I. Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti

Definice 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|: X \to [0, +\infty)$ nazýváme *normou* na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem.*

Tvrzení 2. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X.

(b) Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na X.

(c) Zobrazení $+: X \times X \to X$ a $\cdot: \mathbb{K} \times X \to X$ jsou spojitá.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Definice 3. *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Tvrzení 4. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.

(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

Definice 5. Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou *ekvivalentní*, pokud $x_n \xrightarrow{\rho} x$, právě když $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ pro $\{x_n\} \subset P$, $x \in P$. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou *skoro stejné*, pokud existují $A, B > 0$ taková, že $A\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq B\sigma(x, y)$ pro všechna $x, y \in P$.

Tvrzení 6. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a ρ_1, ρ_2 jsou příslušné metriky. Pak ρ_1 a ρ_2 jsou skoro stejné, právě když jsou ekvivalentní.*

Definice 7 (ekvivalentní normy)**.** Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8. *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

Lemma 9. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.*

Tvrzení 10. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.

(ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

(iii) Zobrazení $Id: (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.

(iv) Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.

Definice 11. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *konvexní kombinací* vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Fakt 12. *Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.*

Definice 13. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. *Konvexním obalem* M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 14. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak*

$$\operatorname{conv} M = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Definice 15. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Fakt 16. *Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x,r)$, resp. $B(x,r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0,r) \subset M$, resp. $B(0,r) \subset M$.*

Definice 17. Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme *uzavřený lineární obal* M jako $\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a *uzavřený konvexní obal* M jako $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 18. *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.*

Tvrzení 19. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, M = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \overline{\operatorname{conv} M}$.*

Tvrzení 20. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $F \subset X$ je uzavřená a $K \subset X$ je kompaktní. Pak $F + K$ je uzavřená. Je-li navíc F kompaktní, pak je i $F + K$ kompaktní.*

Věta 21. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak* $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

Důsledek 22. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

Věta 23.

(a) Prostory c_0 a ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, jsou separabilní.

(b) Prostor ℓ_∞ je neseparabilní.

(c) Je-li K kompaktní metrický prostor, je prostor $C(K)$ separabilní.

(d) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná a $1 \leq p < \infty$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 24. Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje* k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je *absolutně konvergentní*, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Fakt 25. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X. Pak*

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Věta 26 (Test úplnosti)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Definice 27. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme *zobecněnou řadou*. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje *bezpodmínečně*) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\|x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Definice 28. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku*, pokud

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset\colon \left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Věta 29. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X. Pak platí:*

(a) Její součet je určen jednoznačně.

(b) Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

(c) Je-li $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x$, pak $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ pro každou permutaci (tj. bijekci) $\pi\colon \Gamma \to \Gamma$.

(d) $\left(\|x_\gamma\|\right)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

(e) Je-li $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma$ libovolná prostá posloupnost taková, že $\{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \neq 0\} \subset \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, pak $\sum_{n=1}^\infty x_{\gamma_n} = x$.

Tvrzení 30. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když*

$$\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\} < +\infty.$$

Potom platí

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\}.$$

Tvrzení 31. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$, $\sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$ jsou konvergentní zobecněné řady v normovaném lineárním prostoru nad $\mathbb{K}$ a nechť $c \in \mathbb{K}$. Pak $\sum_{\gamma\in\Gamma}(x_\gamma + y_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$ a $\sum_{\gamma\in\Gamma} c x_\gamma = c\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$.*

Věta 32. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

(b) Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.

(c) Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ konvergentní.

Tvrzení 33.

(a) Nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$. Pak i řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje k x.

(b) Nechť řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$ a nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Pak $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.

(c) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ (a obě pak mají stejný součet).

Důsledek 34. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je absolutně konvergentní.*

Definice 35. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *konverguje bezpodmínečně* (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

Věta 36. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně.

(ii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.

(iii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Věta 37. *Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.*

Každá řada v $\mathbb{R}$ je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.

3. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T: X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineární*, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Fakt 38. *Nechť X, Y jsou vektorové prostory, $T: X \to Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní. Obdobně, je-li $N \subset Y$ symetrická, pak $T^{-1}(N)$ je symetrická, a je-li N konvexní, pak $T^{-1}(N)$ je konvexní.*

Tvrzení 39. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T: X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *T je spojité.*

(ii) *T je spojité v jednom bodě.*

(iii) *T je spojité v 0.*

(iv) *Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(v) *T je lipschitzovské.*

(vi) *T je stejnoměrně spojité.*

(vii) *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*

(viii) *$T(B_X)$ je omezená.*

(ix) *$T\big(U(0,\delta)\big)$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.*

Prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ s normou
$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$
je normovaný lineární prostor.

Lemma 40. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(a) *$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\|T\| = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$. Je-li X netriviální, pak též $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$.*

(c) *$\|T\| = \inf\{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ pro každé } x \in X\}$.*

Fakt 41. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.*

Fakt 42. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.*

Věta 43. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachův prostor.*

Definice 44. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej *duálním prostorem* k prostoru X.

Věta 45. *Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.*

Lemma 46. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| = \|f\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)$.*

Definice 47. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Říkáme, že T je

- *izomorfismus* X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- *izometrie* X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- *izomorfní*, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- *izometrické*, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- *izomorfně vnořen* do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- *izometricky vnořen* do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

Poznámka 48. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T: X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

Tvrzení 49. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.

(c) Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do, pak $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený v Y.*

Fakt 50. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.*

(a) Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.

(b) Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.

Věta 51. *Nechť X, $\widehat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v $\widehat{X}$ a Y je úplný. Nechť dále $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$ rozšiřující T, tj. $\widehat{T}\restriction_X = T$. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. Je-li T izometrie do, pak $\widehat{T}$ je též izometrie do.*

4. Konečněrozměrné prostory

Lemma 52 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918))**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že* $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

Věta 53. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.

(iii) B_X je kompaktní.

(iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.

(v) Každá lineární forma na X je spojitá.

(vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 54. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 55. Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme *faktorprostorem* prostoru X podle Y nebo též *kvocientem* X podle Y. Dále definujeme tzv. *kanonické kvocientové zobrazení* $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\begin{aligned}\|\widehat{x}\|_{X/Y} &= \inf_{y\in\widehat{x}} \|y\| = \inf_{y\in Y} \|x+y\| = \inf_{y\in Y} \|x-y\| = \\ &= \operatorname{dist}(x+Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y),\end{aligned}$$

Tato norma se nazývá *kanonická kvocientová norma*.

Tvrzení 56. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

Věta 57. *Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.*

Definice 58. Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je *direktním (též algebraickým) součtem* A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá *algebraický doplněk* A v X.

Definice 59. Nechť X je množina. Zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá *projekce*, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Fakt 60. *Nechť X je množina.*

(a) Je-li $P\colon X \to X$ projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.

(b) Je-li $Y \subset X$ a $P\colon X \to Y$ zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak P je projekce X na Y.

Tvrzení 61. *Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$,* $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ *a* $\operatorname{Ker} P_B = A$. *Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.*

Věta 62. *Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Prostor Y má algebraický doplněk v X.

(b) Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y (pomocí kanonického kvocientového zobrazení); speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

Definice 63. Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak *kodimenzí* Y (značíme $\operatorname{codim} Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Definice 64. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je *topologickým součtem* A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá *topologický doplněk* A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je *komplementovaný* (v X).

Věta 65. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.*

(a) Je-li $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, jsou Y a Z uzavřené.

(b) Je-li X Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde Y a Z jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$.

Věta 66. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když zobrazení $T\colon X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ je izomorfismus.*

6. Hilbertovy prostory

Definice 67. *Skalárním součinem* na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,

(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem.*

Tvrzení 68 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak*

(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ *pro každé $x, y \in X$.*

(ii) Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X.

Definice 69. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Tvrzení 70. *Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$.*

(a) Pro libovolné $y \in X$ je $f_y\colon x \mapsto \langle x, y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na X a $\|f_y\| = \|y\|$.

(b) Funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).

