželová a válcová plocha je zmíněna pouze okrajově, protože je ve školní látce probrána již dříve.

Nejrozsáhlejší část textu tvoří třetí kapitola. Jsou v ní rozebrány zborcené přímkové plochy. Nejprve obecná teorie zborcených ploch, potom jednotlivé skupiny jako: zborcené kvadriky, konoidy, cylindroidy a některé další významné zborcené plochy technické praxe. V poslední části třetí kapitoly jsem sice krátce zmínila obecné šroubové plochy, ale dokončení kapitoly je věnováno pouze přímkovým šroubovým plochám.

Kromě teoretického studia přímkových ploch jsem se snažila zdůraznit i jejich aplikovatelnost. Ve čtvrté kapitole uvádím možné požití jednotlivých typů ploch za podpory příkladů ze skutečné technické praxe.

# Kapitola 1

## Křivky a plochy

### 1.1 Rovinné křivky

Podrobíme-li bod spojitému pohybu, říkáme, že proběhne dráhu, čili trajektorii, kterou nazveme čarou nebo křivkou. Zůstává-li bod při pohybu v stále stejné rovině, vytvoří rovinnou křivku.

**Definice 1.** Bod  $A$  křivky  $c$  nazýváme jejím regulárním bodem, pokud má křivka  $c$  v tomto bodě právě jednu tečnu. V opačném případě mluvíme o singulárním bodě křivky  $c$ .

Jsou-li známé zákony pohybů, jimiž křivky vznikly a dají se vyjádřit analytickým zápisem, nazývají se tyto křivky matematické či analytické. U matematické křivky můžeme z její dané části (oblouku) usuzovat na její další průběh, popř. ji určit celou. Matematické křivky dále dělíme na algebraické a transcendentní. Rovinné algebraické křivky lze vždy vyjádřit ve tvaru

$$(1.1) \quad F(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j = 0,$$

kde  $a_{ij}$  jsou reálné konstantní koeficienty. Nelze-li matematickou křivku vyjádřit tímto způsobem, jde o křivku transcendentní.

**Definice 2.** Nejvyšší exponent  $n = i + j$  rovnice (1.1) nazýváme stupněm algebraické křivky. U jiných než algebraických křivek se stupeň nedefinuje.

**Věta 1.1.1.** Algebraická rovinná křivka  $n$ -tého stupně je prořata každou přímkou své roviny v  $n$  průsečících (tj. ve smyslu algebraickém, kdy jsou mezi průsečíky kromě reálných zahrnuty i vícenásobné a komplexně sdružené).

**Věta 1.1.2.** Průmětem křivky stupně  $n$  je opět křivka stupně  $n$  (za předpokladu, že střed promítání neleží v rovině křivky).

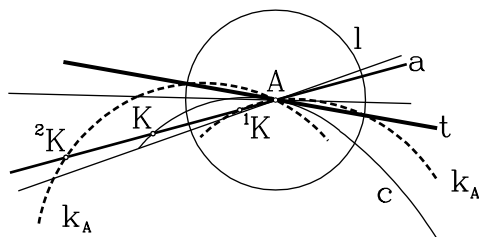
**Věta 1.1.3.** Třídou algebraické rovinné křivky rozumíme neměnný počet tečen (ve smyslu algebraickém) jdoucím ke křivce libovolným bodem její roviny.

Ostatní křivky jsou empirické neboli grafické. U tohoto typu křivek z daného oblouku nemůžeme usuzovat na její další průběh.

Při grafickém provádění konstrukcí v rovině se spíše setkáváme s čarami danými jinak než funkčním předpisem. Může se sice jednat o algebraickou křivku jako např. v případě kuželoseček, ale při konstrukcích je třeba si poradit i se zcela náhodným nákresem oblouku. I v takovýchto případech bývá úkolem nalézt tečnu (nebo normálu) zadané křivky, často je nutné konstrukci provést přesnějším způsobem než pouhým „přiložením pravítka“.

*Konstrukce 1.* Tečny empirické křivky v jejím bodě

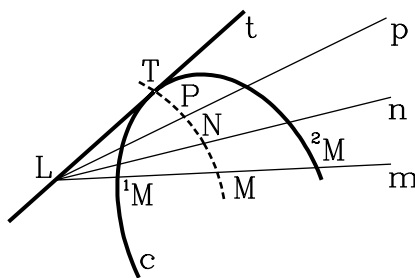
Svazek přímek  $A(a, a', \dots)$  protne pomocnou kružnicí  $l(A, r)$ . Nechť libovolná přímka a svazku protíná křivku  $c$  v dalším bodě  $K$ . Na přímce  $a$  nanese ve vzdálenosti  $r$  (v obou směrech) od  $K$  další dva body  ${}^1K, {}^2K$ . Opakováním konstrukce pro ostatní přímky svazku vytvoří body  ${}^1K, {}^2K, \dots$  tzv. konchoidu  $k_A$  křivky  $c$  pro bod  $A$ .



Obrázek 1.1: Tečny empirické křivky v jejím bodě

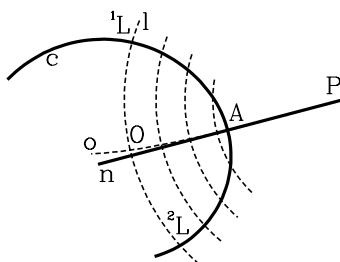
*Konstrukce 2.* Tečny empirické křivky z bodu

I tato konstrukce je proveditelná využitím svazku  $L(m, n, p, \dots)$  sečen, protínajících křivku  $c$  v blízkosti hledaného dotykového bodu tečny  $t$ . Půlící body  $M, N, P, \dots$  tětív vymezených svazkem sečen vytvářejí pomocnou křivku  $l$  jež protíná danou křivku  $c$  v hledaném bodě  $T$ , takže  $t = \overleftrightarrow{LT}$ .



Obrázek 1.2: Tečny empirické křivky z bodu





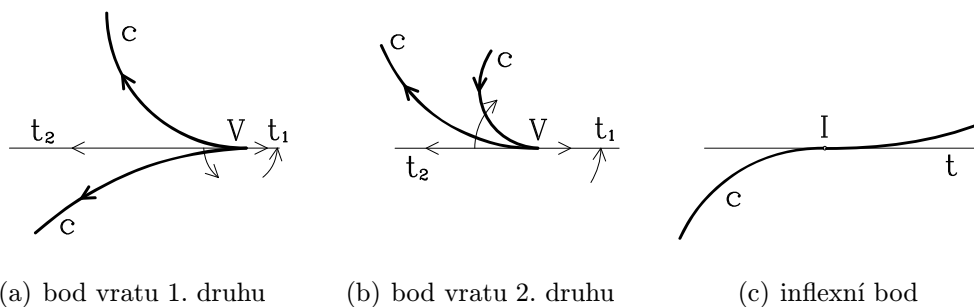
Obrázek 1.3: Normály spustěné na empirickou křivku

*Konstrukce 3.* Normály spustěné na empirickou křivku

Patu normály spustěné z bodu  $P$  hledáme tak, že opíšeme soustavu soustředných kružnic se středem v bodě  $P$ . Sestrojíme půlící body oblouků omezených křivkou na jednotlivých kružnicích. Propojení těchto půlících bodů vytvoří křivku  $l$ , která zadanou křivku protne v hledané patě normály. Konstrukci normály v bodě křivky lze provést pomocí tečny křivky.

Všechny tyto konstrukce předpokládají, že křivka má v uvažovaném bodě tzv. regulární bod – jinak by bylo nutno zvážit proveditelnost konstrukcí, popř. jejich úpravu. Křivka však může obsahovat také některé zvláštní typy bodů, singulární body. Singulárnost může být různého druhu, a proto singulární body a tečny křivek mají různé názvy. I tečna křivky může být obyčejná nebo nikoliv.

Jestliže v určitém bodě křivky její tečna náhle (přetržitě) mění svůj směr o úhel  $\alpha$  ( $\alpha < 180^\circ$ ), mluvíme o úhlovém bodě. V bodě vratu (neboli kuspídálním) tvořící bod náhle mění smysl svého pohybu. Tečna křivky v bodě vratu se nazývá tečna vratu (kuspídální tečna). Jedná-li se o bod vratu 1., resp. 2. druhu (zobák), leží v jeho okolí křivka na obou stranách, resp. na jedné straně od kuspídální tečny.



Obrázek 1.4: Singulární body křivky

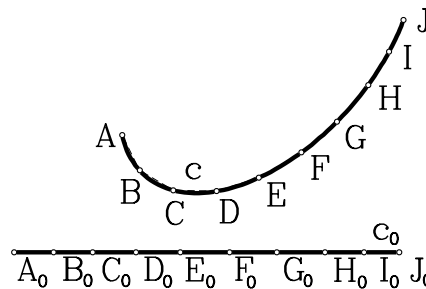
Jestliže obráceně při pohybu bodu po čáře tečna náhle změní smysl svého otáčení, nazývá se bod, ve kterém se toto stalo inflexním bodem a tečna v něm inflexní tečnou. V okolí inflexního bodu leží křivka po obou stranách inflexní tečny.

Jiné hledisko k rozlišení různých druhů singulárních bodů je jejich násobnost,  $n$ -násobným bodem křivka  $n$ -krát prochází a má v něm  $n$  (obecně různých) tečen.

**Definice 3.** Přímka, která se dotýká křivky v jejím nevlastním bodě, je její asymptotou.

Další z praktických dovedností, které by měl řešitel deskriptivních úloh zvládat je práce s délkou oblouku. Délku oblouku rovinné křivky  $c_1$ , omezeného koncovými body  $A_1, B_1$ , bývá někdy třeba vyjádřit úsečkou (čili oblouk  $\widehat{A_1B_1}$  rektifikovat) nebo určit stejně dlouhý oblouk jiné křivky  $c_2$  při daném bodu  $A_2$  na  $c_2$  (čili oblouk  $\widehat{A_1B_1}$  na křivku  $c_2$  navinout od  $A_2$ ).

Asi nejjednodušším způsobem provedení je nahrazení daného oblouku lomenou čarou, jejíž vrcholy leží na dané křivce a strany mají co možná nejmenší délku. Délka takovéto lomené křivky je i přibližnou délkou oblouku. Nyní už stačí jednotlivé úseky přenést na přímku, nebo na jiný oblouk.



Obrázek 1.5: Rektifikace oblouku

Je-li z čar  $c_1$  a  $c_2$  jedna kružnice a druhá přímka, vzniká jednak úkol rektifikovat daný kruhový oblouk, ale také obrácený úkol navinout danou úsečku na danou kružnici.

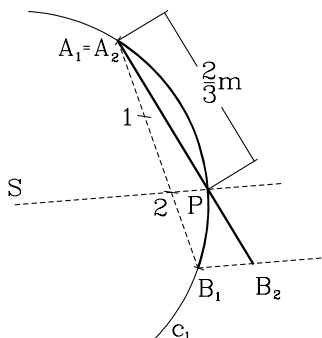
*Konstrukce 4.* d'Ocagneova rektifikace

Máme-li rektifikovat oblouk  $\widehat{A_1B_1}$  kružnice, rozdělíme tětivu  $A_1B_1$  body 1 a 2 na tři stejné díly. Bod 2 promítneme ze středu na kružnici do pomocného bodu  $P$ . Vedeme-li koncovým bodem  $B_1$  daného oblouku rovnoběžku s  $\overrightarrow{SP}$ , dostaneme v průsečíku  $B_2$  této rovnoběžky se spojnicí  $\overleftarrow{A_1P}$  koncový bod úsečky  $A_2B_2$  ( $A_1 = A_2$ ), ta má přibližnou délku jako zadaný oblouk. Pro oblouky se středovým úhlem asi  $60^\circ$  je chyba rovna jedné tisícině rektifikované délky.

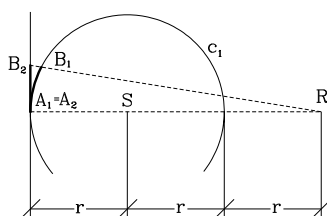
Máme-li obráceně na danou kružnici  $c_1$  od jejího bodu  $A_1$  navinout úsečku délky  $m$ , pomocná kružnice  $(A_1, \frac{2}{3}m)$  protíná  $c_1$  v pomocném bodě  $P$ . Na spojnici  $\overleftarrow{A_1P}$  nanese  $m$  od  $A_1$ , načez rovnoběžka s  $SP$  vedená bodem  $B_2$ , protíná  $c_1$  v hledaném bodě  $B_1$ .

*Konstrukce 5.* Sobotkova rektifikace

Od  $A_1$  nanese na průměr kružnice  $c_1$  délku  $3r$  (získáme tak rektifikační bod  $R$ ). Dále v  $A_1$  sestrojíme tečnu oblouku. Na ni promítneme koncový bod oblouku  $B_1$  do  $B_2$  z rektifikačního bodu  $R$ . Chyba konstrukce při středovém úhlu  $30^\circ$  je pětina promile poloměru kružnice. Prostým obrácením postupu lze navinout danou úsečku na kružnici.



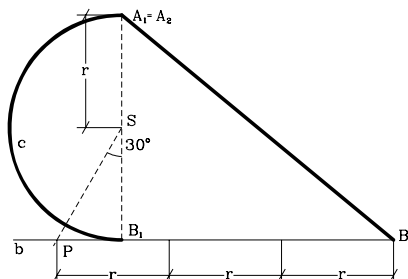
Obrázek 1.6: d'Ocagneova rektifikace



Obrázek 1.7: Sobotkova rektifikace

*Konstrukce 6. Kochaňského rektifikace*

Délku půlkružnice omezené průměrem  $A_1B_1 = 2r$  sestrojíme takto: Sestrojíme tečnu  $b$  kružnice v bodě  $B_1$ , pak její průměr odchýlený od  $A_1B_1$  o  $30^\circ$  a protínající  $b$  v bodě  $P$ , od kterého nanese na  $PB_1$  délku  $3r$  do bodu  $B_2$ . Úsečka  $A_2B_2$ , kde  $A_1 = A_2$ , je přibližně rektifikovaná půlkružnice. Při této přibližné rektifikaci se dopouštíme chyby  $0,00012r$ .



Obrázek 1.8: Kochaňského rektifikace

**Definice 4.** Křivku  $e$ , která svírá se všemi tečnami křivky  $c$  pravý úhel, nazýváme evolventou křivky  $c$ . Jestliže je křivka  $c$  kružnice, pak mluvíme o kruhové evolventě.

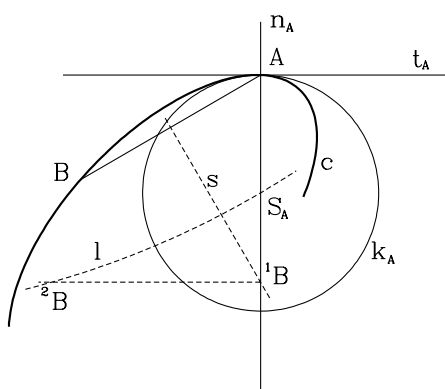
Z definice plyne, že jedna křivka nemá pouze jednu evolventu, ale celý systém evolvent.

Evolventa křivky má také vlastnost: Myslíme si na křivce  $c$  napnutou niť. Pokud při odvíjení budeme niť udržovat stále napnutou, pak každý bod niti opíše jednu z evolvent křivky  $c$ .

**Definice 5.** Oskulační kružnice křivky  $c$  v jejím bodě  $A$  je limitní polohou kružnice procházející body  $A$ ,  ${}^1A$ ,  ${}^2A$  křivky  $c$ , jestliže  ${}^1A \rightarrow A$ ,  ${}^2A \rightarrow A$ . Střed  $S_A$  oskulační kružnice  $k_A$  se nazývá středem křivosti a její poloměr  $R_A$  poloměrem křivosti křivky  $c$  v bodě  $A$ . Číslo  $\rho = \frac{1}{R_A}$  ( $R_A \neq 0$ ) nazýváme křivostí křivky  $c$  v bodě  $A$ .

Oskulační kružnice  $k_A$  se v dostatečně malém okolí bodu  $A$  křivky  $c$  velmi málo liší od  $c$ , proto je možné v tomto okolí křivku nahradit její oskulační kružnicí.

Oskulační kružnice má v obyčejném bodě s křivkou styk trojnásobný. Jakmile je tento styk čtyř nebo vícenásobný, kružnice se nazývá hyperoskulační a bod dotyku je vrcholem křivky.



Obrázek 1.9: Konstrukce středu křivosti

*Konstrukce 7.* Středu křivosti empirické křivky

Zvolme libovolný bod křivky, různý od bodu  $A$ , a sestrojme symetrálu  $s$  úsečky  $AB$ . Přímka  $s$  protíná normálu  $n_A$  v bodě  ${}^1B$ . Sestrojme  ${}^2B$  tak, aby  $|{}^1B{}^2B| = |AB|$  a  ${}^1B{}^2B \perp n_A$ . Body  ${}^2B$  vykreslí čáru chyb  $l$ , jejíž průsečík s normálou  $n_A$  je hledaný střed křivosti pro bod  $A$ .

Střed kružnice je zároveň středem křivosti pro všechny její body. Jak nalézt střed křivosti v bodě středové kuželosečky říká konstrukce 8.

*Konstrukce 8.* Steiner-Pelzova parabola

Dotykový bod normály  $n_P$  bodu  $P$  středové kuželosečky  $c$  ( $P$  není jejím vrcholem) a paraboly  $s$ , dotýkající se os kuželosečky  $c$ , také její normály  $n_P$  a tečny  $t_P$  je střed křivosti kuželosečky  $c$  v bodě  $P$ .

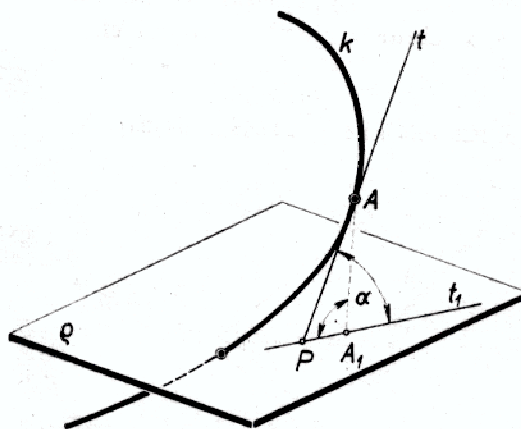
## 1.2 Prostorové křivky

**Definice 6.** Křivka  $c$ , jejíž všechny body neleží v jedné rovině, je křivkou prostorovou.

Prostorovou křivku lze dostat nejen jako dráhu pohybujícího se bodu, ale také jako pronikovou křivku dvou ploch. Stejně jako u rovinných křivek, dělíme prostorové křivky na analytické a empirické.

**Definice 7.** Jsou-li  $P$  a  $P'$  dva různé body prostorové křivky  $k$ , nazývá se spojnice  $PP'$  bisekantou křivky  $k$ . Je-li  $P$  pevný bod a zmenšuje-li se délka oblouku  $PP'$  bez omezení, bisekanta konverguje ke své mezní poloze  $t_P$ , kterou nazýváme tečnou prostorové křivky  $k$ .

**Definice 8.** Pod spádem křivky  $k$  v bodě  $A$  vzhledem k rovině  $\pi$  rozumíme tangens úhlu tečny  $t$  křivky  $k$  v bodě  $A$  s rovinou  $\pi$ . Pokud má křivka vzhledem k nějaké rovině v každém svém bodě stejný spád, mluvíme o křivce konstantního spádu.



Obrázek 1.10: Spád křivky

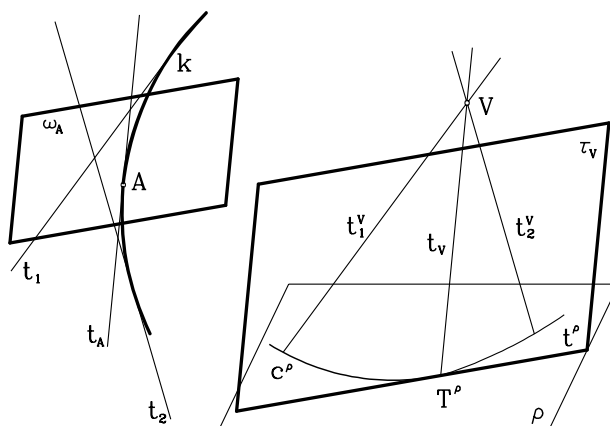
**Definice 9.** Rovnoběžky vedené libovolným bodem  $V$  prostoru s tečnami prostorové křivky  $k$  tvoří řídicí kuželovou plochu prostorové křivky  $k$ .

Každá rovina  $\tau$  procházející tečnou  $t$  prostorové křivky  $k$  v bodě  $A$  se nazývá tečná rovina křivky  $k$  v bodě  $A$  (označme ji  $\tau_A$ ). Oskulační rovina  $\omega$  prostorové křivky  $k$  v bodě  $A$  je limitní polohou tečné roviny  $t_A$  určené tečnou  $t$  a libovolným bodem  $P$  ( $P$  leží na  $k$  a je různý od  $A$ ) jdoucím po křivce  $k$  do bodu  $A$  (označme  $\omega_A$ ). Oskulační rovina křivky  $k$  v bodě  $A$  je tedy tečnou rovinou křivky  $k$  mající s  $k$  v bodě  $A$  tři soumězné body. Oskulační rovina rovinné křivky je rovina, ve které křivka leží.

*Konstrukce 9.* Oskulační rovina

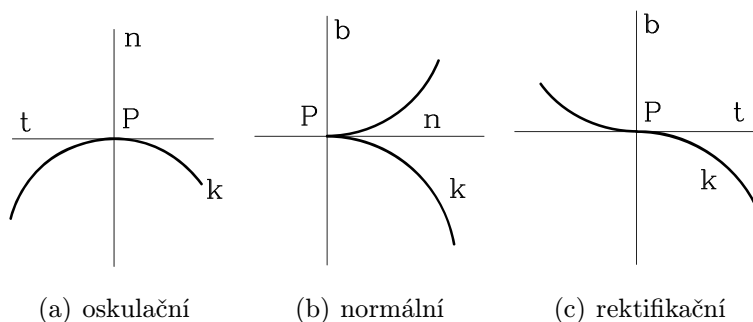
Oskulační rovina  $\omega_A$  křivky  $k$  v bodě  $A$  obsahující tečnu  $t_A$  křivky  $k$  je rovnoběžná s tečnou rovinou  $\tau_V$  řídicí kuželové plochy, která obsahuje tečnu  $t_V$  rovnoběžnou s  $t_A$ .

U prostorových křivek je možné sestavit v bodě  $A$  celý svazek přímek kolmých na tečnu  $t$ . Všechny tyto kolmice se nazývají normálami křivky  $k$  v bodě  $A$ . Rovina jimi určená se nazývá normálová rovina křivky  $k$  v bodě  $A$ . Průsečnice normálové a oskulační roviny se



Obrázek 1.11: Konstrukce oskulační roviny

nazývá hlavní normála  $n$  křivky  $k$  v bodě  $A$ . Normála  $b \perp \omega$  se nazývá binormálou křivky  $k$  v bodě  $A$ . Tři přímky  $t$ ,  $n$ ,  $b$  (všechny procházející bodem  $A$  křivky  $k$ ) jsou navzájem kolmé a tvoří pravoúhlý trojhran (Frenetův, Frenet-Seretův, průvodní). Dvě z rovin tohoto trojhranu jsou oskulační a normálová rovina a třetí rovinu  $\rho = t \cdot b$  nazýváme rektifikační rovina.



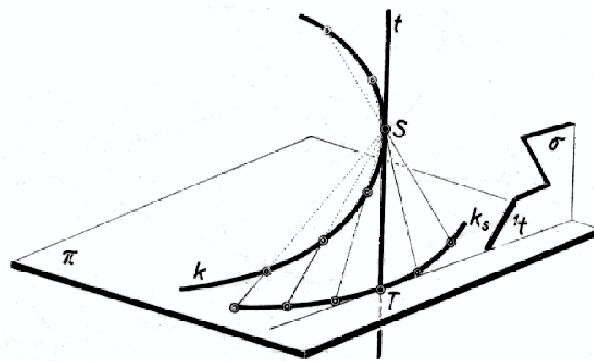
Obrázek 1.12: Průměty křivky do roviny

Prostorová křivka má dvojí tzv. křivost. První křivost (flexe) je mírou rychlosti odchylky křivky od tečny v okolí dotykového bodu křivky. Druhá křivost (torse) vyjadřuje rychlost změny polohy křivky vzhledem k oskulační rovině v okolí bodu dotyku.

