Funkcionální analýza

Michal Johanis
Jiří Spurný

2023/10/14

Obsah

Kapitola 1

Banachovy a Hilbertovy prostory

Základní strukturou, se kterou se pracuje ve funkcionální analýze, je koncept normovaného lineárního prostoru (Definice 1), který svazuje dohromady algebraický koncept vektorového prostoru s topologickým konceptem metrického prostoru. Normovaný lineární prostor je definován tak, aby vznikl vektorový prostor s metrikou, vzhledem k níž jsou vektorové operace dobře provázány s metrickou strukturou, zejména pak vyjdou vektorové operace spojité vzhledem k příslušné metrice (Tvrzení 2). Tato struktura je pak zastřešujícím rámcem jak pro klasické konečněrozměrné prostory $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, tak pro nekonečněrozměrné prostory posloupností a funkcí (Příklady 4). Slouží tak velmi často jako základní kontext pro práci s nekonečněrozměrnými objekty. V řadě situací je pak klíčová úplnost uvažovaného metrického prostoru. Tento požadavek vede k definici Banachova prostoru (Definice 3).

1. Základní vlastnosti

Budeme pracovat s vektorovými prostory výhradně nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Pokud nebude řečeno jinak, budou tvrzení platit jak pro reálné, tak pro komplexní prostory. Bude-li třeba použité těleso označit, použijeme symbol $\mathbb{K}$[1], tj. $\mathbb{K}$ značí buď těleso $\mathbb{R}$, nebo těleso $\mathbb{C}$. Ještě jinak a formálněji: Před každým tvrzením obsahujícím symbol $\mathbb{K}$ si lze představit větu „Nechť $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.“. Jestliže se v definici nebo tvrzení objeví více vektorových prostorů, pak budeme automaticky předpokládat, že jsou všechny nad stejným tělesem, pokud nebude řečeno jinak.

Je-li X komplexní vektorový prostor, pak jej lze chápat také jako reálný vektorový prostor (operaci násobení skalárem zúžíme pouze na $\mathbb{R}$). Tuto „reálnou verzi“ budeme označovat $X_{\mathbb{R}}$.

DEFINICE 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0, +\infty)$ nazýváme normou na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,
(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaným lineárním prostorem.

Vlastnost (ii) se nazývá *trojúhelníková nerovnost*. Snadno z ní odvodíme následující verzi:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

pro všechna $x, y \in X$. Indukcí též obdržíme $\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$ pro libovolná $x_1, \dots, x_n \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.

TVRZENÍ 2. *Nechť* $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$.

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X.
(b) Norma je 1*-lipschitzovská*[2] *(a tedy spojitá) funkce na* X.
(c) Zobrazení $+\colon X \times X \to X$ *a* $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ *jsou spojitá.*

Všimněme si, že tvrzení (c) lze chápat jako větu o aritmetice limit pro posloupnosti v normovaných lineárních prostorech.

[1] Z německého *der Körper*, tj. těleso.
[2] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz

DŮKAZ. (a) Funkce $\rho\colon X \times X \to [0, +\infty)$ je translačně invariantní metrika, neboť

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x),$$
$$\rho(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \le \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \text{a}$$
$$\rho(x + z, y + z) = \|x + z - (y + z)\| = \|x - y\| = \rho(x, y)$$

pro libovolná $x, y, z \in X$. Též snadno vidíme, že $0 = \rho(x, y) = \|x - y\|$, právě když $x = y$.

(b) Máme $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\| = \rho(x, y)$ pro libovolná $x, y \in X$.

(c) Připomeňme, že v součinu metrických prostorů funguje konvergence posloupností „po souřadnicích". Chceme tedy ukázat, že pokud $\{x_n\} \subset X$ a $\{y_n\} \subset X$ splňují $x_n \to x \in X$ a $y_n \to y \in X$, pak $x_n + y_n \to x + y$. To je ovšem snadné: $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$. Podobně, předpokládejme, že $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}$ a $\{x_n\} \subset X$ splňují $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{K}$ a $x_n \to x \in X$. Pak $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| \le |\alpha_n|\|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\|x\| \to 0$.

□

Nechť X je normovaný lineární prostor. Budeme používat následující značení:

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \le r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Nebude-li hrozit nedorozumění, v jakém prostoru se koule bere, budeme zpravidla index X u koulí $B_X(x, r)$ a $U_X(x, r)$ vynechávat.

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pro $A, B \subset X$, $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ definujeme $\alpha A = \{\alpha y;\ y \in A\}$, $x + A = \{x + y;\ y \in A\}$ a $A + B = \{y + z;\ y \in A, z \in B\}$. Je snadné si rozmyslet, že platí $B(x, r) = x + B(0, r)$ a $B(0, r) = rB(0, 1) = rB_X$ pro libovolné $x \in X$, $r > 0$ a analogicky pro otevřené koule. Dále není obtížné si rozmyslet, že pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí $\overline{U(x, r)} = B(x, r)$ a $\operatorname{Int} B(x, r) = U(x, r)$.

DEFINICE 3. Banachův[3] prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

PŘÍKLADY 4.

a) Prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normami $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, +\infty)$, případně $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou Banachovy prostory.

b)
- Nechť K je kompaktní prostor a $C(K)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ všech spojitých funkcí z K do $\mathbb{K}$. Na $C(K)$ zavedeme normu předpisem $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$ pro $f \in C(K)$. Pak $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor. Platí, že $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, právě když $f_n \rightrightarrows f$. Důkaz úplnosti je stejný jako pro prostor $C([a, b])$ známý z přednášky z matematické analýzy.
- Prostor všech konvergentních posloupností $c = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n \text{ existuje vlastní}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je Banachův prostor. Důkaz lze vést přímo, nebo lze využít faktu, že c je lineárně izometrický prostoru $C(K)$, kde $K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^\infty \{\frac{1}{n}\}$ s metrikou zděděnou z $\mathbb{R}$ (vizte Tvrzení 60(b)).
- Prostor $c_0 = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n = 0\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor Banachova prostoru c (vizte Tvrzení 5(b)).
- Prostor $c_{00} = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ (x_n)_{n=1}^\infty \text{ má pouze konečně mnoho nenulových členů}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je normovaný lineární prostor, který není Banachův: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ prvků c_{00}, kde $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, je cauchyovská, ale není konvergentní v c_{00}.

[3] Stefan Banach

- Prostor $\ell_p = \{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\}$, $1 \le p < \infty$ s normou $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ je Banachův prostor. Prostor ℓ_∞ všech omezených posloupností v $\mathbb{K}$ s normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ je též Banachův prostor. (Jsou to speciální případy prostorů uvedených níže.)
- Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$ pro $1 \le p < \infty$, resp. $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$ pro $p = \infty$. (Připomeňme, že $\operatorname{ess\,sup} g = \inf\{\eta \in \mathbb{R};\ \mu(\{x \in \Omega;\ g(x) > \eta\}) = 0\}$ pro reálnou funkci g. V případě, že $p = \infty$ navíc předpokládáme, že μ není identicky nulová.) Bude-li jasné z kontextu, jaká míra se na prostoru Ω rozumí, budeme pro prostor $L_p(\mu)$ též používat značení $L_p(\Omega)$.
- Je-li Γ libovolná neprázdná množina a $1 \le p \le \infty$, pak definujeme prostory $\ell_p(\Gamma)$ následovně: Nechť $\Omega = \Gamma$, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Gamma)$ a μ je aritmetická míra na Γ. Pak
$$\ell_p(\Gamma) = L_p(\mu) = \left\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sup_{\substack{F\subset\Gamma\\ F \text{ konečná}}} \sum_{\gamma\in F} |x_\gamma|^p < +\infty\right\}$$
pro $p < \infty$ a
$$\ell_\infty(\Gamma) = L_\infty(\mu) = \left\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sup_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma| < +\infty\right\}.$$
V oddílu 2 zavedeme pojem zobecněné řady, který nám umožní přeformulovat definici $\ell_p(\Gamma)$ analogicky, jako pro ℓ_p (vizte Tvrzení 34):
$$\ell_p(\Gamma) = \left\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sum_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma|^p < +\infty\right\}.$$
Norma v $\ell_p(\Gamma)$ je dána vzorcem
$$\|(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\|_p = \left(\sup_{\substack{F\subset\Gamma\\ F \text{ konečná}}} \sum_{\gamma\in F} |x_\gamma|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
pro $p < \infty$, resp. $\|(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma|$. Pro $\Gamma = \mathbb{N}$ pak dostáváme, že $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$.

c) Je-li Γ libovolná neprázdná množina, pak prostor
$$c_0(\Gamma) = \{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathbb{K};\ \forall\varepsilon > 0 \text{ je } \{\gamma \in \Gamma;\ |x_\gamma| \ge \varepsilon\} \text{ konečná}\}$$
se supremovou normou $\|(x_\gamma)\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor prostoru $\ell_\infty(\Gamma)$. Vskutku, je-li $x \in \ell_\infty(\Gamma) \setminus c_0(\Gamma)$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že množina $A = \{\gamma \in \Gamma;\ |x_\gamma| \ge \varepsilon\}$ je nekonečná. Pak pro každé $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ a $\gamma \in A$ platí, že $|y_\gamma| \ge |x_\gamma| - |x_\gamma - y_\gamma| \ge \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \ell_\infty(\Gamma) \setminus c_0(\Gamma)$.
   Všimněme si též, že z definice snadno plyne, že je-li $(x_\gamma) \in c_0(\Gamma)$, pak množina $\{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \ne 0\}$ je spočetná.

d) Nechť K je kompaktní prostor, pak prostor $M(K)$ regulárních borelovských[4] komplexních či znaménkových měr na K s normou $\|\mu\| = |\mu|(K)$ je Banachův prostor. Připomeňme, že nezáporná míra μ na K leží v $M(K)$, pokud je definovaná na σ-algebře borelovských množin, je konečná a vnitřně i zevně regulární. Znaménková či komplexní míra leží v $M(K)$, pokud je definována na borelovských množinách a její variace $|\mu|$ leží v $M(K)$.

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Je-li Y podprostor X, pak $(Y, \|\cdot\|)$, kde uvažujeme restrikci normy $\|\cdot\|$ na Y, je zjevně též normovaný lineární prostor. Následující tvrzení je speciálním případem tvrzení o (metrických) podprostorech metrických prostorů.

TVRZENÍ 5. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.

(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

[4] Félix Édouard Justin Émile Borel

DEFINICE 6. Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou ekvivalentní, pokud $x_n \xrightarrow{\rho} x$, právě když $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou skoro stejné, pokud existují $A, B > 0$ taková, že $A\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq B\sigma(x, y)$ pro všechna $x, y \in P$.

Zjevně skoro stejné metriky jsou ekvivalentní.

PŘÍKLAD 7. Metriky $\rho(x, y) = |x - y|$ a $\sigma(x, y) = \operatorname{arctg}|x - y|$ na $\mathbb{R}$ jsou ekvivalentní, ale nikoli skoro stejné (všimněte si, že $\mathbb{R}$ je v σ omezená). Metriky $\rho(x, y) = |x - y|$ a $\sigma(x, y) = |x - y| + \operatorname{arctg}|x - y|$ na $\mathbb{R}$ jsou skoro stejné, neboť $\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq 2\rho(x, y)$.

$\diamond$

TVRZENÍ 8. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a ρ_1, ρ_2 jsou příslušné metriky. Pak ρ_1 a ρ_2 jsou skoro stejné, právě když jsou ekvivalentní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá.

$\Leftarrow$ Sporem: Předpokládejme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in X$ splňující $\rho_1(x_n, y_n) > n\rho_2(x_n, y_n)$, tedy $\|x_n - y_n\|_1 > n\|x_n - y_n\|_2$. Položme $z_n = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|_1}$. Pak $\rho_1(z_n, 0) = \|z_n\|_1 = 1$, ale $\rho_2(z_n, 0) = \|z_n\|_2 < \frac{1}{n} \to 0$, což je spor s ekvivalencí ρ_1 a ρ_2.

$\square$

Díky předchozímu tvrzení je následující definice konzistentní s Definicí 6.

DEFINICE 9 (ekvivalentní normy). Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

PŘÍKLAD 10. Na prostoru ℓ_1 uvažme normu $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. Pak normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$ nejsou ekvivalentní. Položíme-li $z_n = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ krát}}, 0, 0, \dots)$, pak $\|z_n\|_\infty = 1$, ale $\|z_n\|_1 = n$.

$\diamond$

POZNÁMKA. Ekvivalentní normy na prostoru X zachovávají konvergenci posloupností. Různé ekvivalentní normy tedy mohou mít různé geometrické vlastnosti (neboť se mění tvar jednotkové koule), ale topologické vlastnosti (tj. vlastnosti závisející jen na konvergenci posloupností) zůstávají nezměněny.

VĚTA 11. *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

Důkaz bychom mohli provést ihned, nicméně my jej odložíme do Věty 66, kde stejným argumentem dokážeme více věcí najednou.

LEMMA 12. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Vezměme $x \in B_2$. Pak $\|x\|_1 \leq b\|x\|_2 \leq b$, tedy $x \in B_{(X,\|\cdot\|_1)}(0, b) = bB_1$. Na druhou stranu, nechť $x \in aB_1$. Pak $\|x\|_2 \leq \frac{1}{a}\|x\|_1 \leq \frac{1}{a}a = 1$, tedy $x \in B_2$.

$\Leftarrow$ Je-li $x \in X$ nenulový vektor, je $\frac{x}{\|x\|_2} \in B_2 \subset bB_1$, a tedy $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_1 \leq b$. Podobně, $a\frac{x}{\|x\|_1} \in aB_1 \subset B_2$, a tedy $a\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_2 \leq 1$. Odtud již plynou požadované odhady.

$\square$

TVRZENÍ 13. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.
(ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.
(iii) Zobrazení $Id \colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.
(iv) Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.

DŮKAZ. Ekvivalence (i) a (ii) plyne z Lemmatu 12. Ekvivalence (i) a (iii) plyne z Tvrzení 8. Ekvivalence (iii) a (iv) plyne z definice homeomorfismu a vlastností spojitých zobrazení.

□

DEFINICE 14. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je konvexní kombinací vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Snadno se dokáže indukcí, že konvexní množina M je uzavřená na konvexní kombinace svých prvků, tj. $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in M$ kdykoli $x_1, \dots, x_n \in M$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Z vlastností normy snadno plyne následující fakt:

FAKT 15. *Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.*

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Připomeňme, že lineární obal množiny $M \subset X$ je definován jako $\bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ podprostor } X\}$. Budeme jej značit span M. Dále připomeňme, že platí

$$\operatorname{span} M = \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

DEFINICE 16. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Povšimněme si, že výše uvedená definice je smysluplná, neboť systém, který se proniká, obsahuje alespoň celý prostor X. Snadno se nahlédne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní, a tedy konvexní obal je konvexní množina.

TVRZENÍ 17. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak*

$$\operatorname{conv} M = \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

DŮKAZ. Označme $C = \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\right\}$. Inkluze $C \subset$ conv M je zjevná, neboť konvexní množina conv M obsahuje všechny konvexní kombinace svých prvků. Na druhou stranu, $M \subset C$. Stačí tedy ukázat, že C je konvexní, protože pak conv $M \subset C$ dle definice conv M.

Nechť $x, y \in C$ a $\alpha \in [0, 1]$. Pak $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ pro nějaká $x_1, \dots, x_n \in M$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ a obdobně $y = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$ pro nějaká $y_1, \dots, y_m \in M$, $\mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$. Pak

$$\alpha x + (1 - \alpha)y = \sum_{i=1}^n \alpha\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^m (1 - \alpha)\mu_i y_i \in C,$$

neboť $\sum_{i=1}^n \alpha\lambda_i + \sum_{i=1}^m (1 - \alpha)\mu_i = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^m \mu_i = \alpha + (1 - \alpha) = 1$.

