Úvod do funkcionální analýzy

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita
- Úplnost v Banachových prostorech

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita
- Úplnost v Banachových prostorech
- Lineární operátory

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita
- Úplnost v Banachových prostorech
- Lineární operátory
- Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

Úvod do funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita
- Úplnost v Banachových prostorech
- Lineární operátory
- Konvoluce funkcí a Fourierova transformace
- Slabá konvergence

I. Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti

Definice 1

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0, +\infty)$ nazýváme normou na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaným lineárním prostorem.

Tvrzení 2

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$*.*

(a) *Funkce* $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X*.*

Tvrzení 2

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$.

(a) *Funkce* $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X.

(b) *Norma je* 1*-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na* X.

Tvrzení 2

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$*.*

(a) *Funkce* $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X*.*

(b) *Norma je* 1*-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na* X*.*

(c) *Zobrazení* $+\colon X \times X \to X$ *a* $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ *jsou spojitá.*

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj.
  $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj.
  $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj.
  $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x,r)$, tj. $B_X(x,r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x,r)$, tj. $U_X(x,r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0,1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0,1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Definice 3

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Definice 3

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Tvrzení 4

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.*

(b) *Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.*

Definice 5

Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou ekvivalentní, pokud $x_n \xrightarrow{\rho} x$, právě když $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ pro $\{x_n\} \subset P$, $x \in P$.

Definice 5

Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou ekvivalentní, pokud $x_n \xrightarrow{\rho} x$, právě když $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ pro $\{x_n\} \subset P$, $x \in P$. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou skoro stejné, pokud existují $A, B > 0$ taková, že $A\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq B\sigma(x, y)$ pro všechna $x, y \in P$.

Definice 5

Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou ekvivalentní, pokud $x_n \stackrel{\rho}{\to} x$, právě když $x_n \stackrel{\sigma}{\to} x$ pro $\{x_n\} \subset P$, $x \in P$. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou skoro stejné, pokud existují $A, B > 0$ taková, že $A\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq B\sigma(x, y)$ pro všechna $x, y \in P$.

Tvrzení 6

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a ρ_1, ρ_2 jsou příslušné metriky. Pak ρ_1 a ρ_2 jsou skoro stejné, právě když jsou ekvivalentní.

Definice 7 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Definice 7 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí
$A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Definice 7 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Lemma 9

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

Definice 7 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Lemma 9

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.

Tvrzení 10

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*

Tvrzení 10

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*

(ii) *Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*

Tvrzení 10

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*

(ii) *Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*

(iii) *Zobrazení $Id\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.*

Tvrzení 10

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*

(ii) *Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*

(iii) *Zobrazení $Id\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.*

(iv) *Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.*

Definice 11

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Definice 11

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.
Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je konvexní kombinací vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Definice 11

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda) y \in M$.
Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je konvexní kombinací vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Fakt 12

Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.

Definice 13

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu
$\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Definice 13

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu

$$\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}.$$

Tvrzení 14

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak

$$\operatorname{conv} M = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M,\right.$$
$$\left.\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Definice 15

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Definice 15

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Fakt 16

Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x, r)$, resp. $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.

Definice 17

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako
$\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$
a uzavřený konvexní obal M jako
$\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Definice 17

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako
$\overline{\text{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$
a uzavřený konvexní obal M jako
$\overline{\text{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 18

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.

Definice 17

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako
$\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$
a uzavřený konvexní obal M jako
$\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 18

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.

Tvrzení 19

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, M = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \overline{\operatorname{conv} M}$.

Tvrzení 20

Nechť X je normovaný lineární prostor, $F \subset X$ je uzavřená a $K \subset X$ je kompaktní. Pak $F + K$ je uzavřená.

Tvrzení 20

Nechť X je normovaný lineární prostor, $F \subset X$ je uzavřená a $K \subset X$ je kompaktní. Pak $F + K$ je uzavřená. Je-li navíc F kompaktní, pak je i $F + K$ kompaktní.

Věta 21

Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

Věta 21

Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

Důsledek 22

Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.

Věta 23

(a) *Prostory c_0 a ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, jsou separabilní.*

Věta 23

(a) *Prostory c_0 a ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, jsou separabilní.*

(b) *Prostor ℓ_∞ je neseparabilní.*

Věta 23

(a) *Prostory* c_0 *a* ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, *jsou separabilní.*

(b) *Prostor* ℓ_∞ *je neseparabilní.*

(c) *Je-li* K *kompaktní metrický prostor, je prostor* $C(K)$ *separabilní.*

Věta 23

(a) *Prostory* c_0 *a* ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, *jsou separabilní.*

(b) *Prostor* ℓ_∞ *je neseparabilní.*

(c) *Je-li* K *kompaktní metrický prostor, je prostor* $C(K)$ *separabilní.*

(d) *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je lebesgueovsky měřitelná a* $1 \leq p < \infty$. *Pak prostor* $L_p(\Omega, \lambda)$ *je separabilní.*

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 24

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$.
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$.

Definice 24

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Definice 24

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Definice 24

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Fakt 25

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X. Pak

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Věta 26 (Test úplnosti)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Definice 27

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou.

Definice 27

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Definice 27

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem.

Definice 27

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F \colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní.

Definice 27

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Definice 28

Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, pokud

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset\colon \left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Věta 29

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ *je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru* X*. Pak platí:*

(a) *Její součet je určen jednoznačně.*

Věta 29

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X. Pak platí:

(a) *Její součet je určen jednoznačně.*

(b) *Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

Věta 29

Nechť $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ *je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru* X*. Pak platí:*

(a) *Její součet je určen jednoznačně.*

(b) *Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

(c) *Je-li* $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = x$*, pak* $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ *pro každou permutaci (tj. bijekci)* $\pi : \Gamma \to \Gamma$*.*

Věta 29

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ *je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru* X*. Pak platí:*

(a) *Její součet je určen jednoznačně.*

(b) *Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

(c) *Je-li* $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x$*, pak* $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ *pro každou permutaci (tj. bijekci)* $\pi : \Gamma \to \Gamma$*.*

(d) $\left(\|x_\gamma\|\right)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$*.*

Věta 29

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ *je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru* X. *Pak platí:*

(a) *Její součet je určen jednoznačně.*

(b) *Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

(c) *Je-li* $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x$, *pak* $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ *pro každou permutaci (tj. bijekci)* $\pi\colon \Gamma \to \Gamma$.