Kolmý průmět křivky  $k$  do její oskulační, resp. normální, resp. rektifikační roviny v jejím obyčejném bodě  $P$  má v něm bod obyčejný, resp. vratu, resp. inflexní.

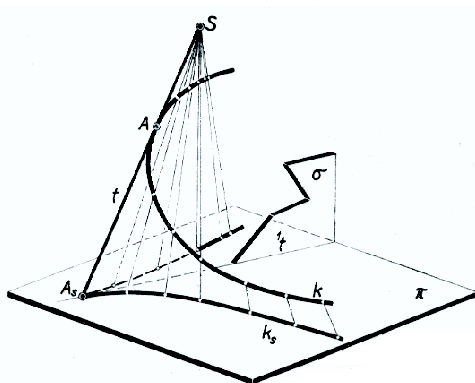
Při průmětech křivky  $k$  z bodu  $S$  na průmětnu  $\pi$  mohou nastat tyto čtyři případy:

1.  $S \in k$ .  $T$  je průsečík tečny křivky  $k$  v bodě  $S$  s průmětnou. Průmět  $k_S$  nemá v bodě  $T$  žádný zvláštní bod. Tečna  $t_1$  křivky  $k_S$  v bodě  $T$  je průsečnice oskulační roviny křivky  $k$  v bodě  $S$  s průmětnou  $\pi$ .



Obrázek 1.13: Průmět křivky z jejího bodu

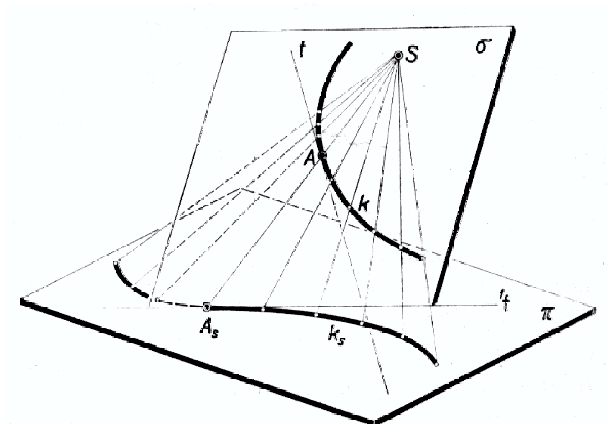
2. Průmět křivky  $k$  z bodu  $S$  tečny ( $A \neq S$ ) křivky  $k$  v bodě  $A$  má v bodě  $A_S$  bod vratu, přičemž tečna  $t_1$  křivky  $k_S$  v bodě  $A_S$  je průsečnice oskulační roviny křivky  $k$  v bodě  $A$  s průmětnou  $\pi$ .
3. Bod  $S$  leží v oskulační rovině křivky  $k$  v bodě  $A$ , přičemž neleží na tečně křivky  $k$  v bodě  $A$ . V tomto případě má křivka  $k_S$  v bodě  $A_S$  inflexní bod tečna  $t_1$  křivky  $k_S$  v bodě  $A_S$  je současně průsečnice oskulační roviny s průmětnou  $\pi$ .
4. Pokud nenastane žádný z předchozích případů, nemá  $k_S$  v  $A_S$  žádný zvláštní bod a tečna  $t_S$  křivky  $k_S$  v bodě  $A_S$  je průmětem tečny  $t$ .



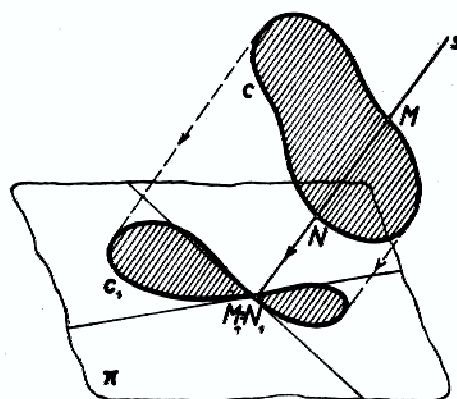
Obrázek 1.14: Průmět křivky z bodu tečny

Leží-li střed  $S$  promítání na bisekantě, resp. trisekantě křivky  $c$ , je její průsečík s  $\pi$  dvojnásobným, resp. trojnásobným bodem průmětu  $c_S$ . Každá z obou tečen v dvojnásobném bodě křivky  $c_S$  má s ní společné tři soumězné body, dotýká se jedné z větví a druhou protíná.

Závěrem oddílu ještě zmíním několik vlastností algebraických křivek.



Obrázek 1.15: Průmět křivky z bodu její oskulační roviny



Obrázek 1.16: Bisekanta křivky promítacím paprskem

**Definice 10.** Analytická prostorová křivka se nazývá algebraická, lze-li ji vyjádřit jako průnik dvou válcových algebraických ploch (válcových ploch popsaných polynomy dvou proměnných pro dvě různé dvojice proměnných, např.  $x, y$  a  $x, z$ ). V opačném případě se křivka nazývá transcendentní.

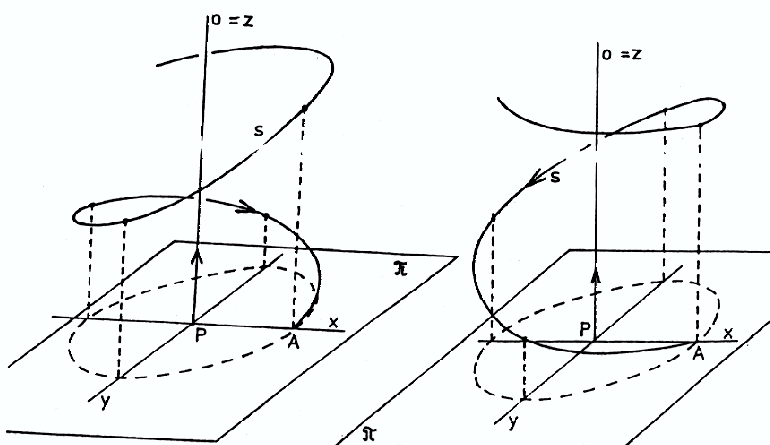
**Definice 11.** Prostorová algebraická křivka se nazývá stupně  $n$ , je-li protnuta každou rovinou v právě  $n$  bodech (reálných a komplexně sdružených ve smyslu algebraickém). Algebraická křivka má třídu  $m$ , jestliže každým jejím bodem prochází právě  $m$  oskulačních rovin. Pokud střed promítání  $S$  neleží na algebraické křivce  $c$  stupně  $n$ , potom její průmět ze středu  $S$  do průmětny  $\pi$  je algebraická křivka stupně  $n$ . Jestliže je střed promítání je  $m$ -násobným bodem křivky  $c$ , je jejím průmětem algebraická křivka stupně  $n - m$ .



### 1.2.1 Šroubovice

**Definice 12.** Křivka vzniklá složením rovnoměrné rotace a rovnoměrné translace ve směru osy rotace se nazývá šroubovice. Vzdálenost bodu  $A$  šroubovice od osy  $o$  se nazývá poloměr šroubovice. Část šroubovice, která odpovídá v daném šroubovém pohybu výšce závitů, se nazývá závit šroubovice. Délka  $v$ , resp.  $v_0$ , posunutí bodu  $A$  šroubovice odpovídající otočení o délku  $2\pi r$ , resp.  $r$ , se nazývá výška závitů šroubovice, resp. redukovaná výška závitů šroubovice.

**Definice 13.** Šroubovice, jejíž šroubový pohyb je kladným smyslem, tj. pohybem proti směru hodinových ručiček, se nazývá pravotočivá šroubovice. V opačném případě se šroubovice nazývá levotočivá.



Obrázek 1.17: Pravotočivá, levotočivá šroubovice

Z definice 12 plyne, že každá šroubovice leží na válcové ploše s osou  $o$ , jejíž poloměr je roven poloměru šroubovice.

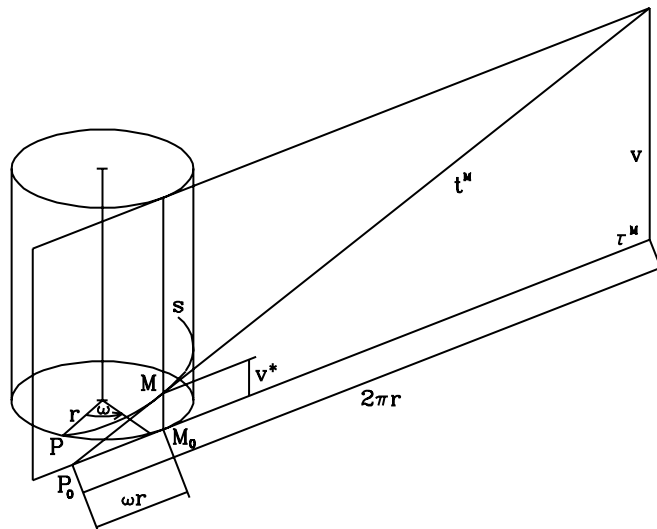
Je-li  $\omega$  libovolný úhel otočení bodu  $M$  šroubovice o poloměru  $r$ , pak délka oblouku otočení bodu je  $\omega r$ , označíme-li délku posunutí  $v^*$  ve směru osy, pak z rovnoměrnosti šroubového pohybu plyne:

$$(1.2) \quad \frac{v^*}{\omega r} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{v_0}{r} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Rozvineme-li válec do tečné roviny válce  $\tau_M$  v bodě  $M$ , pak šroubovice přejde rozvinutím na válci do tečny  $t_M$ . Zřejmě tečny téže šroubovice v libovolném bodě svírají též úhel  $\alpha$  s půdorysnou  $\pi$ . Odtud plyne, že šroubovice je křivkou konstantního spádu.

Protože šroubovice je křivkou konstantního spádu, je řídicí kuželová plocha šroubovice rotační kuželovou plochou. Výška řídicího kužele je  $v_0$  neboť

$$(1.3) \quad \frac{v_0}{r} = \frac{v}{2\pi r} = \operatorname{tg} \alpha.$$



Obrázek 1.18: Rozvinutí šroubovice

Pro vrchol  $V$  řídicího kužele platí:

$$(1.4) \quad v_0 = \frac{v}{2\pi} = \frac{2v}{4\pi} < \frac{2v}{12},$$

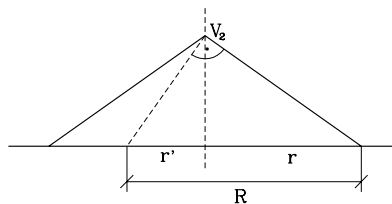
tj. vrchol  $V$  je „blízko“ pod  $\frac{2}{12}v$  nad  $\pi$ .

Příklady zadání šroubovice:

1. Osa  $o$  šroubovice, orientace šroubovice (pravotočivá či levotočivá), výška závitů  $v$  nebo redukovaná výška  $v_0$ .
2. Osa  $o$  šroubovice, tečna  $t$  šroubovice.
3. Osa  $o$  šroubovice, oskulační rovina  $\omega$  šroubovice, redukovaná výška  $v_0$ , orientace šroubovice.
4. Osa  $o$  šroubovice, dva body šroubovice na plášti rotačního válce s osou  $o$ , orientace šroubovice.
5. (Alternativa k úloze 4) Spojte dva body na plášti rotačního válce nejkratší křivkou.

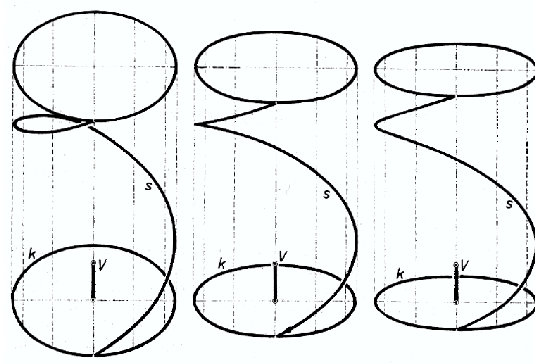
Na základě uvedených vlastností šroubovice, lze sestavit její průměty. Bod  $C$  šroubovice na obrysu válce, na němž šroubovice leží, nazveme vrcholem průmětu šroubovice. Konstrukce poloměru oskulační kružnice  $r'$  vrcholu nárysu šroubovice  $c$  (je-li osa  $o \perp \pi$ ) o poloměru  $r$ , resp. poloměru oskulační kružnice šroubovice  $R$ , je vidět na následujícím obrázku nárysu řídicího kužele šroubovice.

Vržený stín  $s'$  šroubovice  $s$  do  $\pi \perp o$  je prostá, resp. prodloužená, resp. zkrácená cykloida, jestliže  $V'$  leží na  $k$ , resp. uvnitř  $k$ , resp. vně  $k$ , kde  $k$  je kružnice na řídicí kuželové



Obrázek 1.19: Poloměr oskulační kružnice průmětu vrcholu šroubovice

ploše ležící v  $\pi$ . Toto kritérium lze využít také pro sestavení vrženého stínu šroubovice na rovinu, která zaujímá obecnou polohu k ose  $o$ . Vrženým stínem šroubovice do takovéto roviny je pak křivka afinní k cykloidě, pokud  $o$  nepatří směru osvětlení (v takovém případě by byla stínem elipsa). Odtud plyne, jak bude vypadat průmět šroubovice při zvoleném promítání.



Obrázek 1.20: Axonometrie šroubovice

### 1.3 Obecné vlastnosti ploch

Podobně jako si lze představit vytvoření křivky pohybem bodu, tedy kinematicky, lze si představit vytvoření plochy spojitým pohybem křivky. Tak např. spojitým pohybem přímky vznikne přímková plocha, spojitým pohybem kružnice vzniká cyklická plocha apod. Lze říci, že plocha vzniká spojitým pohybem křivky (která není dráhou pohybu) a tvar křivky se může během pohybu měnit. Pohybující se křivka (přímka) se nazývá tvořící křivka (přímka). Plochy dělíme takto:

- Empirické*, neboli grafické, neznáme-li jejich výtvarný zákon. Taková plocha je obvykle dána několika křivkami téže jednoparametrické soustavy křivek, jejichž tvar bývá stanoven empiricky (jako např. u vrstevnic terénu).
- Matematické*, tj. takové, jejichž výtvarný zákon lze matematicky vyjádřit analytickými funkcemi dvou proměnných.

Souřadnice bodů  $P(x; y; z)$  plochy  $\Phi$  vztahžené na kartézskou soustavu souřadnic lze zapsat např. v Gaussově parametrickém vyjádření:

$$(1.5) \quad x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in \Omega,$$

Kde na pravých stranách jsou analytické funkce dvou proměnných  $u, v$  (parametrů) definovaných v oblasti  $\Omega$ . Rovnice (1.5) jsou parametrické rovnice plochy. Každému bodu  $(u, v) \in \Omega$  je rovnicemi (1.5) přiřazen jediný bod  $P(x_P; y_P; z_P)$  plochy. Vyloučíme-li z (1.5) parametry  $u, v$ , dostaneme rovnici plochy  $\Phi$  buď v implicitním tvaru

$$(1.6) \quad F(x, y, z) = 0,$$

nebo v explicitním Mongeově tvaru

$$(1.7) \quad z = f(x, y).$$

Algebraická plocha nemusí nutně obsahovat reálné body. Např.  $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$  je imaginární kulová plocha spoloměrem  $r = \sqrt{-1}$ , nebo plocha  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  obsahuje jen jediný reálný bod  $O(0, 0, 0)$ .

Nelze-li rovnici plochy vyjádřit ve tvaru

$$(1.8) \quad F(x, y, z) = \sum_{i,j,k} c_{ijk} x^i y^j z^k = 0,$$

kde  $c_{ijk}$  jsou reálné koeficienty, které nejsou všechny rovny nule, a  $i, j, k$  celé kladné exponenty, pak se plocha nazývá transcendentní. Největší exponent  $\max(i + j + k) = n$  je stupněm algebraické plochy  $\Phi^n$ . Jediná plocha prvního stupně je rovina, její rovnice má tvar

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Plochy druhého stupně se nazývají kvadriky.

Algebraická plocha se rozpadne (je reducibilní neboli složená), lze-li polynom  $F(x, y, z)$  z (1.8) napsat jako součin polynomů nižších stupňů

$$(1.9) \quad F(x, y, z) = F^p(x, y, z) \cdot F^q(x, y, z) \cdot \dots \cdot F^t(x, y, z),$$

kde

$$(1.10) \quad p + q + \dots + t = n,$$

nebo se nerozpadne (je ireducibilní neboli jednoduchá), pokud takové rozložení (1.9) polynomu  $F(x, y, z)$  nelze provést.

Z předcházejícího plyne, že i rovina může být částí reducibilní plochy.

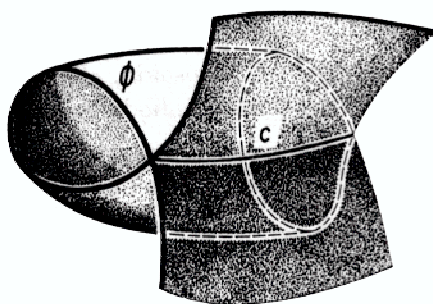
Na každé ploše existuje nekonečné množství křivek rozložených tak, že každým obecným bodem  $A$  (tj. nikoliv výjimečným nebo zvláštním) plochy prochází opět nekonečné množství z nich.

**Definice 14.** Jestliže v bodě  $A$  plochy  $\Phi$  leží tečny  $t_A$  ke všem křivkám  $c_A$  plochy  $\Phi$  v jediné rovině  $\tau_A$ , nazývá se  $\tau_A$  tečná rovina plochy  $\Phi$  v bodě  $A$ .

**Definice 15.** Kolmice na tečnou rovinu v jejím dotykovém bodě  $A$  s plochou se nazývá normálou plochy v tomto bodě.

**Definice 16.** Bod  $A$  plochy  $\Phi$  se nazývá regulární bod plochy  $\Phi$ , existuje-li jediná tečná rovina  $\tau_A$  plochy  $\Phi$  v bodě  $A$ . Není-li bod  $A$  regulárním bodem plochy  $\Phi$ , nazývá se singulární bod plochy.

Protíná-li plocha sama sebe v křivce  $c$  je tato křivka dvojnou, resp. vícenásobnou křivkou plochy. V bodech takové křivky existují dvě či více tečných rovin plochy.



Obrázek 1.21: Dvojná křivka plochy

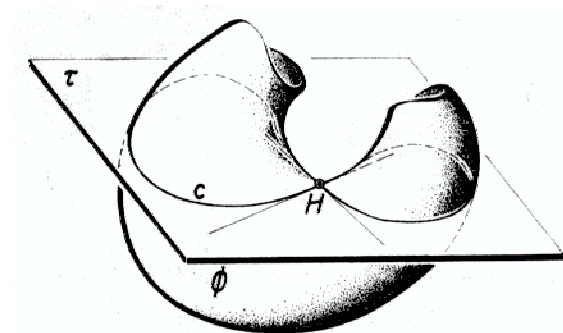
**Definice 17.** Protíná-li plocha nevlastní rovinu v reálné křivce a leží-li tečny v nevlastním bodě plochy ve vlastní tečné rovině, nazývá se tato tečná rovina asymptotická rovina plochy.

**Definice 18.** Tečny k oběma větvím průsečné křivky tečné roviny s plochou v jejím bodě dotyku (dvojném bodě řezu) se nazývají asymptotické tečny plochy.

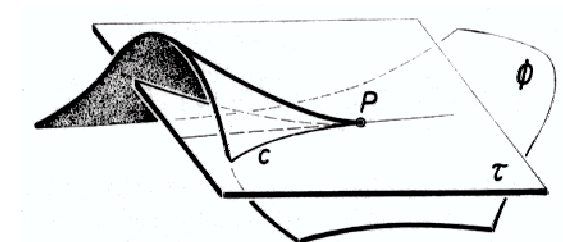
Mohou ovšem nastat tři případy: Dvojný bod průniku je skutečným dvojným bodem (křivka v něm má dvě různé reálné větve s dvěma různoběžnými tečnami); tyto tečny mohou ve druhém případě splynout a  $T$  je bodem vratu průniku, nebo bod  $T$  je izolovaným dvojným bodem se dvěma komplexně konjugovanými tečnami.

**Definice 19.** Regulární bod plochy  $\Phi$  je a) hyperbolický, b) parabolický, c) eliptický, jsou-li v něm obě asymptotické tečny a) reálné různé, b) splývající, c) komplexně sdružené.

Plocha v okolí hyperbolického bodu  $H$  se rozkládá po obou stranách tečné roviny a říkáme, že plocha je v tomto okolí konvex–konkávní. Hyperbolickými body jsou např. všechny body jednodílného hyperboloidu nebo hyperbolického paraboloidu, body v okolí hrdelních kružnic rotačních ploch, body na přímkových nerozvinutelných plochách apod.



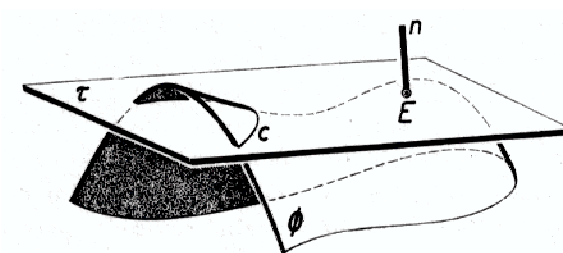
Obrázek 1.22: Hyperbolický bod plochy



Obrázek 1.23: Parabolický bod plochy

V parabolickém bodě  $P$  má průsečná křivka tečné roviny s plochou v bodě dotyku bod vratu. Příkladem jsou všechny body ploch kuželových a válcových, body rozvinutelných ploch, body torzálních přímek přímkových nerozvinutelných ploch nebo body kráterových kružnic u rotačních ploch apod.

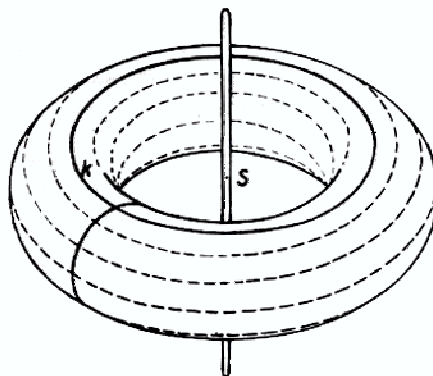
Konečně eliptický bod  $E$  plochy je izolovaný bod průsečné křivky, která však v ostatním průběhu může být imaginární. Plocha v tomto případě leží v okolí bodu jen po jedné straně tečné roviny a je konvexní. Eliptické body jsou body elipsoidu, eliptického paraboloidu, dvojdílného hyperboloidu či body v okolí rovníku rotačních ploch. Eliptickým bodům plochy kulové se přesněji říká body kruhové.



Obrázek 1.24: Eliptický bod plochy

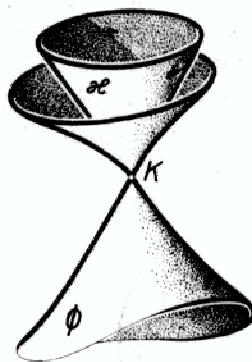
Pokud na ploše existují jak body eliptické, tak body hyperbolické, pak na ploše existují také body parabolické. Ty tvoří hranici mezi eliptickými a hyperbolickými body plochy.

Příkladem může být rotační anuloid, na kterém tuto hranici tvoří kráterová kružnice.



Obrázek 1.25: Anuloid s kráterovou kružnicí  $k$

Body, které nejsou regulárními (obyčejnými) body plochy, se nazývají singulární. V singulárním bodě plochy existuje více tečných rovin. Bod plochy, v němž existují dvě, resp. tři, resp. nekonečně mnoho tečných rovin, se nazývá biplanární, resp. triplanární, resp. konický. Příkladem konického bodu plochy je vrchol kuželové plochy.



Obrázek 1.26: Kónický bod plochy

O stupni mluvíme jen u algebraických ploch, jejichž rovnice se dá psát ve tvaru (1.8). Stupeň  $n$  algebraické plochy má jednoduchý geometrický význam.