□

DEFINICE 18. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Všimněme si, že pro symetrii M stačí ověřit $-M \subset M$. Dále si všimněme, že koule B_X a U_X v normovaném lineárním prostoru X jsou symetrické množiny.

FAKT 19. *Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x, r)$, resp. $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.*

DŮKAZ. Zvolme libovolné $y \in U(0, r)$ a položme $u = x + y$, $v = x - y$. Pak $u, v \in U(x, r) \subset M$. Ze symetrie M plyne $-v \in M$ a z konvexity M dostáváme $y = \frac{1}{2}(-v + u) \in M$. Pro $B(x, r)$ je důkaz totožný.

□

DEFINICE 20. Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako $\overline{\text{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a uzavřený konvexní obal M jako $\overline{\text{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Povšimněme si, že výše uvedené definice jsou smysluplné, neboť v definujících systémech množin se vždy vyskytuje alespoň celý prostor X. Dále je zřejmé, že uzavřený lineární obal je uzavřený podprostor a uzavřený konvexní obal je uzavřená konvexní množina.

FAKT 21. *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.*

DŮKAZ. Nechť $x, y \in \overline{C}$ a $\lambda \in [0, 1]$. Pak existují posloupnosti $\{x_n\} \subset C$, $\{y_n\} \subset C$ splňující $x_n \to x$, $y_n \to y$. Protože C je konvexní, pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \in C$. Protože sčítání a násobení skalárem jsou spojité operace, máme $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \to \lambda x + (1-\lambda) y$, a tedy $\lambda x + (1-\lambda) y \in \overline{C}$. Důkaz pro podprostor je analogický.

□

TVRZENÍ 22. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\text{span}}\, M = \overline{\text{span}\, M}$ a $\overline{\text{conv}}\, M = \overline{\text{conv}\, M}$.*

DŮKAZ. Inkluze $\overline{\text{span}}\, M \subset \overline{\text{span}\, M}$ a $\overline{\text{conv}}\, M \subset \overline{\text{conv}\, M}$ plynou z definic a Faktu 21. Pro opačné inkluze si uvědomme, že $\overline{\text{span}}\, M$ je podprostor obsahující M a $\overline{\text{conv}}\, M$ je konvexní množina obsahující M. Tedy $\text{span}\, M \subset \overline{\text{span}}\, M$ a $\text{conv}\, M \subset \overline{\text{conv}}\, M$. Protože $\overline{\text{span}}\, M$ a $\overline{\text{conv}}\, M$ jsou uzavřené množiny, dostáváme, že $\overline{\text{span}\, M} \subset \overline{\text{span}}\, M$ a $\overline{\text{conv}\, M} \subset \overline{\text{conv}}\, M$.

□

Poznamenejme, že součet uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. Stačí uvažovat $A = \left\{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\right\}$ a $B = \mathbb{R} \times \{0\}$. Pak $A + B = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Dokonce ani součet uzavřených podprostorů nemusí být uzavřený, vizte Příklad 53. Nicméně platí následující tvrzení:

TVRZENÍ 23. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $F \subset X$ je uzavřená a $K \subset X$ je kompaktní. Pak $F + K$ je uzavřená. Je-li navíc F kompaktní, pak je i $F + K$ kompaktní.*

DŮKAZ. Nechť $\{z_n\} \subset F + K$ je posloupnost konvergující k nějakému $z \in X$. Pak $z_n = x_n + y_n$, kde $x_n \in F$ a $y_n \in K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $y \in K$. Pak $x_{n_k} = z_{n_k} - y_{n_k} \to z - y$ dle Tvrzení 2(c). Protože F je uzavřená, je $z - y \in F$. Tedy $z = (z - y) + y \in F + K$. Odtud plyne, že $F + K$ je uzavřená.

Nechť je nyní navíc F kompaktní a $\{z_n\} \subset F + K$ je libovolná posloupnost. Pak $z_n = x_n + y_n$, kde $x_n \in F$ a $y_n \in K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $y \in K$. Protože F je kompaktní, posloupnost $\{x_{n_k}\}$ má podposloupnost $\{x_{n_{k_l}}\}$, která konverguje k nějakému $x \in F$. Tedy $z_{n_{k_l}} = x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}} \to x + y \in F + K$. Odtud plyne, že $F + K$ je kompaktní.

□

VĚTA 24. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\text{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.*

DŮKAZ. Nechť X je prostor nad $\mathbb{K}$. Nejprve ukážeme, že $\text{span}\{Y \cup \{e\}\}$ je uzavřený pro libovolné $e \in X$. Obecné tvrzení pak snadno plyne pomocí matematické indukce dle $\dim Z$.

Je-li $e \in Y$, pak není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že $e \notin Y$. Nechť $\{x_n\} \subset \text{span}(Y \cup \{e\})$ je posloupnost konvergující k $x \in X$. Pak $x_n = y_n + t_n e$ pro nějaká $y_n \in Y$ a $t_n \in \mathbb{K}$. Nejdříve ukážeme, že posloupnost $\{t_n\}$ je omezená. Kdyby tomu tak nebylo, pak by existovala podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ splňující $|t_{n_k}| \to +\infty$. Pak ale

$$\left\| \frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} - (-e) \right\| = \left\| \frac{x_{n_k}}{t_{n_k}} \right\| = \frac{1}{|t_{n_k}|} \|x_{n_k}\| \to 0 \cdot \|x\| = 0,$$

tedy $y_{n_k}/t_{n_k} \to -e$. Ale $y_{n_k}/t_{n_k} \in Y$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a Y je uzavřený, tudíž $e \in Y$, což je spor.

Posloupnost $\{t_n\}$ je tedy omezená, takže z ní můžeme vybrat podposloupnost $\{t_{m_k}\}$ konvergující k nějakému $t \in \mathbb{K}$. Pak $y_{m_k} \to y = x - te$ a $y \in Y$, neboť Y je uzavřený. Tedy $x = y + te \in \operatorname{span}\{Y \cup \{e\}\}$. $\square$

DŮSLEDEK 25. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

VĚTA 26.

(a) Prostory c_0 a ℓ_p, $1 \le p < \infty$ jsou separabilní.
(b) Prostor ℓ_∞ je neseparabilní.
(c) Je-li K kompaktní metrický prostor, je prostor $C(K)$ separabilní.
(d) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky[5] měřitelná a $1 \le p < \infty$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

DŮKAZ. (a) Nechť $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je množina vektorů z c_{00} s racionálními souřadnicemi (v případě komplexního prostoru jsou reálná i imaginární složka racionální). Pak $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je spočetná. Tvrdíme, že je hustá v c_0: Vezměme libovolné $x \in c_0$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_i| < \varepsilon$ pro $i > n$. Pro $i = 1, \dots, n$ nalezneme racionální (případně „komplexně racionální“) q_i tak, aby $|x_i - q_i| < \varepsilon$. Položme $y = (q_1, \dots, q_n, 0, 0, \dots)$. Pak $y \in c_{00}^{\mathbb{Q}}$ a $\|x - y\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - q_i| \le \varepsilon$.

Podobně ověříme, že $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je hustá v ℓ_p pro $1 \le p < \infty$. Vezměme libovolné $x \in \ell_p$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $i = 1, \dots, n$ nalezneme racionální (případně „komplexně racionální“) q_i tak, aby $|x_i - q_i| < \left(\frac{\varepsilon}{2n}\right)^{1/p}$. Položme $y = (q_1, \dots, q_n, 0, 0, \dots)$. Pak $y \in c_{00}^{\mathbb{Q}}$ a $\|x - y\|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(b) Uvažujme množinu $\mathcal{A} = \{\chi_A;\ A \subset \mathbb{N}\} \subset \ell_\infty$. Pak pro $A, B \subset \mathbb{N}$, $A \neq B$ platí $\|\chi_A - \chi_B\| = 1$, neboť existuje $n \in \mathbb{N}$ které leží právě v jedné z množin A, B. Tedy $\mathcal{A}$ je 1-separovaná podmnožina ℓ_∞. Tato množina je ovšem nespočetná (např. pomocí Cantorovy diagonální metody[6]).

(c) Prostor $C(K)$ je podprostorem prostoru $\ell_\infty(K)$ všech omezených funkcí na K. Ukážeme, že existuje spočetná množina $\mathcal{A} \subset \ell_\infty(K)$ taková, že $C(K) \subset \overline{\mathcal{A}}$. Odtud plyne separabilita $C(K)$, neboť pak $C(K)$ je (metrický) podprostor separabilního metrického prostoru $\overline{\mathcal{A}}$.

Kompakt K je totálně omezený, tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje konečný systém $\mathcal{B}_n$ otevřených koulí o poloměru $\frac{1}{n}$ pokrývající K. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a položme $D_k = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$, kde $\mathcal{B}_n = \{B_1, B_2, \dots\}$. Pak $\mathcal{D}_n = \{D_1, D_2, \dots\}$ je konečný systém disjunktních množin s diametrem nejvýše $\frac{2}{n}$ pokrývající K. Nechť $\mathcal{A}_n$ je množina funkcí konstantních na prvcích $\mathcal{D}_n$ s racionálními (resp. „komplexně racionálními“) hodnotami. Pak $\mathcal{A}_n$ je spočetná. Tedy i množina $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ je spočetná. Tvrdíme, že $C(K) \subset \overline{\mathcal{A}}$.

Nechť $f \in C(K)$ a $\varepsilon > 0$. Pak f je stejnoměrně spojitá na K, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ kdykoli $x, y \in K$, $\rho(x, y) < \delta$, kde ρ je metrika prostoru K. Nalezněme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2}{n} < \delta$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je takové, že $\mathcal{D}_n = \{D_1, \dots, D_k\}$. Bez újmy na obecnosti (po eventuálním přečíslování) můžeme předpokládat, že všechny množiny D_i jsou neprázdné. V každé množině D_i zvolíme prvek x_i a nalezneme q_i racionální tak, aby $|q_i - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Konečně položíme $g = \sum_{i=1}^{k} q_i \chi_{D_i}$. Pak $g \in \mathcal{A}$. Dále, je-li $x \in K$ libovolné, pak $x \in D_j$ pro nějaké j. Máme $\rho(x, x_j) \le \frac{2}{n} < \delta$, a tedy $|f(x) - g(x)| = |f(x) - q_j| \le |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - q_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Tedy $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$.

(d) Prostor $L_p(\Omega)$ lze přirozeně chápat jako podprostor $L_p(\mathbb{R}^n)$, tedy stačí ukázat separabilitu $L_p(\mathbb{R}^n)$. Pro $j \in \mathbb{N}$ označme $K_j = B_{\mathbb{R}^n}(0, j)$. Pak dle (c) existuje spočetná množina $\mathcal{A}_j$ spojitých funkcí na K_j která je hustá v prostoru $(C(K_j), \|\cdot\|_\infty)$. Rozšiřme funkce z $\mathcal{A}_j$ nulou mimo K_j a chápejme je jako funkce na celém $\mathbb{R}^n$. Ukážeme, že spočetná množina $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j$ je hustá v prostoru $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Nechť $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ a $\varepsilon > 0$. Podle důsledku Luzinovy věty[7], [R, Věta 3.14], je množina $C_c(\mathbb{R}^n)$ spojitých funkcí s kompaktním nosičem hustá v prostoru $L_p(\mathbb{R}^n)$. Tedy existuje $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ splňující $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $j \in \mathbb{N}$ je takové, že K_j obsahuje nosič g. Pak existuje $h \in \mathcal{A}_j$ taková, že

[5]Henri Léon Lebesgue

[6]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1891)

[7]Nikolaj Nikolajevič Luzin (Николай Николаевич Лузин) (1912)

$\|g - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K_j)^{1/p}}$. Máme $\|g - h\|_p^p = \int_{K_j} |g - h|^p \, \mathrm{d}\lambda \le \frac{\varepsilon^p}{2^p \lambda(K_j)} \lambda(K_j) = (\frac{\varepsilon}{2})^p$. Tedy dohromady $\|f - h\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - h\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

Později uvidíme, že pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor (Věta 2.28).

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

Jednou z motivací ke studiu nekonečných řad v normovaných lineárních prostorech je základní nástroj pro práci s Hilbertovými prostory – ortonormální systémy a báze (vizte oddíl 6). Protože ortonormální báze v obecném Hilbertově prostoru může být nespočetná, je nezbytné zabývat se i zobecněnými řadami.

DEFINICE 27. Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N x_n$. Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$.

Uvědomme si, že v normovaných lineárních prostorech platí stejná nutná podmínka konvergence řady jako pro řady reálných čísel: je-li $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konvergentní, pak $x_n \to 0$. (Důkaz je stejný: $x_n = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \to 0$.)

FAKT 28. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní řada v X. Pak*

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty x_n \right\| \le \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|.$$

DŮKAZ. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\left\|\sum_{n=1}^N x_n\right\| \le \sum_{n=1}^N \|x_n\| \le \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ pro každé $N \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti normy (Tvrzení 2(b)) tedy dostáváme $\left\|\sum_{n=1}^\infty x_n\right\| = \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^N x_n\right\| \le \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$.

□

PŘÍKLAD 29. Vektory $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ v prostorech c_0 a ℓ_p, $1 \le p < \infty$, kde pouze n-tá souřadnice je rovna 1, budeme nazývat kanonické bázové vektory. Pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ v c_0, resp. ℓ_p platí $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, kde konvergenci řady chápeme v příslušné normě. Vskutku, pro $x \in c_0$ máme $\left\|x - \sum_{k=1}^n x_k e_k\right\|_\infty = \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k| \to 0$ z definice limity. Podobně pro $x \in \ell_p$ máme $\left\|x - \sum_{k=1}^n x_k e_k\right\|_p = \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$.

◇

VĚTA 30 (Test úplnosti). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť je řada $\sum_{k=1}^\infty x_k$ absolutně konvergentní. Označme $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ její částečné součty. Pak pro indexy $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ platí

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \le \sum_{k=m+1}^n \|x_k\|.$$

Z platnosti Bolzanovy[8]-Cauchyovy[9] podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|$ tedy dostáváme platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro posloupnost $\{s_n\}$. Ta je proto konvergentní, neboť X je Banachův.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Nejprve ukážeme, že $\{x_n\}$ má konvergentní podposloupnost. S využitím cauchyovskosti nalezneme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ tak, že $\|x_l - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ pro všechna $k, l \in \mathbb{N}$ splňující $l \ge n_k$. Speciálně platí $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Řada

[8]Bernard Bolzano (Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano)

[9]Augustin-Louis Cauchy

$\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ je tedy absolutně konvergentní, takže existuje $z \in X$ takové, že $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k}) = z$. To ale znamená, že

$$z = \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{j}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty} x_{n_{j+1}} - x_{n_1}.$$

Tedy $\{x_{n_k}\}$ konverguje k $x = z + x_{n_1}$.

Na závěr zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, tedy existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq m_0$. Pak pro všechna $n, k \geq m_0$ platí $\|x_n - x_{n_k}\| < \varepsilon$. Zafixujeme-li nyní $n \geq m_0$, pak $\|x_n - x\| = \lim_{k\to\infty}\|x_n - x_{n_k}\| \leq \varepsilon$. Tedy $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$ pro každé $n \geq m_0$, což znamená, že $x_n \to x$.

□

DEFINICE 31. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí, že

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Je-li zobecněná řada konvergentní, pak symbolem $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ rozumíme též její součet (který je určen jednoznačně, vizte Větu 33).