(d) $\left(\|x_\gamma\|\right)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

(e) *Je-li* $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma$ *libovolná prostá posloupnost taková, že* $\{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \neq 0\} \subset \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, *pak* $\sum_{n=1}^\infty x_{\gamma_n} = x$.

Tvrzení 30

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ *je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když*

$$\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathcal{F}(\Gamma)\right\} < +\infty.$$

Potom platí

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathcal{F}(\Gamma)\right\}.$$

Tvrzení 31

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$, $\sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$ *jsou konvergentní zobecněné řady v normovaném lineárním prostoru nad* $\mathbb{K}$ *a nechť* $c \in \mathbb{K}$. *Pak* $\sum_{\gamma\in\Gamma}(x_\gamma + y_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$ *a* $\sum_{\gamma\in\Gamma} cx_\gamma = c\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$.

Věta 32

Nechť X je Banachův prostor.

(a) *Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

Věta 32

Nechť X je Banachův prostor.

(a) *Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

(b) *Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.*

Věta 32

Nechť X je Banachův prostor.

(a) *Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

(b) *Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.*

(c) *Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ konvergentní.*

Tvrzení 33

(a) *Nechť zobecněná řada* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *v normovaném lineárním prostoru* X *konverguje k* $x \in X$. *Pak i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje k* x.

Tvrzení 33

(a) *Nechť zobecněná řada* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *v normovaném lineárním prostoru* X *konverguje k* $x \in X$. *Pak i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje k* x.

(b) *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *v normovaném lineárním prostoru* X *konverguje k* $x \in X$ *a nechť zobecněná řada* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Pak* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *konverguje k* x.

Tvrzení 33

(a) *Nechť zobecněná řada* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *v normovaném lineárním prostoru* X *konverguje k* $x \in X$*. Pak i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje k* x*.*

(b) *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *v normovaném lineárním prostoru* X *konverguje k* $x \in X$ *a nechť zobecněná řada* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Pak* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *konverguje k* x*.*

(c) *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost nezáporných čísel. Pak zobecněná řada* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *konverguje, právě když konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(a obě pak mají stejný součet).*

Důsledek 34

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.

Definice 35

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

Definice 35

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

Věta 36

Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje bezpodmínečně.*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *konverguje pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.*

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *konverguje pro každou permutaci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Věta 37

Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.

Věta 37

Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.
Každá řada v $\mathbb{R}$ *je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.*

3. Lineární operátory a funkcionály

3. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineární, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

3. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineární, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Fakt 38

Nechť X, Y jsou vektorové prostory, $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní. Obdobně, je-li $N \subset Y$ symetrická, pak $T^{-1}(N)$ je symetrická, a je-li N konvexní, pak $T^{-1}(N)$ je konvexní.

Tvrzení 39

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *T je spojité.*

(ii) *T je spojité v jednom bodě.*

(iii) *T je spojité v 0.*

(iv) *Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(v) *T je lipschitzovské.*

(vi) *T je stejnoměrně spojité.*

(vii) *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*

(viii) *$T(B_X)$ je omezená.*

(ix) *$T\big(U(0,\delta)\big)$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.*

Prostor $\mathscr{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 40

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 40

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ *pro každé $x \in X$.*

(b) $\|T\| = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$. *Je-li X netriviální, pak též* $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 40

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(b) $\|T\| = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$. *Je-li X netriviální, pak též* $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$.

(c) $\|T\| = \inf\{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ pro každé } x \in X\}$.

Fakt 41

Nechť X, Y *jsou normované lineární prostory a* $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *je posloupnost operátorů konvergujících k* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *v prostoru* $\mathcal{L}(X, Y)$*. Pak* $\{T_n\}$ *konverguje k* T *bodově, tj. pro každé* $x \in X$ *platí* $T_n(x) \to T(x)$ *v prostoru* Y*.*

Fakt 41

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.

Fakt 42

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\| \|S\|$.

Věta 43

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Věta 43

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Definice 44

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

Věta 43

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Definice 44

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

Věta 45

Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.

Lemma 46

Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| = \|f\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)$.

Definice 47

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;

Definice 47

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;

Definice 47

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;

Definice 47

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen izometrie do), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- izometricky vnořen do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- izometricky vnořen do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

Poznámka 48

Uvědomme si, že lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

Tvrzení 49

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty* $C_1, C_2 > 0$ *takové, že* $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

Tvrzení 49

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.*

Tvrzení 49

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.*

(c) *Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do, pak* Rng *T je uzavřený v Y.*

Fakt 50

Nechť X, Y, Z *jsou normované lineární prostory a* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

(a) *Jsou-li* S, T *izomorfismy do, pak* $S \circ T$ *je izomorfismus do.*

(b) *Jsou-li* S, T *izometrie do, pak* $S \circ T$ *je izometrie do.*

Věta 51

Nechť $X, \widehat{X}$ *a* Y *jsou normované lineární prostory,* X *je hustý v* $\widehat{X}$ *a* Y *je úplný. Nechť dále* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*. Pak existuje právě jeden operátor* $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$ *rozšiřující* T*, tj.* $\widehat{T} \restriction_X = T$*. Navíc platí* $\|\widehat{T}\| = \|T\|$*.*

Věta 51

Nechť $X, \widehat{X}$ *a* Y *jsou normované lineární prostory,* X *je hustý v* $\widehat{X}$ *a* Y *je úplný. Nechť dále* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*. Pak existuje právě jeden operátor* $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$ *rozšiřující* T*, tj.* $\widehat{T} \restriction_X = T$*. Navíc platí* $\|\widehat{T}\| = \|T\|$*. Je-li* T *izometrie do, pak* $\widehat{T}$ *je též izometrie do.*

4. Konečněrozměrné prostory

Lemma 52 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918))

Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

Věta 53

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) *Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.*

(iii) *B_X je kompaktní.*

(iv) *Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.*

(v) *Každá lineární forma na X je spojitá.*

(vi) *Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.*

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \le p \le \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 54

Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \le p \le \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 55

Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktorprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y.