**Věta 1.3.1.** *Libovolná přímka protíná ireducibilní algebraickou plochu  $n$ -tého stupně právě v  $n$  průsečících (ve smyslu algebraickém: průsečíky mohou být jednoduché, násobné, vlastní, nevlastní, reálné komplexní). Je-li  $B$  komplexní bod, protíná přímka plochu  $i$  v bodě  $\bar{B}$  komplexně sdruženém k prvnímu.*

**Věta 1.3.2.** *Má-li přímka  $s$  algebraickou plochou  $n$ -tého stupně více než  $n$  společných bodů, pak  $s$  ní má všechny své body společné a náleží ploše.*

**Věta 1.3.3.** *Libovolná rovina protíná ireducibilní algebraickou plochu  $n$ -tého stupně v rovinném řezu stupně právě  $n$  (rovina může být vlastní i nevlastní).*

*Důkaz.* Plyne z přímého výpočtu po dosazení rovnice roviny do rovnice plochy.  $\square$

Dvě různé plochy se obecně protínají v prostorové křivce; jedná-li se o dvě algebraické plochy, pak je jejich průnikem algebraická prostorová křivka, jejíž stupeň je dán počtem jejich průsečíků s libovolnou rovinou. Jsou-li  ${}^1n$  a  ${}^2n$  stupně obou algebraických ploch, pak libovolná rovina je protíná v rovinných křivkách stupňů  ${}^1n$  a  ${}^2n$  a tyto křivky, protože leží v téže rovině, mají podle Bezoutovy věty  ${}^1$  právě  ${}^1n \cdot {}^2n$  společných bodů (ve smyslu algebraickém), které náleží oběma plochám i jejich průniku.

Z toho plyne:

**Věta 1.3.4.** *Dvě navzájem různé algebraické plochy  ${}^1\Phi$  a  ${}^2\Phi$  stupňů  ${}^1n$  a  ${}^2n$  se protínají obecně v prostorové algebraické křivce stupně  ${}^1n \cdot {}^2n$ . Tato křivka se může rozpadnout na dvě nebo více samostatných křivek, přičemž součet jejich stupňů je roven číslu  ${}^1n \cdot {}^2n$ .*

**Věta 1.3.5.** *Prochází-li dvě plochy  ${}^1\Phi$  a  ${}^2\Phi$  tímž bodem  $T$  a nemají-li v něm dotyk, pak tečna  $t$  průsečné křivky  $c$  v tomto bodě je*

- a) *průsečnicí tečných rovin  ${}^1\tau$  a  ${}^2\tau$  sestrojených v  $T$  k plochám  ${}^1\Phi$  a  ${}^2\Phi$ ,*
- b) *kolmá k normální rovině určené normálami  ${}^1n$  a  ${}^2n$  ploch  ${}^1\Phi$  a  ${}^2\Phi$  v bodě  $T$ .*

**Věta 1.3.6.** *Dotýkají-li se dvě plochy v bodě  $T$ , pak jejich průsečná křivka má v tomto bodě obecně dvojnásobný bod.*

**Definice 20.** Třída algebraické plochy je počet tečných rovin, které k ní lze vést libovolnou přímkou. (U algebraické kuželové plochy je nutno uvažovat pouze přímky jdoucí jejím vrcholem).

**Věta 1.3.7.** *Prochází-li obyčejným bodem  $A$  plochy přímka  $a$ , která na ploše leží, pak tečná rovina plochy v bodě  $A$  prochází přímkou  $a$ .*

## 1.4 Zobrazení ploch

**Definice 21.** Průmětem plochy rozumíme množinu průmětů všech bodů plochy.

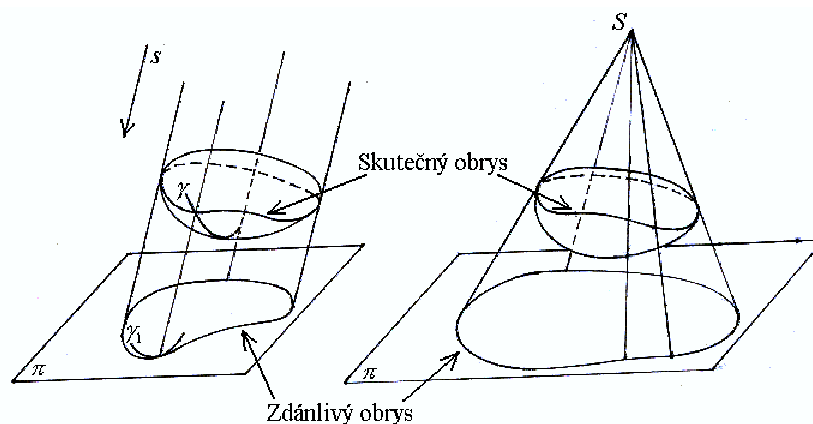
**Definice 22.** Množina všech bodů na ploše v nichž tečné roviny k ploše procházejí středem promítání (rovnoběžně s promítacím paprskem) se nazývá skutečný obrys plochy. Zdánlivým obrysem plochy rozumíme průmět skutečného obrysu plochy do průmětny.

Při středovém nebo rovnoběžném osvětlení plochy se tečné světelné roviny dotýkají podél křivky, která je označována jako mez vlastního stínu. Vržený stín této křivky na průmětnu je pak mezi vrženého stínu. Při zobrazení ploch záleží především na určení zdánlivého obrysu plochy.

---

<sup>1</sup>Dvě ireducibilní algebraické křivky  $k$ ,  $c$  stupně  $n$ ,  $m$  mají maximálně  $n \cdot m$  společných bodů.





Obrázek 1.27: Skutečný a zdánlivý obrys plochy

**Věta 1.4.1.** *Necht' křivka  $c$  plochy  $\Phi$  protíná její skutečný obrys  $m$  v bodech  $K, \dots$ . Necht' tečna křivky  $c$  v bodě  $K$  není promítací přímkou. Potom průmět  $c_r$  křivky  $c$  se dotýká zdánlivého obrysu  $m_r$  v bodě  $K_r$ . Necht' křivka  $l$  protíná křivku  $m$  v bodě  $L$ , přičemž tečna  $l$  v bodě  $L$  je promítací přímkou. Potom má průmět křivky  $l$  v bodě  $L_r \in m_r$  bod vratu.*

Zdánlivý obrys plochy lze tedy sestavit jako obálku průmětů vhodné soustavy křivek ležících na ploše.

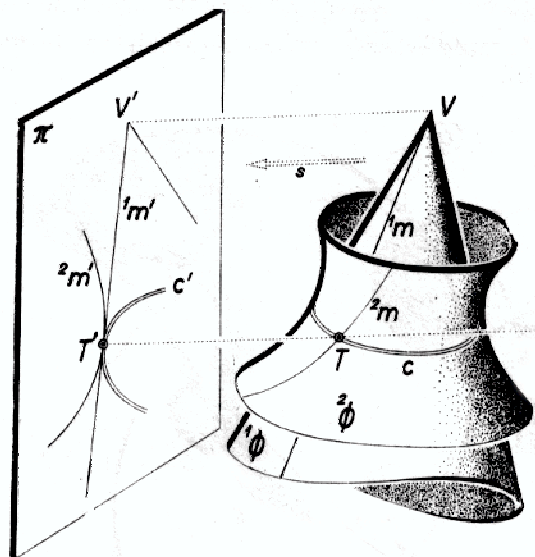
**Věta 1.4.2.** *Dotýkají-li se dvě plochy podél společné křivky, která má společný bod se skutečným obrysem plochy, pak jejich zdánlivé obrysy se dotýkají ve společném bodě na průmětně uvažované dotykové křivky.*

Body, ve kterých se průměty soustavy volených křivek dotýkají zdánlivého obrysu plochy, tj. charakteristické body zdánlivého obrysu, se snadno určí zejména v případech, kdy se podél křivky  $c$  uvažované plochy dotýká kuželová nebo kulová plocha.

## 1.5 Některé typy ploch

Jak bylo uvedeno, lze uvažovat vytvoření plochy spojitým pohybem křivky. Rotuje-li křivka okolo pevné přímky (osy), vytvoří rotační plochu. Je-li křivka podrobena takovému spojitému pohybu, že všechny její body proběhnou navzájem shodné dráhy, nazývá se plocha translační. Vykonává-li křivka pohyb šroubový, vytvoří při něm šroubovou plochu neboli helikoid. Mění-li se při spojitém pohybu spojitě křivka tak, že do dalších jejích poloh ji lze převést kolineací, resp. afinitou, mluvíme o plochách kolineárních, resp. afinních. Jejich speciálním případem jsou tzv. plochy klínové.

Pohybem přímky se vytvoří přímkové plochy, které se dělí na rozvinutelné a nerozvinutelné. Pohybem ostatních čar se vytvoří obecně nepřímkové plochy. Z nepřímkových ploch jsou technicky důležité plochy cyklické, vytvořené pohybem kružnice.



Obrázek 1.28: Určení obrysu plochy

Jiný způsob vytvoření ploch je pomocí tzv. sčítání dvou ploch, mluvíme o plochách součtových.

Podobně jako rovinná křivka může být vytvořena jako obálka jednoparametrické soustavy křivek, lze vytvořit při spojitým pohybu plochy, která se při něm nemění nebo spojitě mění, plochu jinou jako obálku všech poloh pohybující se plochy. Jsou to pak plochy obalové. Říkáme, že obalová plocha je množina charakteristik, tj. množina čar, v nichž se při pohybu protínají dvě bezprostředně sousední polohy pohybující se plochy, které obalovou plochu vytvářejí. Např. pohybuje-li se spojitě neměnná kulová plocha, pak charakteristika je zřejmě kružnice.

Uvedené způsoby vytvoření ploch nevedou však výlučně k úplně odděleným typům. Naopak, tutéž plochu lze vytvořit i několika způsoby. Jako příklad může sloužit plocha Tilšerova, kterou lze vytvořit jako součtovou plochu dvou rotačních ploch válcových nebo jako translační plochu při pohybu kružnice po kružnici. Podobně lze i mnohé šroubové plochy považovat za translační nebo součtové.

## 1.6 Přímkové plochy

**Definice 23.** Plocha  $\Phi$  se nazývá přímková, jestliže každým bodem plochy prochází alespoň jedna přímka ležící na ploše  $\Phi$ . Přímka plochy  $\Phi$  se nazývá tvořící přímka plochy.

Příkladem přímkové plochy může být rovina. V dalším však předpokládejme, že plocha, o níž je řeč není rovina.

Přímkové plochy dělíme na rozvinutelné (např.: plocha tečen prostorové křivky) a nerozvinutelné (např.: konoidy). Nerozvinutelné plochy se také nazývají zborcené. Platí,

že všechny rozvinutelné plochy jsou přímkové. Obráceně však tento vztah neplatí, tedy všechny přímkové plochy nejsou rozvinutelné do roviny.

Tečná rovina  $\tau$  přímkové plochy v bodě  $T$  vždy obsahuje povrchovou přímku plochy, která bodem  $T$  prochází. Obecně však v každém bodě přímky je jiná tečná rovina plochy a jejich souhrn tvoří svazek tečných rovin o ose v uvažované přímce. Může se stát, že ve všech bodech tvořící přímky se dotýká plochy též tečná rovina.

**Definice 24.** Tvořící přímka, podél níž existuje jediná tečná rovina, se nazývá torzální přímka. Tečná rovina plochy podél torzální přímky se nazývá torzální rovina.

# Kapitola 2

## Rozvinutelné přímkové plochy

**Definice 25.** Přímková plocha se nazývá rozvinutelná, jestliže každá její tvořící přímka je torzální.

Tečnou rovinu podél přímky  $p$  rozvinutelné plochy můžeme pokládat za určenou přímkou  $p$  a přímkou soumeznou, protože na rozvinutelné ploše jsou dvě soumezné přímky různoběžné a protínají se na hraně vratu plochy.

**Věta 2.0.1.** *Rozvinutelnými plochami jsou právě:*

- a) kuželová plocha
- b) válcová plocha
- c) plocha tečen prostorové křivky
- d) plocha, která vznikne složením z ploch a) b) c).

**Definice 26.** Plocha vytvořená tečnami prostorové křivky  $c$  se nazývá plocha tečen prostorové křivky  $c$ . Křivka  $c$  se nazývá hrana vratu této plochy.

**Definice 27.** Rozvinutí (komplanace) rozvinutelné plochy  $\Phi$  je spojitě zobrazení plochy  $\Phi$  do rovinného útvaru  $\Phi_0$  takové, že

1. obrazem oblouku mezi dvěma body  $A, B$  na ploše  $\Phi$  je oblouk  $\widehat{A_0B_0}$  na  $\Phi_0$  téže délky.
2. obrazem úhlu křivek  $g, g'$  procházejících bodem  $A$  na ploše  $\Phi$  je úhel křivek  $g_0, g'_0$  procházejících bodem  $A_0$  na ploše  $\Phi_0$  téže velikosti.

Jinak řečeno: Rozvinutí je spojitá deformace plochy  $\Phi$  do rovinného útvaru  $\Phi_0$ , při kterém zůstávají zachovány úhly a délky křivek. Křivost křivky se komplanací obecně nezachovává. O vztahu křivosti křivky na ploše a po rozvinutí platí následující tvrzení:

**Věta 2.0.2.** *Při komplanaci rozvinutelné plochy se nemění flexe její hrany vratu.*

Co se mění je torze hrany vratu  $c$ , ta se stává rovnou nule, protože z prostorové křivky  $c$  vzniká rovinná křivka  $c_0$ .

**Věta 2.0.3** (Catalánova). *Bud'  $R$  poloměr křivosti křivky  $c$  na ploše  $\Phi$  v bodě  $A$  a  $R_0$  poloměr křivosti křivky  $c_0$  po rozvinutí na  $\Phi_0$  v odpovídajícím bodě  $A_0$ . Bud'  $\tau_A$  tečná rovina plochy  $\Phi$  v bodě  $A$ , bud'  $\omega$  oskulační rovina křivky  $c$  na ploše  $\Phi$  v bodě  $A$ , bud'  $\varphi$  úhel mezi  $\tau_A$  a  $\omega_A$ . Pak platí*

$$(2.1) \quad R_0 = \frac{R}{\cos \varphi}.$$

*Důkaz.* Uvažujme dva sousední elementy  $c_1 \equiv AA_1$  a  $c_2 \equiv A_1A_2$  křivky  $c$  v rovinách  $\tau_1 \equiv (t, t_2)$  a  $\tau_2 \equiv (t_1, t_2)$  (obr. 2.1(a)).

Po otočení roviny  $\tau_1$  okolo  $t_1$ , převádějícím ji do polohy  $\tau_2^0 \equiv \tau_1$ , bod  $A_2$  zaujme polohu  $A_2^0$ . Čtyřstěnu  $AA_1A_2A_2^0$  opišeme kulovou plochu  $\Phi$ . Označme  $k$  kružnici opsanou trojúhelníku  $AA_1A_2$  a  $k^0$  kružnici opsanou trojúhelníku  $AA_1A_2^0$ . Obě kružnice leží na  $\Phi$  a  $c_1$  je jejich společná tětiva. Střed kulové plochy  $\Phi$  leží v rovině souměrnosti  $\varepsilon$  úsečky  $A_2A_2^0$ .

Předpokládejme nyní, že mnohoúhelník  $P, P_1, P_2, \dots$ , jehož vrcholy leží na hraně vratu  $h$  rozvinutelné plochy, má délku každé jeho strany blízkí se nule. Pak:

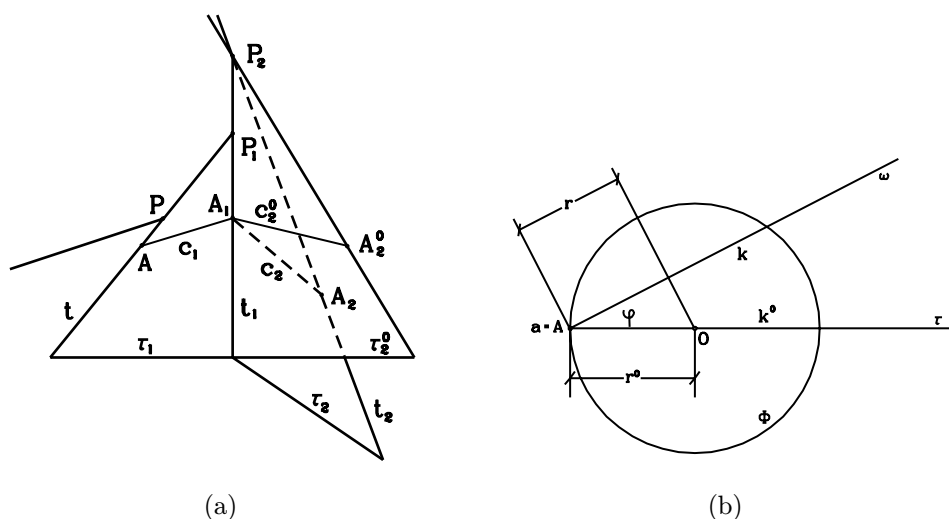
1.  $P_1, P_2$  se stanou k  $P$  souměrnými body na  $c$  a rovina  $\tau_1 \equiv (PP_1P_2)$  se stane oskulační rovinou křivky  $h$  v  $P$  a tečnou rovinou rozvinutelné plochy podél  $t$ .
2. Spojnice  $AA_1$  se stane tečnou  $a$  k  $c$  v  $A$ ;  $A_1, A_2$  se stanou k  $A$  souměrnými body na  $c$ , rovina  $(AA_1A_2)$  se stane oskulační rovinou  $\omega$  a kružnice  $k$  oskulační kružnicí křivky  $c$  v jejím bodě  $A$ .
3.  $A_1$  a  $A_2^0$  se stanou k  $A$  souměrnými body křivky  $c^0$ , vzniklé z křivky  $c$  rozvinutím plochy do její tečné roviny  $\tau$  podél  $t$ ; kružnice  $k^0$  se stane oskulační kružnicí křivky  $c^0$  v  $A \equiv A^0$ .
4. Střed kulové plochy  $\Phi$  se ztotožní se středem oskulační kružnice  $k^0$  tj.  $k^0$  je pak hlavní kružnicí plochy  $\Phi$ . Skutečně, rovina  $\varepsilon$  po ztotožnění rovin  $\tau_1$  i  $\tau_2$  v tečné rovině  $\tau$  se též ztotožňuje s  $\tau$ .

Oskulační kružnice  $k$  a  $k^0$  na kulové ploše  $\Phi$  se dotýkají v  $A$  stejně jako  $c$  a  $c^0$ , přičemž  $a$  je jejich společná tečna.

Kolmým promítáním ve směru tečny  $a$  získáme obraz (2.1(b)) kulové plochy  $\Phi$ , oskulačních kružnic  $k$  a  $k^0$ , i jejich rovin odchýlených o úhel  $\varphi$ . Z něj je správnost věty zřejmá. □

## 2.1 Válcová a kuželová plocha

Zvolme křivku  $c$  a směr  $s$ . Každým bodem (řídící) křivky  $c$  vedeme rovnoběžku se směrem  $s$ . Tyto rovnoběžky vytvoří plochu, která se nazývá válcová plocha. Uvažované přímky jsou



Obrázek 2.1: K důkazu Catalánovy věty

povrchovými (tvořícími) přímkami plochy. Jestliže je křivka  $c$  rovinná, pak směr  $s$  nemůže být rovnoběžný s rovinou řídicí křivky.

Válcová plocha se nazývá kolmá, jestliže její povrchové přímky jsou kolmé k rovině řídicí křivky, jinak je šikmá (kosá). Kruhová válcová plocha má za řídicí křivku kružnici, rotační válcová plocha je kruhová a kolmá.

Mezi dvěma rovinnými řezy válcové plochy existuje vztah perspektivní afinity s osou v průsečnici rovin řezů a se směrem rovnoběžným s povrchovými přímkami válcové plochy.

Nechť je dána křivka  $c$  a bod  $V$ . Všechny spojnice bodů křivky  $c$  s bodem  $V$  vytvoří plochu, které říkáme kuželová plocha. Vylučujeme však případ, kdy křivka  $c$  a bod  $V$  leží v jedné rovině. Uvažované přímky se nazývají tvořící, neboli povrchové, bod  $V$  je vrcholem.

Kruhová kuželová plocha má za řídicí křivku kružnici. Spojnice vrcholu se středem řídicí kružnice se nazývá osa. Rotační kuželová plocha je kruhová s osou kolmou na rovinu řídicí kružnice.

Mezi dvěma rovinnými řezy kuželové plochy existuje vztah perspektivní kolineace s osou v průsečnici rovin řezů a se středem ve vrcholu kuželové plochy.

Průnikem dvou ploch je množina jejich společných bodů. Ve většině případů můžeme průnik dvou ploch sestavit takto: Volíme rovinu  $\rho$  (nebo jinou vhodnou plochu), která protne plochy v křivkách  ${}^1k$  a  ${}^2k$ , aby byly co nejjednodušší. Jejich průsečíky leží na obou plochách, tedy náleží pronikové křivce.

## 2.2 Šroubový torsus

Rozvinutelnou šroubovou plochu vytvoří tečny šroubovice, která je pro plochu hranou vratu. Je-li hrana vratu plochy pravotočivá, resp. levotočivá, pak se také plocha nazývá pravotočivá, resp. levotočivá.

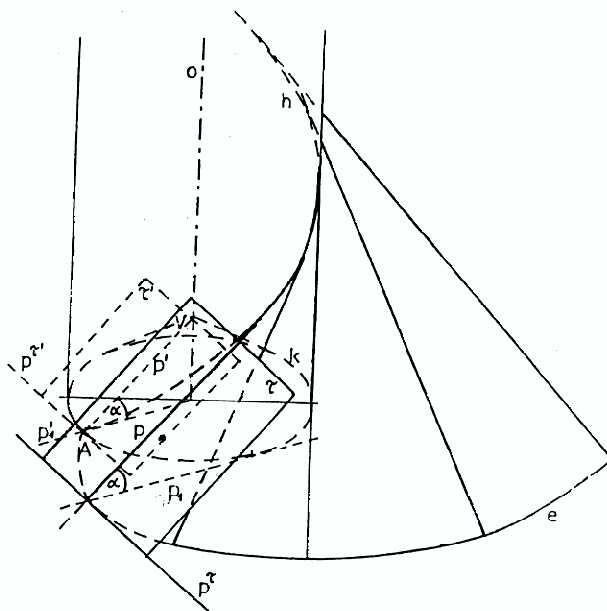
Při zobrazování se vždy omezujeme na vhodně zvolenou část. Hrana vratu  $h$  rozvinutelné šroubové plochy má nekonečně mnoho závitů. Jestliže nazveme závitem plochy množinu tečen v bodech jednoho závitu šroubovice  $h$ , pak má plocha také nekonečně mnoho závitů, které se navzájem pronikají v nekonečně mnoha dvojnásobných šroubovicích, které jsou souosé s hranou vratu a mají s ní stejnou orientaci i výšku závitu. Každým bodem dvojnásobné křivky plochy procházejí dvě různé přímky této plochy a v jejich bodech má plocha různé tečné roviny, narozdíl od hrany vratu, v jejichž bodech se tečné roviny pronikajících pláštů ztotožňují.

**Věta 2.2.1.** *Je-li  $AB$  oblouk šroubovice a  $t$  její tečna, vytínají roviny, vedené body  $A, B$  kolmo na osu  $o$  šroubovice, na tečně  $t$  úsečku rovnou délce oblouku  $AB$ .*

Odtud plyne, že každá rovina kolmá k ose  $o$  protíná plochu  $\Phi$  v kruhové evolventě podstavné kružnice válce, na němž leží hrana vratu plochy  $\Phi$ . Všechny kruhové evolventy vyřezané na ploše rovinami  $\rho \perp o$  jsou shodné.

Řídící kužel hrany vratu  $h$  je zároveň řídícím kuželem celého šroubového torzu  $\Phi$ .

Oskulační roviny šroubovice  $h$  jsou podle konstrukce 9 rovnoběžné s tečnými rovinami řídící kuželové plochy. Z toho tedy plyne jejich konstrukce a fakt, že jsou tečnými rovinami plochy  $\Phi$ . Přímka  $p$ , podél níž se tečná rovina  $\tau$  plochy  $\Phi$  dotýká, je spádovou přímkou roviny  $\tau$  vzhledem k  $\pi \perp o$  a stopa  $p^\tau$  na  $\pi$  se dotýká evolventy  $e$ .



Obrázek 2.2: Tečná rovina šroubového torzu

Řez  $g$  plochy  $\Phi$  obecnou rovinou  $\rho$  se vyšetřuje bodovou konstrukcí jako množina průsečíků přímek plochy  $\Phi$  s rovinou  $\rho$ . Průsečnice  $r = \tau \cap \rho$ , kde  $\tau$  je tečná rovina plochy  $\Phi$  podél zvolené přímky  $p$ , je tečnou řezu  $g$  v bodě  $R = r \cap p$ . Rovina  $\rho$  protíná šroubovici  $h$  v bodech vratu křivky  $g$  a dvojnou šroubovici plochy v dvojnásobném bodě řezu. Rovina

$\rho'$ ,  $V \in \rho' \parallel \rho$ , protíná řídicí kuželovou plochu  $\Omega$  hrany vratu  $h$  v přímkách  $a'$ ,  $b'$ . Přímký  $a$ ,  $b$  plochy  $\Phi$  ( $a \parallel a'$ ,  $b \parallel b'$ ) protínají  $\rho$  v nevlastních bodech křivky  $g$ , tečné roviny plochy  $\Phi$  podél přímek  $a$ ,  $b$  pak  $\rho$  protínají v asymptotách  $m$ ,  $n$  křivky  $g$ .