DEFINICE 32. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, pokud

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset\colon \left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

VĚTA 33. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X konvergující k x. Pak platí:*

(a) Její součet je určen jednoznačně.
(b) Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
(c) $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ pro každou permutaci (tj. bijekci) $\pi\colon \Gamma \to \Gamma$.
(d) $\left(\|x_\gamma\|\right)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$.
(e) Je-li $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma$ libovolná prostá posloupnost taková, že $\{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \neq 0\} \subset \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\gamma_n} = x$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x, y \in X$, $x \neq y$ jsou součty naší zobecněné řady. Položme $\varepsilon = \|x - y\| > 0$. Pak dle definice existují konečné množiny $F_x, F_y \subset \Gamma$ splňující $\left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F \supset F_x$ a $\left\|y - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F \supset F_y$. Dále položme $F = F_x \cup F_y$. Pak $\varepsilon = \|x - y\| \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| + \left\|y - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, což je spor.

(b) Je-li $\varepsilon > 0$, pak z definice konvergence existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F$. Pak pro $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ disjunktní s F platí

$$\left\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\right\| = \left\|\sum_{\gamma\in F'\cup F} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in F'\cup F} x_\gamma\right\| + \left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c) Nechť $\pi\colon \Gamma \to \Gamma$ je permutace. Je-li $\varepsilon > 0$, pak z definice konvergence existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F$. Množina $\pi^{-1}(F)$ je konečná a pro

$F' \supset \pi^{-1}(F)$ konečnou platí $\pi(F') \supset F$, a tedy $\left\|x - \sum_{\gamma\in F'} x_{\pi(\gamma)}\right\| = \left\|x - \sum_{\gamma\in\pi(F')} x_\gamma\right\| < \varepsilon$. To znamená, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$.

(d) Dle (b) zobecněná řada splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť $F \subset \Gamma$ je příslušná konečná množina z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro toto ε. Je-li $\gamma \notin F$, pak $\{\gamma\} \cap F = \emptyset$, a tedy $\|x_\gamma\| < \varepsilon$. To znamená, že $\{\gamma \in \Gamma;\ \|x_\gamma\| \geq \varepsilon\} \subset F$, tedy speciálně je to množina konečná.

(e) Označme $s_n = \sum_{k=1}^n x_{\gamma_k}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $F \subset \{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \neq 0\}$ a že $F \neq \emptyset$. Položme $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N};\ \gamma_n \in F\}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \supset F$, takže $\|x - s_n\| < \varepsilon$.

□

TVRZENÍ 34. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když $\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\} < +\infty$. Potom platí $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\}$.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Nechť $x = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\} \in \mathbb{R}$ a nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\sum_{\gamma\in F} a_\gamma > x - \varepsilon$. Pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $F' \supset F$ tedy máme $\left|x - \sum_{\gamma\in F'} a_\gamma\right| = x - \sum_{\gamma\in F'} a_\gamma \leq x - \sum_{\gamma\in F} a_\gamma < \varepsilon$. Odtud plyne $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = x$.

$\Rightarrow$ Je-li $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = x$, pak existuje $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\left|x - \sum_{\gamma\in H'} a_\gamma\right| < 1$ pro každou $H' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H' \supset H$. Pro každou $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ pak máme $\sum_{\gamma\in F} a_\gamma \leq \sum_{\gamma\in H\cup F} a_\gamma < x + 1$, tedy $\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\} < +\infty$.

Závěrečné tvrzení pak bylo dokázáno v první části důkazu.

□

TVRZENÍ 35. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$, $\sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$ jsou konvergentní zobecněné řady v normovaném lineárním prostoru nad $\mathbb{K}$ a nechť $c \in \mathbb{K}$. Pak $\sum_{\gamma\in\Gamma}(x_\gamma + y_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$ a $\sum_{\gamma\in\Gamma} c x_\gamma = c\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$.*

DŮKAZ. Označme $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ a $y = \sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existují $F_x, F_y \subset \mathcal{F}(\Gamma)$ takové, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_x$, resp. $\left\|y - \sum_{\gamma\in H} y_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_y$. Pro libovolnou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_x \cup F_y$ je tedy $\left\|x + y - \sum_{\gamma\in H}(x_\gamma + y_\gamma)\right\| \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| + \left\|y - \sum_{\gamma\in H} y_\gamma\right\| < 2\varepsilon$. Podobně, $\left\|cx - \sum_{\gamma\in H} c x_\gamma\right\| = |c|\left\|x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma\right\| \leq |c|\varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_x$.

□

VĚTA 36. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
(b) Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.
(c) Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ konvergentní.

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ plyne z Věty 33(b). $\Leftarrow$ Najdeme množiny $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ v $\mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F_n = \emptyset\colon \left\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\right\| < \frac{1}{n}.$$

Položme $y_n = \sum_{\gamma\in F_n} x_\gamma$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost: Pro dané $\varepsilon > 0$ totiž nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pak pro libovolná $m > n \geq n_0$ máme $\|y_m - y_n\| = \left\|\sum_{\gamma\in F_m} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F_n} x_\gamma\right\| = \left\|\sum_{\gamma\in F_m\setminus F_n} x_\gamma\right\| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tedy $\{y_n\}$ konverguje k nějakému $x \in X$. Ukážeme, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x$. Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\|y_{n_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom pro $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ obsahující F_{n_0} platí

$$\left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\right\| \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in F_{n_0}} x_\gamma\right\| + \left\|\sum_{\gamma\in F} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F_{n_0}} x_\gamma\right\| = \|x - y_{n_0}\| + \left\|\sum_{\gamma\in F\setminus F_{n_0}} x_\gamma\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Tvrzení (b) ověříme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky a tvrzení (a). Nechť $s = \sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\| = \sup\bigl\{\sum_{\gamma\in F}\|x_\gamma\|;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\bigr\} < +\infty$ (Tvrzení 34). Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $\sum_{\gamma\in F}\|x_\gamma\| > s-\varepsilon$. Pak pro $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ neprotínající F platí

$$\Bigl\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\Bigr\| \le \sum_{\gamma\in F'}\|x_\gamma\| = \sum_{\gamma\in F\cup F'}\|x_\gamma\| - \sum_{\gamma\in F}\|x_\gamma\| < s-(s-\varepsilon) = \varepsilon.$$

Obdobně dokážeme (c). Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme množinu $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\bigl\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\bigr\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F' \cap F = \emptyset$. Pak $F \cap \Lambda \in \mathcal{F}(\Lambda)$ a každá $F' \in \mathcal{F}(\Lambda)$ neprotínající $F \cap \Lambda$ je též disjunktní s F. Tedy $\bigl\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\bigr\| < \varepsilon$ a Bolzanova-Cauchyova podmínka pro zobecněnou řadu $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ je ověřena.

□

Zobecněné řady jsou definovány bez jakékoliv struktury na indexové množině Γ. Ve speciálním případě $\Gamma = \mathbb{N}$ máme na $\mathbb{N}$ strukturu uspořádání, pomocí které jsou definovány „obyčejné" řady. Nyní se tedy podíváme na vztah řad $\sum_{n=1}^\infty x_n$ a zobecněných řad $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

TVRZENÍ 37.

(a) Nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$. Pak i řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje k x.
(b) Nechť řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$ a nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Pak $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.
(c) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ (a obě pak mají stejný součet).

DŮKAZ. (a) Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ neprázdná taková, že $\bigl\|x - \sum_{n\in F'} x_n\bigr\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$. Položme $n_0 = \max F$. Pak pro $n \ge n_0$ platí $F \subset F' = \{1,\dots,n\}$, a tedy $\bigl\|x - \sum_{i=1}^n x_i\bigr\| = \bigl\|x - \sum_{i\in F'} x_i\bigr\| < \varepsilon$. To dokazuje, že $\sum_{n=1}^\infty x_n = x$.

(b) Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme $F \subset \mathbb{N}$ konečnou neprázdnou takovou, že $\bigl\|\sum_{n\in H} x_n\bigr\| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ disjunktní s F. Dále nalezneme $n_0 \ge \max F$ takové, že $\bigl\|x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n\bigr\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak pro každou $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$ platí

$$\begin{aligned}\Bigl\|x - \sum_{n\in F'} x_n\Bigr\| &\le \Bigl\|x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n\Bigr\| + \Bigl\|\sum_{n=1}^{n_0} x_n - \sum_{n\in F} x_n\Bigr\| + \Bigl\|\sum_{n\in F'} x_n - \sum_{n\in F} x_n\Bigr\| = \\ &= \Bigl\|x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n\Bigr\| + \Bigl\|\sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus F} x_n\Bigr\| + \Bigl\|\sum_{n\in F'\setminus F} x_n\Bigr\| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

To znamená, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.

(c) Platí $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^n a_i$. Je-li $F \subset \mathbb{N}$ konečná neprázdná, pak $\sum_{i\in F} a_i \le \sum_{i=1}^{\max F} a_i$, a tedy $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sup\bigl\{\sum_{n\in F} a_n;\ F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\bigr\}$. Zbytek plyne z Tvrzení 34.

□

DŮSLEDEK 38. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je absolutně konvergentní.*

DEFINICE 39. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

VĚTA 40. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně.
(ii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.
(iii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Je-li π permutace na $\mathbb{N}$, pak dle Věty 33(c) je $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)} = x$. Díky Tvrzení 37(a) tedy máme $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$.

(ii)⇒(iii) je zjevná.

(iii)⇒(i) Podle Tvrzení 37(b) stačí ukázat, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Není-li tomu tak, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každou konečnou $F \subset \mathbb{N}$ existuje konečná $F' \subset \mathbb{N}$, $F' \cap F = \emptyset$ taková, že $\left\|\sum_{n\in F'} x_n\right\| \geq \varepsilon$. Můžeme tedy indukcí zkonstruovat posloupnost $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ konečných neprázdných podmnožin $\mathbb{N}$ splňující $\max F_k < \min F_{k+1}$ a $\left\|\sum_{n\in F_k} x_n\right\| \geq \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Položme ještě $F_0 = \{0\}$ a $D_k = \{\max F_{k-1} + 1, \dots, \max F_k\} \setminus F_k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Nechť nyní π je permutace $\mathbb{N}$, která postupně v rostoucím pořadí vyjmenovává prvky množin D_1, F_1, D_2, F_2, atd. Pak existují rostoucí posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a posloupnost $\{p_k\} \subset \mathbb{N}_0$ tak, že $\pi\big(\{n_k, n_k + 1, \dots, n_k + p_k\}\big) = F_k$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme $\left\|\sum_{n=n_k}^{n_k+p_k} x_{\pi(n)}\right\| = \left\|\sum_{n\in F_k} x_n\right\| \geq \varepsilon$, což znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. To je spor s předpokladem.

□

VĚTA 41. *Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní. Každá řada v $\mathbb{R}$ je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.*

DŮKAZ. První tvrzení plyne z Důsledku 38 a Věty 36(b). V $\mathbb{R}$ plyne opačná implikace z Věty 40 a z Riemannovy[10] věty o přerovnávání neabsolutně konvergentních řad.

□

PŘÍKLAD 42. Pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ v c_0, resp. ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, platí, že řada v jeho vyjádření $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ konverguje dokonce bezpodmínečně. Vskutku, mějme dáno $x \in c_0$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Položme $F = \{1, \dots, n_0\}$. Pro $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$ je $x - \sum_{n\in F'} x_n e_n = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $y_n = 0$ pro $n \in F'$ a $y_n = x_n$ jinak. Jelikož $\|(y_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus F'} |x_n| \leq \sup_{n\geq n_0} |x_n| \leq \varepsilon$, plyne odtud, že $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$.

Podobně pro $x \in \ell_p$ a $\varepsilon > 0$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon^p$. Položme $F = \{1, \dots, n_0\}$. Pro $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$ je $x - \sum_{n\in F'} x_n e_n = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $y_n = 0$ pro $n \in F'$ a $y_n = x_n$ jinak. Jelikož $\|(y_n)\|^p \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon^p$, plyne odtud, že $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$.

◇

Dle předchozího příkladu tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ v prostoru c_0 konverguje bezpodmínečně, ale nikoli absolutně.

3. Lineární operátory a funkcionály

Z lineární algebry víme, že základním nástrojem při studiu vektorových prostorů jsou lineární zobrazení. V analýze přirozeně pracujeme se zobrazeními kompatibilními s metrickou strukturou, tedy zejména se zobrazeními spojitými. Ve funkcionální analýze tedy ústřední roli hrají spojitá lineární zobrazení.

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineární, pokud $T(x + y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Dále $\operatorname{Ker} T = T^{-1}(0)$ a $\operatorname{Rng} T = T(X)$ jsou podprostory X, resp. Y. Zobrazení T je prosté, právě když $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Lineární zobrazení z X do $\mathbb{K}$ se nazývá lineární forma na X.

Snadno si lze rozmyslet následující fakt.

FAKT 43. *Nechť X, Y jsou vektorové prostory, $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní. Obdobně, je-li $N \subset Y$ symetrická, pak $T^{-1}(N)$ je symetrická, a je-li N konvexní, pak $T^{-1}(N)$ je konvexní.*

TVRZENÍ 44. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

[10]Georg Friedrich Bernhard Riemann

(i) *T je spojité.*
(ii) *T je spojité v jednom bodě.*
(iii) *T je spojité v 0.*
(iv) *Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.*
(v) *T je lipschitzovské.*
(vi) *T je stejnoměrně spojité.*
(vii) *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*
(viii) *$T(B_X)$ je omezená.*
(ix) *$T\big(U(0,\delta)\big)$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.*

DŮKAZ. Zjevně (i)⇒(ii).

(ii)⇒(iii) Nechť T je spojité v $x \in X$ a nechť $x_n \to 0$. Pak $x_n + x \to x$, a tedy $T(x_n + x) \to T(x)$. Odtud $T(x_n) = T(x_n + x - x) = T(x_n + x) - T(x) \to T(x) - T(x) = 0 = T(0)$.

(iii)⇒(iv) Existuje $\delta > 0$ takové, že $\|T(y)\| = \|T(y) - T(0)\| \leq 1$, kdykoli $\|y\| = \|y - 0\| \leq \delta$. Pak pro $x \in X$ nenulové platí, že

$$\|T(x)\| = \frac{\|x\|}{\delta}\left\|T\left(\delta\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|.$$

Nerovnost ve (iv) tedy platí pro $C = \frac{1}{\delta}$.

(iv)⇒(v) Pro libovolná $x, y \in X$ platí $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq C\|x - y\|$, tedy T je C-lipschitzovské.

(v)⇒(vi)⇒(i) a (iv)⇒(vii)⇒(viii) jsou zřejmé.

(viii)⇒(iv) Nechť $C \geq 0$ je takové, že $\|T(x)\| \leq C$ kdykoli $x \in B_X$. Potom pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ platí $\|T(x)\| = \|x\|\big\|T\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\big\| \leq C\|x\|$.

(viii)⇔(ix) Z linearity plyne, že $\|T(x)\| \leq C$ pro každé $x \in B_X$, právě když $\|T(y)\| \leq \delta C$ pro každé $y \in B(0,\delta)$.

□

Zobrazením splňujícím (vii) se někdy říká omezená. Tedy lineární zobrazení je spojité, právě když je omezené.

V kontextu funkcionální analýzy se lineárním zobrazením říká též lineární *operátory* a lineárním formám lineární *funkcionály*. Nás budou především zajímat spojité lineární operátory a spojité lineární funkcionály. Všimněme si, že je-li $T: X \to Y$ spojitý lineární operátor mezi normovanými lineárními prostory X a Y, pak $\operatorname{Ker} T$ je uzavřený podprostor X. Na druhou stranu, $\operatorname{Rng} T$ nemusí být uzavřený.