Definice 55

Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktorprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y. Dále definujeme tzv. kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| =$$
$$= \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y),$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| =$$
$$= \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y),$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

Tvrzení 56

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.

Věta 57

Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.

Definice 58

Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \mathrm{span}(A \cup B)$.

Definice 58

Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \text{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá algebraický doplněk A v X.

Definice 59

Nechť X je množina. Zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Definice 59

Nechť X je množina. Zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Fakt 60

Nechť X je množina.

(a) *Je-li $P\colon X \to X$ projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.*

Definice 59

Nechť X je množina. Zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Fakt 60

Nechť X je množina.

(a) *Je-li $P\colon X \to X$ projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.*

(b) *Je-li $Y \subset X$ a $P\colon X \to Y$ zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak P je projekce X na Y.*

Tvrzení 61

Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ a $\operatorname{Ker} P_B = A$.

Tvrzení 61

Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ a $\operatorname{Ker} P_B = A$. Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.

Věta 62

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*

Věta 62

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*

(b) *Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y (pomocí kanonického kvocientového zobrazení); speciálně* $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

Věta 62

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*

(b) *Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y (pomocí kanonického kvocientového zobrazení); speciálně* $\dim(A) = \dim(X/Y)$*.*

Definice 63

Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzí Y (značíme codim Y) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Definice 64

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$.

Definice 64

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X.

Definice 64

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Definice 64

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Věta 65

Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.

(a) *Je-li $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, jsou Y a Z uzavřené.*

Definice 64

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Věta 65

Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.

(a) *Je-li $X = Y \oplus_t Z$, jsou Y a Z uzavřené.*

(b) *Je-li X Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde Y a Z jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_t Z$.*

Věta 66

Nechť X *je normovaný lineární prostor a* Y, Z *jsou jeho podprostory splňující* $X = Y \oplus Z$. *Pak* $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, *právě když zobrazení* $T\colon X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ *je izomorfismus.*

6. Hilbertovy prostory

Definice 67

Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,

(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme prostor se skalárním součinem.

Definice 67

Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x\mapsto\langle x,y\rangle$ je lineární pro každé $y\in X$,

(ii) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ pro každé $x,y\in X$,

(iii) $\langle x,x\rangle\geq 0$ pro každé $x\in X$,

(iv) $\langle x,x\rangle=0$ právě tehdy, když $x=0$.

Dvojici $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme prostor se skalárním součinem.

Tvrzení 68 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak

(i) $|\langle x,y\rangle|\leq\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$ *pro každé $x,y\in X$.*

(ii) *Funkce $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ pro $x\in X$ je norma na X.*

Definice 69

Prostor se skalárním součinem $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá Hilbertův prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Tvrzení 70

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *je prostor se skalárním součinem nad* $\mathbb{K}$*.*

(a) *Pro libovolné* $y \in X$ *je* $f_y \colon x \mapsto \langle x, y\rangle$ *spojitý lineární funkcionál na* X *a* $\|f_y\| = \|y\|$*.*

Tvrzení 70

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$.

(a) *Pro libovolné $y \in X$ je $f_y\colon x \mapsto \langle x, y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na X a $\|f_y\| = \|y\|$.*

(b) *Funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).*

Fakt 71

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

Fakt 71

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

Tvrzení 72 (rovnoběžníkové pravidlo)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Tvrzení 73 (polarizační vzorec)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

Tvrzení 73 (polarizační vzorec)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

Důsledek 74

Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in X$.

Věta 75

Nechť X, Y *jsou prostory se skalárním součinem nad* $\mathbb{K}$. *Pak na prostoru* $X \oplus_2 Y$ *existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na* X *a* Y, *a který indukuje normu* $\|\cdot\|_2$. *Speciálně, jsou-li* X, Y *Hilbertovy prostory, pak* $X \oplus_2 Y$ *je Hilbertův prostor.*

Definice 76

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$.

Definice 76

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$.

Definice 76

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$.

Definice 76

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^{\perp} = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá ortogonální doplněk A.

Fakt 77 (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.)

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \ldots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Tvrzení 78

Nechť X je prostor se skalárním součinem.

(a) *Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$.*

Tvrzení 78

Nechť X je prostor se skalárním součinem.

(a) *Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$.*

(b) $\{0\}^{\perp} = X$ *a* $X^{\perp} = \{0\}$.

Tvrzení 78

Nechť X je prostor se skalárním součinem.

(a) *Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$.*

(b) $\{0\}^{\perp} = X$ *a* $X^{\perp} = \{0\}$.

(c) *Pro $A \subset X$ je $A^{\perp} = (\overline{\operatorname{span} A})^{\perp}$.*

Tvrzení 78

Nechť X je prostor se skalárním součinem.

(a) *Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$.*

(b) $\{0\}^{\perp} = X$ *a* $X^{\perp} = \{0\}$.

(c) *Pro $A \subset X$ je $A^{\perp} = (\overline{\operatorname{span}} A)^{\perp}$.*

(d) *Pro $A \subset X$ je $A^{\perp}$ uzavřený podprostor X.*

Tvrzení 78

Nechť X je prostor se skalárním součinem.

(a) *Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^\perp = \{0\}$.*

(b) $\{0\}^\perp = X$ *a* $X^\perp = \{0\}$.

(c) *Pro $A \subset X$ je $A^\perp = (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$.*

(d) *Pro $A \subset X$ je $A^\perp$ uzavřený podprostor X.*

(e) *Je-li $X = Y + Z$ pro nějaké podprostory $Y, Z \subset X$ takové, že $Y \perp Z$, pak $Z = Y^\perp$, $Y = Z^\perp$ a $X = Y \oplus Z$.*

Lemma 79

Nechť X *je prostor se skalárním součinem. Jsou-li* $x, z \in X$ *takové, že* $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle$ *pro každé* $y \in X$*, pak* $x = z$*.*

Věta 80 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.

Věta 80 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.

Lemma 81 (F. Riesz, 1934)

Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \perp Y$.

Definice 82

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je projekce. Pokud $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$, pak P se nazývá ortogonální.

Definice 82

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je projekce. Pokud $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$, pak P se nazývá ortogonální.