Fakt 71. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle.$$

Tvrzení 72 (rovnoběžníkové pravidlo)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Tvrzení 73 (polarizační vzorec)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

Důsledek 74. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

Věta 75. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak na prostoru $X \oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na X a Y, a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li X, Y Hilbertovy prostory, pak $X \oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.*

Definice 76. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají *ortogonální* (na sebe *kolmé*), pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk A*.

Fakt 77 (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \dots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Tvrzení 78. *Nechť X je prostor se skalárním součinem.*

(a) Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^\perp = \{0\}$.

(b) $\{0\}^\perp = X$ a $X^\perp = \{0\}$.

(c) Pro $A \subset X$ je $A^\perp = (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$.

(d) Pro $A \subset X$ je $A^\perp$ uzavřený podprostor X.

(e) Je-li $X = Y + Z$ pro nějaké podprostory $Y, Z \subset X$ takové, že $Y \perp Z$, pak $Z = Y^\perp$, $Y = Z^\perp$ a $X = Y \oplus Z$.

Lemma 79. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.*

Věta 80 (Frigyes Riesz, 1934)**.** *Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Lemma 81 (F. Riesz, 1934)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \perp Y$.*

Definice 82. Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je projekce. Pokud $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$, pak P se nazývá ortogonální.

Tvrzení 83. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je zobrazení takové, že $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$. Pak P je ortogonální lineární projekce.*

Věta 84. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je lineární projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *P je ortogonální.*

(ii) $\operatorname{Ker} P \perp \operatorname{Rng} P$.

(iii) $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Rng} P)^{\perp}$ *a* $\operatorname{Rng} P = (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$.

(iv) $\|x - P(x)\| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Rng} P)$ *pro každé* $x \in X$.

(v) $x - P(x) \perp P(x)$ *pro každé* $x \in X$.

(vi) $\|P(x)\|^2 = \langle P(x), x\rangle$ *pro každé* $x \in X$.

(vii) *P je spojitá a $\|P\| \leq 1$ (tj. $P = 0$, nebo $\|P\| = 1$).*

Věta 85 (F. Riesz, 1934)**.** *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = Y \oplus_{\mathrm{t}} Y^{\perp}$ a H je izometrický prostoru $Y \oplus_2 Y^{\perp}$ pomocí kanonického zobrazení $T\colon x \mapsto \big(P_Y(x), P_{Y^{\perp}}(x)\big)$.*

Důsledek 86. *Nechť H je Hilbertův prostor a $A \subset H$. Pak $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{span}}\, A$.*

Důsledek 87. *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak H/Y je izometricky izomorfní s $Y^{\perp}$ pomocí kanonického kvocientového zobrazení.*

Věta 88. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

Definice 89. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- *ortonormální*, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- *maximální ortonormální*, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- *ortonormální báze*, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Fakt 90. *Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x - y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.*

Věta 91. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

Lemma 92. *Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde x_γ jsou skaláry. Pak $x_\gamma = \langle x, e_\gamma\rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.*

Fakt 93. *Nechť $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak $\big\|\sum_{i \in F} a_i e_i\big\|^2 = \sum_{i \in F} |a_i|^2$ pro libovolné skaláry a_i, $i \in F$.*

Důsledek 94. *Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.*

Lemma 95. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i \in F} \langle x, e_i\rangle e_i \in Y^{\perp}$.*

Věta 96 (Besselova nerovnost)**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.*

Věta 97. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé* $x \in X$.

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Pak (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

Důsledek 98. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

Důsledek 99. *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v Hilbertově prostoru H, pak zobrazení $P\colon H \to H$, $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ je ortogonální lineární projekce na $\overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$. Dále je $\|P(x)\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ pro každé $x \in X$.*

Věta 100 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907))**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení $T\colon H \to \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ.*

Tvrzení 101. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li* $\dim X = n \in \mathbb{N}$*, pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li* $\dim X = \infty$ *a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.*

Věta 102 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))**.** *Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.*

Lemma 103. *Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy* $\operatorname{codim}\operatorname{Ker} f = 1$.