Jestliže se  $\rho'$  kuželové plochy  $\Omega$  dotýká, resp. jí neprotíná, pak existuje jeden nevlastní bod křivky  $g$ , resp. křivka  $g$  nemá nevlastní bod. Stopy roviny  $\rho$  v rovinách omezujících danou plochu  $\Phi$  protínají příslušné evolventy v koncových bodech křivky  $g$ .

Hrana vratu torzu má konstantní nenulovou křivost a ta se podle 2.0.2 nemění. Protože jedinou rovinnou křivkou s konstantní křivostí různou od nuly je kružnice, rozvine se hrana vratu  $h$  do kružnice  $h'$  s poloměrem  $R = \frac{r}{\cos^2 \varphi}$ , kde  $r$  je poloměr válcové plochy a  $\varphi$  je sklon šroubovice. Jeden závit šroubovice  $h$  se rozvine jen do části kružnice  $h'$ . Délka tohoto závitu je  $\frac{2\pi r}{\cos \varphi}$  a obvod kružnice  $h'$  je  $2\pi R = \frac{2\pi r}{\cos^2 \varphi}$ . Zřejmě je  $\frac{2\pi r}{\cos \varphi} < \frac{2\pi r}{\cos^2 \varphi}$ . Tečny  $t$  šroubovice  $h$  přejdou do tečen  $^0t$  kružnice  $h'$ . Označíme-li  $q$  tečnu ke šroubovici v bodě  $Q$ ,  $R$  její půdorysný stopník, pak oblouk  $\widehat{AQ}$  na šroubovici  $h$  musí mít stejnou délku jako oblouk  $\widehat{A'Q'}$  na kružnici  $h'$  a velikosti úsečky  $QR$  a  $Q'R'$ . Velikost úsečky  $QR$  nanese na kružnici  $h'$  od bodu  $A'$  a dostaneme bod  $Q'$ . Tečna v bodě  $Q'$  k  $h'$  je obraz  $q'$  přímky  $q \subset \Phi$ . Protože  $|QR| = |Q'R'|$  leží  $R'$  na evolventě  $e'$  kružnice  $h'$ , která je rozvinutím evolventy  $e$  v půdorysně  $\pi$ .

Protože mezi vlastního stínu je množina bodů dotyku světelných tečných rovin, skládá se mez vlastního stínu z tvořících přímek plochy, podél nichž se torzu dotýkají tečné roviny rovnoběžné se směrem osvětlení. Mezi vlastního stínu řídicí kuželové plochy jsou přímký  $a'$ ,  $b'$ . Přímký  $a$ ,  $b$  plochy  $\Phi$  rovnoběžné s  $a'$ ,  $b'$  pak patří mezi vlastního stínu plochy  $\Phi$ .

Jestliže bod  $V'$  leží vně kružnice  $h_1$ , resp. na kružnici  $h_1$ , resp. uvnitř kružnice  $h_1$ , pak na každém závitě plochy  $\Phi$  leží dvě přímký meze vlastního stínu, resp. jedna přímka meze vlastního stínu, resp. mez vlastního stínu neexistuje.

*Konstrukce 10. Mez vlastního stínu*

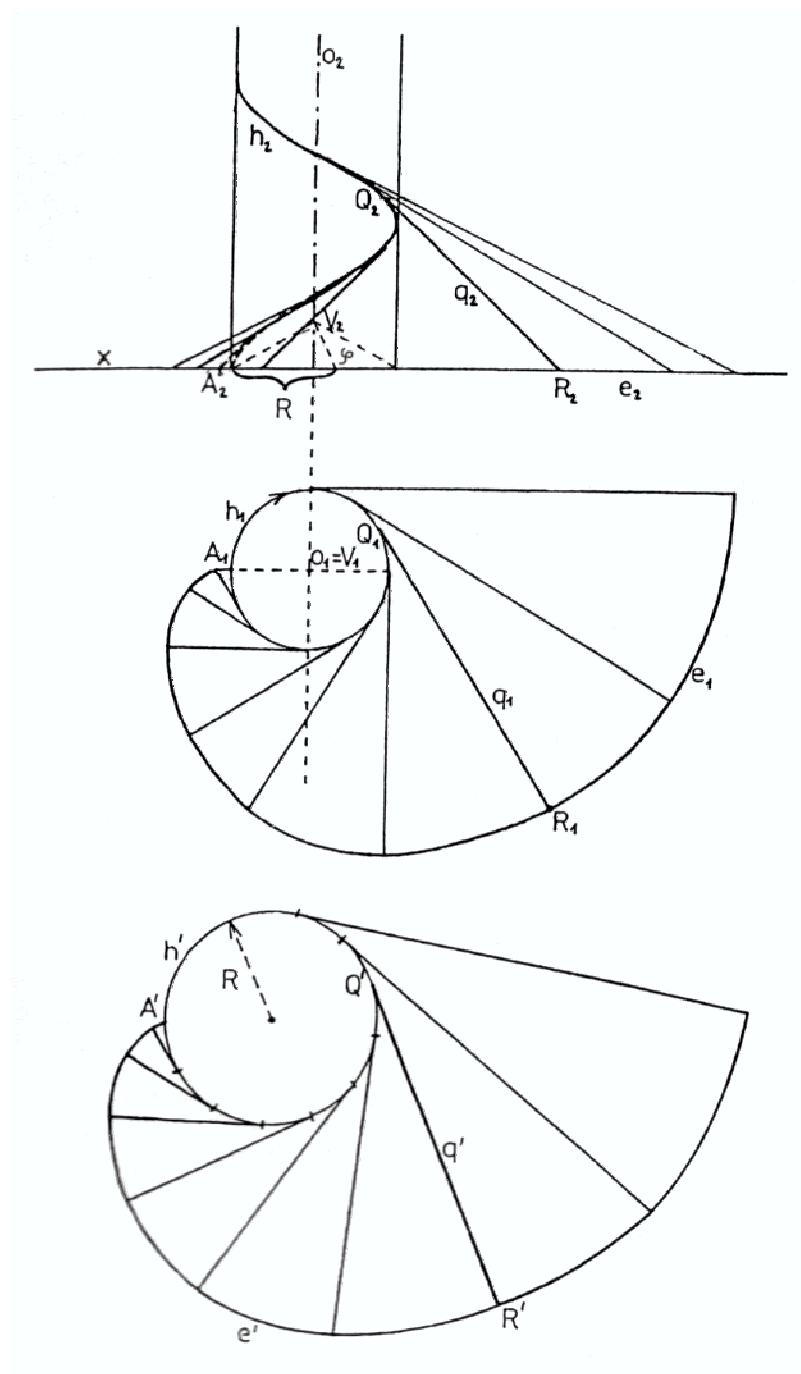
Bod  $V'_1$  je vrženým stínem vrcholu řídicí kuželové plochy do  $\pi$ . Při otočení v rovině  $\pi$  kolem středu  $o_1$  o úhel  $\frac{\pi}{2}$  ve směru stoupání šroubovice  $h$ , přechází  $V'_1$  do  $V_1^+$ . Tečny  $a_1$ ,  $b_1$  vedené z bodu  $V_1^+$  ke kružnici  $h_1$  jsou půdorysy přímek meze vlastního stínu plochy  $\Phi$ .

Vržený stín plochy  $\Phi$  určí vržený stín šroubovice  $h$  (viz. kapitola 1.2.1) a vržené stíny jednotlivých tvořících přímek. Ty můžeme např. omezit dvojnou šroubovicí  $d$  plochy  $\Phi$  s nejmenším poloměrem. Vržený stín plochy  $\Phi$  na průmětnu  $\pi$  pak bude mezi vrženým stínem  $h'$  hrany vratu a vrženým stínem dvojně šroubovice  $d'$ . Vyřešení vržených stínů plochy na sebe samu se provádí metodou zpětných světelných paprsků.

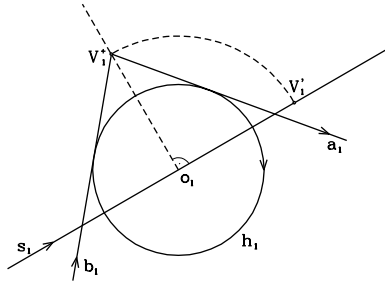
Rozvinutelnou šroubovou plochu jsme definovali pomocí její hrany vratu. Je však možné ji vytvořit i jinými způsoby. Z poznatků o šroubovici z oddílu 1.2.1 vyplývají i některé důsledky pro rozvinutelnou šroubovou plochu.

Protože všechny tečny šroubovice  $h$  svírají s rovinou  $\pi \perp o$  konstantní úhel, jedná se o plochu konstantního spádu, a proto můžeme její přímký určit podle konstrukce 13 (viz. dále), pomocí evolventy kružnice a řídicí kuželové plochy hrany vratu. Další vytvoření šroubového torsu dostáváme užitím šroubového pohybu, kdy šroubojeme tečnu hrany vratu, nebo kruhovou evolventu.





Obrázek 2.3: Rozvinutí šroubového torsu



Obrázek 2.4: Mez vlastního stínu

## 2.3 Přejchodové plochy a plochy konstantního spádu

Z konstruktivního hlediska je někdy výhodnější určit rozvinutelnou plochu jinak než jako množinu tečen prostorové křivky.

Množina tečných rovin prostorové křivky je závislá na dvou parametrech – jeden udává tečnu křivky a druhý polohu roviny, která touto tečnou prochází.

Množina rovin, dotýkajících se dvou křivek, je tedy jednoparametrická a určuje rozvinutelnou plochu.

Mějme dány dvě křivky  ${}^1k, {}^2k$ . Z bodu  $P \in {}^1k$  promítneme křivku  ${}^2k$  kuželovou plochou  $\Omega$  a k  $\Omega$  vedeme tečnou rovinu  $\tau$  procházející tečnou  $t$  ke křivce  ${}^1k$  v bodě  $P$ . Rovina  $\tau$  se rozvinutelné plochy dotýká podél její přímky  $p$  a křivky  ${}^2k$  v bodě  $T$ . Tečna  $u$  křivky  ${}^1k$  v bodě  $T$  leží v rovině  $\tau$  a přímky  $u, t$  se protínají (v rozšířeném eukleidovském prostoru).

Pokud  ${}^1k, {}^2k$  jsou křivky rovinné v rovinách  ${}^1\rho$  a  ${}^2\rho$ , pak se popsání postup zjednoduší (úvahy jsou pořád prováděné v rozšířeném eukleidovském prostoru).

*Konstrukce 11.* Přejchodová plocha

V bodě  ${}^1T \in {}^1k$  sestrojíme tečnu  ${}^1t$  a určíme průsečík  $M = {}^1t \cap r$ , kde  $r = {}^1\rho \cap {}^2\rho$ . Bodem  $M$  vedeme tečnu  ${}^2t$  ke křivce  ${}^2k$ . Jestliže je  ${}^2T$  její bod dotyku, pak přímka  $p = {}^1T{}^2T$  patří rozvinutelné ploše.

Takto vzniklá plocha se nazývá rozvinutelná přechodová plocha mezi dvěma rovinnými křivkami.

*Konstrukce 12.* Rozvinutí přechodové plochy

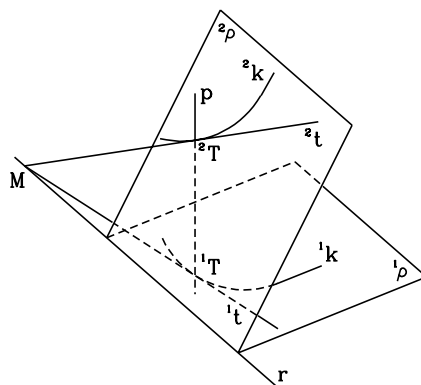
Část plochy omezená oblouky  $AB, A'B'$  a úsečkami  $AA', BB'$  nahradíme „prostorovým čtyřúhelníkem“ (čtyři body  $A, A', B, B'$  neleží v téže rovině). Úhlopříčkou  $AB'$  (nebo  $A'B$ ) rozdělíme čtyřúhelník na dva trojúhelníky a sestrojíme jejich skutečné velikosti, přiložíme je k sobě a získáme přibližný rozvinutý úsek plochy.

Může však nastat i případ, že jedna z křivek je nevlastní. Ke konstrukci přímek příslušné rozvinutelné plochy je pak nutné použít pozměněnou formu konstrukce 11.

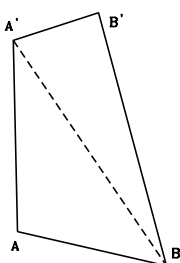
*Konstrukce 13.* Plocha konstantního spádu

Nechť je dána křivka  ${}^1k$  a rotační kuželová plocha  $\Omega$  s vrcholem  $V$  a osou  $o$ , která protíná nevlastní rovinu v křivce  ${}^2k$ . Zvolme bod  $P \in {}^1k$  a bodem  $V$  vedme  $t' \parallel t$ , kde  $t$  je tečna křivky  ${}^1k$  v bodě  $P$ .

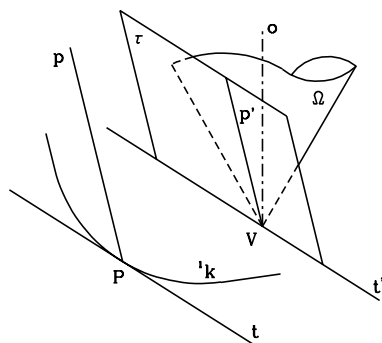




Obrázek 2.7: Konstrukce rozvinutelné přechodové plochy



Obrázek 2.8: Rozvinutí přechodové plochy



Obrázek 2.9: Konstrukce plochy konstantního spádu

# Kapitola 3

## Zborčené plochy

**Definice 28.** Přímková plocha se nazývá zborčená, jestliže na ploše existuje pouze konečný počet torzálních přímek. Netorzální tvořící přímky zborčené plochy se nazývají regulární.

Žádným bodem obecné tvořící přímky  $p$  (netorzální přímky) zborčené plochy neprochází význačná tečná rovina. Pro každý bod přímky  $p$  nalezneme jinou tečnou rovinu plochy, protože dvojice soumězných přímek zborčené plochy jsou mimoběžky.

V obecném případě je přímka v prostoru určena čtyřmi nezávislými podmínkami. Tyto podmínky mohou být vyjádřeny jak parametry, tak geometricky. Příkladem geometricky chápané jednoduché podmínky pro zadání přímky je, že tato přímka protíná danou křivku v jednom bodě nebo se jednoduše dotýká dané plochy.

Množina přímek, splňující tři nezávislé podmínky je závislá již jen na jednom parametru, je tedy jednoparametrická a vytváří přímkovou plochu. Dále budeme přímkovou plochu chápat právě tímto způsobem. Budeme předpokládat, že plocha  $\Phi$  je množina přímek (resp. množina bodů těchto přímek) protínající tři zadané křivky  $a, b, c$ , tzv. řídicí křivky plochy  $\Phi$ . Plochu označíme  $\Phi_{a,b,c}$ .

Různou volbou řídicích křivek, případně ploch, dostáváme celou škálu zborčených ploch.

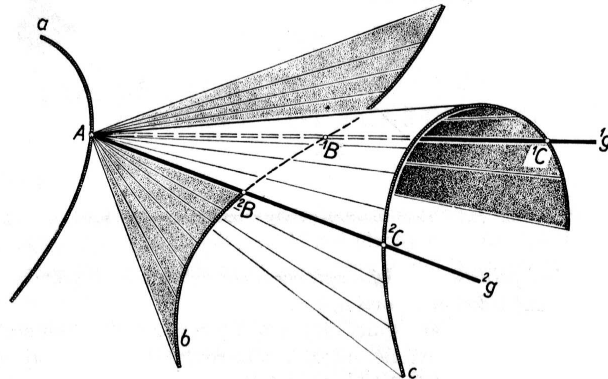
Řídicími křivkami mohou být jakékoliv křivky plochy, které protínají všechny tvořící přímky. Zvolíme-li za jeden z řídicích útvarů plochu, pak se jí všechny přímky plochy  $\Phi$  budou dotýkat. Protože pracujeme v rozšířeném eukleidovském prostoru, může se stát, že některá z řídicích křivek je nevlastní. Vytváření přímkových ploch pomocí tří řídicích křivek je výhodné především při praktickém využití zborčených ploch.

Někdy se stane, že takto určená přímková plocha se rozpadne na dvě části. Jedna část přímkové plochy je nerozvinutelná, zatímco druhou část plochy lze do roviny rozvinout. Za zborčenou plochu pak považujeme pouze její nerozvinutelnou část, druhá, rozvinutelná část, se do zborčené plochy nezahrnuje.

*Konstrukce 14.* Tvořící přímky zborčené plochy  $\Phi_{a,b,c}$

Předpokládejme, že dané řídicí křivky  $a, b, c$  mají zcela obecnou polohu, tj. jsou-li rovinné, neleží v téže rovině a také nemají společné body. Každým bodem  $A$  řídicí křivky  $a$  a řídicími křivkami  $b, c$  jsou určeny dvě kuželové plochy se společným vrcholem  $A$ , jejichž

společné povrchové přímky splňují výtvarný zákon plochy  $\Phi_{a,b,c}$ , jsou proto jejími tvořícími přímkami.



Obrázek 3.1: Tvořící přímky zborcené plochy  $\Phi_{a,b,c}$

Jsou-li  $a, b, c$  algebraické křivky stupňů  $n_a, n_b, n_c$ , jsou i oba kužele stupňů  $n_b, n_c$  a počet takto určených přímek je  $n_b \cdot n_c$ .

**Definice 29.** Křivka na ploše  $\Phi_{a,b,c}$  jejímž každým bodem prochází  $r$  tvořících přímek, se nazývá  $r$ -násobnou řídicí křivkou plochy  $\Phi_{a,b,c}$ .

**Věta 3.0.1.** Nemají-li algebraické křivky  $a, b, c$  společné body, je každá z nich vícenásobnou řídicí křivkou plochy  $\Phi_{a,b,c}$  a každá má násobnost rovnou součinu stupňů zbývajících dvou čar.

**Věta 3.0.2.** Jsou-li řídicí křivky  $a, b, c$  zborcené plochy  $\Phi_{a,b,c}$  algebraické, stupňů  $n_a, n_b, n_c$ , je plocha  $\Phi_{a,b,c}$  algebraická, stupně

$$(3.1) \quad n = 2 \cdot n_a \cdot n_b \cdot n_c - s_{a,b} \cdot n_c - s_{b,c} \cdot n_a - s_{a,c} \cdot n_b,$$

kde  $s_{i,j}$  je počet průsečíků řídicích útvarů  $i$  a  $j$ .

**Věta 3.0.3** (Chaslesova). Příčná řada dotkových bodů na (obecné) tvořící přímce  $p$  zborcené plochy je projektivní se svazkem příslušných tečných rovin s osou  $p$ .

*Důkaz.* Buď  $p$  přímka zborcené plochy  $\Phi_{a,b,c}$  a  $p'$  přímka k ní blízká,  $a, b, c, d$  čtyři navzájem neprotínající se řídicí křivky plochy  $\Phi_{a,b,c}$ . Jejich průsečíky s  $p$ , resp. s  $p'$ , buďte po řadě body  $A, B, C, D$ , resp.  $A', B', C', D'$ . Tečny v bodech  $A, B, C, D$  ke křivkám  $a, b, c, d$  označme  $t_A, t_B, t_C, t_D$ . Roviny  $\alpha \equiv (p, t_A), \beta \equiv (p, t_B), \gamma \equiv (p, t_C), \delta \equiv (p, t_D)$  jsou tečné roviny plochy  $\Phi_{a,b,c}$  v bodech  $A, B, C$  a  $D$ . Uvažme čtveřici rovin  $\alpha' \equiv (p, A'), \beta' \equiv (p, B'), \gamma' \equiv (p, C'), \delta' \equiv (p, D')$  svazku s osou  $p$ . Protože  $p'$  protíná jeho roviny ve čtveřici bodů  $A', B', C', D'$  je zřejmá rovnost dvojpoměrů

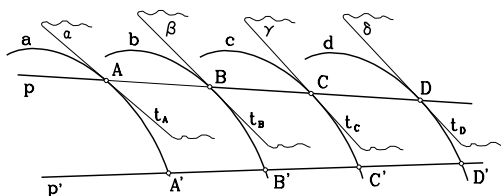
$$[\alpha', \beta', \gamma', \delta'] = [A', B', C', D'].$$

Přiblíží-li se  $p'$  neomezeně k  $p$ , přiblíží se body  $A', B', C', D'$  neomezeně k bodům  $A, B, C, D$ , sečny  $(A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D')$  k tečnám  $t_A, t_B, t_C, t_D$  a tedy i roviny  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  k rovinám  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Přitom je stále v platnosti uvedená rovnost dvojpoměrů, takže i

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [A, B, C, D].$$

Je jasné, že korespondence mezi řadou dotykových bodů  $p(A, B, C, D, \dots)$  a svazkem tečných rovin  $p(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots)$  je oboustranně jednoznačná. Protože při této korespondenci přidružené čtveřice tvoří stejné dvojpoměry, je zmíněná korespondence projektivností

$$p(A, B, C, D, \dots) :: p(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots).$$



Obrázek 3.2: K důkazu Chaslesovy věty

□

Jsou-li známi tečné roviny  $\alpha, \beta, \gamma$  ve třech bodech  $A, B, C$  přímky  $p$  zborcené plochy  $\Phi_{a,b,c}$  lze snadno sestrojít tečnou rovinu libovolného dalšího bodu  $D$  na  $p$ .

*Konstrukce 15.* Tečná rovina zborcené plochy

Jsou dány obrazy bodů  $A, B, C, D$ , ležících na tvořící přímce  $p$  zborcené plochy  $\Phi_{a,b,c}$  a obrazy stop  $n^\alpha, n^\beta, n^\gamma$  tečných rovin  $\alpha, \beta, \gamma$  bodů  $A, B, C$ . Máme za úkol sestrojít obraz stopy  $n^\delta$  tečné roviny v bodě  $D$ .

Všechny čtyři stopy procházejí stopníkem  $N_p$  a tvoří svazek. Podle Chaslesovy věty stačí sestrojít  $n^\delta$  tak, aby bylo  $[n^\alpha, n^\beta, n^\gamma, n^\delta] = [A, B, C, D]$  což je možné provést třeba proužkem papíru.

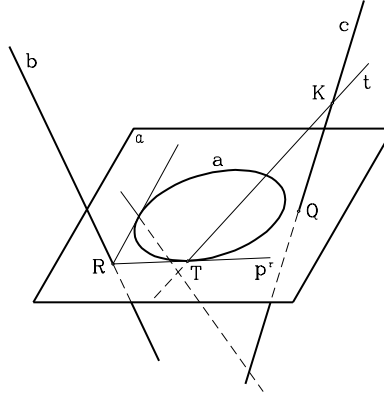
Také nevlastnímu bodu  $E^\infty$  přímky  $p$  přísluší v Chaslesově projektivnosti jistá tečná rovina  $\varepsilon$  – asymptotická rovina (definice 17). Její stopa  $n^\varepsilon$  je rovnoběžná s hranou proužku.

Vedeme-li zvoleným bodem  $V$  rovnoběžky s tvořícími přímkami zborcené plochy  $\Phi$ , vytvoříme obecný kužel  $\Phi^*$  s vrcholem  $V$  a nevlastní řídicí křivce  $e^\infty$  ( $e^\infty$  je nevlastní křivka plochy  $\Phi$ ). Přímkovy plochy  $\Phi$  a  $\Phi^*$  jsou v oboustranně jednoznačné korespondenci, ve které tvořící přímce  $p$  plochy  $\Phi$  koresponduje s ní rovnoběžná tvořící přímka  $p^*$  kužele  $\Phi^*$ . Kužel  $\Phi^*$  se nazývá řídicí kužel zborcené plochy.

Asymptotická rovina, příslušná tvořící přímce  $p$  zborcené plochy  $\Phi$ , je rovnoběžná s tečnou rovinou jejího řídicího kužele  $\Phi^*$  podél jeho tvořící přímku  $p^*$ .







Obrázek 3.4: Torzální přímka, rovina a kuspidální bod

Je-li  $p \parallel s$  regulární přímka plochy, pak každá rovina obsahující  $p$  je světelná a celá přímka  $p$  patří mezi vlastního stínu. Je-li  $p$  torzální přímka, ale její torzální rovina není světelná, pak světelná rovina procházející přímkou  $p$  se jí dotýká v kuspidálním bodě. Pro světelnou torzální rovinu patří celá přímka  $p$  patří mezi vlastního stínu.