Tvrzení 83

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je zobrazení takové, že $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$. Pak P je ortogonální lineární projekce.

Věta 84

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je lineární projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *P je ortogonální.*

(ii) $\operatorname{Ker} P \perp \operatorname{Rng} P$.

(iii) $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Rng} P)^\perp$ *a* $\operatorname{Rng} P = (\operatorname{Ker} P)^\perp$.

(iv) $\|x - P(x)\| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Rng} P)$ *pro každé* $x \in X$.

(v) $x - P(x) \perp P(x)$ *pro každé* $x \in X$.

(vi) $\|P(x)\|^2 = \langle P(x), x\rangle$ *pro každé* $x \in X$.

(vii) *P je spojitá a $\|P\| \leq 1$ (tj. $P = 0$, nebo $\|P\| = 1$).*

Věta 85 (F. Riesz, 1934)

Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = Y \oplus_{\mathrm{t}} Y^\perp$ a H je izometrický prostoru $Y \oplus_2 Y^\perp$ pomocí kanonického zobrazení $T\colon x \mapsto \big(P_Y(x), P_{Y^\perp}(x)\big)$.

Důsledek 86

Nechť H je Hilbertův prostor a $A \subset H$. Pak $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{span}}\, A$.

Důsledek 87

Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak H/Y je izometricky izomorfní s $Y^\perp$ pomocí kanonického kvocientového zobrazení.

Věta 88

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.

Definice 89

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;

Definice 89

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;

Definice 89

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Fakt 90

Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x - y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.

Věta 91

Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.

Lemma 92

Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ *je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a* $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$*, kde* x_γ *jsou skaláry. Pak* $x_\gamma = \langle x, e_\gamma\rangle$ *pro každé* $\gamma \in \Gamma$*.*

Lemma 92

Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$ *je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a* $x=\sum_{\gamma\in\Gamma}x_\gamma e_\gamma$*, kde* x_γ *jsou skaláry. Pak* $x_\gamma=\langle x,e_\gamma\rangle$ *pro každé* $\gamma\in\Gamma$*.*

Fakt 93

Nechť $\{e_i\}_{i\in F}$ *je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak* $\left\|\sum_{i\in F}a_ie_i\right\|^2=\sum_{i\in F}|a_i|^2$ *pro libovolné skaláry* a_i, $i\in F$*.*

Lemma 92

Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ *je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a* $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$*, kde* x_γ *jsou skaláry. Pak* $x_\gamma = \langle x, e_\gamma\rangle$ *pro každé* $\gamma \in \Gamma$*.*

Fakt 93

Nechť $\{e_i\}_{i\in F}$ *je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak* $\left\|\sum_{i\in F} a_i e_i\right\|^2 = \sum_{i\in F}|a_i|^2$ *pro libovolné skaláry* a_i*,* $i \in F$*.*

Důsledek 94

Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.

Lemma 95

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i\in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i \in Y^\perp$.

Lemma 95

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i \in Y^\perp$.

Věta 96 (Besselova nerovnost)

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.

Věta 97

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé* $x \in X$ *(tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé* $x \in X$.

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Pak (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

Věta 97

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé $x \in X$.*

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Pak (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

Důsledek 98

Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

Důsledek 99

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *ortonormální soustava v Hilbertově prostoru* H*, pak zobrazení* $P\colon H \to H$*,* $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *je ortogonální lineární projekce na* $\overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$*.*

Důsledek 99

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *ortonormální soustava v Hilbertově prostoru* H*, pak zobrazení* $P\colon H \to H$*,* $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *je ortogonální lineární projekce na* $\overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$*. Dále je* $\|P(x)\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé* $x \in X$*.*

Věta 100 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907))

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení* $T\colon H \to \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ *izometrie H a* $\ell_2(\Gamma)$*. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru* $\ell_2(\Gamma)$ *pro vhodnou množinu* Γ*.*

Tvrzení 101

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li $\dim X = n \in \mathbb{N}$*, pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li* $\dim X = \infty$ *a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.*

Věta 102 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))

Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.

Věta 102 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))

Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdružené lineární izometrie H na H^*.

Lemma 103

Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

II. Hahnova-Banachova věta a dualita

1. Hahnova-Banachova věta

Tvrzení 104

Nechť X je komplexní vektorový prostor. Pak funkce $f\colon X \to \mathbb{C}$ je (komplexní) lineární forma, právě když $\operatorname{Re} f$ *je reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$ a platí* $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

Definice 105

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Definice 105

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p\colon X \to [0, +\infty)$ se nazývá pseudonorma, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 106 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))

Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.

(a) *Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Věta 106 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))

Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.

(a) *Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Věta 107 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

Věta 107 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

Důsledek 108

Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).

Věta 107 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

Důsledek 108

Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).

Důsledek 109 (Duální vyjádření normy)

Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.

Věta 110 (Oddělování bodu a podprostoru)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \in X \setminus Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.

Věta 111

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.*

Věta 111

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.*

(b) *Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.*

Definice 112

Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^{\perp} = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Definice 112

Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^{\perp} = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. zpětný anihilátor jako

$$B_{\perp} = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Lemma 113

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak

(a) *$A^\perp$ je uzavřený podprostor X^*,*

(b) *$B_\perp$ je uzavřený podprostor X,*

(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}} A$,

(d) $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\operatorname{span}} B$.

2. Reprezentace duálů

Tvrzení 114

Nechť X a Y jsou izometrické normované lineární prostory. Pak i prostory X^* a Y^* jsou izometrické.

Definice 115

Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme sdruženým exponentem k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Věta 116 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)

(a) *Prostor* c_0^* *je lineárně izometrický s prostorem* ℓ_1 *pomocí zobrazení* $I\colon \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, *kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Věta 116 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)

(a) *Prostor c_0^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_1 pomocí zobrazení $I\colon \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(b) *Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_q pomocí zobrazení $I\colon \ell_q \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 117

Nechť X, Y *jsou normované lineární prostory a* $1 \leq p \leq \infty$. *Nechť* q *je sdružený exponent k* p. *Pak zobrazení* $I\colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ *dané předpisem*

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ *na* $(X \oplus_p Y)^*$.