Připomeňme, že množina všech lineárních zobrazení mezi vektorovými prostory X a Y tvoří vektorový prostor s operacemi uvažovanými bodově. Jsou-li nyní X, Y normované lineární prostory, pak součet spojitých lineárních zobrazení z X do Y je opět spojité lineární zobrazení a podobně pro násobek skalárem (Tvrzení 2). Tedy množina všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y tvoří vektorový prostor, který značíme $\mathcal{L}(X,Y)$. Dále pro každé $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ položíme

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

Díky Tvrzení 44 je $\|T\|$ konečné nezáporné číslo. Nyní si rozmyslíme, že $T \mapsto \|T\|$ je norma na $\mathcal{L}(X,Y)$:

(i) Je-li $T \neq 0$, pak existuje $x \in X$, $x \neq 0$ takové, že $T(x) \neq 0$. Tedy $T(\frac{x}{\|x\|}) = \frac{1}{\|x\|}T(x) \neq 0$, takže $\|T\| > 0$.

(ii) Nechť $S, T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\|S + T\| = \sup_{x \in B_X}\|(S+T)(x)\| = \sup_{x \in B_X}\|S(x) + T(x)\| \leq \sup_{x \in B_X}\|S(x)\| + \sup_{x \in B_X}\|T(x)\| = \|S\| + \|T\|$.

(iii) Nechť $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $\|\alpha T\| = \sup_{x \in B_X}\|(\alpha T)(x)\| = \sup_{x \in B_X}\|\alpha(T(x))\| = \sup_{x \in B_X}|\alpha|\|T(x)\| = |\alpha| \cdot \|T\|$.

Prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ s výše uvedenou normou je tedy normovaný lineární prostor.

LEMMA 45. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(a) *$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(b) $\|T\| = \sup_{x\in U_X}\|T(x)\|$. *Je-li X netriviální, pak též* $\|T\| = \sup_{x\in S_X}\|T(x)\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$.
(c) $\|T\| = \inf\{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\|$ *pro každé* $x \in X\}$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in X \setminus \{0\}$. Pak $\|T(x)\| = \|x\| \cdot \|T\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\| \leq \|T\|\|x\|$, neboť $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$.

(b) Zjevně $\|T\| = \sup_{x\in B_X}\|T(x)\| \geq \sup_{x\in U_X}\|T(x)\|$. Na druhou stranu, je-li $x \in B_X$, pak $(1-\frac{1}{n})x \in U_X$ a $\big\|T\big((1-\frac{1}{n})x\big)\big\| \to \|T(x)\|$. Tedy $\sup_{x\in U_X}\|T(x)\| \geq \sup_{x\in B_X}\|T(x)\| = \|T\|$.

Předpokládejme dále, že X je netriviální. Je-li $x \in X \setminus \{0\}$, je $\frac{x}{\|x\|} \in S_X$ a

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{y\in S_X}\|T(y)\|.$$

Tedy $\sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in S_X}\|T(x)\| \leq \sup_{x\in B_X}\|T(x)\| = \|T\|$. Na druhou stranu, je-li $x \in B_X \setminus \{0\}$, pak $\|T(x)\| \leq \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$. Tedy

$$\sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \geq \sup_{x\in B_X\setminus\{0\}}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \geq \sup_{x\in B_X\setminus\{0\}}\|T(x)\| = \sup_{x\in B_X}\|T(x)\| = \|T\|.$$

(c) Označme $A = \{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X\}$. Díky (a) platí $\|T\| \in A$ a tedy $\inf A \leq \|T\|$. Dokažme nyní opačnou nerovnost. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Z definice infima najdeme $C \in A$, $C < \inf A + \varepsilon$. Pak

$$\|T\| = \sup_{x\in B_X}\|T(x)\| \leq \sup_{x\in B_X} C\|x\| = C < \inf A + \varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, je $\|T\| \leq \inf A$.

□

FAKT 46. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a* $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *je posloupnost operátorů konvergujících k* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *v prostoru* $\mathcal{L}(X,Y)$. *Pak* $\{T_n\}$ *konverguje k T bodově, tj. pro každé* $x \in X$ *platí* $T_n(x) \to T(x)$ *v prostoru Y.*

DŮKAZ. Pro libovolné $x \in X$ díky Lemmatu 45 platí $\|T_n(x)-T(x)\| = \|(T_n-T)(x)\| \leq \|T_n-T\|\|x\| \to 0$.

□

FAKT 47. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory,* $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ *a* $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. *Pak* $\|T\circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.

DŮKAZ. Pro libovolné $x \in X$ platí $\|T(S(x))\| \leq \|T\|\|S(x)\| \leq \|T\|\|S\|\|x\|$. Tedy $\|T\circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.

□

VĚTA 48. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak* $\mathcal{L}(X,Y)$ *je Banachův prostor.*

DŮKAZ. Vezměme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{T_n\}$ v $\mathcal{L}(X,Y)$. Pro libovolné pevné $x \in X$ platí $\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy posloupnost $\{T_n(x)\}$ je cauchyovská v Y a protože Y je úplný, existuje limita $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$, kterou označíme $T(x)$. Máme tak definované zobrazení $T\colon X \to Y$.

Ukažme, že T je lineární. Mějme $x, y \in X$. Pak

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty}\big(T_n(x) + T_n(y)\big) = T(x) + T(y)$$

dle Tvrzení 2. Podobně, $T(\alpha x) = \lim T_n(\alpha x) = \lim\big(\alpha T_n(x)\big) = \alpha T(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dále pro $x \in B_X$ platí

$$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|T_n(x)\| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|)\|x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|.$$

Protože $\big|\|T_n\| - \|T_m\|\big| \leq \|T_n - T_m\|$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, je číselná posloupnost $\{\|T_n\|\}$ cauchyovská, a tedy omezená. Tudíž $\sup_{x\in B_X}\|T(x)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| < +\infty$, tj. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Zbývá dokázat, že $T_n \to T$ v normě prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ pro každé $n, m \geq n_0$. Pak pro $x \in B_X$ a pevné $n \geq n_0$ máme

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{m\geq n_0} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{m\geq n_0} \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \varepsilon.$$

Tedy $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ pro libovolné $n \geq n_0$. Proto $T_n \to T$.

□

DEFINICE 49. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

Prvky X^* jsou tedy spojité lineární funkcionály na X. Prostor X^* je normovaný lineární prostor s normou $\|f\| = \sup_{x\in B_X} |f(x)|$. Uvědomme si, že je-li X reálný, pak ze symetrie jednotkové koule plyne, že $\|f\| = \sup_{x\in B_X} f(x)$.

Protože jak $\mathbb{R}$, tak $\mathbb{C}$ jsou úplné prostory, důsledkem Věty 48 je následující věta.

VĚTA 50. *Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.*

PŘÍKLAD 51. Nechť $X = \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$, nebo $X = c_0$, nebo $X = c$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme funkci $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ danou předpisem $f_n(x) = x_n$ pro $x = (x_k) \in X$. Pak je snadno vidět, že f_n je lineární forma a $|f_n(x)| = |x_n| \leq \|x\|$ pro každé $x \in X$. Tedy $f_n \in X^*$ a $\|f\| \leq 1$. Protože $f_n((0,\dots,0,1,0,0,\dots)) = 1$, kde 1 je pouze na n-té souřadnici, je $\|f_n\| = 1$. Funkcionálům f_n budeme říkat kanonické souřadnicové funkcionály.

◇

LEMMA 52. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| = \|f\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)$.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f \neq 0$. Zvolme $x \in X$ pevné. Je-li $y \in \operatorname{Ker} f$ libovolné, pak $|f(x)| = |f(x-y)| \leq \|f\|\|x-y\|$. Tedy $|f(x)| \leq \|f\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)$. Pro důkaz obrácené nerovnosti zvolme $0 < \varepsilon < \|f\|$ libovolně. Najděme $y \in S_X$ tak, že $|f(y)| \geq \|f\| - \varepsilon$. Pak $x - \frac{f(x)}{f(y)} y \in \operatorname{Ker} f$, a tedy

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) \leq \left\| x - \left(x - \frac{f(x)}{f(y)} y \right) \right\| = \frac{|f(x)|}{|f(y)|} \leq \frac{|f(x)|}{\|f\| - \varepsilon}.$$

Jelikož bylo ε libovolné, je důkaz dokončen.

□

Následující příklad ukazuje, že součet uzavřených podprostorů nemusí být uzavřený (srv. Tvrzení 23 a poznámka před).

PŘÍKLAD 53. Uvažujme prostor ℓ_2 a jeho následující dva podprostory: $Y = \{x \in \ell_2;\ x_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$ a $Z = \overline{\operatorname{span}}\{e_{2n} + ne_{2n-1};\ n \in \mathbb{N}\}$, kde e_n jsou kanonické bázové vektory. Pak $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} f_{2n}$, kde f_n jsou kanonické souřadnicové funkcionály, tedy Y i Z jsou uzavřené podprostory ℓ_2. Tvrdíme, že $Y + Z$ je hustý podprostor ℓ_2, který není uzavřený.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $e_{2n-1} \in Y$ a $e_{2n} = (e_{2n} + ne_{2n-1}) - ne_{2n-1} \in Z + Y$. Tedy podprostor $Y + Z$ obsahuje všechny kanonické bázové vektory i jejich lineární kombinace, tudíž je hustý v ℓ_2 (Příklad 29). Dále si všimněme, že je-li $z \in Z$, pak $z_{2n-1} = f_{2n-1}(z) = nf_{2n}(z) = nz_{2n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Vskutku, pro $z \in \operatorname{span}\{e_{2n} + ne_{2n-1};\ n \in \mathbb{N}\}$ je $z = \sum_{j=1}^{k} c_j(e_{2j} + je_{2j-1})$, a tedy $f_{2j-1}(z) = jc_j = jf_{2j}(z)$ pro $1 \leq j \leq k$ a $f_{2j-1}(z) = 0 = jf_{2j}(z)$ pro $j > k$. Je tedy $f_{2n-1}(z) - nf_{2n}(z) = 0$ pro všechna z z husté podmnožiny Z, a protože funkce $f_{2n-1} - nf_{2n}$ je spojitá na Z, je nutně nulová na celém Z.

Položme konečně $x = \left(0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{2n}$. Předpokládejme, že $x = y + z$, kde $y \in Y$ a $z \in Z$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} = x_{2n} = y_{2n} + z_{2n} = z_{2n}$, a tedy $z_{2n-1} = 1$. To ovšem nelze, neboť $z \in \ell_2$. Tedy $x \notin Y + Z$.

◇

Připomeňme, že je-li T lineární bijekce mezi vektorovými prostory X a Y, pak inverzní zobrazení T^{-1} je též lineární.

DEFINICE 54. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen izometrie do), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- izometricky vnořen do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

POZNÁMKA 55. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$. Pro libovolná $x, y \in X$ pak totiž máme $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| = \|x - y\|$.

PŘÍKLAD 56. Prostor c je izomorfní prostoru c_0. Definujme zobrazení $T\colon c_0 \to c$ předpisem

$$(x_1, x_2, x_3 \dots) \mapsto (x_2 + x_1, x_3 + x_1, x_4 + x_1, \dots).$$

Pak T je dobře definováno, neboť $\lim(x_n + x_1) = x_1$. Snadno je vidět, že T je lineární. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n + x_1| \leq |x_n| + |x_1| \leq \|x\|_{c_0} + \|x\|_{c_0} = 2\|x\|_{c_0}$, a tedy $\|T(x)\|_c = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{n+1} + x_1| \leq 2\|x\|_{c_0}$. Zobrazení T je tedy spojité lineární zobrazení.

Dále definujme zobrazení $S\colon c \to c_0$ předpisem

$$(y_1, y_2, y_3, \dots) \mapsto (\lim y_n, y_1 - \lim y_n, y_2 - \lim y_n, y_3 - \lim y_n, \dots).$$

Pak S je dobře definováno, neboť $\lim_{k\to\infty}(y_k - \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{k\to\infty} y_k - \lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Snadno je vidět, že $T \circ S = Id_c$ a $S \circ T = Id_{c_0}$. Odtud plyne, že T je bijekce a S je lineární zobrazení inverzní k T. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $|y_k - \lim y_n| \leq |y_k| + |\lim y_n| = |y_k| + \lim |y_n| \leq |y_k| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \leq 2\|y\|_c$ a také $|\lim y_n| \leq \|y\|_c \leq 2\|y\|_c$. Tedy $\|S(y)\|_{c_0} \leq 2\|y\|_c$, takže zobrazení S je spojité.

Na závěr si ještě všimněme, že c_0 je vlastní podprostor c, který je izomorfní c.

◇

PŘÍKLAD 57. Prostor $L_1 = L_1([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_1, tj. prostor ℓ_1 je izometricky vnořen do L_1. Vskutku, označme $f_n = n(n+1)\chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})} \in L_1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $\|f_n\|_{L_1} = 1$. Definujme zobrazení $T\colon \ell_1 \to L_1$ předpisem $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, kde konvergence řady je míněna jako bodová konvergence funkcí na $[0,1]$. Pak zjevně $T(x)$ je dobře definovaná funkce na $[0,1]$, která je měřitelná, neboť je bodovou limitou měřitelných funkcí. Podle věty o záměně integrálu a řady pro nezáporné funkce máme

$$\int_0^1 |T(x)| = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |x_n| f_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty,$$

tedy $T(x) \in L_1$ a zároveň vidíme, že $\|T(x)\|_{L_1} = \|x\|_{\ell_1}$. Zobrazení T je zjevně lineární, takže dle Poznámky 55 je to lineární izometrie do.

◇

PŘÍKLAD 58. Prostor $C([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru c_0, tj. prostor c_0 je izometricky vnořen do $C([0,1])$. Vskutku, pro $n \in \mathbb{N}$ označme f_n funkci, která je rovna 0 na $[0,1] \setminus \left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n}\right)$, je afinní na $\left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}\right)$ a na $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)$ a splňuje $f_n\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 1$. Pak $\|f_n\|_{C([0,1])} = 1$. Definujme zobrazení $T\colon c_0 \to C([0,1])$ předpisem $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, kde konvergence řady je míněna jako bodová konvergence funkcí na $[0,1]$. Nechť $x \in c_0$. Pak zjevně $f = T(x)$ je dobře definovaná funkce na $[0,1]$, která je afinní na každém intervalu $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ a splňuje $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = x_n$. Je tedy spojitá na $(0,1]$. Abychom ukázali spojitost v 0 zprava, všimněme si, že $f(0) = 0$ a zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n| < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$. Položme $\delta = \frac{1}{2n_0}$. Nechť $t \in (0,\delta)$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ takové, že $t \in \left[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n}\right]$. Tedy $|f(t)| \leq |x_n| < \varepsilon$. Ukázali jsme, že $f \in C([0,1])$, neboli zobrazení T vskutku zobrazuje do prostoru $C([0,1])$. Dále T je zjevně lineární a platí $\|T(x)\|_{C([0,1])} = \sup_{t\in[0,1]}|T(x)(t)| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = \|x\|_{c_0}$, takže dle Poznámky 55 je to lineární izometrie do.

◇

PŘÍKLAD 59. Prostor $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_∞, a není tedy separabilní. Toto vnoření $I: \ell_\infty \to \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ je dáno předpisem $I(y) = T_y$, kde $T_y(x) = (y_n x_n)_{n=1}^\infty$ pro $x \in \ell_2$.

Vskutku je-li $y \in \ell_\infty$, pak pro $x \in \ell_2$ je $\sum_{n=1}^\infty |y_n x_n|^2 \leq \|y\|_\infty^2 \|x\|_2^2$, tedy T_y zobrazuje do ℓ_2. Snadno nahlédneme, že T_y je lineární a z předchozího odhadu plyne, že je spojité a $\|T_y\| \leq \|y\|$. Pro opačný odhad stačí vzít kanonické bázové vektory $e_n \in S_{\ell_2}$, neboť $\|T_y\| \geq \sup_n \|T_y(e_n)\| = \sup_n \|y_n e_n\| = \sup_n |y_n| = \|y\|$. Linearitu zobrazení I si lze snadno rozmyslet. Protože $\|I(y)\| = \|T_y\| = \|y\|$, je I izometrie do. Neseparabilita $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ pak plyne z Věty 26(b).