Mez vrženého stínu zborcené plochy na některou rovinu je vrženým stínem meze vlastního stínu a současně obálkou vržených stínů přímek plochy.

Jestliže rovnoběžné osvětlení interpretujeme jako rovnoběžné promítání, pak je mez vlastního stínu skutečným a mez vrženého stínu zdánlivým obrysem plochy.

**Věta 3.0.4.** *Obrysové křivky nerozvinutelných přímkových ploch a meze vlastních stínů procházejí kuspidálními body plochy a dotýkají se v nich příslušných torzálních přímek.*

Obecně vyšetřování rovinného řezu jakékoliv zborcené plochy provádíme určením průsečíků tvořících přímek plochy s rovinou řezu.

Mají-li dvě zborcené plochy společnou tvořící přímku  $p$ , pak svazku rovin  $p(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots)$  přísluší projektivní přímá řada bodů  $p(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots)$  na první ploše, ale také projektivní přímá řada bodů  $p(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots)$  na ploše druhé. Protože obě řady jsou projektivní s týmž svazkem, jsou obě tyto souměstné řady projektivní mezi sebou, tj.

$$p(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \text{ ::: } p(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots).$$

Dvě souměstné řady mají obecně dva samodružné body a při třech různých samodružných bodech jsou totožné.

**Věta 3.0.5.** *Je-li  $p$  společná tvořící přímka dvou zborcených ploch, dotýkají se obě plochy nanejvýš ve dvou bodech přímky  $p$ . Dotýkají-li se ve třech různých bodech, dotýkají se podél celé přímky  $p$ , tj. Chaslesova projektivita je na přímce  $p$  pro obě plochy stejná.*

**Věta 3.0.6.** *Dotýkají-li se dvě zborcené plochy podél obecné tvořící přímky  $p$ , pak na ní mají společný centrální bod.*

Pokládáme-li na obrázku 3.2 tečny  $t_A, t_B, t_C$  řídicích čar  $a, b, c$  v jejich bodech  $A, B, C$  za řídicí přímky plochy  $\bar{\Phi}$ , dotýkají se plochy  $\Phi_{a,b,c}$  a  $\bar{\Phi}$  ve třech bodech přímky  $p$ . Proto se dotýkají podél celé přímky  $p$ .

Protože  $t_A, t_B, t_C$  jsou zcela libovolné tečny plochy  $\Phi_{a,b,c}$  v bodech  $A, B$  a  $C$ , lze jejich trojici volit nekonečným množstvím způsobů. Existuje tedy nekonečně mnoho tečných ploch (hyperboloidů a hyperbolických paraboloidů) zborcené plochy podél její přímky  $p$ .

### 3.1 Zborcené kvadriky

Kvadrika je plocha druhého stupně. Chceme-li, aby zborcená plocha  $\Phi_{a,b,c}$  byla kvadrikou, musí být nutně druhého stupně. Po dosazení do vzorce 3.1 pro výpočet stupně zborcené plochy získáme vztah

$$2 = 2 \cdot n_a \cdot n_b \cdot n_c - s_{a,b} \cdot n_c - s_{b,c} \cdot n_a - s_{a,c} \cdot n_b.$$

Čísla  $n_a, n_b, n_c$  jsou přirozená čísla, protože to jsou stupně jednotlivých řídicích křivek zborcené plochy. Jedinou možností, jak docílit, po dosazení konkrétních stupňů řídicích křivek, platného vztahu je, že všechny stupně  $n_a, n_b, n_c$  jsou rovny jedné a řídicí křivky se navzájem neprotínají. Zborcená kvadrika  $\Phi$  je určena třemi navzájem mimoběžnými přímkami.

Na zborcené přímkové kvadrice leží dva systémy přímek, tzv. reguly.

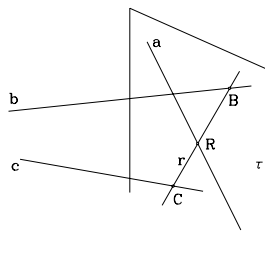
**Věta 3.1.1.** *Přímky téhož regulu jsou navzájem mimoběžné a přímka jednoho regulu protíná všechny přímky druhého regulu. Kvadrika je určena kterýmikoliv třemi přímkami téhož regulu.*

*Důkaz.* Uvažme na  $\Phi$  přímku  $m$  – příčku mimoběžek  $a, b, c$ . Proložíme-li touto přímkou rovinu  $\rho$ , pak  $m$  patří řezu  $k = \rho \cap \Phi$  a  $k$  je proto singulární kuželosečka. Patří k ní tedy ještě další přímka  $l$ . Je-li  $l$  různá od přímek  $a, b, c$ , pak je s nimi mimoběžná. Kdyby totiž např.  $c$  a  $l$  byly různoběžné, pak by  $c$  ležela v rovině  $\rho$  (jsme v rozšířeném eukleidovském prostoru a  $c$  by protínala také  $m$ ). Tím se dostáváme do sporu, protože rovina  $\rho$  má s plochou společné jen přímky  $m, l$ . Uvážíme-li další přímku  $n$  plochy  $\Phi$  jako příčku mimoběžek  $a, b, c$ , musí být přímky  $n, l$  různoběžné. Kdyby  $n, l$  byly mimoběžné, pak by  $n$  protínala rovinu  $\rho$  v bodě, který neleží ani na  $m$  ani na  $l$ . Tento bod by patřil řezu roviny  $\rho$  s plochou  $\Phi$  a to je opět spor.  $\square$

Libovolným bodem  $M$  zborcené kvadriky  $\Phi$  procházejí dvě přímky různých regulů plochy, které určují její tečnou rovinu  $\tau$ , jako množinu tečen ke křivkám plochy, procházejících bodem  $M$ .

*Konstrukce 17.* Tečná rovina zborcené kvadriky

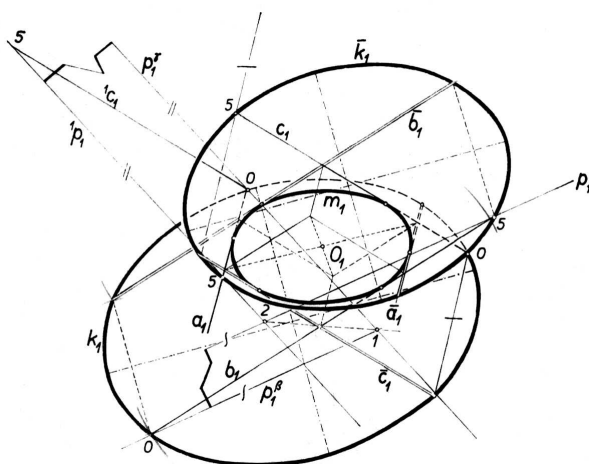
Je dána kvadrika  $\Phi_{a,b,c}$  a rovina  $\tau$  procházející přímkou  $a$  prvního regulu. Rovina  $\tau$  je tečnou rovinou této kvadriky a obsahuje ještě přímku  $r$  druhého regulu, kterou určíme na základě toho, že protíná všechny přímky prvního regulu. Průsečíky dvou dalších přímek prvního regulu s  $\tau$  označme  $B, C$ . Jejich spojnice je hledaná přímka  $r$ , průsečík  $R = a \cap r$  je bod dotyku roviny  $\tau$ .



Obrázek 3.5: Tečná rovina zborcené kvadriky

### 3.1.1 Zborcený hyperboloid

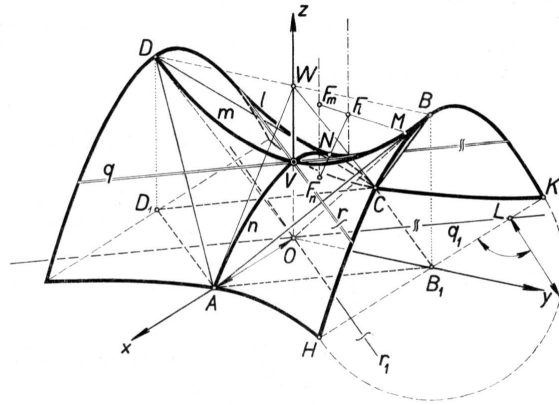
Zborcenou kvadriku nazveme zborcený hyperboloid, pokud jsou všechny řídící mimoběžky vlastní přímky. Tato kvadrika neobsahuje žádnou nevlastní přímku. Řídící přímky tedy nemohou být rovnoběžné se žádnou rovinou  $\pi$ , jinak by je protínala nevlastní přímka této roviny a patřila by ploše.



Obrázek 3.6: Zborcený hyperboloid

Z jiného pohledu můžeme považovat obecný zborcený hyperboloid (nazývaný také trojosý) za obraz rotačního jednodílného hyperboloidu v prostorové afinitě. Protože rotační hyperboloid vzniká rotací přímky okolo přímky s ní mimoběžné je zřejmé, že se jedná o přímkovou plochu.

Řez rovinou  $\rho$  zborceným hyperboloidem  $\Phi$  je vždy kuželosečka a to jakéhokoliv typu. Nemá-li nevlastní přímka  $u^\infty$  roviny  $\rho$  žádný společný bod s nevlastní kuželosečkou  $k^\infty$  plochy  $\Phi$ , nemá ani řez žádný nevlastní bod a výslednou kuželosečkou je reálná elipsa. Jestliže  $u^\infty$  protíná  $k^\infty$  ve dvou různých bodech, pak je řezem kuželosečka hyperbolického typu. Pokud  $\rho$  není tečnou rovinou jedná se přímo o hyperbolu, je-li  $\rho$  tečná rovina, získáme



Obrázek 3.7: Hyperbolický paraboloid

dvojici různoběžek. Konečně, je-li  $u^\infty$  tečnou kuželosečky  $k^\infty$ , je řezem parabola nebo dvojice rovnoběžných přímek v případě asymptotické roviny.

Každé přímce plochy  $\Phi$  přísluší nějaká asymptotická rovina. Tyto roviny obalují rozvinutelnou řídicí kuželovou plochu  $\Omega$  plochy  $\Phi$ . Kuželová plocha  $\Omega$  v vrcholem  $S$  ( $S$  je středem hyperboloidu) se dotýká plochy  $\Phi$  podél  $k^\infty$ . Rovina řezu  $\rho$  protíná plochy  $\Phi$  a  $\Omega$  v kuželosečkách stejného typu.

Mezi vlastního stínu na zborceném hyperboloidu, při osvětlení ze středu  $O$ , je řez polární roviny  $\rho$  středu osvětlení (vzhledem k  $\Phi$ ) s hyperboloidem. Pro rovnoběžné osvětlení je bod  $O$  nevlastní a  $u_\rho^\infty$  je jeho polára vzhledem ke kuželosečce  $k^\infty$ . Mezi vlastního stínu je elipsa nebo hyperbola, jestliže  $O^\infty \notin k^\infty$ . Platí-li  $O^\infty \in k^\infty$ , pak  $O^\infty$  náleží ploše  $\Phi$  a rovina  $\rho$  se plochy dotýká ve dvojici rovnoběžných přímek.

### 3.1.2 Hyperbolický paraboloid

Je-li jedna z přímek nevlastní, bude výslednou plochou parabolický hyperboloid. Protože nevlastní rovina protíná kvadriku v kuželosečce, obsahuje  $\Phi$  dvě nevlastní přímky. Přímky  $c^\infty$ ,  $q^\infty$  patří různým regulům plochy, jsou určeny různoběžnými rovinami  $\gamma$  a  $\sigma$ . Tyto roviny nazýváme řídicí roviny daného hyperbolického paraboloidu. Za řídicí roviny můžeme zvolit kterékoliv roviny rovnoběžné s  $\gamma$ ,  $\sigma$ , protože všechny přímky prvního regulu protínající  $q^\infty$  jsou rovnoběžné s řídicí rovinou  $\sigma$ . Podobně jsou všechny přímky druhého regulu rovnoběžné s rovinou  $\gamma$ .

Stručně řečeno, hyperbolický paraboloid je určen buď dvěma (vlastními) mimoběžnými přímkami a řídicí rovinou s nimi různoběžnou nebo třemi (vlastními) mimoběžkami, které jsou rovnoběžné s jednou (řídicí) rovinou. V praxi je hyperbolický paraboloid velmi často zadán zborceným čtyřúhelníkem

Hyperbolický paraboloid je jedinou z kvadrik, kterou nelze vytvořit perspektivně-afinní transformací z rotační kvadriky.

Rovina  $\rho$  protíná paraboloid v kuželosečce, jejíž typ opět určíme podle polohy nevlastní přímky  $u_\rho^\infty$  roviny  $\rho$  a nevlastních singulární kuželosečce plochy  $\Phi$  složené z přímek  $c^\infty$ ,

$q^\infty$ . Nevlastní přímka  $u_\rho^\infty$  roviny, která není rovnoběžná s osou plochy, protíná přímky  $c^\infty$ ,  $q^\infty$  ve dvou různých bodech, proto je řezem kuželosečka hyperbolického typu, tj. buď regulární hyperbola nebo dvojice různoběžných přímek v případě tečné roviny. Je-li rovina řezu rovnoběžná s osou paraboloidu, ale není rovnoběžná se žádnou řídicí rovinou, je řezem regulární parabola. V případě rovnoběžnosti roviny  $\rho$  a jedné z řídicích rovin se řez skládá z dvojice přímek, jedné vlastní a druhé nevlastní, tedy opět kuželosečka typu parabola. Eliptický typ kuželosečky na hyperbolickém paraboloidu neexistuje.

Rovnoběžné osvětlení je dáno nevlastním středem  $S^\infty$  určeným směrem  $s$ . Mezi vlastního stínu je, stejně jako u zborceného hyperboloidu, řez plochy polární rovinou středu osvětlení. Není-li směr osvětlení rovnoběžný s žádnou řídicí rovinou plochy, je, podle předchozího rozboru, mez parabola. Pokud je směr  $s$  rovnoběžný s řídicí rovinou, je mezi vlastního stínu přímka druhého regulu rovnoběžná s  $s$ . Pro směr osvětlení rovnoběžný s osou plochy mez vlastního stínu neexistuje – jedna strana plochy je osvětlená a druhá je ve stínu.

## 3.2 Konoidy

**Definice 31.** Nerozvinutelné přímkové plochy určené řídicí křivkou  $a$ , popř. plochou, jednou vlastní a jednou nevlastní řídicí přímkou se nazývají konoidy. Pokud je vlastní řídicí přímka konoidu kolmá k řídicí rovině, nazývá se konoid přímý, jinak mluvíme o konoidu kosém.

Konoid obvykle nazýváme podle řídicího útvaru  $a$ . Jestliže křivka  $a$  je kružnice, mluvíme o kruhovém konoidu, podobně o eliptickém konoidu, šroubovém konoidu či kulovém konoidu, který má za řídicí útvar  $a$  kulovou plochu.

Konoid, jehož třetí řídicí křivkou je opět přímka, je plochou druhého stupně, tedy hyperbolický paraboloid.

### 3.2.1 Plückerův a Küpperův konoid

Plückerův konoid je dán řídicí rovinou  $\gamma$ , elipsou  $a$ , která se do řídicí roviny promítá jako kružnice, a řídicí přímkou  $b \perp \gamma$ . Jedná se vlastně o přímý eliptický konoid.

Protože řídicí křivky  $a$  a  $b$  mají společný bod  $R$ , výpočtem ze vzorce pro stupeň zborcené plochy dostáváme plochu třetího stupně (přímková plocha čtvrtého stupně se rozpadne na konoid a rovinu procházející bodem  $R$  rovnoběžně s  $\gamma$ ):

$$n = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 3$$

Jedinou dvojnou řídicí křivkou tohoto konoidu je přímka  $b$ , ostatní řídicí útvary jsou jednoduché. Tečné roviny kuželosečky  $a$ , které jsou rovnoběžné s řídicí rovinou, jsou současně torzálními rovinami konoidu, v nich leží dvě torzální přímky. Jedna prochází nejvyšším bodem, druhá nejnižším bodem elipsy  $a$ . Z bodů na řídicí přímce  $b$ , které nejsou mezi dvěma kuspídálními body, nevycházejí žádné reálné tvořící přímky plochy.

Tečnou rovinu konoidu určíme pomocí dotykové kvadriky  $\Omega$ , danou tečnou v bodě elipsy  $a$  a oběma řídicími přímkami. To znamená, že  $\Omega$  je hyperbolický paraboloid. Asymptotická rovina  $\alpha$  konoidu, procházející přímkou  $p$ , je rovnoběžná s  $\gamma$ .

Tečná rovina  $\tau$ , procházející přímkou  $p$  s bodem dotyku  $T$ , ještě protíná Plückerův konoid v elipse  $k$ , která se do půdorysu promítá jako kružnice  $k_1$ , kde se dotýká přímky  $p'_1$  v bodě  $b_1$  a prochází bodem  $T_1$  ( $p$  a  $p'$  jsou přímky plochy ležící v téže druhé promítací rovině)

Protože je Plückerův konoid plocha třetího stupně, je také její rovinný řez obecně křivka třetího stupně. Jestliže rovina řezu protíná tvořící přímku  $b$  v bodě  $R$ , který leží mezi kuspídními body, pak je  $R$  dvojnásobný bod řezu. Splývá-li bod  $R$  s některým kuspídním bodem, pak má křivka řezu v  $R$  bod vratu. Konečně, leží-li bod  $R$  vně úsečky určené kuspídními body, pak je křivka řezu bez singulárních bodů.

Küpperův konoid je kosý kruhový konoid. Jde o plochu určenou svislou řídicí přímkou  $b$ , zvolme ji v nárysně. Dalším řídicím útvarem plochy je kružnice  $k$ , kterou zvolme v půdorysně (přímka  $b$  protíná kružnici  $k$ ). Řídicí rovinou plochy je rovina totožnosti, tj. rovina procházející osou  $x$  a půlicí druhý a čtvrtý kvadrant. Přímka  $b$  je dvojnou přímkou plochy.

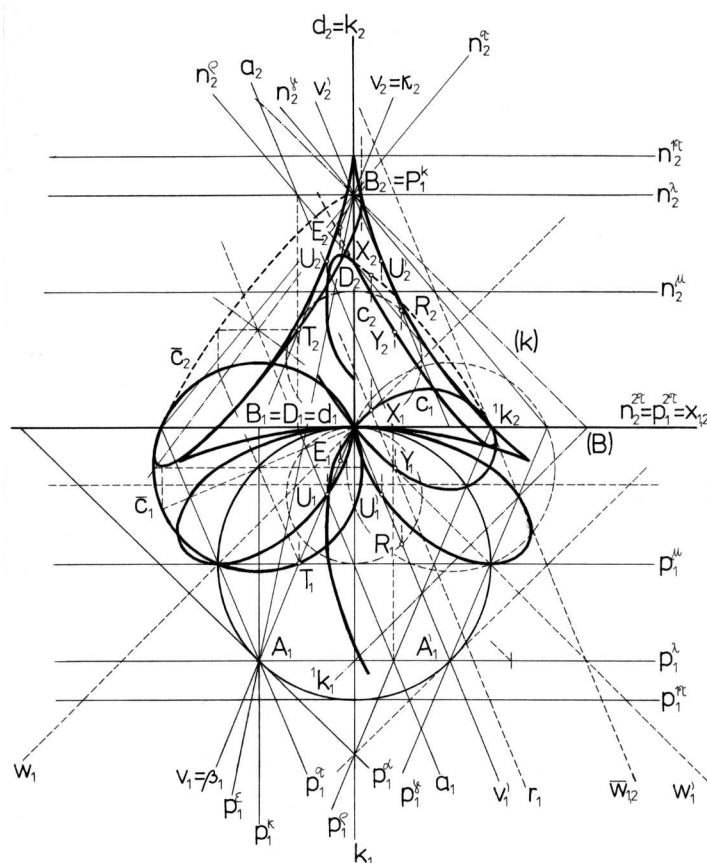
Libovolná tečná rovina, procházející povrchovou přímkou konoidu, protíná plochu ještě v elipse. Tyto eliptické řezy se kolmo promítají do roviny řídicí kružnice jako kružnice. Řezem rovinou, rovnoběžnou s rovinou souměrnosti, Küpperovým konoidem je přímka a elipsa, která se do půdorysu promítá do kružnice dotýkající se  $k_1$  v bodě  $d_1$ , průmětem v nárysu je také kružnice.

### 3.2.2 Kruhový konoid

Dalším konkrétní konoidem může být přímý souměrný kruhový konoid (stupně  $n = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$ ), jehož řídicí kružnice  $a$  o středu  $S$  ležící v průčelné rovině  $\nu$ , jehož vertikální řídicí rovina  $\gamma$  (s nevlastní přímkou  $c$ ) prochází bodem  $S$  kolmo k  $\nu$  a vlastní řídicí přímka  $b \parallel \nu$  leží v rovině  $\pi$ . Důsledkem je souměrnost konoidu nejen podle roviny rovnoběžné s  $\pi$  a procházející bodem  $S$ , ale i podle roviny  $(b, S)$ . V půdoryse má plocha obrys jako rotační válec, v bokoryse jako rotační kužel.

Roviny rovnoběžné s  $\pi$  protínají plochu ve dvojicích tvořících přímek (protínajících se na  $b$ ) a dvojnásobné přímce  $c^\infty$ . Dvě z těchto rovin se dotýkají kružnice  $a$ . Jsou to torzální tečné roviny  ${}^1\tau, {}^2\tau$ , dotýkající se plochy podél torzálních přímek kolmých k  $\nu$  s kuspídními body na  $b$ . Také roviny s osou  $b$  protínají plochu ve dvojicích přímek. Obě přímky z každé dvojice jsou rovnoběžné navzájem i s rovinou  $\pi$  (tj. protínají se na nevlastní přímce  $c^\infty$ ). Dvě z rovin tohoto svazku se dotýkají kružnice  $a$ . Jsou to dvě další torzální roviny  ${}^3\tau, {}^4\tau$ , kuspídní body torzálních přímek jsou nevlastní. Další torzální přímky, roviny a kuspídní body už na ploše neexistují.

Kromě dvojnásobných přímek  $b, c^\infty$  má plocha dvojnásobnou tvořící přímku v rovině  $\nu$ , spojující nárysné stopníky řídicích přímek  $b, c^\infty$ , tj. nevlastní přímka roviny  $\nu$  je dvojnásobnou tvořící přímkou plochy. Důsledkem toho roviny rovnoběžné s  $\nu$  protínají plochu ještě v kuželosečkách, promítajících se do nárysu jako elipsy afinní s  $a_2$  pro osu afinity  $b_2$ . To usnadňuje rychle sestrojiti tečnou rovinu v libovolném bodě  $M$  plochy. Stačí sestrojiti



Obrázek 3.8: Küpperův konoid

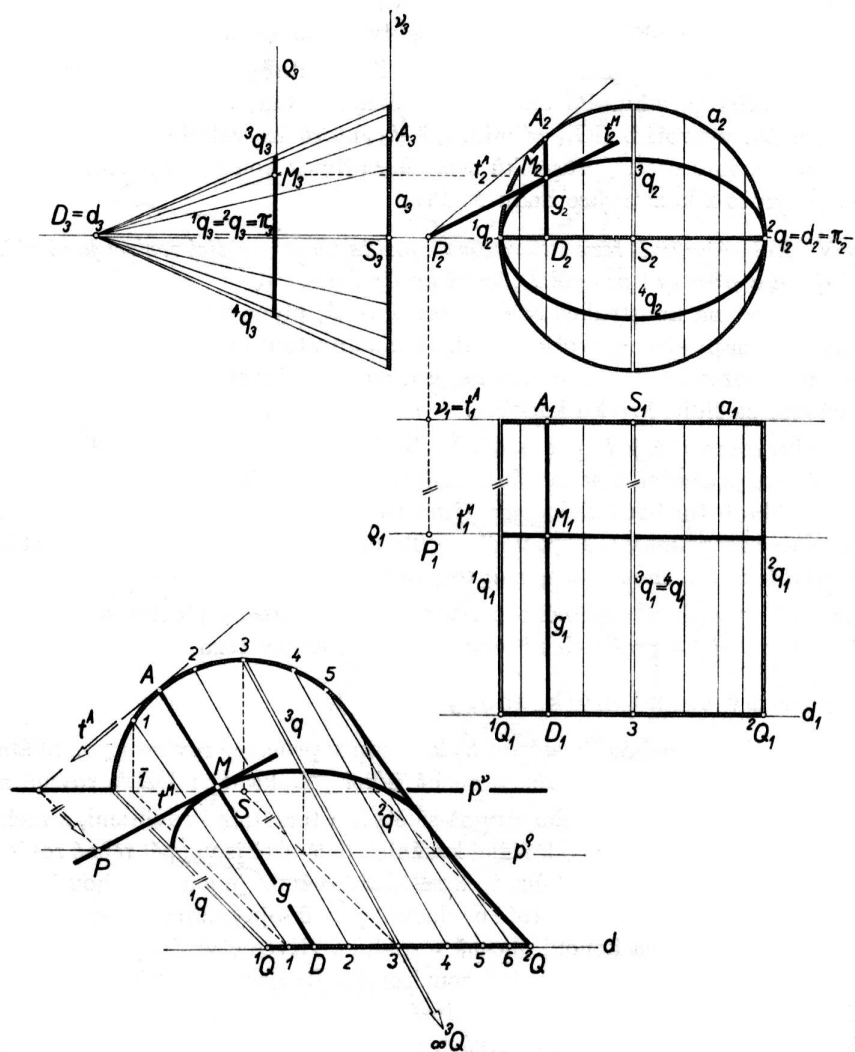
tečnu k eliptickému řezu rovinou procházející bodem  $M$  a jí a tvořící přímkou je tečná rovina určena. Řez přitom není nutné vůbec konstruovat.