Definice 118

Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Definice 118

Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Fakt 119

Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak Λ je monotónní, tj. $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C(K)$ jsou reálné funkce splňující $f \leq g$.

Definice 118

Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Fakt 119

Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak Λ je monotónní, tj. $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C(K)$ jsou reálné funkce splňující $f \leq g$. Dále Λ je automaticky spojitý a pro reálnou $f \in C(K)$ platí $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Tedy v reálném případě platí $\|\Lambda\| = \Lambda(1)$.

Věta 120 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)

Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.

Věta 121 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)

Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I\colon M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 121 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)

Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I\colon M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Lemma 122

Nechť K je kompaktní prostor a $\varphi \in C(K)^*$. Pak existuje nezáporný $\Lambda \in C(K)^*$ takový, že $|\varphi(f)| \leq \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$.

Věta 123

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.

(a) *Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

Věta 123

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.

(a) *Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^{\perp} \to (X/Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^{\perp}$ na $(X/Y)^*$.

(b) *Zobrazení $I\colon X^*/Y^{\perp} \to Y^*$ dané předpisem*

$$I(\widehat{f}) = f\restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^{\perp}$ na Y^*.

Věta 123

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.

(a) *Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^{\perp} \to (X/Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^{\perp}$ na $(X/Y)^*$.

(b) *Zobrazení $I\colon X^*/Y^{\perp} \to Y^*$ dané předpisem*

$$I(\widehat{f}) = f\restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^{\perp}$ na Y^*.

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^{\perp}$ a Y^* lze identifikovat s $X^*/Y^{\perp}$.

3. Druhý duál a reflexivita

3. Druhý duál a reflexivita

Definice 124

Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 125

Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**}.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 125

Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon \colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**}.

Tvrzení 126

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon \colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}

Tvrzení 127

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak $\dim X^* = \dim X$*, a to i v případě, že* $\dim X = \infty$.

Věta 128

Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor.

Věta 128

Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor.

Věta 128

Pro každý normovaný lineární prostor X *existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že* X *je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem* X *existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že* X *je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li* X_1, X_2 *dvě zúplnění* X, *pak existuje lineární izometrie* X_1 *na* X_2, *která je na* X *identitou.*

Věta 128

Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.

Lemma 129

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak existují normovaný lineární prostor Z a lineární izometrie $S\colon Z \to Y$ na tak, že X je podprostor Z a $S\restriction_X = T$.

Definice 130

Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Definice 130

Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Věta 131

Každý Hilbertův prostor je reflexivní.

Věta 132

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

Věta 132

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

(b) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

Věta 132

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

(b) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

(c) *Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.*

Věta 132

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

(b) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

(c) *Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.*

(d) *Jsou-li X, Y reflexivní, je prostor $X \oplus_p Y$ reflexivní pro libovolné $1 \leq p \leq \infty$.*

Věta 132

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

(b) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

(c) *Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.*

(d) *Jsou-li X, Y reflexivní, je prostor $X \oplus_p Y$ reflexivní pro libovolné $1 \leq p \leq \infty$.*

(e) *Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.*

Příklady 133

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

Příklady 133

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

Příklady 133

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

Příklady 133

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

(d) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

III. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 134 (Princip stejnoměrné omezenosti)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) *Pro každé $x \in X$ je* $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

III. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 134 (Princip stejnoměrné omezenosti)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) *Pro každé $x \in X$ je* $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Důsledek 135

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

Definice 136

Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Definice 136

Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 137 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.

Definice 136

Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 137 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.

Lemma 138 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0, s) \subset \overline{T(U(0, r))}$, pak dokonce $U(0, s) \subset T(U(0, r))$.

Důsledek 139 (S. Banach, 1929)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.

Důsledek 140

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak platí:

(a) *Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \leq c\|y\|$.*

Důsledek 140

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak platí:

(a) *Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \le c\|y\|$.*

(b) *Zobrazení $\widehat{T} \colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.*

Důsledek 140

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak platí:

(a) *Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \leq c\|y\|$.*

(b) *Zobrazení $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.*

Fakt 141

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Definujme $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$. Pak $\widehat{T} \in \mathcal{L}(X/\operatorname{Ker} T, Y)$, $\|\widehat{T}\| = \|T\|$, $\widehat{T}$ je prosté a $T = \widehat{T} \circ q$, kde $q\colon X \to X/\ker T$ je kanonické kvocientové zobrazení.

Definice 142

Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f.

Definice 142

Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina graf f je uzavřená v $X \times Y$.

Definice 142

Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina graf f je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 143 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.

IV. Lineární operátory

1. Duální operátory

Definice 144

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k T. (Ve Větě 145 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.)

Definice 144

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k T. (Ve Větě 145 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**}.

Věta 145

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$.*
Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Věta 145

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.*

(b) *Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*

Věta 145

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.*

(b) *Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*

(c) *Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.*

Věta 146

Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí

(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,

(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,

(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,

(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

(e) *Jsou-li navíc X, Y Banachovy a* $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak* $\operatorname{Rng} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Tvrzení 147 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y\colon Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Tvrzení 147 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y\colon Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Tedy $T^{**}(\varepsilon_X(X)) \subset \varepsilon_Y(Y)$ a označíme-li $\varepsilon\colon Y \to \varepsilon_Y(Y)$, $\varepsilon = \varepsilon_Y$, a $S\colon \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**}\restriction_{\varepsilon_X(X)}$, pak $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$.

Věta 148

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) *T^* je prostý, právě když* $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v Y.*

Věta 148

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) *T^* je prostý, právě když $\operatorname{Rng} T$ je hustý v Y.*

(b) *Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Věta 148

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) *T^* je prostý, právě když* $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v Y.*

(b) *Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

(c) *Je-li T izometrie na, pak T^* je izometrie na.*

V146(c), L113(d); T147, F50, T49(c)

Věta 148

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) *T^* je prostý, právě když* $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v Y.*

(b) *Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

(c) *Je-li T izometrie na, pak T^* je izometrie na.*

Je-li X úplný, pak v (b) a (c) platí i opačné implikace.

2. Kompaktní operátory

2. Kompaktní operátory

Definice 149

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y.

Definice 149

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Definice 149

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi.