◇

TVRZENÍ 60. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.
(b) Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.
(c) Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do, pak $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený v Y.*

DůKAZ. (a) $\Rightarrow$ Máme $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$. Dále $T^{-1}\colon \operatorname{Rng} T \to X$ je spojité, platí tedy pro každé $y \in \operatorname{Rng} T$ nerovnost $\|T^{-1}(y)\| \leq \|T^{-1}\|\|y\|$. Tudíž $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\|\|T(x)\|$ pro každé $x \in X$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $X \neq \{0\}$, a tedy $\|T^{-1}\| > 0$. Požadovaná nerovnost tak platí s konstantami $C_1 = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ a $C_2 = \|T\|$.

$\Leftarrow$ Splňují-li kladné konstanty C_1, C_2 požadované nerovnosti, je T spojité a prosté: Je-li $T(x) = 0$, pak $\|x\| \leq \frac{1}{C_1}\|T(x)\| = 0$, tedy $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Existuje tedy inverzní operátor $T^{-1}\colon \operatorname{Rng} T \to X$, který je lineární. Pro libovolné $y \in \operatorname{Rng} T$ pak máme $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{C_1}\|T(T^{-1}(y))\| = \frac{1}{C_1}\|y\|$. Tedy i T^{-1} je spojité.

(b) Vezměme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{y_n\}$ v Y. Díky odhadu $\|T^{-1}(y_n) - T^{-1}(y_m)\| \leq \|T^{-1}\|\|y_n - y_m\|$ pro každé $m,n \in \mathbb{N}$ je cauchyovská i posloupnost $\{T^{-1}(y_n)\}$. Vzhledem k tomu, že X je úplný, konverguje $\{T^{-1}(y_n)\}$ k nějakému $x \in X$. Pak ovšem ze spojitosti operátoru T plyne $y_n = T(T^{-1}y_n) \to T(x)$, tedy i $\{y_n\}$ je konvergentní. Proto je Y úplný.

(c) Podle (b) je $\operatorname{Rng} T$ Banachův prostor. Tedy je uzavřený v Y dle Tvrzení 5(a).

□

FAKT 61. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$.*

(a) Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.
(b) Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.

DůKAZ. (a) Podle Tvrzení 60(a) existují konstanty $C > 0$ a $D > 0$ takové, že $C\|x\| \leq \|T(x)\|$ pro každé $x \in X$ a $D\|y\| \leq \|S(y)\|$ pro každé $y \in Y$. Pro každé $x \in X$ tedy máme $CD\|x\| \leq D\|T(x)\| \leq \left\|S\big(T(x)\big)\right\| = \|S \circ T(x)\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|$. Podle Tvrzení 60(a) to znamená, že $S \circ T$ je izomorfismus do.

(b) Pro každé $x \in X$ máme $\|S \circ T(x)\| = \left\|S\big(T(x)\big)\right\| = \|T(x)\| = \|x\|$ a aplikujeme Poznámku 55.

□

VĚTA 62. *Nechť X, $\widehat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v $\widehat{X}$ a Y je úplný. Nechť dále $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$ rozšiřující T, tj. $\widehat{T}\restriction_X = T$. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. Je-li T izometrie do, pak $\widehat{T}$ je též izometrie do.*

DŮKAZ. Dle Věty 16.8 existuje jednoznačně určené spojité zobrazení $\widehat{T}\colon \widehat{X} \to Y$, které rozšiřuje T. Ukážeme, že $\widehat{T}$ je lineární. Nechť $x, y \in \widehat{X}$. Pak existují posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ v X splňující $x_n \to x$, $y_n \to y$. Ze spojitosti sčítání (Tvrzení 2) plyne $x_n + y_n \to x + y$. Využijeme-li spojitost $\widehat{T}$, máme $\widehat{T}(x + y) = \lim \widehat{T}(x_n + y_n) = \lim T(x_n + y_n) = \lim\bigl(T(x_n) + T(y_n)\bigr) = \lim\bigl(\widehat{T}(x_n) + \widehat{T}(y_n)\bigr) = \widehat{T}(x) + \widehat{T}(y)$, kde poslední rovnost plyne opět z Tvrzení 2. Podobně pro $\alpha \in \mathbb{K}$ máme $\alpha x_n \to \alpha x$ a tedy $\widehat{T}(\alpha x) = \lim \widehat{T}(\alpha x_n) = \lim T(\alpha x_n) = \lim \alpha T(x_n) = \lim \alpha \widehat{T}(x_n) = \alpha \widehat{T}(x)$.

Konečně, $\|x_n\| \to \|x\|$ a tedy $\|\widehat{T}(x)\| = \lim\|\widehat{T}(x_n)\| = \lim\|T(x_n)\| \le \lim\|T\|\|x_n\| = \|T\|\|x\|$. Odtud plyne $\|\widehat{T}\| \le \|T\|$. Jelikož obrácená nerovnost platí díky tomu, že $\widehat{T}$ je rozšířením T, máme $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. Je-li T izometrie do, pak předchozí výpočet dává, že $\|\widehat{T}(x)\| = \lim\|T(x_n)\| = \lim\|x_n\| = \|x\|$, tedy i $\widehat{T}$ je izometrie do.

□

4. Konečněrozměrné prostory

Zásadním problémem při práci s nekonečněrozměrnými normovanými lineárním prostory je to, že uzavřené omezené množiny obecně nejsou kompaktní. Ve skutečnosti je tato vlastnost pro nekonečněrozměrné prostory charakteristická, jak uvidíme ve Větě 66.

LEMMA 63 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918)). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že* $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

DŮKAZ. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolme $u \in X \setminus Y$ a označme $d = \operatorname{dist}(u, Y)$. Protože Y je uzavřený, je $d > 0$ a můžeme nalézt $\eta > 0$ tak, aby $\frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$. Dále existuje $v \in Y$ takové, že $\|u - v\| \le d + \eta$. Položme $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$. Pak $x \in S_X$. Je-li $y \in Y$ libovolné, je $v + \|u - v\|y \in Y$, a tedy

$$\|x - y\| = \left\|\frac{u - v}{\|u - v\|} - y\right\| = \frac{\bigl\|u - \bigl(v + \|u - v\|y\bigr)\bigr\|}{\|u - v\|} \ge \frac{d}{d + \eta}.$$

Dostáváme tak, že $\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y\in Y}\|x - y\| \ge \frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$.

□

POZNÁMKA. Není-li Y uzavřený, nemusí předchozí tvrzení platit: podprostor c_{00} je hustý v c_0 a tedy pro každé $x \in c_0$ platí $\operatorname{dist}(x, c_{00}) = 0$. Pokud je Y uzavřený, nemusí existovat $x \in S_X$ s vlastností $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$. To ukážeme v Příkladu 65.

LEMMA 64. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in S_{X^*}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Existuje $x \in S_X$ splňující $|f(x)| = 1$.
(ii) Existuje $x \in S_X$ splňující $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) = 1$.
(iii) Existují $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ a $v \in \operatorname{Ker} f$ taková, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$.
(iv) Pro každé $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ existuje $v \in \operatorname{Ker} f$ takové, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$.

DŮKAZ. Ekvivalence (i)⇔(ii) ihned plyne z Lemmatu 52 a zjevně (iv)⇒(iii).

(iii)⇒(ii) Položme $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$. Pak pro každé $y \in \operatorname{Ker} f$ platí

$$\|x - y\| = \frac{\bigl\|u - \bigl(v + \|u - v\|y\bigr)\bigr\|}{\|u - v\|} \ge \frac{\operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)}{\|u - v\|} = 1.$$

Protože $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) \le \|x\| = 1$, platí $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) = 1$.

(i)⇒(iv) Nechť $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Položme $v = u - \frac{f(u)}{f(x)}x$. Pak $v \in \operatorname{Ker} f$ a $\|u - v\| = \left\|\frac{f(u)}{f(x)}x\right\| = |f(u)| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$ dle Lemmatu 52.

□

PŘÍKLAD 65. Nechť $Y = \left\{x \in c_0;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0\right\}$. Ukážeme, že Y je uzavřený podprostor c_0 a že neexistuje $x \in S_{c_0}$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$. Dále pro žádné $x \in c_0 \setminus Y$ neexistuje $y \in Y$ takové, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$.

Uvažme funkci $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Pak zřejmě f je lineární forma na c_0 a $Y = \operatorname{Ker} f$. Dále pro každé $x \in B_{c_0}$ máme $|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, tedy f je spojitý lineární funkcionál. Navíc pro $x = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ krát}}, 0, 0, \dots)$ máme $x \in B_{c_0}$ a $f(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^k}$, tedy $\|f\| = 1$.
K důkazu tvrzení nyní stačí podle Lemmatu 64 ověřit, že neexistuje $x \in S_{c_0}$ s vlastností $|f(x)| = 1$. Ale to je ihned vidět z pozorování, že pro každé $x \in S_{c_0}$ existuje index $j \in \mathbb{N}$ takový, že $|x_j| < 1$. Pak totiž

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

◇

VĚTA 66. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.
(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
(iii) B_X je kompaktní.
(iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.
(v) Každá lineární forma na X je spojitá.
(vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze X. Definujeme zobrazení $T\colon \mathbb{K}^n \to X$ předpisem

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Snadno je vidět, že T je lineární zobrazení, a díky vlastnostem báze je to bijekce. Protože „projekce" $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost T.

Ukažme nyní i spojitost inverze T^{-1}. Množina $S = S_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$ je kompaktní, neboť je uzavřená a omezená (vizte Větu 16.2). Protože T je spojitý, je množina $T(S)$ také kompaktní. Norma $\|\cdot\|_X$ je spojitá na X, a tedy nabývá na $T(S)$ minima $C > 0$ ($T(S)$ neobsahuje 0 díky prostotě T). Pro libovolné $y \in X \setminus \{0\}$ je $\frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2} \in S$, takže $C \leq \left\|T\left(\frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2}\right)\right\|_X = \frac{\|y\|_X}{\|T^{-1}(y)\|_2}$, odkud $\|T^{-1}(y)\|_2 \leq \frac{1}{C}\|y\|_X$.

(ii)⇒(iii) Je-li $T\colon \mathbb{K}^n \to X$ izomorfismus, je $T^{-1}(B_X)$ uzavřená omezená podmnožina $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, takže je kompaktní. Tedy i $B_X = T(T^{-1}(B_X))$ je kompaktní.

(iii)⇒(i) Nechť X je nekonečné dimenze. Indukcí najdeme posloupnost prvků $\{x_n\}$ v S_X tak, že $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$: V prvním kroku najdeme libovolné $x_1 \in S_X$. Máme-li $x_1, \dots, x_n$, je $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ vlastní a uzavřený podprostor X (Důsledek 25). Tedy dle Lemmatu 63 existuje x_{n+1} splňující $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$. Tím je konstrukce dokončena. Zkonstruovaná posloupnost $\{x_n\}$ pak nemá konvergentní podposloupnost, neboť jsou všechny její prvky od sebe navzájem vzdáleny alespoň o $\frac{1}{2}$. Tedy B_X není kompaktní.

(i)⇒(vi) Nechť $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Zafixujme nějakou bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru X. Označme eukleidovskou[11] normu na $\mathbb{K}^n$ jako $\|\cdot\|_e$. Nechť $T_1\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$ a $T_2\colon (X, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$ jsou izomorfismy jako v důkazu (i)⇒(ii). Pak $T_2^{-1} \circ T_1 = Id_X$, a tedy $Id_X\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus (Fakt 61), tj. normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní dle Tvrzení 13.

(vi)⇒(v) Předpokládejme, že na $(X, \|\cdot\|)$ existuje nespojitá lineární forma f. Pro každé $x \in X$ položíme $\|x\|_0 = \|x\| + |f(x)|$. Snadno je vidět, že $\|\cdot\|_0$ je norma na X, která je ovšem neomezená na $B_{(X, \|\cdot\|)}$. Tedy normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_0$ nejsou ekvivalentní.

(v)⇒(i) Není-li X konečněrozměrný, má nekonečnou algebraickou bázi $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že všechny vektory e_γ mají normu 1. Vyberme nekonečnou spočetnou množinu

[11] Eukleides (Ευκλείδης)

$\{\gamma_n;\ n\in\mathbb{N}\}\subset\Gamma$ a položme $f(e_{\gamma_n})=n$ pro $n\in\mathbb{N}$ a $f(e_\gamma)=0$ pro $\gamma\in\Gamma\setminus\{\gamma_n;\ n\in\mathbb{N}\}$. Pak f lze jednoznačně rozšířit na lineární formu na X, která ovšem není omezená na B_X.

(i)⇒(iv) Nechť Y je nějaký normovaný lineární prostor a $T\colon(X,\|\cdot\|)\to Y$ je lineární zobrazení. Zvolme bázi $\{e_1,\dots,e_n\}$ prostoru X a uvažujme normu $\|x\|_1=\left\|\sum_{i=1}^n x_ie_i\right\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$. Díky tvrzení (vi) stačí dokázat, že $T\colon(X,\|\cdot\|_1)\to Y$ je spojité. To je ale zřejmé z odhadu

$$\|T(x)\|=\left\|\sum_{i=1}^n x_iT(e_i)\right\|\le\sum_{i=1}^n|x_i|\|T(e_i)\|\le\max\bigl\{\|T(e_1)\|,\dots,\|T(e_n)\|\bigr\}\sum_{i=1}^n|x_i|.$$

(iv)⇒(v) je triviální.

□

Všimněme si, že podle předchozí věty jsou všechny uzavřené omezené množiny v konečněrozměrném prostoru X kompaktní. Vskutku, každá taková množina je uzavřenou podmnožinou nějaké koule $B(0,r)$, která je kompaktní, neboť je to spojitý obraz kompaktní koule B_X při zobrazení $x\mapsto rx$ (Tvrzení 2(c)).

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Stejně jako u každé abstraktní matematické struktury, tak i u normovaných lineárních prostorů potřebujeme znát základní operace, které tato struktura připouští. V případě normovaných lineárních prostorů studujeme jejich součiny, faktorprostory a algebraické a topologické doplňky podprostorů.

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$. Na kartézském součinu $X\times Y=\{(x,y);\ x\in X, y\in Y\}$ se zavádí struktura vektorového prostoru nad $\mathbb{K}$ tak, že operace se provádějí po složkách. Identifikujeme-li prostor X, resp. Y s podprostorem $\{(x,0);\ x\in X\}$, resp. $\{(0,y);\ x\in Y\}$, pak vektorový prostor $X\times Y$ je direktním součtem $X\oplus Y$.