II. Hahnova-Banachova věta a dualita

1. Hahnova-Banachova věta

Tvrzení 104. *Nechť X je komplexní vektorový prostor. Pak funkce $f\colon X \to \mathbb{C}$ je (komplexní) lineární forma, právě když* $\operatorname{Re} f$ *je reálně-lineární forma na $X_\mathbb{R}$ a platí* $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

Definice 105. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární funkcionál*, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p\colon X \to [0, +\infty)$ se nazývá *pseudonorma*, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 106 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))**.** *Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.*

(a) Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

Věta 107 (Hahnova-Banachova)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.*

Důsledek 108. *Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \ne f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).*

Důsledek 109 (Duální vyjádření normy)**.** *Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak* $\|x\| = \max_{f\in B_{X^*}}|f(x)|$.

Věta 110 (Oddělování bodu a podprostoru)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \in X \setminus Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a* $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.

Věta 111. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.

(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

Definice 112. Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. *anihilátor* množiny A jako

$$A^{\perp} = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. *zpětný anihilátor* jako

$$B_{\perp} = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Lemma 113. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*

(a) $A^{\perp}$ je uzavřený podprostor X^*,

(b) $B_{\perp}$ je uzavřený podprostor X,

(c) $(A^{\perp})_{\perp} = \overline{\operatorname{span}} A$,

(d) $(B_{\perp})^{\perp} \supset \overline{\operatorname{span}} B$.

2. Reprezentace duálů

Tvrzení 114. *Nechť X a Y jsou izometrické normované lineární prostory. Pak i prostory X^* a Y^* jsou izometrické.*

Definice 115. Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme *sdruženým exponentem* k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Věta 116 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)**.**

(a) Prostor c_0^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_1 pomocí zobrazení $I\colon \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(b) Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_q pomocí zobrazení $I\colon \ell_q \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} fg \,\mathrm{d}\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 117. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Nechť q je sdružený exponent k p. Pak zobrazení $I\colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

Definice 118. Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je *nezáporný*, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Fakt 119. *Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak Λ je monotónní, tj. $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C(K)$ jsou reálné funkce splňující $f \leq g$. Dále Λ je automaticky spojitý a pro reálnou $f \in C(K)$ platí $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Tedy v reálném případě platí $\|\Lambda\| = \Lambda(1)$.*

Věta 120 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)**.** *Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.*

Věta 121 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)**.** *Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I: M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde*

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Lemma 122. *Nechť K je kompaktní prostor a $\varphi \in C(K)^*$. Pak existuje nezáporný $\Lambda \in C(K)^*$ takový, že $|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$.*

Věta 123. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.*

(a) Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I: Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

(b) Zobrazení $I: X^*/Y^\perp \to Y^*$ dané předpisem

$$I(\widehat{f}) = f\restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^\perp$ a Y^* lze identifikovat s $X^*/Y^\perp$.

3. Druhý duál a reflexivita

Definice 124. Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme *druhým duálem*.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. *evaluační funkcionál* $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 125. Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá *kanonické vnoření X do X^{**}*.

Tvrzení 126. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}*

Tvrzení 127. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak* $\dim X^* = \dim X$, *a to i v případě, že* $\dim X = \infty$.

Věta 128. *Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.*

Lemma 129. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $T: X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak existují normovaný lineární prostor Z a lineární izometrie $S\colon Z \to Y$ na tak, že X je podprostor Z a $S\restriction_X = T$.*

Definice 130. Banachův prostor X se nazývá *reflexivní*, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Věta 131. *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

Věta 132. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.

(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.

(d) Jsou-li X, Y reflexivní, je prostor $X \oplus_p Y$ reflexivní pro libovolné $1 \le p \le \infty$.

(e) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

Příklady 133.

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

(d) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

III. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 134 (Princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Důsledek 135. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\|T\| \leq \liminf\|T_n\|$.*

Definice 136. Zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá *otevřené*, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 137 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

Lemma 138 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0, s) \subset \overline{T(U(0, r))}$, pak dokonce $U(0, s) \subset T(U(0, r))$.*

Důsledek 139 (S. Banach, 1929)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.*

Důsledek 140. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak platí:*

(a) Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \leq c\|y\|$.

(b) Zobrazení $\widehat{T} : X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.