### 3.2.3 Kulový konoid

Šikmý kulový konoid je zborcená plocha určená řídicí přímkou  $b$ , řídicí rovinou (zvolme půdorysnu,  $b \not\perp \pi$ ) a řídicí kulovou plochou  $\kappa$ .

Kulový konoid je plochou čtvrtého stupně ( $n = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$ ). Části přímek  $b$ ,  $c^\infty$ , které reálně náležejí ploše, jsou dvojnásobné.

Libovolná rovina  $\alpha$ , rovnoběžná s půdorysnu, protíná řídicí kulovou plochu v kružnici  $k$  a přímkou  $b$  v bodě  $B$ . Sestrojíme-li z bodu  $B$  tečny ke kružnici  $k$ , získáme dvě tvořící přímky kulového konoidu. Nejvyšším bodem  $M$  kulové plochy prochází torzální přímka  $t$ , její kuspidální bod  $T$  je na přímce  $b$ . Podobně i nejnižším bodem kulové plochy prochází torzální přímka s kuspidálním bodem na  $b$ . Přímkou  $b$  vedeme tečné roviny ke kulové ploše  $\kappa$  (další dvě torzální roviny konoidu). Jejich body dotyku prochází torzální přímky rovnoběžné s  $\pi$ . Nevlastní body těchto přímek jsou kuspidální.



Obrázek 3.9: Přímý souměrný kruhový konoid

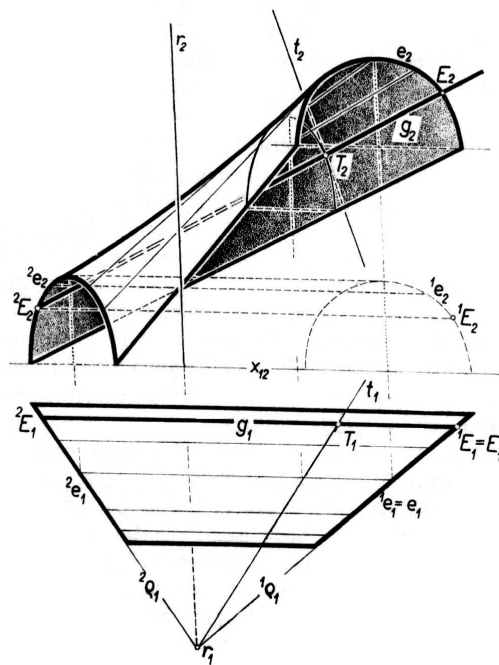


### 3.3 Catalanovy plochy

**Definice 32.** Zborcená plocha  $\Phi_{a,b,c}$ , kde  $a, b$  jsou křivky a  $c$  je nevlastní přímka daná řídicí rovinou, se nazývá Catalanova plocha nebo také cylindroid.

#### 3.3.1 Freziérův cylindroid

Zvolme na rotační válcové ploše, jejíž osa je rovnoběžná s půdorysnou i nárysnou, dva eliptické rovinné řezy  ${}^1e, {}^2e$  různoběžnými rovinami, které jsou kolmé k  $\pi$ . Posuneme-li jeden řez ( ${}^1e$ ) ve směru průsečnice  $r$  řezných rovin do polohy  $e$  a spojíme-li nyní dvojice bodů obou elips, které si korespondovaly na tvořících přímkách původní válcové plochy, vytvoří tyto spojnice přímkovou plochu s tvořícími přímkami rovnoběžnými s nárysnou. Této ploše se říká Freziérův cylindroid.



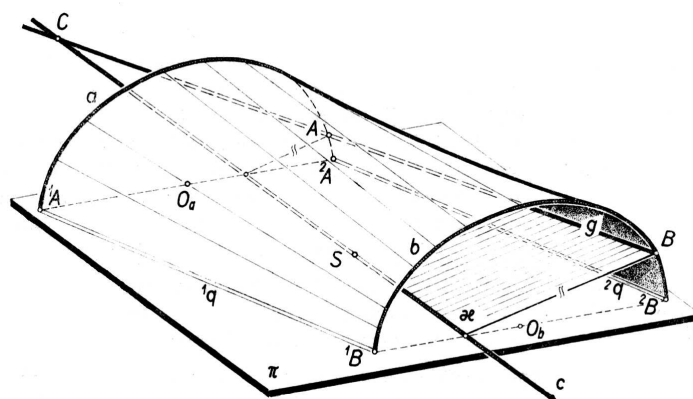
Obrázek 3.10: Freziérův cylindroid

Freziérův cylindroid je plochou čtvrtého stupně. Uvážíme-li, že plocha je dána dvěma kuželosečkami  $e, {}^2e$  a nevlastní řídicí přímkou, vychází sice stupeň plochy

$$n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8,$$

ale od uvedené plochy se odloučí plocha kuželosečkového konoidu, který je stupně

$$n_k = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4.$$



Obrázek 3.11: Plocha šikmého průchodu

Celkem opravdu dostáváme

$$n = 8 - 4 = 4.$$

Roviny procházející tvořícími přímkami cylindroidu rovnoběžně s nárysnou, jsou jeho asymptotickými rovinami. Protože centrální roviny jsou kolmé na nárysnu, je druhý skutečný obrys strikční křivkou cylindroidu.

Cylindroid má dvě torzální roviny rovnoběžné s řídicí rovinou (nárysnou, směr řídicí roviny je dán povrchovou přímkou válcové plochy a průsečnicí  $r$  řezných rovin), které se plochy dotýkají podél torzálních přímek a tvoří první obrys plochy. Příslušné kuspídní body leží na nevlastní řídicí přímce, která je dvojnou přímkou. Strikční křivka cylindroidu má proto obě torzální přímky za asymptoty.

Přímka  $r$  je další dvojnou tvořící přímkou plochy, neboť na ní leží dvě dvojice bodů, v nichž rovina přímkou  $r$  procházející rovnoběžně s řídicí rovinou protíná elipsy  $e$ ,  ${}^2e$ . Obě dvojice bodů jsou imaginární a přímka  $r$  je izolovanou dvojnou přímkou plochy. Odtud plyne, že každá rovina procházející přímkou  $r$  protíná cylindroid v elipse. Této vlastnosti lze využít k sestrojení tečné roviny  $\tau$  v bodě  $T$ . Rovina  $\tau$  je určena tvořící přímkou a tečnou  $t$  k příslušné elipse.

## 3.4 Některé další zborcené plochy

### 3.4.1 Plocha šikmého průchodu

Určujícími útvary plochy šikmého průchodu jsou dvě kružnice  $a$ ,  $b$  v rovinách  $\rho^a$  a  $\rho^b$  navzájem rovnoběžných, přičemž spojnice středů kružnic  $O_a O_b$  není k jejich rovinám kolmá. Třetí určující křivkou je přímka  $c$ , procházející středem  $S$  úsečky  $O_a O_b$  kolmo na rovinu  $\rho^a$ , popř.  $\rho^b$ . Plocha je souměrná podle bodu  $S$  a také rovina  $\sigma \equiv (O_a, O_b, c)$  je rovinou souměrnosti plochy.

Plocha šikmého průchodu by měla být osmého stupně, ve skutečnosti je ale stupně čtvrtého. Přímky procházející středem  $S$  vytvoří rotační kuželovou plochu, kterou je nutné

od zborcené plochy odečíst. Dále se obě řídicí kružnice v rovnoběžných rovinách protínají ve dvou kruhových bodech, celkem tedy

$$n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 = 4.$$

Vždy dvě tvořící přímky plochy se protínají na přímce  $c$ . Přímka  $c$  je dvojnou přímkou, zatímco obě řídicí kružnice jsou jednoduchými křivkami plochy. Mimo dvojnou přímku má plocha ještě dvojnou nevlastní kuželosečku.

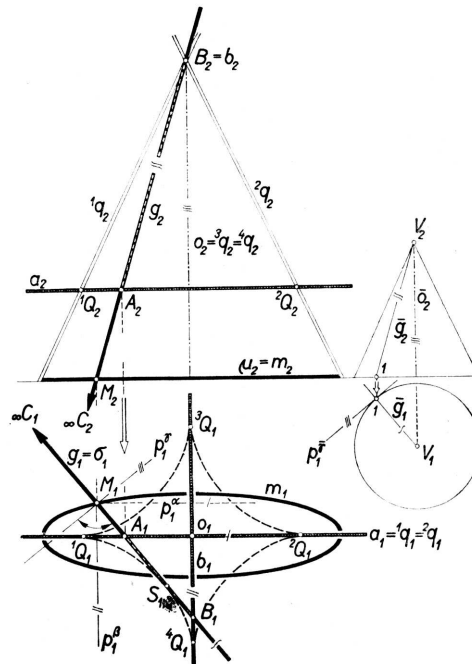
Každá rovina procházející přímkou  $c$  protíná plochu šikmého průchodu ve dvou rovnoběžných tvořících přímkách, stejně vzdálených od bodu  $S$ .

Dvě reálné přímky v rovině souměrnosti jsou torzálními přímkami plochy, které protínají dvojnou přímku  $c$  v kuspídních bodech  ${}^1Q$  a  ${}^2Q$ , mezi nimiž je  $c$  izolovanou přímkou plochy. Další dvě torzální přímky jsou nevlastní.

Ke konstrukci tečné roviny v obecném bodě tvořící přímky se užívá Chaslesova věta.

### 3.4.2 Plocha eliptického pohybu v prostoru

Zvolme za řídicí útvary zborcené plochy dvě kolmé mimoběžky  $a$ ,  $b$  a řídicí rotační kuželovou plochu s osou rovnoběžnou s osou  $o$  mimoběžek. Při této volbě mají všechny tvořící přímky plochy vzhledem k  $\pi$  (průmětna  $\pi$  je s  $a$ ,  $b$  rovnoběžná) stejný spád a přímky  $a$ ,  $b$  na každé tvořící přímce vytínají body  $A$ ,  $B$ .



Obrázek 3.12: Plocha eliptického pohybu v prostoru

Zvolíme-li na tvořící přímce  $g$  plochy bod  $M$ , pak se při pohybu bodů  $A, B$  po přímkách  $a, b$  bod  $M$  pohybuje v rovině  $\mu \perp o$  a proběhne elipsu. Tímto pohybem přímky  $g$  je vytvořená plocha. Plocha je zborcenou plochou čtvrtého stupně a je kolmo souměrná podle rovin procházejících řídicími přímkami  $a, b$  a jejich osou  $o$ . V těchto rovinách souměrnosti leží torzální přímky. Dvojnou přímkou plochy je nevlastní přímka roviny  $\pi$ , a proto všechny roviny  $\rho \parallel \pi$  protínají plochu ještě v elipsách. Tečnou rovinu k ploše v bodě  $M$  lze určit tečnou k příslušné elipse  $m$  a tvořící přímkou  $g$ .

Asymptotické roviny této plochy jsou rovnoběžné s tečnými rovinami rotační řídicí kuželové plochy podél povrchových přímek  $\bar{g} \parallel g$ . Důsledkem toho jsou centrální roviny prvními promítacími rovinami tvořících přímek plochy. Prvním zdánlivým obrysem plochy je strikční křivka – asteroida.

Nahradíme-li řídicí kuželovou plochu (nevlastní kružnice) vlastní kružnicí  $c$ , tak aby její střed ležel na ose  $o$  mimoběžek  $a, b$ , a je-li její rovina k této ose kolmá, zůstane plocha opět souměrná podle rovin  $a \cdot o, b \cdot o$ , v nichž opět leží torzální přímky. Nevlastní přímka  $c^\infty$  roviny  $\pi$  je izolovanou dvojnou přímkou plochy, a proto protínají roviny rovnoběžné s  $\pi$  plochu opět v elipsách. Pomocí těchto elips s vrcholy na torzálních přímkách sestrojíme tečné roviny plochy. Tečna k elipse je pro tečnou rovinu její hlavní přímkou.

### 3.4.3 Montpellierský oblouk

Řídicími útvary této plochy je kružnice  $a$  v rovině  $\rho$ , přímka  $b$  rovnoběžná s rovinou kružnice a přímka  $c$  procházející středem kružnice kolmo k její rovině.

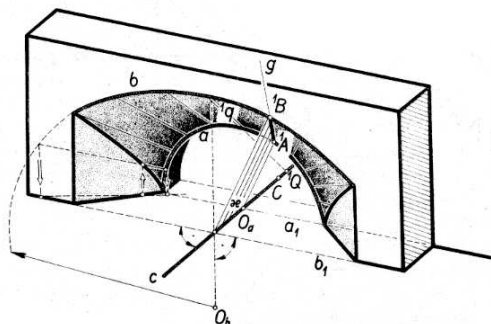
Plocha je čtvrtého stupně ( $n = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$ ). Tvořící přímky sestrojíme tak, že přímkou  $c$  proložíme rovinu. Ta protne kružnici  $a$  ve dvou bodech  ${}^1A, {}^2A$  a přímkou  $b$  v jednom bodě  $B$ . Spojnice  ${}^1AB$  a  ${}^2AB$  protínají i třetí útvar v bodě  ${}^1C$ , popř.  ${}^2C$ . Je-li rovina rovnoběžná s přímkou  $b$ , určí svými průsečíky s kružnicí  $a$  dvojnou tvořící přímkou  $d$  ( $d$  prochází středem kružnice  $a$  rovnoběžně s  $b$ ). Obě řídicí přímky jsou dvojnými přímkami plochy, zatímco kružnice  $a$  je jednoduchou řídicí křivkou. Plocha je kolmo souměrná podle roviny  $\mu$ , procházející přímkou  $c$  kolmo k přímce  $b$ . V ní také leží dvě torzální přímky s kuspídními body na  $c$ .

Každá rovina, procházející dvojnou přímkou  $d$ , protíná plochu Montpellierského oblouku v kuželosečce, jejíž jedna osa má vrcholy na torzálních přímkách. Výjimkou je jen rovina  $d \cdot b$ . Toho lze s výhodou využít k sestrojení tečné roviny v obecném bodě  $T$  tvořící přímky plochy, protože bodem  $T$  a přímkou  $d$  určená rovina protíná Montpellierský oblouk v kuželosečce, jejíž tečna v bodě  $T$  spolu s tvořící přímkou určuje tečnou rovinu. Průsečnou kuželosečku není ani nutné konstruovat, neboť je určena osou a bodem a její tečnu lze sestrojit.

Nevolíme-li přímkou  $c$  středem kružnice  $a$ , lze polohu řídicích útvarů dobře přizpůsobit účelu, kterému má plocha sloužit, a tak dostáváme různé vhodné modifikace této plochy.

### 3.4.4 Marseilleský oblouk

Řídícími útvary plochy jsou dvě kružnice  $a, b$ , v rovinách navzájem rovnoběžných a řídicí přímka  $c$ , procházející středem jedné z kružnic kolmo k jejich rovinám. Nesmí ovšem platit, že střed druhé kružnice také leží na přímce  $c$ , jinak by se plocha rozpadla v kužely.



Obrázek 3.13: Marseilleský oblouk

Plocha je šestého stupně ( $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 6$ ). Obě kružnice i přímka jsou dvojnými útvary plochy. Tvořící přímky plochy snadno určíme pomocí roviny procházející přímkou  $c$ . V každé z nich ještě leží, kromě  $c$ , čtyři tvořící přímky plochy. V rovině souměrnosti plochy leží dvě torzální přímky s kuspídními body na  $c$ .

### 3.4.5 Corne de vache

Corne de vache se nazývá otupovací plocha valené klenby dané řídicím obloukem, který se skládá ze tří kruhových oblouků  ${}^1k, {}^2k, {}^3k$ , dotýkajících se v bodech  $B, C$  a majících postupně středy  ${}^1O, {}^2O, {}^3O$ .

Řídícími křivkami plochy corne de vache pak jsou: elipsa  $e$ , která se kolmo promítá do kružnice  ${}^1k$ , kružnice  ${}^2k$ , mezi body  $E, B$  a přímka  $d$  procházející středem  ${}^1O$  kružnice  ${}^1k$  kolmo k její rovině. Tvořící přímku plochy dostaneme použitím pomocné roviny  $\kappa$ , která prochází přímkou  $d$ .

Kruhové oblouky mohou být ovšem nahrazeny oblouky eliptickými. Jelikož je třeba zachovat v nárysu kolmost povrchových přímek zborcené plochy a klenebního oblouku, jsou tyto nárysy normálami elipsy a obalují její evolutu. Plocha je pak dána dvěma řídicími elipsami a řídicí válcovou plochou, jejímž normálním řezem je tato evoluta.

Plocha je stupně sedm ( $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 7$ ). Nárysu plochy připomíná kravský roh – odtud její francouzský název.

K řešení tečné roviny u této plochy není možné použít tečnu vhodného řezu. Na přímce  $p$  zvolíme obecný bod  $P$  a označíme průsečíky  $N, M, Q$  s řídicími útvary. Tečny  $t, u$  vedené k  $e$  a  ${}^2k$  v bodech  $M$  a  $N$  určíjí s přímkou  $d$  dotykový hyperboloid.

### 3.5 Přímkové šroubové plochy

**Definice 33.** Šroubová plocha  $\Phi_c$  vzniká šroubovým pohybem křivky  $c$ , která není dráhou daného šroubového pohybu. Křivka  $c$  se nazývá tvořící křivka plochy  $\Phi_c$  a osa  $o$  šroubového pohybu je osou plochy  $\Phi_c$ .

Definice šroubové plochy je obdobou definice rotační plochy, jen rotační pohyb je nahrazen pohybem šroubovým. Z teorie rotačních ploch jsou přejaty některé pojmy a postupy jako: meridián, hlavní meridián, polomeridián, hrdelní šroubovice, rovníková šroubovice, hraniční šroubovice. Z rozvinutelné přímkové šroubové plochy jsou zase známi pojmy jako závit, pravotočivá a levotočivá šroubová plocha.

Při konstrukcích na šroubových plochách narážíme na další dva (u jiných ploch neuvázané) systémy význačných křivek, jsou to již zmíněné meridiány a normální řezy plochy.

**Definice 34.** Normální řez šroubové plochy  $\Phi_c$  je řez rovinou kolmou na osu šroubového pohybu  $o$ .

Řez, ať už normální nebo obecnou rovinou, sestrojíme bodovou konstrukcí.

*Konstrukce 18.* Tečná rovina šroubové plochy

Chceme-li sestrojit tečnou rovinu šroubové plochy  $\Phi_c$  v jejím bodě  $A$ , sestrojíme tečny ke dvou křivkám plochy, které tímto bodem procházejí, např. tečnu  $u$  křivky  $c$  a tečnu  $t$  šroubovice  $a$ . Tečnu ke šroubovici  $a$  sestrojíme pomocí povrchové přímky pomocné kuželové plochy šroubovice  $a$ . Přímky  $u, t$  určují hledanou tečnou rovinu plochy  $\Phi_c$ .

*Konstrukce 19.* Tečná rovina šroubové plochy rovnoběžná s daným směrem

Nechť  $S$  je úběžník a  $S^*$  je otočený úběžník směru  $s$ . Pokud existuje tečná rovina plochy  $\Phi_c$  rovnoběžná s daným směrem  $s$ , musí její úběžnice procházet úběžníkem  $S$  a její otočená úběžnice procházet bodem  $S^*$ . Zvolme na křivce  $c$  libovolný bod  $A$  a označme  $a$  jeho šroubovici. Sestrojme tečnou rovinu  $\tau$  plochy  $\Phi_c$  v bodě  $A$ , její úběžnici a otočenou úběžnici. Všechny tečné roviny ve všech bodech šroubovice  $a$  mají stejný spád vzhledem k  $\pi$ . Všechny úběžnice a otočené úběžnice tečných rovin se dotýkají jedné kružnice  $u_1$  soustředné s  $a_1$ . Stačí proto sestrojit z bodu  $S^*$  tečny ke kružnici  $u_1$ , to budou otočené úběžnice dvou hledaných rovin  $^1\sigma, ^2\sigma$ . Mezi čtyřmi průsečíky těchto tečen s kružnicí  $a_1$  jsou dva hledané body dotyku rovin  $^1\sigma, ^2\sigma$ .

Nárysny obrys plochy  $\Phi_c$  je pouze speciálním případem, kdy je směr kolmý na nárysnu. Otočený úběžník je zřejmě nevlastní bod směru osy  $x$ .

Konstrukce bodů meze vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení také souvisí s rotačními plochami. Místo rovnoběžky rotační plochy se uvažuje šroubovice a místo pomocné kuželové (kulové) plochy rozvinutelná šroubová plocha.

*Konstrukce 20.* Mez vlastního stínu šroubové plochy při rovnoběžném osvětlení

V bodě  $M \in \Phi_c$  sestrojíme tečnou rovinu  $\tau$ , kterou podřídíme danému šroubovému pohybu. Bod  $M$  vytváří šroubovici  $m \subset \Phi_c$  a rovina  $\tau$  rozvinutelnou šroubovou plochu  $\Omega$  dotýkající se  $\Phi_c$  podél šroubovice  $m$ , tj. plochy  $\Phi_c$  a  $\Omega$  mají ve všech bodech  $m$  společné

tečné roviny. Podle konstrukce 10 sestrojíme mez vlastního stínu plochy  $\Omega$ , která je složena z přímek. Společné body těchto přímek a šroubovice  $m$  jsou body meze vlastního stínu plochy  $\Phi_c$ .

Konstrukce se zjednoduší, jestliže tvořící křivka  $c$  je normálním řezem plochy. Pak je totiž půdorys bodu meze vlastního stínu na  $c$  patou normály vedené k  $c_1$  bodem  $V_1^*$ .

Rovnoběžné osvětlení opět používáme při zobrazování v rovnoběžných projekcích.

Přímková šroubová plocha je vytvořena šroubovým pohybem přímky. Jestliže je vytvářející přímka  $p$  kolmá, resp. kosá k ose šroubového pohybu, pak se plocha  $\Phi_p$  nazývá pravoúhlá, resp. kosoúhlá. Protíná-li  $p$  osu šroubového pohybu, pak se  $\Phi_p$  nazývá uzavřená, v opačném případě je otevřená. Existují tedy čtyři druhy přímkových šroubových ploch: pravoúhlá uzavřená, pravoúhlá otevřená, kosoúhlá uzavřená a kosoúhlá otevřená.

Mezi přímkové plochy patří i rozvinutelná šroubová plocha, která je kosoúhlou otevřenou přímkovou šroubovou plochou. Tento zvláštní případ, rozebraný v kapitole 2.2, nastává, jestliže je tvořící přímka tečnou hrdelní šroubovice plochy. Ve všech ostatních případech jsou přímkové šroubové plochy zborcené.

V dalším předpokládejme, že osa šroubové plochy je kolmá na půdorysnu.

### 3.5.1 Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha

Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha vzniká šroubovým pohybem přímky  $p$ , která pravoúhle protíná osu šroubového pohybu  $o$ . Všechny body přímky  $p$  vytvářejí šroubovice plochy, které mají stejnou výšku závitů. Půdorysy všech tvořících přímek této plochy vyplní celou průmětnu, vytvářejí v ní svazek přímek o středu  $o_1$ . Nárýsy přímek jsou přímky rovnoběžné se základnicí, kromě přímek kolmých k nárýsně, které se promítají jako body.

Normálním řezem plochy  $\Phi_p$  je její tvořící přímka.