Jsou-li nyní $(X,\|\cdot\|_X)$ a $(Y,\|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1\le p\le\infty$, pak funkce $(x,y)\mapsto\|(x,y)\|_p$, kde

$$\|(x,y)\|_p=\begin{cases}\bigl(\|x\|_X^p+\|y\|_Y^p\bigr)^{\frac1p} & \text{pro } p<\infty,\\ \max\{\|x\|_X,\|y\|_Y\} & \text{pro } p=\infty,\end{cases}\tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X\times Y$: Nechť $|\cdot|_p$ značí příslušnou kanonickou normu na $\mathbb{R}^2$. Pak zjevně $\|(x,y)\|_p=\bigl|\bigl(\|x\|_X,\|y\|_Y\bigr)\bigr|_p$. Nechť (x_1,y_1) a (x_2,y_2) jsou prvky $X\times Y$. Pak $\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_p=\|(x_1+x_2,y_1+y_2)\|_p=\bigl|\bigl(\|x_1+x_2\|_X,\|y_1+y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p$. Protože $\|x_1+x_2\|_X\le\|x_1\|_X+\|x_2\|_X$ a $\|y_1+y_2\|_Y\le\|y_1\|_Y+\|y_2\|_Y$, je snadno vidět z definice $|\cdot|_p$, že

$$\begin{aligned}\bigl|\bigl(\|x_1+x_2\|_X,\|y_1+y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p&\le\bigl|\bigl(\|x_1\|_X+\|x_2\|_X,\|y_1\|_Y+\|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p=\\&=\bigl|\bigl(\|x_1\|_X,\|y_1\|_Y\bigr)+\bigl(\|x_2\|_X,\|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p.\end{aligned}$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro $|\cdot|_p$ pak dostaneme

$$\bigl|\bigl(\|x_1\|_X,\|y_1\|_Y\bigr)+\bigl(\|x_2\|_X,\|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p\le\bigl|\bigl(\|x_1\|_X,\|y_1\|_Y\bigr)\bigr|_p+\bigl|\bigl(\|x_2\|_X,\|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p.$$

Tedy dohromady $\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_p\le\|(x_1,y_1)\|_p+\|(x_2,y_2)\|_p$. Pro $\alpha\in\mathbb{K}$ a $(x,y)\in X\times Y$ pak máme $\|\alpha(x,y)\|_p=\|(\alpha x,\alpha y)\|_p=\bigl|\bigl(\|\alpha x\|_X,\|\alpha y\|_Y\bigr)\bigr|_p=\bigl|\bigl(|\alpha|\|x\|_X,|\alpha|\|y\|_Y\bigr)\bigr|_p=\bigl||\alpha|\bigl(\|x\|_X,\|y\|_Y\bigr)\bigr|_p=|\alpha|\bigl|\bigl(\|x\|_X,\|y\|_Y\bigr)\bigr|_p=|\alpha|\|(x,y)\|_p$.

DEFINICE 67. Nechť $(X,\|\cdot\|_X)$ a $(Y,\|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1\le p\le\infty$. Pak prostorem $X\oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X\times Y,\|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Je vidět, že prostor X je izometrický podprostoru $\{(x,0)\in X\oplus_p Y;\ x\in X\}$ a prostor Y je izometrický podprostoru $\{(0,y)\in X\oplus_p Y;\ y\in Y\}$.

Protože $\|(x,y)\|_p = \left|\left(\|x\|_X, \|y\|_Y\right)\right|_p$ a všechny normy na $\mathbb{R}^2$ jsou ekvivalentní (Věta 11), plyne odtud snadno, že normy $\|\cdot\|_p$ na $X \times Y$ jsou ekvivalentní, neboli prostory $X \oplus_p Y$ a $X \oplus_q Y$ jsou izomorfní pro libovolná $1 \le p, q \le \infty$ (Tvrzení 13).

Všimněme si, že metrika indukovaná normou $X \oplus_\infty Y$ odpovídá součinové metrice na metrickém prostoru $X \times Y$. Protože součin úplných metrických prostorů je úplný (Věta 16.6), plyne odtud, že jsou-li X a Y Banachovy prostory, pak i $X \oplus_\infty Y$ je Banachův prostor. Vzhledem k výše zmíněné ekvivalenci norem tedy z Tvrzení 60(b) plyne, že jsou-li X a Y Banachovy prostory, pak i $X \oplus_p Y$ je Banachův prostor pro libovolné $1 \le p \le \infty$.

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Jako nulový vektor slouží prvek $\widehat{0} = Y$. Uvědomme si, že operace jsou dobře definovány, neboť nezáleží na výběru reprezentantů příslušných tříd: Jsou-li totiž $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ takové, že $\widehat{x_1} = \widehat{x_2}$ a $\widehat{y_1} = \widehat{y_2}$, pak $x_1 - x_2 \in Y$ a $y_1 - y_2 \in Y$. Proto $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \in Y$, což znamená, že $\widehat{x_1 + y_1} = \widehat{x_2 + y_2}$. Podobně, $\alpha x_1 - \alpha x_2 = \alpha(x_1 - x_2) \in Y$, a tedy $\widehat{\alpha x_1} = \widehat{\alpha x_2}$.

S výše zmíněnými operacemi tvoří X/Y vektorový prostor.

DEFINICE 68. Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktorprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y. Dále definujeme tzv. kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Snadno je z definice vidět, že kanonické kvocientové zobrazení je lineární a na.

Nechť nyní X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Položíme-li

$$\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y),$$

je $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ normovaný lineární prostor: Je-li $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, máme

$$\begin{aligned}\|\alpha\widehat{x}\|_{X/Y} = \|\widehat{\alpha x}\|_{X/Y} &= \inf_{z \in Y} \|\alpha x + z\| = \inf_{z \in Y} \|\alpha x + \alpha z\| = \\ &= \inf_{z \in Y} |\alpha| \|x + z\| = |\alpha| \inf_{z \in Y} \|x + z\| = |\alpha| \|\widehat{x}\|_{X/Y}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\|\widehat{x} + \widehat{y}\|_{X/Y} = \|\widehat{x + y}\|_{X/Y} &= \inf_{z \in Y} \|x + y + z\| = \inf_{z_1, z_2 \in Y} \|x + y + z_1 + z_2\| \le \\ &\le \inf_{z_1, z_2 \in Y} \big(\|x + z_1\| + \|y + z_2\|\big) = \inf_{z_1 \in Y} \inf_{z_2 \in Y} \big(\|x + z_1\| + \|y + z_2\|\big) = \\ &= \inf_{z_1 \in Y} \|x + z_1\| + \inf_{z_2 \in Y} \|y + z_2\| = \|\widehat{x}\|_{X/Y} + \|\widehat{y}\|_{X/Y}.\end{aligned}$$

Konečně, pro $x \in X$ platí, že $\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \operatorname{dist}(x, Y) = 0$ právě tehdy, když $x \in \overline{Y} = Y$, tedy právě když $\widehat{x} = 0$. (Všimněme si, že kvůli poslední vlastnosti je nutná uzavřenost Y.)

Výše zmíněná norma se nazývá kanonická kvocientová norma a v kontextu normovaných lineárních prostorů budeme vždy chápat faktorprostor X/Y jako normovaný lineární prostor opatřený touto normou.

TVRZENÍ 69. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

DŮKAZ. Již víme, že q je lineární a na. Dále $\|q(x)\|_{X/Y} = \|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y\in Y}\|x+y\| \leq \|x\|$ pro každé $x \in X$, tedy q je spojité. Odtud také dostáváme, že $q(U_X) \subset U_{X/Y}$. Obráceně, je-li $\widehat{x} \in U_{X/Y}$ libovolné, pak $1 > \|\widehat{x}\|_{X/Y}$, a tedy z definice normy existuje $y \in \widehat{x}$ splňující $\|y\| < 1$. Toto y splňuje $q(y) = \widehat{x}$. Odtud plyne $U_{X/Y} \subset q(U_X)$ a dohromady dostáváme $q(U_X) = U_{X/Y}$. Konečně, je-li Y vlastní, pak je X/Y netriviální a $\sup_{z\in U_{X/Y}}\|z\| = 1$. Aplikací Lemmatu 45(b) tak dostaneme $\|q\| = 1$.

□

VĚTA 70. *Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.*

DŮKAZ. Ukážeme, že jsou splněny předpoklady Věty 30. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{x_n}$ je absolutně konvergentní řada v X/Y. Z definice normy najdeme prvky $y_n \in \widehat{x_n}$ splňující $\|y_n\| \leq \|\widehat{x_n}\| + \frac{1}{2^n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ je absolutně konvergentní řada v X, a tedy je konvergentní (Věta 30). Ze spojitosti kanonického kvocientového zobrazení q dostáváme $q\big(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} q(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{x_n}$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{x_n}$ je konvergentní.

□

DEFINICE 71. Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A\oplus B$) pokud $A\cap B = \{0\}$ a $X = A+B = \operatorname{span}(A\cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá algebraický doplněk A v X.

Připomeňme, že $X = A \oplus B$, právě když pro každé $x \in X$ existují jednoznačně určené vektory $x_A \in A$ a $x_B \in B$ splňující $x = x_A + x_B$.

DEFINICE 72. Nechť X je množina. Zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

FAKT 73. *Nechť X je množina.*

(a) Je-li $P\colon X \to X$ projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.
(b) Je-li $Y \subset X$ a $P\colon X \to Y$ zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak P je projekce X na Y.

DŮKAZ. (a) Pro $y \in \operatorname{Rng} P$ existuje $x \in X$ splňující $y = P(x)$, a tedy $P(y) = P(P(x)) = P(x) = y$.

(b) Pro $x \in X$ je $P(x) \in Y$, a tedy $P(P(x)) = P\restriction_Y(P(x)) = P(x)$.

□

Zásadní význam mají projekce lineární (tj. projekce, které jsou zároveň lineárními zobrazeními). Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Je-li $X = A \oplus B$, pak můžeme definovat zobrazení $P_A\colon X \to X$ a $P_B\colon X \to X$ pomocí $P_A(x) = x_A \in A$ a $P_B(x) = x_B \in B$, kde $x = x_A + x_B$ je výše zmíněný jednoznačný rozklad. Pak P_A i P_B jsou lineární projekce: Nechť $x, y \in X$ a $x = x_A + x_B$, $y = y_A + y_B$ jsou příslušné rozklady. Pak $x + y = (x_A + x_B) + (y_A + y_B) = (x_A + y_A) + (x_B + y_B)$. Jelikož $x_A + y_A \in A$ a $x_B + y_B \in B$, z jednoznačnosti rozkladu plyne $P_A(x + y) = x_A + y_A = P_A(x) + P_A(y)$ a $P_B(x + y) = x_B + y_B = P_B(x) + P_B(y)$. Podobně, pro $\alpha \in \mathbb{K}$ máme $\alpha x = \alpha(x_A + x_B) = \alpha x_A + \alpha x_B$. Protože $\alpha x_A \in A$ a $\alpha x_B \in B$, z jednoznačnosti rozkladu plyne $P_A(\alpha x) = \alpha x_A = \alpha P_A(x)$ a $P_B(\alpha x) = \alpha x_B = \alpha P_B(x)$. Konečně, $P_A(P_A(x)) = P_A(x_A) = x_A = P_A(x)$, neboť $x_A = x_A + 0$ je jednoznačný rozklad x_A. Analogicky dostaneme, že i P_B je projekce.

Projekce P_A a P_B nazýváme projekce příslušné rozkladu $X = A\oplus B$. Vzhledem k následujícímu tvrzení se též projekce P_A nazývá projekce na A rovnoběžná s B (a analogicky pro projekci P_B).

TVRZENÍ 74. *Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ a $\operatorname{Ker} P_B = A$. Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.*

DŮKAZ. Je $(P_A + P_B)(x) = P_A(x) + P_B(x) = x_A + x_B = x$. Dále zjevně platí $\operatorname{Rng} P_A \subset A$. Na druhou stranu, je-li $x \in A$, pak $x = x_A + 0$ je jednoznačný rozklad a tedy $P_A(x) = x$ a $P_B(x) = 0$. To znamená, že $\operatorname{Rng} P_A = A$ a $A \subset \operatorname{Ker} P_B$. Konečně, je-li $P_B(x) = 0$, pak $x = x_A + 0$, a tedy $x \in A$. Ostatní dvě rovnosti se dokážou analogicky.

Nechť nyní $P\colon X \to X$ je lineární projekce. Pak pro každé $x \in X$ platí $x = P(x) + \big(x - P(x)\big)$, kde $P(x) \in \operatorname{Rng} P$ a $x - P(x) \in \operatorname{Ker} P$, a tedy $A + B = X$. Je-li $x \in A \cap B$, pak $x = P(y)$ pro nějaké $y \in X$ a zároveň $0 = P(x) = P \circ P(y) = P(y) = x$, tj. $A \cap B = \{0\}$. Proto $X = A \oplus B$. Z rozkladu $x = P(x) + \big(x - P(x)\big)$, který je díky $X = A \oplus B$ nutně jednoznačný, je pak ihned vidět, že $P = P_A$.

□

VĚTA 75. *Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Prostor Y má algebraický doplněk v X.

(b) Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y (pomocí kanonického kvocientového zobrazení); speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

DŮKAZ. (a) Nechť $B \subset Y$ je báze Y. Pak B lze doplnit na bázi celého prostoru, existuje tedy lineárně nezávislá množina $C \subset X$ taková, že $B \cup C$ je báze X. Položme $Z = \operatorname{span} C$. Pak je ihned vidět, že $X = Y + Z$. Pokud by $Y \cap Z$ obsahoval nenulový prvek x, pak x je netriviální lineární kombinací prvků B a zároveň netriviální lineární kombinací prvků C. To je spor s jednoznačností vyjádření pomocí lineární kombinace prvků $B \cup C$.

(b) Nechť $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení. Ukažme, že $q\restriction_A$ je algebraický izomorfismus A na X/Y. Ověřme nejprve prostotu: Je-li $q\restriction_A(a) = q(a) = \widehat{a} = 0$ pro nějaké $a \in A$, pak $a \in Y$, a tedy $a = 0$. K důkazu surjektivity vezměme $\widehat{x} \in X/Y$ a rozložme $x = x_Y + x_A$, kde $x_Y \in Y$ a $x_A \in A$. Pak $x - x_A = x_Y \in Y$, a tedy $q\restriction_A(x_A) = q(x_A) = q(x) = \widehat{x}$.

□

DEFINICE 76. Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzí Y v X (značíme $\operatorname{codim} Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

DEFINICE 77. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

POZNÁMKA. Protože $P_B = Id - P_A$ (Tvrzení 74), k tomu, aby platilo $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$, stačí spojitost jen jedné z projekcí (druhá je pak spojitá automaticky). Díky Tvrzení 74 je tedy podprostor A komplementovaný v X, právě když existuje spojitá lineární projekce z X na A.

Všimněme si také, že pro nenulovou spojitou lineární projekci P v normovaném lineárním prostoru X vždy platí, že $\|P\| \geq 1$, neboť existuje $x \in X$ takový, že $y = P(x) \neq 0$, a protože $P(y) = P(x) = y$, je $\big\|P\big(\frac{y}{\|y\|}\big)\big\| = \frac{\|P(y)\|}{\|y\|} = 1$.

VĚTA 78. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.*

(a) Je-li $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, jsou Y a Z uzavřené.

(b) Je-li X Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde Y a Z jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$.

DŮKAZ. (a) $Y = \operatorname{Ker} P_Z$ a $Z = \operatorname{Ker} P_Y$ (Tvrzení 74), jejich uzavřenost tedy plyne ze spojitostí projekcí P_Y a P_Z. (b) bude dokázáno později, konkrétně na str. 58.

□

Díky předchozí větě a Větě 75 vidíme, že neuzavřené podprostory mají algebraický, ale nemají topologický doplněk (tj. nejsou komplementované).

VĚTA 79. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když zobrazení $T\colon X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ je izomorfismus.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Je-li $(y, z) \in Y \oplus_1 Z$, pak $T(y + z) = (y, z)$, tedy T je na. Dále pro každé $x \in X$ máme

$$\begin{aligned}\|x\| = \|P_Y(x) + P_Z(x)\| \leq \|P_Y(x)\| + \|P_Z(x)\| = \big\|\big(P_Y(x), P_Z(x)\big)\big\|_1 = \|T(x)\|_1 \leq \\ \leq \big(\|P_Y\| + \|P_Z\|\big)\|x\|,\end{aligned}$$

tedy T je izomorfismus dle Tvrzení 60(a).

$\Leftarrow$ Pro každé $x \in X$ platí $\|P_Y(x)\| \leq \|P_Y(x)\| + \|P_Z(x)\| = \|T(x)\|_1 \leq \|T\|\|x\|$, což znamená, že P_Y je spojitá projekce.