Fakt 141. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Definujme $\widehat{T} : X/\operatorname{Ker} T \to Y$ předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$. Pak $\widehat{T} \in \mathcal{L}(X/\operatorname{Ker} T, Y)$, $\|\widehat{T}\| = \|T\|$, $\widehat{T}$ je prosté a $T = \widehat{T} \circ q$, kde $q : X \to X/\ker T$ je kanonické kvocientové zobrazení.*

Definice 142. Je-li $f : X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení f*. Říkáme, že zobrazení $f : X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, *má uzavřený graf*, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 143 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.*

IV. Lineární operátory

1. Duální operátory

Definice 144. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^* : Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá *duální* (nebo též *adjungovaný*) operátor k T. (Ve Větě 145 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**}.

Věta 145. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.

Věta 146. *Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí*

(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^{\perp}$,

(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_{\perp}$,

(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,

(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

(e) Jsou-li navíc X, Y Banachovy a $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak* $\operatorname{Rng} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Tvrzení 147 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak*

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Tedy $T^{**}(\varepsilon_X(X)) \subset \varepsilon_Y(Y)$ a označíme-li $\varepsilon : Y \to \varepsilon_Y(Y)$, $\varepsilon = \varepsilon_Y$, a $S : \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**}\restriction_{\varepsilon_X(X)}$, pak $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$.

Věta 148. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(a) T^* je prostý, právě když $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v Y.*

(b) Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(c) Je-li T izometrie na, pak T^* je izometrie na.

Je-li X úplný, pak v (b) a (c) platí i opačné implikace.

2. Kompaktní operátory

Definice 149. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá *kompaktní operátor*, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá *konečněrozměrný*, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tvrzení 150. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T : X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je kompaktní.

(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.

(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

Tvrzení 151. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

(a) Je-li Z normovaný lineární prostor a Y je podprostor Z, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.

(b) Je-li Z uzavřený podprostor Y a $\operatorname{Rng} T \subset Z$, *pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.*

Věta 152. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.

(b) $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.

(c) Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.

(d) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.

(e) Pokud X a Y jsou úplné, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ a $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak $T \in \mathcal{F}(X, Y)$.*

Věta 153 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.*

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 154. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertovatelný, právě když T je bijekce.*

Definice 155. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme *vlastním číslem* operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme *vlastním prostorem* příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají *vlastní vektory* příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá *bodové spektrum* operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertovatelný. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Věta 156. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

Lemma 157. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertovatelný. Pak $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.*

Tvrzení 158. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je izomorfismus na. Pak $\sigma(T) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|T\|\right\}$.*

Věta 159. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.*

Tvrzení 160. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$. Jestliže $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$, pak $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

Věta 161. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$. Je-li X Banachův, pak $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.*

Věta 162 (Fredholmova alternativa)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Důsledek 163. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

Lemma 164. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

Věta 165. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.*

Důsledek 166. *Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.*

Věta 167 (Druhá Fredholmova věta)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \left(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\right)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \left(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\right)^\perp.$$

Věta 168 (Třetí Fredholmova věta)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

V. Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

1. Konvoluce funkcí

Definice 169. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. *Konvoluce funkce f s funkcí g* je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x - y) \, \mathrm{d}\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Věta 170. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.

(b) Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f * (g + h) = f * g + f * h$ a $(f + g) * h = f * h + g * h$ na definičních oborech pravých stran.

(c) *Nechť* $1 \le p, q, r \le \infty$ *splňují* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge 2$. *Je-li* $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$ *a* $h \in L_r(\mu)$, *pak* $(f * g) * h = f * (g * h)$ μ*-s. v. na* $\mathbb{R}^d$.

Lemma 171. *Nechť* $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ *je lebesgueovsky měřitelná.*

(a) *Pro každé* $x \in \mathbb{R}^d$ *je funkce* $y \mapsto f(x-y)$ *lebesgueovsky měřitelná na* $\mathbb{R}^d$.

(b) *Funkce* $(x, y) \mapsto f(y)$ *a* $(x, y) \mapsto f(x-y)$ *jsou lebesgueovsky měřitelné na* $(\mathbb{R}^d)^2$.