Tečnou rovinu plochy sestrojíme podle konstrukce 18. Tečnou k tvořící přímce plochy  $p$  je přímo sama přímka  $p$ . Rovina  $\tau$  proto prochází přímku  $p$ , která je zároveň hlavní přímkou první osnovy roviny  $\tau$ . Půdorysem tečny  $t$  šroubovice  $a$  plochy v bodě  $A$  je kolmice  $t_1$  na přímku  $p_1$ . Přímka  $t$  je spádovou přímkou první osnovy roviny  $\tau$ . Rovina  $\tau' \parallel \tau$  se dotýká směřové kuželové plochy šroubovice  $a$ . Rovina  $\tau$  je proto oskulační rovinou šroubovice  $a$  v bodě  $A$ . Obráceně, každá rovina procházející přímku  $p$  je tečnou rovinou šroubové plochy  $\Phi_p$  v nějakém bodě přímky  $p$ .

Plocha  $\Phi_p$  je zborcenou plochou. Za její tři řídicí útvary lze zvolit osu  $o$ , nevlastní přímku  $c^\infty$  půdorysny  $\pi$  a šroubovici  $a$ , protože všechny přímky plochy protínají  $o$ ,  $a$  a jsou rovnoběžné s  $\pi$ . Podle definice 31 lze pravoúhlou uzavřenou přímkovou plochu považovat za přímý šroubový konoid a tečnou rovinu  $\tau$  určit pomocí dotykové kvadriky (přímky  $o$ ,  $c^\infty$  a tečna  $t$  šroubovice  $a$  určují hyperbolický paraboloid).

Asymptotická rovina  $\alpha$  přímky  $p$  obsahuje přímku  $c^\infty$  a je tedy rovnoběžná s  $\pi$ . Centrální rovina  $\gamma$  přímky  $p$  je kolmá k  $\pi$ , a proto  $m_1 = \gamma_1$ . Průsečík  $C$  přímek  $o$ ,  $p$  je bodem strikční křivky plochy  $\Phi_p$ , která je osou  $o$ .

Rovnoběžné osvětlení je dáno orientovanou přímkou. Paty kolmic spuštěných z bodu  $V_1^*$  na půdorysy přímek plochy, tj. na přímky svazku se středem  $o_1$ , vytvářejí půdorysy  $m_1$  meze

vlastního stínu  $m$ . Křivka  $m_1$  je kružnice – množina vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí body  $V_1^*$  a  $o_1$ . Křivka  $m$  je pak průnik rotační válcové plochy  $\Omega$ , s řídicí kružnicí  $m_1$  a osou  $o' \parallel o$ , se šroubovou plochou  $\Phi_p$ . Mezi vlastního stínu je šroubovice na válcové ploše  $\Omega$ , která má poloviční výšku závitů než šroubový pohyb určující  $\Phi_p$ . Vržený stín na  $\pi$  je omezen vrženým stínem osy  $o$ , šroubovice  $a$ , meze  $m$  vlastního stínu a hraničních úseček. Pomocí vrženého stínu na  $\pi$  sestrojíme vržený stín plochy na sebe. Při určování viditelnosti je třeba rozhodnout, zda v půdoryse a náryse vidíme tutěž stranu plochy.

Pravoúhlá přímková uzavřená plocha se v praxi vyskytuje na točitých schodech. Proto se také často, místo doposud používaného názvu, označuje stručně jako schodová plocha.

### 3.5.2 Pravoúhlá otevřená přímková šroubová plocha

Pravoúhlá otevřená přímková šroubová plocha vzniká šroubovým pohybem přímky  $p$ , která je s osou šroubového pohybu  $o$  mimoběžná, ale je k ní kolmá. Bod  $H \in p$ , nejbližší k ose  $o$ , vytváří na ploše hrdelní šroubovici, která má ze všech šroubovic plochy největší spád. Půdorysy tvořících přímek plochy vyplní celou průmětnu, kromě kruhu s hranicí v půdorysu  $h_1$  hrdelní šroubovice a středem  $o_1$ . Nárysy přímek jsou přímky rovnoběžné se základnicí, kromě přímek kolmých k nárysně, které se promítají jako body. Šroubovice  $h$  je první skutečný obrys plochy, šroubovice  $h_1$  pak první zdánlivý obrys plochy.

Otevřená pravoúhlá šroubová plocha je jako zborcená plocha určena např. řídicími šroubovicemi  $a$ ,  $b$  a nevlastní přímkou  $c^\infty$  půdorysny  $\pi$ . Tečnou rovinu v bodě plochy a bod dotyku tečné roviny sestrojíme jako u schodové plochy.

Asymptotická rovina  $\alpha$  přímky  $p$  je kolmá na osu  $o$ . Protože půdorys přímky  $p$  splývá s půdorysem tečny šroubovice  $h$  v bodě  $H$ , je v bodě  $H$  tečná rovina rovnoběžná s osou  $o$ , je tedy kolmá na asymptotickou rovinu, a je centrální rovinou  $\gamma$  přímky  $p$ . Hrdelní šroubovice  $h$  je strikční křivkou plochy  $\Phi_p$ .

Půdorys  $m_1$  meze vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení sestrojíme opět pomocí pat kolmic k normálním řezům plochy. Vzniklá křivka  $m_1$  je Pascalovou závitnicí, která má obecně v bodě  $V_1^*$  dvojnásobný bod.

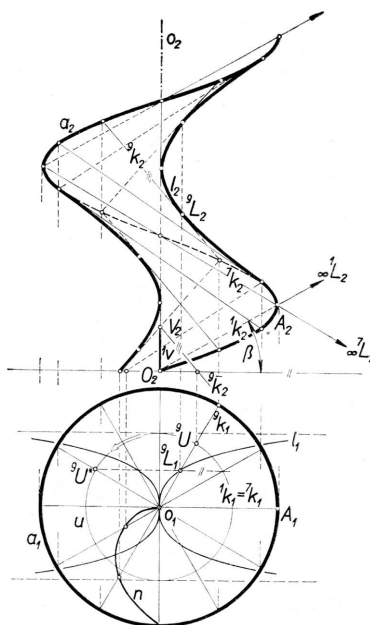
### 3.5.3 Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha

Kosoúhlou uzavřenou přímkovou plochu vytváří přímka  $p$  protínající osu  $o$  a svírající s ní úhel  $\beta < 90^\circ$ . Přímka  $p$  ležící v rovině  $\mu$  rovnoběžné s nárysnou protíná osu šroubového pohybu v bodě  $O$ . Je-li  $A$  půdorysný stopník přímky  $p$ , pak bod  $B \in p$ , pro který je  $|OA| = |OB|$ , leží na šroubovici  $a$  bodu  $A$ . V rovině  $\mu$  leží přímky  $p$ ,  $q$  plochy, které se protínají v bodě  $B$  šroubovice  $a$ . Proto je  $a$  dvojnásobnou šroubovicí plochy. V rovině  $\mu$  leží celý systém přímek plochy rovnoběžných s  $p$ ,  $q$ , jejichž průsečíky vytvářejí při šroubovém pohybu nekonečně mnoho dvojnásobných šroubovic. Šroubovice  $a$  má z nich největší spád. Na dvojnásobných šroubovicích leží dvojnásobné body rovinných řezů s plochou  $\Phi_p$ .

Plocha  $\Phi_p$ , jako zborcená plocha, je určena osou  $o$ , šroubovicí  $a$  a nevlastní kuželosečkou  $k^\infty$  rotační kuželové plochy  $\Omega$  určené vrcholem  $O$  a kružnicí  $a_1$ .







Obrázek 3.15: Kosoúhlá uzavřená přímková plocha

Normálním řezem plochy  $\Phi_p$  je její křivka nazývaná Archimédova spirála s dvojnásobnými body na dvojnásobných šroubovicích plochy.

Tečná rovina v bodě  $T$  přímky  $p$  je určena přímkou  $p$  a tečnou  $t$  šroubovice bodu  $T$ . Je však možné ji určit i pomocí dotykové kvadriky podél přímky  $p$ , která je dána např. osou  $o$ , tečnou šroubovice  $a$  v průsečíku přímky  $p$  s  $a$  a tečnou  $v^\infty$  ke kuželosečce  $k^\infty$  v nevlastním bodě přímky  $p$ .

Nechť  $\rho$  je tečná rovina kuželové plochy  $\Omega$  podél povrchové přímky rovnoběžné s přímkou  $p$ . Půdorysná stopa  $p^\alpha$  asymptotické roviny  $\alpha$  je rovnoběžná s  $p^\rho$  a prochází půdorysným stopníkem přímky  $p$ . Protože  $p$  je spádová přímka roviny  $\alpha$ , je centrální rovina  $\gamma$  kolmá k  $\pi$ . Centrálním bodem je průsečík  $o \cap p$ , tj. strikční křivkou plochy  $\Phi_p$  je osa  $o$ .

Půdorysem plochy je celá průmětna, půdorysy přímek plochy vytvářejí svazek. Druhý skutečný obrys plochy je mezi vlastního stínu  $l$  při rovnoběžném osvětlení směrem kolmým k nárýsně. Druhý zdánlivý obrys plochy je současně obálkou nárýsů tvořících přímek. Půdorysem nárýsného obrysu plochy je křivka  $l_1$  nazývaná pro svůj tvar křivka kappa.

Body druhého obrysu plochy můžeme stanovit aplikováním konstrukce 19 na plochu  $\Phi_p$ , nebo je můžeme sestrojiti přímo, a to následovně:

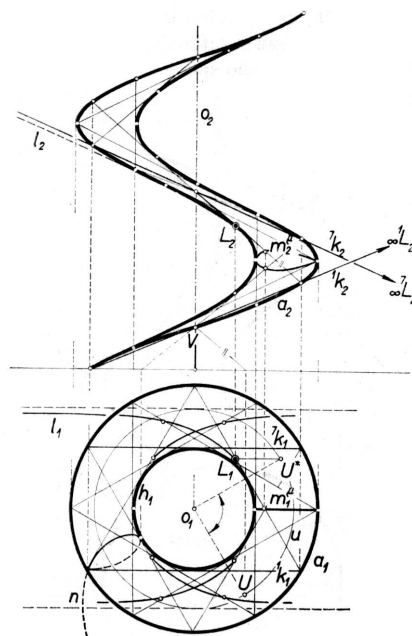
Zvolme obecnou přímku  $q$  plochy  $\Phi_p$ . Protože  $\Phi_p$  je zborcené plocha, je druhá promítací rovina tečnou rovinou, jejíž bod dotyku patří druhému skutečnému obrysu  $l$ . Označíme-li  $m$  šroubovici bodu  $M$ , pak pro sdružené průměty tečny  $t$  k  $m$  v bodě  $M$  platí  $t_2 = \lambda_2$  a  $t_1 \perp a_1$ . Bodem  $V$  můžeme vést rovnoběžku  $t' \parallel t$ . Jejím půdorysným stopníkem prochází kružnice v  $\pi$ , určující směrovou kuželovou plochu šroubovice  $m$ , která je současně půdorysem  $m_1$  šroubovice  $m$ . Průsečík kružnice  $m_1$  s  $q_1$  je půdorys  $M_1$  bodu  $M$  druhého obrysu. Nárýs  $M_2$  je bodem dotyku přímky  $q_2$  se zdánlivým obrysem  $l_2$ .

Užití konstrukce na přímky  $g, h$  rovnoběžné s nárysnou dostáváme, že  $g, h$  protínají  $l$  v nevlastních bodech. Znamená to, že přímky  $g_2, h_2$  jsou asymptoty druhého zdánlivého obrysu  $l_2$ . Tečny k  $u$  (kružnice úběžníků) rovnoběžné se základnicí, jsou asymptotami křivky  $l_1$ .

V praxi se nejčastěji tato šroubová plocha objevuje omezená svou osou  $o$  a dvojnou šroubovicí  $a$ . Takto omezenou část plochy najdeme třeba na vývrtce, odtud tedy zkrácený název kosoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy – vývrtka.

### 3.5.4 Kosoúhlá otevřená přímková šroubová plocha

Posledním případem zborcené šroubové plochy je šikmá otevřená přímková šroubová plocha. Tuto plochu vytvoří šroubovým pohybem přímka  $p$ , která neprotíná osu  $o$  a není k ní kolmá. Plocha má řídicí rotační kuželovou plochu šroubového pohybu s vrcholem  $O$  a kružnicí  $e$  v půdorysně soustřednou s  $h_1$ . Všechny přímky plochy se dotýkají rotační válcové plochy  $\Omega$  s osou  $o$  v bodech šroubovice  $h$  – hrdelní šroubovice plochy  $\Phi_p$ , půdorysy všech přímek plochy  $\Phi_p$  se pak dotýkají kružnice  $h_1$ . Šroubovice  $h$  je prvním skutečným obrysem plochy  $\Phi_p$ , kružnice  $h_1$  je prvním zdánlivým obrysem. Zdánlivý obrys v náryse najdeme stejně jako u vývrtkové plochy. Půdorys  $l_1$  druhého skutečného obrysu  $l$  plochy má opět dvě asymptoty rovnoběžné se základnicí  $x$ .



Obrázek 3.16: Kosoúhlá otevřená přímková šroubová plocha

Řídící útvary této zborcené plochy jsou řídicí šroubovice  $s$ , sousedá řídicí válcová plocha o základní kružnici  $h_1$  a nevlastní křivka sousedá řídicí rotační kuželové plochy šroubového pohybu.

Podobně jako šikmá uzavřená plocha, má i otevřená šroubová plocha nekonečně mnoho dvojnásobných šroubovic, ale jejich nalezení není tak jednoduché. Lze je určit výpočtem, případně přibližně pomocí meridiánu, popř. normálového řezu. Obě dvě křivky mají nekonečně mnoho dvojnásobných bodů, kterými dvojnásobné šroubovice procházejí.

Řez plochy obecnou rovinou je transcendentní křivka složená z nekonečného množství větví. Každá větev leží na jednom závitě plochy. Jednotlivé větve mají obecně různoběžné asymptoty. Normálním řezem plochy je kruhová evolventa.

# Kapitola 4

## Přímkové plochy v praxi

### 4.1 Válcová a kuželová plocha

Pro technickou praxi mají význam zejména válcové a kuželové plochy jejichž řídící křivkou je kuželosečka, tedy kvadriky. Omylem by však bylo, kdybychom řekli, že ostatní válcové a kuželové plochy jsou pouze teoretické a v technické praxi se nepožívají.

Použití obecné válcové plochy můžeme vidět na věžích kostela na Slovanech v Praze. Areál zvaný Emauzy je benediktinský klášter s kostelem P. Marie a kaplí sv. Kosmy a Damiána. Klášter založil v roce 1347 Karel IV. V roce 1611 však byly kostel i klášter zpustošeny a v 2. polovině 17. století znovu obnoveny a částečně zbarokizovány. Za druhé světové války, 14.2.1945, na kostel dopadla zbloudilá bomba a vážně ho poškodila. Kostel byl obnoven v letech 1965 – 1969 podle projektu arch. F. M. Černého, kdy získal ony zmiňované věže tvořené obecnými válcovými plochami.



Obrázek 4.1: Obecné válcové plochy na kostele Emauzy

Pro krásný příklad použití několika parabolických válcových ploch a jejich průniků nemusíme tady v Brně chodit daleko – máme pavilon A na brněnském výstavišti.

Konečné rozhodnutí o výstavbě brněnského výstaviště padlo na Moravském zemském výboru v srpnu 1923. Brno získalo moderní a největší výstaviště v předválečném Československu o rozloze 360 000 m<sup>2</sup> (s hrubou výstavní plochou v pavilonech 30 355 m<sup>2</sup>). Projekt železobetonové konstrukce pavilonu A zpracoval arch. Emil Králík. S výstavbou se začalo 8. února 1927. Celá konstrukce pavilonu se prováděla klasickým bedněním do parabolických oblouků za minimální mechanizace. Část brněnského výstaviště z roku 1928 je státní kulturní památkou.



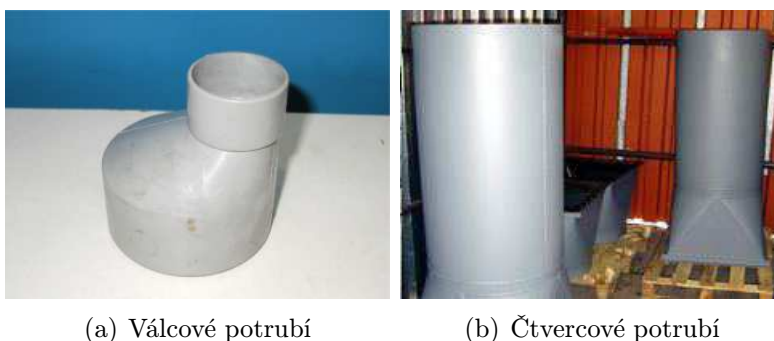
Obrázek 4.2: Pavilon A na brněnském výstavišti

Využití rotačních válcových a kuželových ploch ve spojení s jejich průniky najdeme u různých typů kleneb, potrubí, ale i u velkého množství rozmanitých strojů a přístrojů.

## 4.2 Přejíchodové plochy a plochy konstantního spádu

Rozvínutelných přejíchodových ploch se užívá hlavně jako přejíchodových ploch mezi dvěma potrubími, přičemž tato potrubí nemusí mít stejné průřezy, ani průřezy v rovnoběžných rovinách. Potrubí čtvercového a kruhového průřezu lze spojit přejíchodovou plochou složenou ze čtyř kuželových částí a čtyř rovinných trojúhelníků.

Plochy konstantního spádu vídíme ve stavební praxi zejména při terénních úpravách jako výkopové a násypové plochy spojující komunikaci s terénem. Křivka  ${}^1k$  (z konstrukce 13) je hrana komunikace a rotační kuželová plocha má svislou osu.



(a) Válcové potrubí

(b) Čtvercové potrubí

Obrázek 4.3: Přečtové plochy mezi dvěma potrubími

Pomocí zborcené plochy je možné „spojit“ přímkami tři řídící útvary. To umožňuje využití zborcených ploch v mnoha různorodých situacích, které se v praxi, zejména stavební, vyskytují. Zborcené plochy mají výborné statické vlastnosti, působí lehkým a vzdušným dojmem, nevyžadují velkou spotřebu materiálu a jsou konstrukčně jednoduché.

### 4.3 Zborcené kvadriky

Rozsáhlé možnosti využití v technické praxi skýtají obě uvedené zborcené kvadriky, a zejména hyperbolický paraboloid. Použitím této plochy jako střední plochy skořepiny se dosahuje velké úspory materiálu, jednoduchosti bednění (podél tvořících přímek) a dobrých statických podmínek (svislé tlaky, vzpěrná pevnost apod.).

Plocha rotačního jednodílného hyperboloidu je pro chladírenskou věž hodnější než plocha válcová, má větší obsah povrchu a umožňuje tak rychlejší ochlazení kapaliny. Hyperboloid najdeme také jako segment okolo hrdlové kružnice jako skořepinu při zastřešení haly při velkém rozpětí. Ve strojírenské praxi máme hyperbolické převody – použití jednodílných rotačních hyperboloidů k převodu rotačních pohybů okolo dvou mimoběžných os.

Velmi výrazným příkladem použití jednodílného rotačního hyperboloidu je střecha McDonellova planetária v St. Louis v americkém státě Missouri. Nápad pochází od architekta Gyo Obaty, který na polokouli s poloměrem 12 metrů, posadil zářící bílou čepici. Planetarium z roku 1963 se v roce 1985 stalo součástí velkého vědeckého centra.

Hotel a televizní vysílač na vrcholu Ještědu je také stavba ve tvaru rotačního hyperboloidu, která je jedním ze symbolů libereckého kraje. Nejprve bylo rozhodnuto postavit na vrcholu Ještědu dvojici budov – jednu jako hotel a druhou jako televizní vysílač. Vítězem architektonické soutěže se však stal návrh na postavení budovy jediné, sloužící oběma účelům. Základní kámen nové stavby byl položen 30. července 1966. V roce 1969 získal projekt Perretovu cenu od Mezinárodní unie architektů. Ta zdůvodnila udělení ceny tím, jak stavba zapadá do krajiny a jak byl sladěn tvar budovy a její funkce. Dne 29. září 2005 byla budova usnesením vlády zařazena mezi národní kulturní památky České republiky (účinnosti nabylo 1. ledna 2006).

Tvar budovy – hyperboloid – byl zvolen kvůli na vrcholu panujícím povětrnostním



Obrázek 4.4: McDonnellovo planetárium

podmínkám. Díky tomuto tvaru hotel dokonale navazuje na svahy hory a opticky tak horu dokončuje. Na výšku měří budova 94 metrů. Její nosnou konstrukcí je dvojice železobetonových soustředných válců zakotvených v základové desce uložené v křemencovém podloží. Vnitřní sloup má výšku 41 metrů a průměr 4,4 metru a na jeho vrcholu začíná anténní stožár. Vnitřní válec má výšku 22,5 metru a průměr 12,5 metru. Uvnitř sloupů se nacházejí schodiště a výtahy, na sloupech jsou ukotveny ocelové konstrukce jednotlivých podlaží. Anténa vysílače má výšku 17 metrů.



Obrázek 4.5: Ještěd

Řešíme-li střechu nad různoběžníkovým půdorysem pomocí rovin, nepůsobí nehorizontální hřeben příliš esteticky. Proto ponecháváme pouze tři části střechy rovinné. Zbytek prostoru zastřešíme částí hyperbolického paraboloidu s jednou řídicí rovinou v rovině okapu a druhou kolmou na hřeben. Chceme-li se vyhnout křivočaré zdi, určíme plochu zborceným čtyřúhelníkem (mezi příslušným okapem a hřebenem střechy).



Ale pozor. Ne každá „pokroucená“ střecha je částí plochy hyperbolického paraboloidu. Můžeme se přesvědčit na rodinném domku v Klánovicích. Hranice střechy není zborcený čtyřúhelník, je na pravém a levém kraji zalomená. Plocha střechy je poskládaná ze čtyř rovin.



Obrázek 4.6: Rodinný dům v Klánovicích

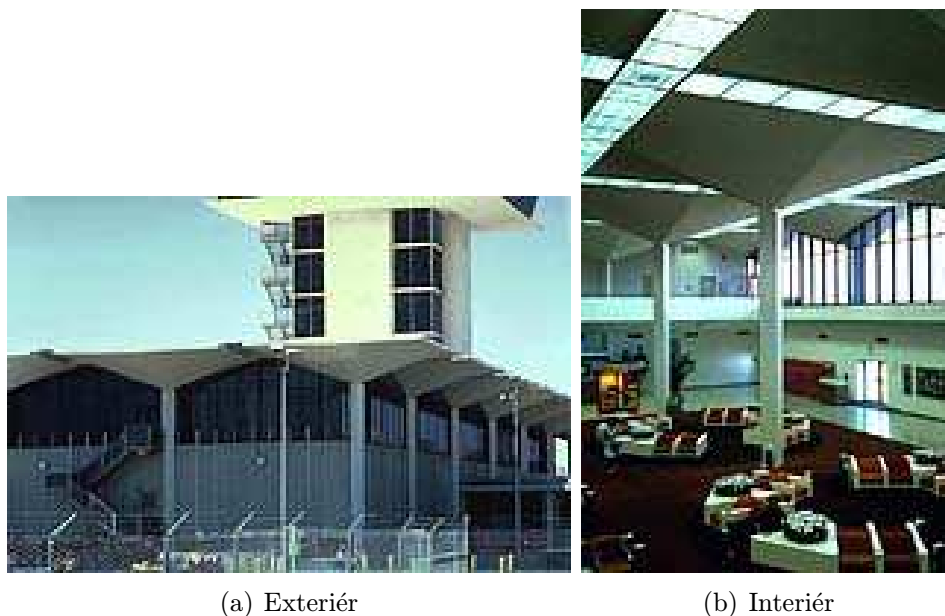
Hlavní nosnou konstrukcí, pro střechu složenou ze čtyř shodných segmentů paraboloidu, tvoří čtyři trojúhelníkové rámy, které tvoří štíty. K jejich vrcholům se přimyká vaznicový kříž, který omezuje spolu s vazníky čtyři shodná střešní pole, daná zborcenými čtyřúhelníky. Dešťová voda stéká od středu střechy ke krajním čtyřem rohům. V Denveru na Court House Square je tento typ střechy použit na zastřešení obchodu o rozloze 34 x 34,5 m.



Obrázek 4.7: Nákupní centrum v Denveru

V jiném řazení je možné provést další střechu, opět ze čtyřech částí paraboloidu. Střecha končí horizontální přímkou. Skořepina je podepřena jen ve svém nejnižším bodě sloupkem, v němž je umístěn svod dešťové vody. Takto řešené zastřešení je výhodné např. pro nástupišťe, protože opěrné sloupky jsou v dostatečné vzdálenosti od hranice zakrytého prostoru a nijak nebrání dění u kraje.