$\square$

6. Hilbertovy prostory

Význačnou třídou normovaných lineárních prostorů jsou ty, jejichž norma je generována skalárním součinem. Skalární součin je struktura, která „lineárním“ způsobem definuje kolmost vektorů v prostoru a v důsledku generuje strukturu normovaného lineárního prostoru (Definice 80 a 90). V prostorech se skalárním součinem pak platí základní geometrické poučky, na které jsme zvyklí z eukleidovské roviny (Tvrzení 86). Nekonečněrozměrné prostory se skalárním součinem jsou tak nekonečněrozměrnou variantou klasických eukleidovských prostorů $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ a $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$. Klíčovým rysem úplných prostorů se skalárním součinem, tzv. Hilbertových prostorů (Definice 82), je možnost vyjádřit jejich prvky pomocí rozvoje do ortonormální báze (Důsledek 114).

DEFINICE 80. Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,
(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,
(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,
(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme prostor se skalárním součinem.

Uvědomme si, že z (i) a (ii) plyne, že $\langle 0, y\rangle = \langle y, 0\rangle = 0$ pro každé $y \in X$. Dále si uvědomme, že ve druhé proměnné je skalární součin „sdruženě lineární“, tj. $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$ pro libovolná $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. V reálném případě je to tedy bilineární forma na X.

TVRZENÍ 81 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost[12]). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak*

(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ pro každé $x, y \in X$.
(ii) Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X.

DŮKAZ. K důkazu (i) zvolme $x, y \in X$. Pokud $y = 0$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $y \neq 0$, tj. $\langle y, y\rangle > 0$. Pak je funkce

$$t \mapsto \langle x - ty, x - ty\rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

kvadratický polynom nezáporný na $\mathbb{R}$, protože

$$\begin{aligned}0 \leq \langle x - ty, x - ty\rangle = \langle x, x\rangle - t\langle y, x\rangle - t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle - t\big(\langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle}\big) + t^2\langle y, y\rangle = \\ = t^2\langle y, y\rangle - 2t\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle.\end{aligned}$$

Tento polynom tedy musí mít nekladný diskriminant, tj. $4(\operatorname{Re}\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$. Dostáváme tak

$$|\operatorname{Re}\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

pro každou dvojici $x, y \in X$.

Mějme nyní opět dány vektory $x, y \in X$ a vezměme $\alpha \in \mathbb{C}$ z jednotkové kružnice splňující $\alpha\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$. Pak z právě dokázané nerovnosti použité pro αx a y máme

$$\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \geq |\operatorname{Re}\langle \alpha x, y\rangle| = |\operatorname{Re}\alpha\langle x, y\rangle| = |\langle x, y\rangle|.$$

[12] Verzi v eukleidovských prostorech používali Joseph-Louis Lagrange (roz. Giuseppe Luigi Lagrangia) a Augustin-Louis Cauchy, integrální verzi dokázal Cauchyův žák Viktor Jakovlevič Buňakovskij (Виктор Яковлевич Буняковский) (1859) a též Karl Hermann Amandus Schwarz (1885), obecnou verzi dokázal John von Neumann (János Lajos Neumann) (1930).

(ii) Vlastnosti normy plynou z vlastností skalárního součinu a tvrzení (i), neboť trojúhelníkovou nerovnost odvodíme pomocí výpočtu

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|x\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.\end{aligned} \tag{2}$$

□

Na prostoru skalárním součinem je dle předchozího tvrzení přirozeně indukována norma. Pokud nebude řečeno jinak, budeme tedy vždy chápat prostor se skalárním součinem zároveň jako normovaný lineární prostor s touto kanonickou normou.

DEFINICE 82. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se nazývá Hilbertův[13] prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

PŘÍKLAD 83. Snadno se ověří, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normou $\|\cdot\|_2$ jsou Hilbertovy prostory se skalárním součinem $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$. Obecněji, je-li μ míra, pak prostor $L_2(\mu)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f,g\rangle = \int f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$. Speciálně, ℓ_2 je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i\overline{y_i}$.

Podprostor ℓ_2 tvořený vektory pouze s konečně mnoha nenulovými souřadnicemi je prostor se skalárním součinem, který není Hilbertův.

◇

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem. Je-li Y podprostor X, pak $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, kde uvažujeme restrikci skalárního součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na $Y\times Y$, je zjevně též prostor se skalárním součinem. Je-li navíc X Hilbertův a Y je uzavřený, pak dle Tvrzení 5 je Y též Hilbertův prostor.

TVRZENÍ 84. *Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$.*
(a) Pro libovolné $y\in X$ je $f_y\colon x\mapsto\langle x,y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na X a $\|f_y\| = \|y\|$.
(b) Funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).

DŮKAZ. (a) Protože skalární součin je lineární v první souřadnici a $|f_y(x)| = |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ pro každé $x\in X$ (Cauchyova-Schwarzova nerovnost, Tvrzení 81), je $f_y\in X^*$ a $\|f_y\|\leq\|y\|$. Je-li navíc $y\neq 0$, pak $\frac{y}{\|y\|}\in S_X$ a $f_y\big(\frac{y}{\|y\|}\big) = \big\langle\frac{y}{\|y\|}, y\big\rangle = \|y\|$, a tedy $\|f_y\| = \|y\|$.

(b) Připomeňme, že na $X\times X$ uvažujeme součinovou metriku $\rho((x,y),(u,v)) = \max\{\|x-u\|, \|y-v\|\}$. Zvolme $R>0$ a $(x,y),(u,v)\in X\times X$ splňující $\rho((x,y),0)\leq R$, $\rho((u,v),0)\leq R$. Pak díky Tvrzení 81 máme

$$\begin{aligned}|\langle x,y\rangle - \langle u,v\rangle| &\leq |\langle x,y\rangle - \langle x,v\rangle| + |\langle x,v\rangle - \langle u,v\rangle| = |\langle x,y-v\rangle| + |\langle x-u,v\rangle| \leq \\ &\leq \|x\|\|y-v\| + \|v\|\|x-u\| \leq R\big(\|x-u\| + \|y-v\|\big) \leq 2R\rho\big((x,y),(u,v)\big).\end{aligned}$$

□

Při počítání s normou v prostorech se skalárním součinem budeme často používat výpočet z (2), zformulujme jej proto explicitně:

FAKT 85. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x,y\in X$. Pak*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle.$$

Následující tvrzení je okamžitým důsledkem tohoto faktu.

TVRZENÍ 86 (rovnoběžníkové pravidlo). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x,y\in X$ platí*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Je-li norma indukovaná skalárním součinem, pak tento skalární součin lze vyjádřit pouze pomocí normy:

---

[13] David Hilbert

TVRZENÍ 87 (polarizační vzorec). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$
v reálném případě, resp.
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\big)$$
v komplexním případě.

DŮKAZ. Vzorec pro reálný prostor plyne ihned z Faktu 85. V komplexním případě máme
$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2 =\\ &\quad= 4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + i\big(\|x\|^2 + \|iy\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, iy\rangle\big) - i\big(\|x\|^2 + \|{-iy}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, -iy\rangle\big) =\\ &\quad= 4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + 4i\operatorname{Re}\langle x, iy\rangle = 4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + 4i\operatorname{Re}\big(-i\,\langle x,y\rangle\big) = 4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + 4i\operatorname{Im}\langle x,y\rangle = 4\langle x,y\rangle,\end{aligned}$$
neboť pro $a, b \in \mathbb{R}$ je $\operatorname{Re}\big(-i\,(a+ib)\big) = \operatorname{Re}(b - ia) = b = \operatorname{Im}(a+ib)$.

□

DŮSLEDEK 88. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

DŮKAZ. Díky polarizačnímu vzorci je $\langle T(x), T(y)\rangle_Y = \frac{1}{4}\big(\|T(x)+T(y)\|_Y^2 - \|T(x)-T(y)\|_Y^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|T(x+y)\|_Y^2 - \|T(x-y)\|_Y^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|_X^2 - \|x-y\|_X^2\big) = \langle x,y\rangle_X$, pokud jsou prostory reálné. V komplexním případě je výpočet analogický.

□

VĚTA 89. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak na prostoru $X \oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na X a Y, a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li X, Y Hilbertovy prostory, pak $X \oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.*

DŮKAZ. Pro (x, y), $(u, v) \in X \times Y$ definujme $\langle (x,y), (u,v)\rangle = \langle x, u\rangle_X + \langle y, v\rangle_Y$. Tento vzorec definuje skalární součin na $X \times Y$: Pro (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(u, v) \in X \times Y$ máme
$$\begin{aligned}\big\langle (x_1,y_1) + (x_2,y_2), (u,v)\big\rangle &= \big\langle (x_1+x_2, y_1+y_2), (u,v)\big\rangle = \langle x_1+x_2, u\rangle_X + \langle y_1+y_2, v\rangle_Y =\\ &= \langle x_1,u\rangle_X + \langle x_2,u\rangle_X + \langle y_1,v\rangle_Y + \langle y_2,v\rangle_Y =\\ &= \langle (x_1,y_1),(u,v)\rangle + \langle (x_2,y_2),(u,v)\rangle.\end{aligned}$$
Dále pro (x, y), $(u, v) \in X \times Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ máme
$$\langle \alpha(x,y),(u,v)\rangle = \langle (\alpha x, \alpha y),(u,v)\rangle = \langle \alpha x, u\rangle_X + \langle \alpha y, v\rangle_Y = \alpha\langle x,u\rangle_X + \alpha\langle y,v\rangle_Y = \alpha\langle (u,v),(x,y)\rangle,$$
$$\langle (x,y),(u,v)\rangle = \langle x,u\rangle_X + \langle y,v\rangle_Y = \overline{\langle u,x\rangle_X} + \overline{\langle v,y\rangle_Y} = \overline{\langle u,x\rangle_X + \langle v,y\rangle_Y} = \overline{\langle (u,v),(x,y)\rangle}.$$
Konečně, $\langle (x,y),(x,y)\rangle = \langle x,x\rangle_X + \langle y,y\rangle_Y = \|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2 = \|(x,y)\|_2^2$, což dokazuje i poslední dvě vlastnosti skalárního součinu a též to, že výše uvedený skalární součin na $X \times Y$ indukuje normu $X \oplus_2 Y$.

□

DEFINICE 90. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá ortogonální doplněk A.

FAKT 91 (Pythagorova[14] věta, asi 500 p.n.l.). *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak*
$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

[14]Pythagoras ze Samu (Πυθαγόρας ο Σάμιος)

Obecněji, jsou-li $x_1, \dots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

DŮKAZ. První vzorec ihned plyne z Faktu 85. Druhý vzorec plyne z prvního snadno indukcí, uvědomíme-li si, že $x_{i+1} \perp (x_1 + \ldots + x_i)$ pro $i = 1, \dots, n-1$.

□

TVRZENÍ 92. *Nechť X je prostor se skalárním součinem.*
(a) Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^\perp = \{0\}$.
(b) $\{0\}^\perp = X$ a $X^\perp = \{0\}$.
(c) Pro $A \subset X$ je $A^\perp = (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$.
(d) Pro $A \subset X$ je $A^\perp$ uzavřený podprostor X.
(e) Je-li $X = Y + Z$ pro nějaké podprostory $Y, Z \subset X$ takové, že $Y \perp Z$, pak $Z = Y^\perp$, $Y = Z^\perp$ a $X = Y \oplus Z$.

DŮKAZ. (a) Je-li $x \in Y \cap Y^\perp$, pak $\langle x, x\rangle = 0$, tedy $x = 0$.

(b) První rovnost je zřejmá, druhá plyne z (a), neboť $X^\perp = X \cap X^\perp$.

(c) Zjevně $A^\perp \supset (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$. Na druhou stranu nechť $y \in A^\perp$. Pak $f_y \colon x \mapsto \langle x, y\rangle$ je spojitý lineární funkcionál na X (Tvrzení 84(a)) a $A \subset \operatorname{Ker} f_y$. Tedy $\overline{\operatorname{span}} A \subset \operatorname{Ker} f_y$, což znamená, že $\langle x, y\rangle = 0$ pro každé $x \in \overline{\operatorname{span}} A$.

(d) Pro libovolné $y \in X$ je $f_y \colon x \mapsto \langle x, y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na X. Tedy $A^\perp = \bigcap_{y \in A} \{y\}^\perp = \bigcap_{y \in A} \operatorname{Ker} f_y$ je uzavřený podprostor X.

(e) Dle předpokladu je $Z \subset Y^\perp$. Na druhou stranu, je-li $x \in Y^\perp$, pak $x = y + z$, kde $y \in Y$ a $z \in Z \subset Y^\perp$. Tedy $y = x - z \in Y^\perp$, což znamená, že $y \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, neboli $x = z \in Z$. Tudíž $Y^\perp = Z$. Záměnou rolí Y a Z obdržíme rovnost $Z^\perp = Y$. Konečně, poslední tvrzení plyne z (a).

□

LEMMA 93. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.*

DŮKAZ. Máme $\langle x - z, y\rangle = 0$ pro každé $y \in X$, takže speciálně $\|x - z\|^2 = \langle x - z, x - z\rangle = 0$.

□

VĚTA 94 (Frigyes Riesz, 1934). *Nechť C je neprázdná uzavřená konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

DŮKAZ. Je-li $x \in C$, stačí volit $y = x$. Není-li x v C, užijeme rovnost $\operatorname{dist}(x, C) = \operatorname{dist}(0, C - x)$ k pozorování, že lze bez újmy na obecnosti předpokládat $x = 0 \notin C$. Označme $d = \operatorname{dist}(0, C)$ a najděme posloupnost $\{y_n\}$ v C splňující $\|y_n\| \to d$. Tato posloupnost je cauchyovská: Nechť $0 < \varepsilon \le 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|y_n\| < d + \varepsilon$ pro každé $n \ge n_0$. Pro libovolná $n, k \ge n_0$ pak z rovnoběžníkového pravidla plyne, že

$$\begin{aligned}\|y_n - y_k\|^2 &= 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - \|y_n + y_k\|^2 = 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - 4\left\|\frac{y_n + y_k}{2}\right\|^2 \le \\ &\le 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - 4d^2 < 4(d + \varepsilon)^2 - 4d^2 = 4\varepsilon^2 + 8d\varepsilon \le (4 + 8d)\varepsilon.\end{aligned}$$

(Ve výpočtu jsme použili fakt, že C je konvexní, a tedy $\frac{1}{2}(y_n + y_k) \in C$.) Posloupnost $\{y_n\}$ tudíž konverguje k nějakému prvku $y \in H$, který však leží v C díky uzavřenosti C. Pak $\|y\| = \lim \|y_n\| = d$.

Předpokládejme nyní, že $y_1, y_2 \in C$ splňují $\|y_1\| = \|y_2\| = d$. Z rovnoběžníkového pravidla a faktu $\frac{y_1 + y_2}{2} \in C$ dostáváme

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 2\big(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\big) - \|y_1 + y_2\|^2 = 4d^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 \le 0.$$

Tedy $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, tj. $y_1 = y_2$. Tím je důkaz jednoznačnosti dokončen.

□

PŘÍKLAD 95. Není-li H Hilbertův pak, Věta 94 nemusí platit: Nechť C je jednotková koule v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ a $x = (2, 0) \in \mathbb{R}^2$. Pak pro každé $t \in [-1, 1]$ je $\|x - (1, t)\|_\infty = 1 = \operatorname{dist}(x, C)$, tedy nejbližší prvek není určen jednoznačně. Dokonce nejbližší prvek nemusí ani existovat, vizte Příklad 65.

$\diamond$

LEMMA 96 (F. Riesz, 1934). *Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \perp Y$.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Pro každé $z \in Y$ platí $y - z \in Y$, a tedy $x - y \perp y - z$. Z Pythagorovy věty (Fakt 91) tak máme $\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$. Odtud $\|x-y\| = \min\{\|x-z\|;\ z \in Y\} = \operatorname{dist}(x, Y)$.