Definice 149

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud Rng T má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tvrzení 150

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T\colon X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *T je kompaktní.*

(ii) *$T(B_X)$ je relativně kompaktní.*

(iii) *Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.*

Tvrzení 151

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

(a) *Je-li Z normovaný lineární prostor a Y je podprostor Z, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.*

Tvrzení 151

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

(a) *Je-li Z normovaný lineární prostor a Y je podprostor Z, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.*

(b) *Je-li Z uzavřený podprostor Y a $\operatorname{Rng} T \subset Z$, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.*

Věta 152

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

Věta 152

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ a $y_1, \ldots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.*

Věta 152

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.*

(c) *Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Věta 152

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.*

(c) *Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.*

(d) *Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.*

Věta 152

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.*

(c) *Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.*

(d) *Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.*

(e) *Pokud X a Y jsou úplné, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ a* Rng *T je uzavřený, pak $T \in \mathcal{F}(X, Y)$.*

Věta 153 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 154

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertovatelný, právě když T je bijekce.

Definice 155

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$.

Definice 155

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ.

Definice 155

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ.

Definice 155

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Definice 155

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.
Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertovatelný. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Věta 156

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.

Lemma 157

Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertovatelný. Pak $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.

Lemma 157

Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertovatelný. Pak $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.

Tvrzení 158

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je izomorfismus na. Pak $\sigma(T) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|T\|\right\}$.

Věta 159

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.

Tvrzení 160

Nechť X je normovaný lineární prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$. Jestliže $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$, pak $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Tvrzení 160

Nechť X je normovaný lineární prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, *pak* $0 \in \sigma(T)$. *Jestliže $T \in \mathcal{F}(X)$ a* $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$, *pak* $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Věta 161

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$. *Je-li X Banachův, pak* $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ *je uzavřený.*

Věta 162 (Fredholmova alternativa)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.

Věta 162 (Fredholmova alternativa)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.

Důsledek 163

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Lemma 164

Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Lemma 164

Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Věta 165

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.

Důsledek 166

Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.

Věta 167 (Druhá Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

Věta 167 (Druhá Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

Věta 168 (Třetí Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) =$$
$$= \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

V. Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

V. Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

Definice 169

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Konvoluce funkce f s funkcí g je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x - y) \, \mathrm{d}\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Věta 170

Nechť μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g, h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Operace* $*$ *je komutativní v následujícím smyslu: funkce* $f * g$ *a* $g * f$ *mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.*

Věta 170

Nechť μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g, h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Operace* $*$ *je komutativní v následujícím smyslu: funkce* $f * g$ *a* $g * f$ *mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.*

(b) *Operace* $*$ *je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí* $f * (g + h) = f * g + f * h$ *a* $(f + g) * h = f * h + g * h$ *na definičních oborech pravých stran.*

Věta 170

Nechť μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g, h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Operace* $*$ *je komutativní v následujícím smyslu: funkce* $f * g$ *a* $g * f$ *mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.*

(b) *Operace* $*$ *je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí* $f * (g + h) = f * g + f * h$ *a* $(f + g) * h = f * h + g * h$ *na definičních oborech pravých stran.*

(c) *Nechť* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *splňují* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 2$. *Je-li* $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$ *a* $h \in L_r(\mu)$, *pak* $(f * g) * h = f * (g * h)$ μ*-s. v. na* $\mathbb{R}^d$.

Lemma 171

Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je lebesgueovsky měřitelná.

(a) *Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je funkce $y \mapsto f(x-y)$ lebesgueovsky měřitelná na $\mathbb{R}^d$.*

Lemma 171

Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ *je lebesgueovsky měřitelná.*

(a) *Pro každé* $x \in \mathbb{R}^d$ *je funkce* $y \mapsto f(x-y)$ *lebesgueovsky měřitelná na* $\mathbb{R}^d$.

(b) *Funkce* $(x,y) \mapsto f(y)$ *a* $(x,y) \mapsto f(x-y)$ *jsou lebesgueovsky měřitelné na* $(\mathbb{R}^d)^2$.

Lemma 171

Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je lebesgueovsky měřitelná.

(a) *Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je funkce $y \mapsto f(x-y)$ lebesgueovsky měřitelná na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Funkce $(x, y) \mapsto f(y)$ a $(x, y) \mapsto f(x-y)$ jsou lebesgueovsky měřitelné na $(\mathbb{R}^d)^2$.*

Lemma 172

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \in L_1(\mu)$. Položíme-li $F(x, y) = f(y)g(x-y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^d$, pak $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

Definice 173

Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x - y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Definice 173

Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x-y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 174

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Pak zobrazení $\tau\colon \mathbb{R}^d \to L_p(\mu)$ dané předpisem $\tau(x) = \tau_x f$ je stejnoměrně spojité.

Věta 175

Nechť μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Je-li* $f \in L_p(\mu)$ *a* $g \in L_q(\mu)$, *kde* $1 \leq p, q \leq \infty$ *jsou sdružené exponenty, pak funkce* $f * g$ *je definována v každém bodě* $\mathbb{R}^n$, *je stejnoměrně spojitá a omezená a platí* $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Věta 175

Nechť μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Je-li* $f \in L_p(\mu)$ *a* $g \in L_q(\mu)$, *kde* $1 \leq p, q \leq \infty$ *jsou sdružené exponenty, pak funkce* $f * g$ *je definována v každém bodě* $\mathbb{R}^n$, *je stejnoměrně spojitá a omezená a platí* $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

(b) *Je-li* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ *a jestliže* $g \in L_\infty(\mu)$ *má kompaktní nosič, pak funkce* $f * g$ *je definována v každém bodě* $\mathbb{R}^d$, *je spojitá a platí* $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

Věta 175

Nechť μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$*.*

(a) *Je-li* $f \in L_p(\mu)$ *a* $g \in L_q(\mu)$*, kde* $1 \leq p, q \leq \infty$ *jsou sdružené exponenty, pak funkce* $f * g$ *je definována v každém bodě* $\mathbb{R}^n$*, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí* $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$*.*

(b) *Je-li* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ *a jestliže* $g \in L_\infty(\mu)$ *má kompaktní nosič, pak funkce* $f * g$ *je definována v každém bodě* $\mathbb{R}^d$*, je spojitá a platí* $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$*.*

(c) *Jsou-li* $f, g \in L_1(\mu)$*, pak* $f * g$ *je definována* μ*-s. v. na* $\mathbb{R}^d$*,* $f * g \in L_1(\mu)$ *a platí* $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$*.*

Věta 175

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \le p, q \le \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^n$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$.*

(b) *Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.*

(c) *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definována μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.*

(d) *Nechť $1 \le p, q \le \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$. Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, pak $f * g$ je definovaná μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_r(\mu)$ a platí $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$, kde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.*

Definice 176

Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme multiindexem délky d.