Lemma 172. *Nechť* μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g \in L_1(\mu)$. *Položíme-li* $F(x, y) = f(y)g(x-y)$ *pro* $x, y \in \mathbb{R}^d$, *pak* $F \in L_1(\mu \times \mu)$ *a* $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

Definice 173. Nechť $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x-y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 174. *Nechť* μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. *Pak zobrazení* $\tau: \mathbb{R}^d \to L_p(\mu)$ *dané předpisem* $\tau(x) = \tau_x f$ *je stejnoměrně spojité.*

Věta 175. *Nechť* μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.

(a) *Je-li* $f \in L_p(\mu)$ *a* $g \in L_q(\mu)$, *kde* $1 \le p, q \le \infty$ *jsou sdružené exponenty, pak funkce* $f * g$ *je definována v každém bodě* $\mathbb{R}^n$, *je stejnoměrně spojitá a omezená a platí* $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$.

(b) *Je-li* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ *a jestliže* $g \in L_\infty(\mu)$ *má kompaktní nosič, pak funkce* $f * g$ *je definována v každém bodě* $\mathbb{R}^d$, *je spojitá a platí* $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

(c) *Jsou-li* $f, g \in L_1(\mu)$, *pak* $f * g$ *je definována* μ*-s. v. na* $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_1(\mu)$ *a platí* $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.

(d) *Nechť* $1 \le p, q \le \infty$ *splňují* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$. *Je-li* $f \in L_p(\mu)$ *a* $g \in L_q(\mu)$, *pak* $f * g$ *je definovaná* μ*-s. v. na* $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_r(\mu)$ *a platí* $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$, *kde* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

Definice 176. Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme *multiindexem* délky d. *Řádem multiindexu* α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d, pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α, tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(symboly ∂x_i^0 ve vyjádření výše vynecháváme). Speciálně, pro $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$ a $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je $D^0 f = f$. Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Definice 177. Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K});\ \operatorname{supp} \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá *prostor testovacích funkcí* na A.

Věta 178. *Nechť* μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. *Je-li* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ *a* $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, *pak* $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *a* $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ *pro každý multiindex* α *délky* d.

Definice 179. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat *regularizačním jádrem* (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Věta 180. *Nechť* μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$, g *je regularizační jádro na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. *Položme* $g_n(x) = n^d g(nx)$ *pro* $x \in \mathbb{R}^d$ *a* $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Pokud je* f *stejnoměrně spojitá a omezená na* $\mathbb{R}^d$, *potom* $f * g_n \to f$ *stejnoměrně na* $\mathbb{R}^d$.

(b) *Pokud* $f \in L_p(\mu)$ *a* $1 \le p < \infty$, *potom* $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.

Důsledek 181. *Nechť* μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *je otevřená a* $1 \le p < \infty$. *Pak množina* $\mathcal{D}(\Omega)$ *je hustá v prostoru* $L_p(\Omega, \mu)$ *(ve smyslu restrikce na* Ω*).*

2. Fourierova transformace

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.

Definice 182. Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak *Fourierovou transformací funkce* f rozumíme funkci $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definovanou jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_d(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}^d$.

Definice 183. Prostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d) = C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Definice 184. Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Je-li $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

Lemma 185 (Georg Friedrich Bernhard Riemann (1853), H. Lebesgue (1903))**.** *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak*

$$\lim_{\|t\|\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = 0.$$

V této kapitole budeme pro funkci f definovanou na $\mathbb{R}^d$ značit její „otočení“ symbolem $\tilde{f}$, tj. $\tilde{f}(x) = f(-x)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 186. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru $L_1(\mathbb{R}^d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) Nechť $y \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a naopak pro funkci $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle}f(x)$ platí $\widehat{h} = \tau_y\widehat{f}$.

(c) Je-li $c \neq 0$ a $h(x) = f(\frac{x}{c})$, pak $\widehat{h}(t) = |c|^d\widehat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$. Speciálně, $\widehat{\tilde{f}} = \tilde{\widehat{f}}$.

(d) $\widehat{\overline{f}} = \overline{\tilde{\widehat{f}}}$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_jf(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(g) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(h) $\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}g\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d$.