Řadu takovýchto ohromných deštníků najdeme na mezinárodním letišti v Oaklandu v Kalifornii a nemají jich tu málo. Je jimi obehnaná celá budova terminálu i oživen interiéru odbavovacích hal.



Obrázek 4.8: Letiště v Oaklandu

Aymondova bání vznikne seskupením osmi částí paraboloidu nad čtvercovým půdorysem.

Hyperbolické paraboloidy se dále používají jako přechodové plochy na křižovatkách a odbočkách silnic, u vyrovnávacích ploch opěrných zdí, při vodních stavbách, při úpravě okolí jezů, mostů, jako lícnicích ploch u propellerů, atd. U staveb z tesaného kamene je výhodné určení hyperbolického paraboloidu s vodorovnými tvořícími přímkami, protože jsou horizontálními spárami a kameny se dají snadno a přesně opracovat.

Obě přímkové kvadriky nemají význam pouze pro přímou stavební a strojírenskou praxi, ale velmi často se objevují jako tečné přímkové kvadriky používané k snadnějšímu sestrojování tečné roviny  $\tau$  v bodě  $t$  obecné zborcené plochy  $\Phi_{a,b,c}$ .

## 4.4 Konoidy

Plückerův konoid hraje důležitou roli v prostorové kinematické geometrii.

Velký význam pro technické využití mají kuželosečkové konoidy. Přímé kruhové konoidy se používají na tzv. pilových střeších (ty vzniknou vhodným řazením shodných prvků) nad rozlehlejšími halami. Roviny řídících kružnic jsou svislé, vlastní řídící přímkami jsou vodorovné a společná řídící rovina je k nim kolmá. Toto řešení umožňuje především řádné osvětlení. Někdy je zapotřebí, aby střecha propouštěla ještě více světla. Tehdy jsou roviny

řídících kružnic šikmé. Místo kruhových konoidů lze na pilových střeších užít parabolické konoidy.



Obrázek 4.9: 65 parabolických konoidů nad plochou 100 x 130 m

Konoid je vhodný také k zastřešení, chránící vchod do budovy. Řídící kuželosečku konoidu tvoří nosník ve svislé rovině  $\alpha$ , rovnoběžné s průčelnou stěnou  $\nu$  budovy, řídící přímkou pak vhodně volená a účelu vyhovující horizontální přímkou  $b \subset \nu$ . Klenba je zakončena řezem rovinou  $\beta$ , která je stopou roviny  $\alpha$  a vrcholovou přímkou klenby (torzální přímkou konoidu).

Jako dosud „neokoukaný“ prvek se konoidy staly součástí moderní architektury, ne v pojetí střechy, ale jako estetický prvek fasády. Z dílny Pei Cobb Freed & Partners pochází reprezentativní projekty jako Mayerson Symphony Centre (postavené v roce 1989 v Dallasu) a soudní budova v Bostonu z roku 1998. Prosklené konoidy dávají pocit volného přechodu venkovního a vnitřního prostoru.



(a) Mayerson Symphony Centre, Dallas

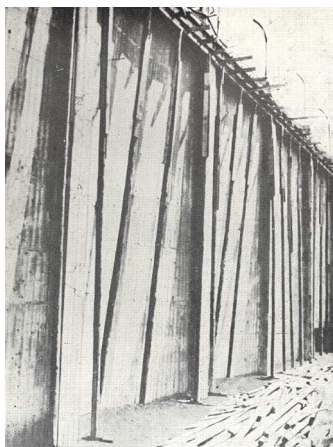


(b) Soudní budova, Boston

Obrázek 4.10: Prosklené konoidy

Další typické užití kruhového konoidu je jako opěrné zdi vodní nádrže, skladiště sypkých hmot nebo vysokých stěn. Prostě tam, kde na stěnu působí vysoké tlaky, které se na konoidech rozkládají. Použití konoidů jako vyrovnávací plochy je výhodné tehdy, mají-li obě opěrné zdi různých sklonů buď v koruně zdi, nebo v její patě společnou hranu.

Zastřešení nad nepravidelným čtyřúhelníkem  $ABCD$  je, kromě hyperbolického paraboloidu, možné provést také pomocí dvou eliptických konoidů, tzv. křížovou klenbou. Ve



Obrázek 4.11: Kruhové konoidy jako opěrná zeď

svislých rovinách procházejícími stranami  $AB$  a  $BC$  daného půdorysu leží řídicí elipsy s hlavními osami  $AB$ ,  $BC$  a vedlejšími osami stejně dlouhými. Oba konoidy jsou čtvrtého stupně, mají společnou torzální rovinu, v níž leží jejich torzální vrcholové přímky. Další torzální přímky jsou strany půdorysu. Rovinné řezy (lunety) jsou křivky čtvrtého stupně. Není-li odchylka protějších stran různoběžníku příliš velká, blíží se tyto křivky kuželo-sečkám. Vodorovné roviny protínají oba konoidy v přímkách protínajících se v průniku konoidů.

Prstencová křížová klenba vznikne průnikem kruhového rotačního anuloidu s přímým konoidem s řídicí elipsou. Osa anuloidu je řídicí svislou přímkou, rovina rovníku, v níž leží dráha s opsaná středem  $S$  jeho poledníkové kružnice, řídicí rovinou konoidu. Řídicí elipsa má svislou poloosu rovnou poloměru poledníkové kružnice a je souměrná podle roviny poledníku: má střed  $S$  na dráze  $s$  a rovinu kolmou k  $SO$ , kde  $O$  je střed prstence.

Konoid lze také použít jako otupovací plochu při valené klenbě.

## 4.5 Cylindroidy

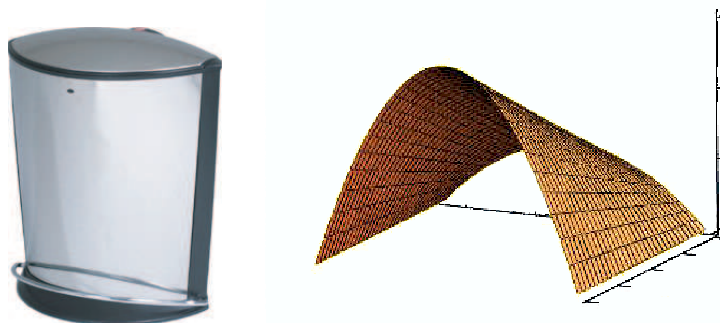
Také těchto ploch se často užívá ve stavebních projektech jako lících ploch kleneb nad různoběžníkovým půdorysem, opěrných zdí, omezujících ploch sil apod.

Další technické užití Catalanových ploch najdeme při úpravách terénu pro komunikace. Jsou to tzv. planýrovací plochy. Jsou dány prostorovou křivkou  $a$  a vodorovnou rovinou  $\pi$ . Přímky této plochy jsou rovnoběžné s  $\pi$  a protínají křivku  $a$  kolmo. Dotýkají se proto válcové plochy  $\varepsilon$ , která je kolmo k  $\pi$  evolutou křivky  $a_1$ . Na ploše jsou dvě soustavy povrchových křivek: Soustava povrchových přímek  ${}^1b, {}^2b, \dots$ , a dále soustava povrchových křivek  ${}^1a, {}^2a, \dots$  rovnoběžných s křivkou  $a$ , jejichž půdorysy jsou evolventy křivky  $\varepsilon_1$ . Tj. plochy, jejichž tvořící přímky jsou vodorovné normály osy komunikace. Podél libovolné přímky, např.  $b$ , se plochy dotýká hyperbolický paraboloid, který určují: tečna  $u$  v průsečíku  $N$  přímky  $b$  s řídicí křivkou  $a$ , dále dotyková povrchová přímka  $e$  první promítací

roviny přímky  $b$  s válcovou plochou  $\varepsilon$  a rovina  $\pi$ .

Plochy Freziérova cylindroidu se ve stavebnictví užívalo jako lící plochy nad schodištěm, když chodby v podlaží, které schodiště spojovalo, byly valenými klenbami ukončenými elipsami.

Lidé jsou stále více posedlí po něčem novém a na první pohled zvláštním. Proto není divu, že designéři sahají po stále jiných plochách a začleňují je do svých děl. A tak si dnes už nemusíme pořizovat odpadkové koše, těch tak omrzelých tvarů, ale na trhu jsou „cylindroidové modely“.



(a) Odpadkový koš

(b) Model cylindroidu

Obrázek 4.12: Cylindroid

## 4.6 Plocha šikmého průchodu

Plochy šikmého průchodu se používá jako klenby šikmého podjezdu. Kromě příkladů uvedených na obrázcích, je tato plocha použita jako klenba šikmého podjezdu železniční trati přes Svitavu v Obřanech.

Vyšehradský tunel byl proražen již v roce 1903 pod Vyšehradskou skálou. Jedná se o jeden obousměrný tubus dlouhý cca 35 m.

## 4.7 Plocha eliptického pohybu v prostoru

Části plochy lze užít jako střechy, jejíž okapovou hranou je kružnice nebo elipsa a jejíž hřeben tvoří vodorovná úsečka řídicí přímky  $a$ , která je kratší než s ní rovnoběžný průměr okapové kuželosečky. Povrchové přímky plochy tvoří krokve v konstrukci střechy. Těchto střech, tzv. helmic, se ve středověku hodně používalo na věžích opevnění a hradů a také u lidových staveb, zejména zvoníc.

Na Moravě je obecně známa 35 m vysoká rozhledna (bývalá hradní věž) Štramberská Trúba, proto je plocha často označována jako plocha štramberské trúby. Hrad byl založen ve 14. století jako součást řetězce hradů na obranu hranic, jeho opevnění navazovalo na



(a) Vyšehradský tunel

(b) Průchod z Karlína na Poříčí

Obrázek 4.13: Plocha šikmého průchodu

opevnění města. V 18. stol. byl už hrad neobývanou zříceninou – zůstala jen hradní věž Trúba, která byla na přelomu 19./ 20. stol. opravena podle plánů arch. K. Hilberta.



Obrázek 4.14: Štramberská Trúba

## 4.8 Montpellierský a Marseillský oblouk

Plochy Montpellierského oblouku se ve stavební praxi velmi často používá. Jsou to různé markýzy chránící vstup do budovy, podstavce válcových sloupů, které přecházejí do hranolů, vyrovnávací plochy, přechodové plochy ve vodním stavitelství, zásobníky na sypké hmoty, apod.

V praxi se vyskytuje jen část plochy Marseillského oblouku mezi kruhovými oblouky nad rovinou  $\pi$ , procházející přímkou  $c$  kolmo k rovině souměrnosti obou kružnic. Užití Marseillského oblouku je podobné jako u plochy Montpellierského oblouku.



Obrázek 4.15: Hlavice sloupu

## 4.9 Plocha corne de vache

Zborcená plocha corne de vache zlepšuje mostní oblouk po stránce estetické i mechanické. Velmi známým příkladem užití je Most Legií v Praze.

Most Legií je sedmým mostem přes Vltavu na území města Prahy (počítáno po proudu řeky). Most vede od Národního divadla z Národní třídy (tehdy Nové aleje) přes Střelecký ostrov, který spojuje s Újezdem a Malou Stranou. Stavba nového kamenného mostu byla zahájena v roce 1898. Při stavbě se musely řešit značné obtíže vzniklé tím, že bylo projektováno použití základů pilířů starého mostu visutého pro nový most klenutý. Mezi sedmi pilíři návodními a třemi opěrami je devět kleneb různého rozpětí. Klenby nad Střeleckým ostrovem mají tvar kruhových segmentů o rozpětí 27 metrů, ostatní mají tvar elipsovité. Od staroměstského ramene směrem k Malé Straně se rozpětí kleneb mění z 26 metrů na 34 metrů, pak 38 metrů a 42 metrů, odtud pak klesá z 32 metrů na 28 metrů a 25 metrů. Délka mostu je 343 m, šířka 16,4 m. Slavnostní otevření mostu se konalo v roce 1901 za přítomnosti císaře Františka Josefa I., neboť most dostal jeho jméno. V roce 1918 byl přejmenován na Most Legií, za okupace na Smetanův most, po okupaci na most 1. Máje a v roce 1990 opět na Most Legií.



Obrázek 4.16: Most Legií

## 4.10 Šroubové plochy

Pravoúhlá přímková uzavřená plocha se v praxi vyskytuje na točitých schodech. Proto se také často označuje jako schodová plocha.



Obrázek 4.17: Točité schodiště

Schodová plocha se mimo spodní části točitého schodiště používá i jako točité spojení pater v poschodových garážích. Takto řešená vertikální komunikace není jenom prostorově úspornější, ale působí také velmi ladně a dynamicky.

Šroubové plochy při řešení celého objektu využil F.L. Wright při návrhu Guggenheimova muzea v New Yorku.

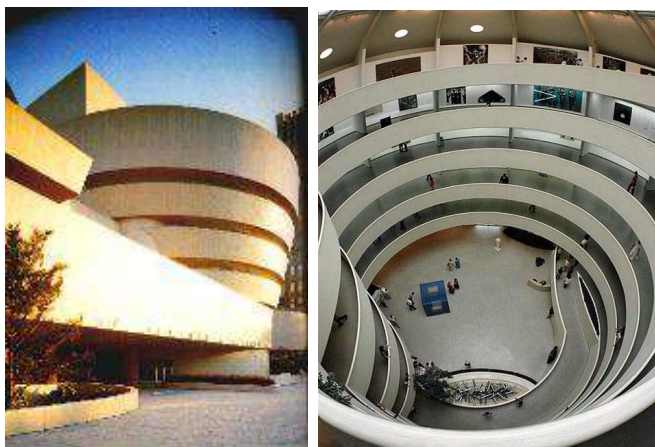
Muzeum bylo vybudováno pro slavnou sbírku výtvarného umění Solomona R. Guggenheima v manhattanské čtvrti Upper East Side, poblíž Central Parku. Projekt vznikl v letech 1943 – 1959. Hlavním motivem se stala spirála, po které návštěvník stoupá nahoru k prosklené kupoli (zajímavé je, že zkoušel i princip směrem vzhůru se zužující spirály, ale nakonec zvolil motiv opačný – budova se rozšiřuje v horní partii). K této dominantní hmotě přisedá ještě desková budova s konvenčně řešenými sály – přístup k nim je z každého závitů. Dominujícím motivem muzea je kružnice. Ta se objevuje i na dekoru podlahy. Zpočátku byly obavy, zda svažitě ochozy a prohnuté stěny neznehodnotí zážitek z výstav, ale není tomu tak.

V americkém městě Independence, ve státě Missouri, stojí kostel sloužící Církvi Ježíše Krista svatých posledních dnů (založená 1830 v USA). Členové církve jsou lidově označováni jako Mormoni. Zajímavým dojmem působí nejen postupné zužování šroubovice střechy, ale také měnící se sklon šroubované úsečky.

Všechny šroubové plochy (jejich části) se využívají jako plochy různých vrtáků. Kolmé plochy se používají na ploché závitů, šikmé plochy na ostré závitů.

Ve strojnictví najdeme pravoúhlu uzavřenou šroubovou plochu v pístovém šoupátku, u korunkového vrtáku, nebo jí můžeme nahradit plochu hyperbolického paraboloidu na





Obrázek 4.18: Guggenheimovo muzeum v New Yorku



Obrázek 4.19: Kristův chrám v Independence

propelleru.

Otevřená pravoúhlá šroubová plocha se vyskytuje na svídříku, který se vyrábí za horka zkroucením ocelové tyče s obdélníkovým průřezem. Povrch svídříku je složen ze čtyř částí pravoúhlé otevřené šroubové plochy. Nebozez vznikne šroubováním normálního řezu jehož úsečky vytvoří části pravoúhlých otevřených ploch a oblouky části cyklických šroubových ploch a část rotační válcové plochy.

Kosoúhlou uzavřenou přímkovou šroubovou plochu najdeme na vývrtce.

Zborcených šroubových ploch lze také využít, stejně jako zborcených hyperboloidů, k převodu rotace z jedné osy na osu s ní mimoběžnou.

# Závěr

Cílem mé diplomové práce bylo sestavit text pojednávající o přímkových plochách technické praxe. Práce na tomto tématu mě velmi zaujala, bavila a byla pro mne velkým přínosem. Byla bych ráda, kdyby se jednou našlo využití této diplomové práce při výuce deskriptivní geometrie.

Rozhlédneme-li se však kolem sebe zjistíme, že svět není poskládán pouze z přímek. Všude nás obklopují rozmanité tvary. Stejně tak v technické praxi nenarážíme pouze na přímkové plochy. Často se využívají jak plochy rotační, tak obecné plochy šroubové. Moderní architektura také čím dál častěji zabíhá do užití empirických ploch. Umožňují jí to možnosti 3D počítačového modelování, bez kterého by geometrie volných forem nemohla být realizována.

Ale o tom už pojedná třeba někdo jiný ...

# Seznam obrázků

1.1	Tečny empirické křivky v jejím bodě . . . . .	8
1.2	Tečny empirické křivky z bodu . . . . .	8
1.3	Normály spustěné na empirickou křivku . . . . .	9
1.4	Singulární body křivky . . . . .	9
1.5	Rektifikace oblouku . . . . .	10
1.6	d'Ocagneova rektifikace . . . . .	11
1.7	Sobotkova rektifikace . . . . .	11
1.8	Kochaňského rektifikace . . . . .	11
1.9	Konstrukce středu křivosti . . . . .	12
1.10	Spád křivky . . . . .	13
1.11	Konstrukce oskulační roviny . . . . .	14
1.12	Průměty křivky do roviny . . . . .	14
1.13	Průmět křivky z jejího bodu . . . . .	15
1.14	Průmět křivky z bodu tečny . . . . .	15
1.15	Průmět křivky z bodu její oskulační roviny . . . . .	16
1.16	Bisekanta křivky promítacím paprskem . . . . .	16
1.17	Pravotočivá, levotočivá šroubovice . . . . .	17
1.18	Rozvinutí šroubovice . . . . .	18
1.19	Poloměr oskulační kružnice průmětu vrcholu šroubovice . . . . .	19
1.20	Axonometrie šroubovice . . . . .	19
1.21	Dvojná křivka plochy . . . . .	21
1.22	Hyperbolický bod plochy . . . . .	22
1.23	Parabolický bod plochy . . . . .	22
1.24	Eliptický bod plochy . . . . .	22
1.25	Anuloid s kráterovou kružnicí $k$ . . . . .	23
1.26	Kónický bod plochy . . . . .	23
1.27	Skutečný a zdánlivý obrys plochy . . . . .	25
1.28	Určení obrysu plochy . . . . .	26
2.1	K důkazu Catalánovy věty . . . . .	30
2.2	Tečná rovina šroubového torsu . . . . .	31
2.3	Rozvinutí šroubového torsu . . . . .	33
2.4	Mez vlastního stínu . . . . .	34

2.5	Osvětlení rovinutelné šroubové plochy . . . . .	35
2.6	Tečná rovina dvou křivek . . . . .	35
2.7	Konstrukce rozvinutelné přechodové plochy . . . . .	36
2.8	Rozvinutí přechodové plochy . . . . .	36
2.9	Konstrukce plochy konstantního spádu . . . . .	36
3.1	Tvořící přímky zborcené plochy $\Phi_{a,b,c}$ . . . . .	38
3.2	K důkazu Chaslesovy věty . . . . .	39
3.3	Konstrukce tečné roviny zborcené plochy . . . . .	40
3.4	Torzální přímka, rovina a kuspídní bod . . . . .	41
3.5	Tečná rovina zborcené kvadriky . . . . .	43
3.6	Zborcený hyperboloid . . . . .	43
3.7	Hyperbolický paraboloid . . . . .	44
3.8	Küpperův konoid . . . . .	47
3.9	Přímý souměrný kruhový konoid . . . . .	48
3.10	Freziérův cylindroid . . . . .	49
3.11	Plocha šikmého průchodu . . . . .	50
3.12	Plocha eliptického pohybu v prostoru . . . . .	51
3.13	Marseillský oblouk . . . . .	53
3.14	Pravoúhlá otevřená přímková šroubová plocha . . . . .	57
3.15	Kosoúhlá uzavřená přímková plocha . . . . .	58
3.16	Kosoúhlá otevřená přímková šroubová plocha . . . . .	59
4.1	Obecné válcové plochy na kostele Emauzy . . . . .	61
4.2	Pavilon A na brněnském výstavišti . . . . .	62
4.3	Přechodové plochy mezi dvěma potrubími . . . . .	63
4.4	McDonnellovo planetárium . . . . .	64
4.5	Ještěd . . . . .	64
4.6	Rodinný dům v Klánovicích . . . . .	65
4.7	Nákupní centrum v Denveru . . . . .	65
4.8	Letiště v Oklandu . . . . .	66
4.9	65 parabolických konoidů nad plochou 100 x 130 m . . . . .	67
4.10	Prosklené konoidy . . . . .	67
4.11	Kruhové konoidy jako opěrná zeď . . . . .	68
4.12	Cylindroid . . . . .	69
4.13	Plocha šikmého průchodu . . . . .	70
4.14	Štramberská Trúba . . . . .	70
4.15	Hlavice sloupu . . . . .	71
4.16	Most Legií . . . . .	71
4.17	Točité schodiště . . . . .	72
4.18	Guggenheimovo muzeum v New Yorku . . . . .	73
4.19	Kristův chrám v Independence . . . . .	73

# Seznam použité literatury

- [1] Kadeřávek F.: *Plochy stavebně-inženýrské praxe*, JČMF, Praha, 1950
- [2] Klapka J.: *Deskriptivní geometrie*, VTN, Praha, 1951
- [3] Kounovský J.: *Zborcené plochy*, JČMF, Praha, 1947
- [4] Lomtatidze L., Plch R.: *Sázíme diplomovou práci z matematiky v  $\TeX$* , vydala Masarykova univerzita, Brno, 2003
- [5] Machala F.: *Rotační plochy*, Skriptum PřF UP, Olomouc, 1985
- [6] Machala F.: *Plochy technické praxe*, Skriptum PřF UP, Olomouc, 1985
- [7] Menšík M.: *Technické kreslení*, SPN, Praha, 1984
- [8] Moll I. a kolektiv: *CD: Deskriptivní geometrie, verze 1.0*, Brno, 2002
- [9] Piska R., Medek V.: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL, Praha, 1972
- [10] Piska R., Medek V.: *Deskriptivní geometrie II*, SNTL, Praha, 1975
- [11] Rybička J.:  *$\LaTeX$  pro začátečníky*, Konvoj, Brno, 1995
- [12] Vala J.: *Deskriptivní geometrie. Část I*, SNTL, Praha, 1977
- [13] Vala J.: *Deskriptivní geometrie. Část II*, SNTL, Praha, 1977

## www stránky

- [14] Archiweb: <http://www.archiweb.cz>
- [15] Automobilové tunely: <http://www.tsk-praha.cz/webtsk/slavel/tunely/tunely.html>
- [16] Designer pedal bin: <http://www.seton.co.uk/perl/product.pl?productid=3190>
- [17] Deskriptivní geometrie a architektura: <http://web.cvut.cz/fa/u522/hajkova/hajkova/grant01/index.html>

- 
- [18] Deskriptivní geometrie pro FAST: <http://mdg.vsb.cz/jdolezal/DgFAST/DgFAST.html>
  - [19] Elektronický časopis Ikaros: <http://www.ikaros.cz/node/1467>
  - [20] Encyklopedie Celý svět: <http://www.celysvet.cz>
  - [21] InfoČesko: <http://www.infocesko.cz>
  - [22] Mattech: <http://www.mattech.cz>
  - [23] Názorný slovník rovinných křivek: <http://www.xahlee.org>
  - [24] Neviditelný pes – rubrika architektura: <http://archiv.neviditelnypes.zpravy.cz/architek/0823arch.htm>
  - [25] Obrazová podpora skript: <http://mat.fsv.cvut.cz/bakalari/kog/>
  - [26] Otevřená encyklopedie Wikipedia: <http://cs.wikipedia.org>
  - [27] Pei Cobb Freed & partners: <http://www.pcfandp.com/a/f/>
  - [28] Pražská informační služba: <http://pis.eunet.cz>
  - [29] The earthquake engineering online archive: <http://nisee.berkeley.edu/elibrary>
  - [30] Veletrhy Brno: <http://www.bvv.cz>
  - [31] WT's collection of his math projects: <http://www.jug.net/wt>
  - [32] Zborčené plochy: <http://www.geometrie.wz.cz>