Definice 176

Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme multiindexem délky d. Řádem multiindexu α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Definice 176

Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme multiindexem délky d. Řádem multiindexu α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d, pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α, tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(symboly ∂x_i^0 ve vyjádření výše vynecháváme).

Speciálně, pro $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je $D^0 f = f$.

Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Definice 177

Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) =$$
$$= \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K});\ \text{supp}\,\varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá prostor testovacích funkcí na A.

Věta 178

Nechť μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$*. Je-li* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ *a* $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$*, pak* $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *a* $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ *pro každý multiindex* α *délky* d*.*

Definice 179

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Definice 179

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Věta 180

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

Definice 179

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Věta 180

Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \leq p < \infty$, potom $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.*

Důsledek 181

Nechť μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$*,* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená a* $1 \leq p < \infty$*. Pak množina* $\mathcal{D}(\Omega)$ *je hustá v prostoru* $L_p(\Omega, \mu)$ *(ve smyslu restrikce na* Ω*).*

2. Fourierova transformace

2. Fourierova transformace

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.

2. Fourierova transformace

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.

Definice 182

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak Fourierovou transformací funkce f rozumíme funkci $\widehat{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definovanou jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_d(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}^d$.

Definice 183

Prostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d) = C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Definice 183

Prostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d) = C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Definice 184

Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Je-li $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

Je-li $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

Lemma 185 (Georg Friedrich Bernhard Riemann (1853), H. Lebesgue (1903))

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak

$$\lim_{\|t\|\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(x) = 0.$$

V této kapitole budeme pro funkci f definovanou na $\mathbb{R}^d$ značit její „otočení“ symbolem $\tilde{f}$, tj. $\tilde{f}(x) = f(-x)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 186

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ *a* $j \in \{1, \ldots, d\}$. *Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *a* $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. *Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru* $L_1(\mathbb{R}^d)$ *do prostoru* $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Věta 186

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ *a* $j \in \{1, \dots, d\}$. *Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *a* $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. *Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru* $L_1(\mathbb{R}^d)$ *do prostoru* $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) *Nechť* $y \in \mathbb{R}^d$. *Pak* $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$ *a naopak pro funkci* $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle}f(x)$ *platí* $\widehat{h} = \tau_y \widehat{f}$.

Věta 186

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ *a* $j \in \{1, \ldots, d\}$. *Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *a* $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. *Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru* $L_1(\mathbb{R}^d)$ *do prostoru* $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) *Nechť* $y \in \mathbb{R}^d$. *Pak* $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$ *a naopak pro funkci* $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle}f(x)$ *platí* $\widehat{h} = \tau_y\widehat{f}$.

(c) *Je-li* $c \neq 0$ *a* $h(x) = f(\frac{x}{c})$, *pak* $\widehat{h}(t) = |c|^d\widehat{f}(ct)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$. *Speciálně,* $\widehat{\tilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$.

Věta 186

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ *a* $j \in \{1, \dots, d\}$. *Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *a* $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. *Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru* $L_1(\mathbb{R}^d)$ *do prostoru* $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) *Nechť* $y \in \mathbb{R}^d$. *Pak* $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$ *a naopak pro funkci* $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle} f(x)$ *platí* $\widehat{h} = \tau_y \widehat{f}$.

(c) *Je-li* $c \neq 0$ *a* $h(x) = f(\frac{x}{c})$, *pak* $\widehat{h}(t) = |c|^d \widehat{f}(ct)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$. *Speciálně,* $\widehat{\tilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$.

(d) $\widehat{\bar{\tilde{f}}} = \bar{\widehat{f}}$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_j f(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_j f(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(g) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_j f(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(g) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(h) $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g \,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g} \,\mathrm{d}\mu_d$.

Lemma 187

Nechť $a \in \mathbb{R}$ *a* $f \in L_1([a, +\infty))$. *Předpokládejme dále, že* f *je absolutně spojitá na každém intervalu* $[a, b]$, $b > a$, *nebo že* f' *existuje vlastní na celém* $[a, +\infty)$. *Je-li* $f' \in L_1([a, +\infty))$, *pak* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Lemma 187

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f \in L_1([a, +\infty))$. Předpokládejme dále, že f je absolutně spojitá na každém intervalu $[a, b]$, $b > a$, nebo že f' existuje vlastní na celém $[a, +\infty)$. Je-li $f' \in L_1([a, +\infty))$, pak $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Lemma 188

Nechť $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, f, g mají (vlastní) derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$ a platí $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, g je omezená a g' je spojitá a omezená. Pak $\int_{\mathbb{R}} f' g \, \mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}} f g' \, \mathrm{d}\lambda$.

Lemma 189

Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ *je omezená a* $j \in \{1, \dots, d\}$. *Jestliže* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *a* $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ *existují všude na* $\mathbb{R}^d$ *a jestliže* $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ *a* $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, *pak* $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} g \, \mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial g}{\partial x_j} \, \mathrm{d}\lambda$.

Příklad 190

Definujme funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^{d} |x_j|}$.
Pak $g \in L_1(\mu_d)$,

$$\widehat{g}(t) = \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{1 + t_j^2},$$

funkce $\widehat{g}$ je nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d = 1$.

Lemma 191

Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$. *Položme* $g_n(x) = n^d \widehat{g}(-nx)$ *a* $h_n(x) = g(\frac{x}{n})$ *pro* $x \in \mathbb{R}^d$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle t,x\rangle} h_n(t) \,\mathrm{d}\mu_d(t)$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}^d$ *a* $n \in \mathbb{N}$.