Lemma 187. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f \in L_1([a, +\infty))$. Předpokládejme dále, že f je absolutně spojitá na každém intervalu $[a, b]$, $b > a$, nebo že f' existuje vlastní na celém $[a, +\infty)$. Je-li $f' \in L_1([a, +\infty))$, pak $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.*

Lemma 188. *Nechť $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, f, g mají (vlastní) derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$ a platí $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, g je omezená a g' je spojitá a omezená. Pak $\int_{\mathbb{R}} f'g\,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}} fg'\,\mathrm{d}\lambda$.*

Lemma 189. *Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je omezená a $j \in \{1, \dots, d\}$. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ existují všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, pak $\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial f}{\partial x_j}g\,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} f\frac{\partial g}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\lambda$.*

Příklad 190. Definujme funkci $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$. Pak $g \in L_1(\mu_d)$,

$$\widehat{g}(t) = \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}}\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{1+t_j^2},$$

funkce $\widehat{g}$ je nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d = 1$.

Lemma 191. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$. Položme $g_n(x) = n^d \widehat{g}(-nx)$ a $h_n(x) = g(\frac{x}{n})$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle t,x\rangle} h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

Věta 192 (o inverzi)**.** *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek 193. *Fourierova transformace $\mathcal{F}\colon L_1(\mu_d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ je prosté zobrazení. Je-li $g \in L_1(\mu_d)$ spojitá a $\widehat{g} \in L_1(\mu_d)$, pak $g \in \operatorname{Rng} \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}(g) = \widetilde{\widehat{g}}$.*

Důsledek 194. *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu_d)$ takové, že $\widehat{f}, \widehat{g}, fg, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.*

Věta 195 (Michel Plancherel, 1910)**.** *Existuje právě jedna lineární izometrie $F\colon L_2(\mu_d) \to L_2(\mu_d)$ na taková, že $F(f) = \widehat{f}$ pro každou $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.*

VI. Slabá konvergence

Definice 196. Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ konverguje *slabě* k $x \in X$, jestliže pro každé $f \in X^*$ platí, že $f(x_n) \to f(x)$. Značíme to $x_n \xrightarrow{w} x$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\} \subset X^*$ konverguje *slabě s hvězdičkou* k $f \in X^*$, jestliže pro každé $x \in X$ platí, že $f_n(x) \to f(x)$. Značíme to $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Fakt 197. *Limity slabá i slabá s hvězdičkou jsou určeny jednoznačně.*

Lemma 198. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Je-li $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ a $x_n \to x$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) Je-li $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$ a $f_n \xrightarrow{w} f$, pak $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

(c) Je-li X reflexivní Banachův prostor, $\{f_n\} \subset X^*$ a $f \in X^*$, pak $f_n \xrightarrow{w} f$, právě když $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Lemma 199. *Každá slabě i slabě s hvězdičkou konvergentní posloupnost je omezená.*

Věta 200. *Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když každá omezená posloupnost v X má slabě konvergentní podposloupnost.*

Tvrzení 201. *Pro následující Banachovy prostory X, posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí:*

(a) Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

(b) Pokud $X = \ell_p$, $1 \le p \le \infty$, pak $x_n \xrightarrow{w^*} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

(c) Pokud $X = C(K)$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(t) \to x(t)$ pro každé $t \in K$.

Tvrzení 202. *Nechť $X = L_p(\mu)$, $\{f_n\} \subset X$ a $f \in X$.*

(a) Je-li $1 < p < \infty$, pak $f_n \xrightarrow{w} f$, právě když $\{f_n\}$ je omezená a $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ pro každou měřitelnou A konečné míry.

(b) Je-li $p = 1$ a μ je σ-konečná, pak $f_n \xrightarrow{w} f$, právě když $\{f_n\}$ je omezená a $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ pro každou měřitelnou A.

(c) Je-li $1 < p < \infty$, $\{f_n\}$ je omezená a $f_n \to f$ bodově s.v., pak $f_n \xrightarrow{w} f$.

(d) Je-li $1 < p < \infty$, $\{f_n\}$ je omezená a $f_n \to f$ v míře, pak $f_n \xrightarrow{w} f$.