Věta 192 (o inverzi)

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} \, \mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 192 (o inverzi)

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} \, \mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek 193

Fourierova transformace $\mathcal{F} : L_1(\mu_d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ je prosté zobrazení. Je-li $g \in L_1(\mu_d)$ spojitá a $\widehat{g} \in L_1(\mu_d)$, pak $g \in \operatorname{Rng} \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}(g) = \widetilde{\widehat{g}}$.

Věta 192 (o inverzi)

Nechť $f \in L_1(\mu_d)$*. Je-li* $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$*, pak pro s. v.* $x \in \mathbb{R}^d$ *platí*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f *spojitá, pak vzorec platí pro všechna* $x \in \mathbb{R}^d$*.*

Důsledek 193

Fourierova transformace $\mathcal{F} : L_1(\mu_d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ *je prosté zobrazení. Je-li* $g \in L_1(\mu_d)$ *spojitá a* $\hat{g} \in L_1(\mu_d)$*, pak* $g \in \operatorname{Rng} \mathcal{F}$ *a* $\mathcal{F}^{-1}(g) = \widetilde{\widehat{g}}$*.*

Důsledek 194

Jsou-li $f, g \in L_1(\mu_d)$ *takové, že* $\widehat{f}, \widehat{g}, fg, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$*, pak* $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$*.*

Věta 195 (Michel Plancherel, 1910)

Existuje právě jedna lineární izometrie $F\colon L_2(\mu_d) \to L_2(\mu_d)$ *na taková, že* $F(f) = \widehat{f}$ *pro každou* $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.

V. Slabá konvergence

V. Slabá konvergence

Definice 196

Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ konverguje slabě k $x \in X$, jestliže pro každé $f \in X^*$ platí, že $f(x_n) \to f(x)$. Značíme to $x_n \xrightarrow{w} x$.

Definice 196

Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ konverguje slabě k $x \in X$, jestliže pro každé $f \in X^*$ platí, že $f(x_n) \to f(x)$. Značíme to $x_n \xrightarrow{w} x$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\} \subset X^*$ konverguje slabě s hvězdičkou k $f \in X^*$, jestliže pro každé $x \in X$ platí, že $f_n(x) \to f(x)$. Značíme to $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

V. Slabá konvergence

Definice 196

Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ konverguje slabě k $x \in X$, jestliže pro každé $f \in X^*$ platí, že $f(x_n) \to f(x)$. Značíme to $x_n \xrightarrow{w} x$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\} \subset X^*$ konverguje slabě s hvězdičkou k $f \in X^*$, jestliže pro každé $x \in X$ platí, že $f_n(x) \to f(x)$. Značíme to $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Fakt 197

Limity slabá i slabá s hvězdičkou jsou určeny jednoznačně.

Lemma 198

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Je-li* $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ *a* $x_n \to x$, *pak* $x_n \xrightarrow{w} x$.

Lemma 198

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Je-li* $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ *a* $x_n \to x$, *pak* $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) *Je-li* $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$ *a* $f_n \xrightarrow{w} f$, *pak* $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Lemma 198

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Je-li $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ a $x_n \to x$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$.*

(b) *Je-li $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$ a $f_n \stackrel{w}{\to} f$, pak $f_n \stackrel{w^*}{\to} f$.*

(c) *Je-li X reflexivní Banachův prostor, $\{f_n\} \subset X^*$ a $f \in X^*$, pak $f_n \stackrel{w}{\to} f$, právě když $f_n \stackrel{w^*}{\to} f$.*

Lemma 198

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Je-li* $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ *a* $x_n \to x$, *pak* $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) *Je-li* $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$ *a* $f_n \xrightarrow{w} f$, *pak* $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

(c) *Je-li X reflexivní Banachův prostor,* $\{f_n\} \subset X^*$ *a* $f \in X^*$, *pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Lemma 199

Každá slabě i slabě s hvězdičkou konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 200

Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když každá omezená posloupnost v X má slabě konvergentní podposloupnost.

Tvrzení 201

Pro následující Banachovy prostory X, posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí:

(a) *Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

Tvrzení 201

Pro následující Banachovy prostory X, posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí:

(a) *Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

(b) *Pokud $X = \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$, pak $x_n \xrightarrow{w^*} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

Tvrzení 201

Pro následující Banachovy prostory X, posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí:

(a) *Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

(b) *Pokud $X = \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$, pak $x_n \xrightarrow{w^*} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

(c) *Pokud $X = C(K)$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(t) \to x(t)$ pro každé $t \in K$.*

Tvrzení 202

Nechť $X = L_p(\mu)$, $\{f_n\} \subset X$ *a* $f \in X$.

(a) *Je-li* $1 < p < \infty$, *pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A *konečné míry.*

Tvrzení 202

Nechť $X = L_p(\mu)$, $\{f_n\} \subset X$ *a* $f \in X$.

(a) *Je-li* $1 < p < \infty$, *pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A *konečné míry.*

(b) *Je-li* $p = 1$ *a* μ *je* σ*-konečná, pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A.

Tvrzení 202

Nechť $X = L_p(\mu)$, $\{f_n\} \subset X$ *a* $f \in X$.

(a) *Je-li* $1 < p < \infty$, *pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A *konečné míry.*

(b) *Je-li* $p = 1$ *a* μ *je* σ*-konečná, pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A.

(c) *Je-li* $1 < p < \infty$, $\{f_n\}$ *je omezená a* $f_n \to f$ *bodově s.v., pak* $f_n \xrightarrow{w} f$.

Tvrzení 202

Nechť $X = L_p(\mu)$, $\{f_n\} \subset X$ *a* $f \in X$.

(a) *Je-li* $1 < p < \infty$, *pak* $f_n \stackrel{w}{\to} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A *konečné míry.*

(b) *Je-li* $p = 1$ *a* μ *je* σ*-konečná, pak* $f_n \stackrel{w}{\to} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A.

(c) *Je-li* $1 < p < \infty$, $\{f_n\}$ *je omezená a* $f_n \to f$ *bodově s.v., pak* $f_n \stackrel{w}{\to} f$.

(d) *Je-li* $1 < p < \infty$, $\{f_n\}$ *je omezená a* $f_n \to f$ *v míře, pak* $f_n \stackrel{w}{\to} f$.