$\Rightarrow$ Nechť $z \in Y$ je libovolné. Chceme dokázat, že $\langle x - y, z\rangle = 0$. Zřejmě lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\|z\| = 1$. Položme $\alpha = \langle x - y, z\rangle$. Pak $y + \alpha z \in Y$, a tedy

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &\leq \|x - (y + \alpha z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|\alpha z\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x - y, \alpha z\rangle = \\ &= \|x - y\|^2 + |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}\big(\overline{\alpha}\langle x - y, z\rangle\big) = \|x - y\|^2 + |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\alpha) = \|x - y\|^2 - |\alpha|^2.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $|\alpha|^2 \leq 0$, a tedy $\alpha = 0$.

$\square$

DEFINICE 97. Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P : X \to X$ je projekce. Pokud $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$, pak P se nazývá ortogonální.

TVRZENÍ 98. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P : X \to X$ je zobrazení takové, že $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$. Pak P je ortogonální lineární projekce.*

DŮKAZ. Položme $Y = \operatorname{span} \operatorname{Rng} P$. Je-li $z \in \operatorname{Rng} P$, pak $z - P(z) \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, a tedy $P(z) = z$. Dle Faktu 73(b) to znamená, že P je projekce. Dále nechť $x, y \in X$. Pak $x - P(x) \in Y^\perp$ a $y - P(y) \in Y^\perp$. Tedy $x + y - P(x) - P(y) \in Y^\perp$. Protože podle předpokladu je i $x + y - P(x + y) \in Y^\perp$, dostáváme, že $P(x + y) - P(x) - P(y) = x + y - P(x) - P(y) - \big(x + y - P(x + y)\big) \in Y^\perp$. Tedy $P(x + y) - P(x) - P(y) \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, neboli $P(x + y) = P(x) + P(y)$. Analogicky pro $\alpha \in \mathbb{K}$ je $\alpha(x - P(x)) \in Y^\perp$ a $\alpha x - P(\alpha x) \in Y^\perp$, a tedy $P(\alpha x) - \alpha P(x) \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$.

$\square$

VĚTA 99. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P : X \to X$ je lineární projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) P *je ortogonální.*
(ii) $\operatorname{Ker} P \perp \operatorname{Rng} P$.
(iii) $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Rng} P)^\perp$ *a* $\operatorname{Rng} P = (\operatorname{Ker} P)^\perp$.
(iv) $\|x - P(x)\| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Rng} P)$ *pro každé* $x \in X$.
(v) $x - P(x) \perp P(x)$ *pro každé* $x \in X$.
(vi) $\|P(x)\|^2 = \langle P(x), x\rangle$ *pro každé* $x \in X$.
(vii) P *je spojitá a* $\|P\| \leq 1$ *(tj.* $P = 0$*, nebo* $\|P\| = 1$*).*

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) plyne z toho, že pro $x \in \operatorname{Ker} P$ je $x = x - P(x)$, (ii)$\Rightarrow$(i) plyne z toho, že $x - P(x) \in \operatorname{Ker} P$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) plyne z Tvrzení 74 a 92(e), (iii)$\Rightarrow$(ii) je triviální.

(i)$\Leftrightarrow$(iv) plyne z Lemmatu 96.

(i)$\Rightarrow$(v) je triviální.

(v)$\Rightarrow$(vi) $\|P(x)\|^2 = \langle P(x), P(x)\rangle = \langle P(x), x\rangle - \langle P(x), x - P(x)\rangle = \langle P(x), x\rangle$.

(vi)$\Rightarrow$(vii) Pro libovolné $x \in X$ je $\|P(x)\|^2 = \langle P(x), x\rangle = |\langle P(x), x\rangle| \leq \|P(x)\|\|x\|$. Odtud plyne, že $\|P(x)\| \leq \|x\|$.

(vii)$\Rightarrow$(ii) Zvolme libovolně $x \in \operatorname{Rng} P$ a $z \in \operatorname{Ker} P$ a položme $Y = \operatorname{span}\{z\}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$ je $\|x\| = \|P(x)\| = \|P(x - \alpha z)\| \leq \|x - \alpha z\|$, což znamená, že $\|x\| = \operatorname{dist}(x, Y)$. Podle Lemmatu 96 je tedy $x \perp z$.

$\square$

VĚTA 100 (F. Riesz, 1934). *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = Y \oplus_t Y^\perp$ a H je izometrický prostoru $Y \oplus_2 Y^\perp$ pomocí kanonického zobrazení $T\colon x \mapsto \big(P_Y(x), P_{Y^\perp}(x)\big)$.*

Druhou část tvrzení srovnejte s Větou 79.

DŮKAZ. Již víme, že $Y \cap Y^\perp = \{0\}$. Dále, pro každé $x \in H$ existuje dle Věty 94 prvek $y \in Y$ splňující $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$, což dle Lemmatu 96 znamená, že $x - y \in Y^\perp$. Protože $x = y + (x - y)$, plyne odtud, že $H = Y + Y^\perp$. Tudíž $H = Y \oplus Y^\perp$. Konečně, dle Tvrzení 74 projekce $P_Y\colon H \to Y$ příslušná tomuto rozkladu splňuje $\operatorname{Ker} P_Y \perp \operatorname{Rng} P_Y$, tedy je spojitá dle Věty 99. Díky Pythagorově větě pak obdržíme, že

$$\|T(x)\|^2_{Y\oplus_2 Y^\perp} = \|P_Y(x)\|^2 + \|P_{Y^\perp}(x)\|^2 = \|P_Y(x) + P_{Y^\perp}(x)\|^2 = \|x\|^2$$

pro libovolné $x \in H$. A protože pro $u \in Y$ a $v \in Y^\perp$ je $T(u + v) = (u, v)$, je T na.

□

Poznamenejme, že není-li H úplný, pak předchozí věta nemusí platit (vizte Příklad 117).

DŮSLEDEK 101. *Nechť H je Hilbertův prostor a $A \subset H$. Pak $(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}}\, A$.*

DŮKAZ. Položme $Y = \overline{\operatorname{span}}\, A$. Dle Tvrzení 92(c) je $(A^\perp)^\perp = (Y^\perp)^\perp$. Dle Věty 100 existuje ortogonální projekce $P\colon H \to Y$ s $\operatorname{Rng} P = Y$. Věta 99 pak dává, že $(Y^\perp)^\perp = (\operatorname{Ker} P)^\perp = Y$.

□

DŮSLEDEK 102. *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak H/Y je izometricky izomorfní s $Y^\perp$ pomocí kanonického kvocientového zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $q\colon H \to H/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení. Z Vět 100 a 75 plyne, že $q\restriction_{Y^\perp}$ zobrazuje $Y^\perp$ na H/Y. Dále pro $y \in Y^\perp$ díky Faktu 91 platí, že

$$\|q(y)\|^2_{H/Y} = \inf\{\|y + z\|;\ z \in Y\}^2 = \inf\{\|y + z\|^2;\ z \in Y\} = \inf\{\|y\|^2 + \|z\|^2;\ z \in Y\} = \|y\|^2,$$

a tedy $q\restriction_{Y^\perp}$ je izometrie.

□

VĚTA 103. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z Tvrzení 37(a).

$\Leftarrow$ Podle Tvrzení 37(b) stačí ukázat, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Mějme tedy $\varepsilon > 0$ dáno. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left\|\sum_{n=k}^l x_n\right\| < \varepsilon$ pro libovolná $l \ge k \ge n_0$. Položme $F = \{1, \dots, n_0\}$ a nechť $F' \subset \mathbb{N}$ je konečná a disjunktní s F. Položme dále $k = \min F'$, $l = \max F'$. Pak $l \ge k > n_0$, a tedy s pomocí Pythagorovy věty (Fakt 91) máme

$$\left\|\sum_{n\in F'} x_n\right\|^2 = \sum_{n\in F'} \|x_n\|^2 \le \sum_{n=k}^{l} \|x_n\|^2 = \left\|\sum_{n=k}^{l} x_n\right\|^2 < \varepsilon^2.$$

□

DEFINICE 104. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \ne y$;
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Ortonormální množině se též někdy říká ortonormální soustava či ortonormální systém. Všimněme si, že A je ortonormální, právě když pro všechna $x, y \in A$ platí

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \ne y, \\ 1 & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Dále si uvědomme, že ortonormální A je maximální, právě když $A^\perp = \{0\}$.

POZNÁMKA (důležitá). Uvědomme si, že v definici ortonormální báze lze podle Věty 103 v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ podmínku $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ (tj. předpoklad, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ konverguje bezpodmínečně) nahradit podmínkou $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ (tj. obyčejnou konvergencí). Podobně lze v následujících tvrzeních všude, kde předpokládáme konvergenci zobecněné řady $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém, tento předpoklad v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ nahradit předpokladem obyčejné konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

FAKT 105. *Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x-y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.*

DŮKAZ. Podle Pythagorovy věty máme $\|x-y\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 = 2$.

□

VĚTA 106. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

DŮKAZ. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Vezměme množinu

$$\mathcal{A} = \{A \subset X;\ A \text{ je ortonormální množina}\}$$

uspořádanou inkluzí. Pak $(\mathcal{A}, \subset)$ je částečně uspořádaná množina, která je neprázdná (obsahuje prázdnou množinu). Navíc má každý řetězec horní závoru, totiž sjednocení všech prvků daného řetězce: Nechť $\mathcal{B}$ je řetězec v $\mathcal{A}$ a $B = \bigcup_{A\in\mathcal{B}} A$. Pak zjevně $B \subset S_X$. Jsou-li $x, y \in B$, $x \neq y$, pak $x \in A_1 \in \mathcal{B}$ a $y \in A_2 \in \mathcal{B}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A_1 \subset A_2$. Pak ovšem $x, y \in A_2$, což je ortonormální množina, a tedy $x \perp y$. To dokazuje, že B je ortonormální, takže patří do $\mathcal{A}$. Podle Zornova lemmatu[15] tedy v $\mathcal{A}$ existuje maximální prvek.

□

POZNÁMKA 107. Je-li prostor se skalárním součinem separabilní, pak neobsahuje nespočetnou ortonormální množinu, jelikož separabilní metrický prostor neobsahuje nespočetnou diskrétní množinu (vizte Fakt 105). Tedy každý maximální ortonormální systém je v něm (nejvýše) spočetný.

LEMMA 108. *Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde x_γ jsou skaláry. Pak $x_\gamma = \langle x, e_\gamma\rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.*

DŮKAZ. Nechť $\alpha \in \Gamma$ a $\varepsilon > 0$. Najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\left\|x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma e_\gamma\right\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ obsahující F. Pak pro $F' = F \cup \{\alpha\}$ platí

$$\varepsilon \geq \left\|x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma e_\gamma\right\| \cdot \|e_\alpha\| \geq \left|\left\langle x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma e_\gamma, e_\alpha\right\rangle\right| = \left|\langle x, e_\alpha\rangle - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \langle e_\gamma, e_\alpha\rangle\right| = |\langle x, e_\alpha\rangle - x_\alpha|.$$

Tedy $x_\alpha = \langle x, e_\alpha\rangle$.

□

Jako důsledek dostáváme, že je-li $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ ortonormální báze v X a $x \in X$, pak koeficienty x_γ ve vyjádření $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ jsou určeny jednoznačně (a platí $x_\gamma = \langle x, e_\gamma\rangle$).

Snadným důsledkem Pythagorovy věty (Fakt 91) je následující fakt:

FAKT 109. *Nechť $\{e_i\}_{i\in F}$ je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak $\left\|\sum_{i\in F} a_i e_i\right\|^2 = \sum_{i\in F} |a_i|^2$ pro libovolné skaláry a_i, $i \in F$.*

Okamžitým důsledkem předchozího faktu je následující pozorování:

DŮSLEDEK 110. *Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.*

LEMMA 111. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i\in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle e_i \in Y^\perp$.*

DŮKAZ. Označme $x_Y = \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle e_i$. Pro každé $j \in F$ máme $\langle x_Y, e_j\rangle = \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle$, tj. $\langle x - x_Y, e_j\rangle = 0$. Odtud snadno plyne, že $x - x_Y \perp Y$.

□

[15] Zornovo lemma dokázal Kazimierz Kuratowski (1922) a nezávisle Max August Zorn (1935).

VĚTA 112 (Besselova nerovnost[16]). *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, pak pro každé $x \in X$ platí, že $\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.*

DŮKAZ. Mějme dánu libovolnou konečnou množinu $F \subset \Gamma$. Položme $x_F = \sum_{\gamma\in F}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$. Podle Lemmatu 111 je $x - x_F \perp \operatorname{span}\{e_\gamma;\ \gamma \in F\}$ a speciálně $x - x_F \perp x_F$. Z Pythagorovy věty a Faktu 109 tedy dostaneme $\|x\|^2 = \|x - x_F + x_F\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \sum_{\gamma\in F}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$. Podle Tvrzení 34 tak obdržíme

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\right\} \leq \|x\|^2.$$

□

VĚTA 113. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost[17]).
(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ pro každé $x \in X$.
(iii) $\{e_\gamma\}$ je ortonormální báze.
(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.
(v) $\{e_\gamma\}$ je maximální ortonormální systém.

Pak (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

Poznamenejme, že řadě v (ii) se říká abstraktní Fourierova[18] řada a čísla $\langle x, e_\gamma\rangle$ se nazývají abstraktní Fourierovy koeficienty. Proč, bude osvětleno v Příkladu 116.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $x \in X$. Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $\sum_{\gamma\in F'}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 > \|x\|^2 - \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F' \supset F$. Pak pro takovouto F' dostáváme s pomocí Faktů 85 a 109, že

$$\begin{aligned}\left\|x - \sum_{\gamma\in F'}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\|^2 &= \|x\|^2 + \sum_{\gamma\in F'}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 - 2\operatorname{Re}\left\langle x, \sum_{\gamma\in F'}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \sum_{\gamma\in F'}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 - 2\operatorname{Re}\sum_{\gamma\in F'}\overline{\langle x, e_\gamma\rangle}\langle x, e_\gamma\rangle = \|x\|^2 - \sum_{\gamma\in F'}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy vskutku $x = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$.

(ii)⇒(iii) je zřejmá a (iii)⇒(iv) plyne snadno z definic.

(iv)⇒(i) Nechť $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ a skaláry x_γ, $\gamma \in F$ tak, že $\left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma e_\gamma\right\| < \varepsilon$. Položme $Y = \operatorname{span}\{e_\gamma;\ \gamma \in F\}$. Pak $\operatorname{dist}(x, Y) \leq \left\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma e_\gamma\right\| < \varepsilon$. Z Lemmatu 111 plyne, že $x - \sum_{\gamma\in F}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma \in Y^\perp$, a tedy podle Lemmatu 96 platí $\left\|x - \sum_{\gamma\in F}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\| = \operatorname{dist}(x, Y) < \varepsilon$. Z toho pomocí stejného výpočtu jako v důkazu (i)⇒(ii) dostáváme

$$\varepsilon^2 > \left\|x - \sum_{\gamma\in F}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\gamma\in F}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2,$$

a tedy $\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \geq \sum_{\gamma\in F}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \geq \|x\|^2 - \varepsilon^2$. Protože tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, dostáváme $\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \geq \|x\|^2$. Opačná nerovnost je přímo Besselova nerovnost (Věta 112).

(ii)⇒(v) Nechť $\{e_\gamma\}$ není maximální, tj. existuje nenulový vektor x splňující $\langle x, e_\gamma\rangle = 0$ pro každé $\gamma \in \Gamma$. Ale $x = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma = 0$, což je spor.

Konečně, je-li X Hilbertův, ukážeme, že (v)⇒(iv). Není-li splněna (iv), pak je $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ vlastní uzavřený podprostor X. Podle Věty 100 je $Y^\perp$ netriviální, což je spor s maximalitou $\{e_\gamma\}$.

□

[16] Pro trigonometrické funkce používal podobnou nerovnost Friedrich Wilhelm Bessel (1828).

[17] Marc-Antoine Parseval des Chênes (1799)

[18] Jean-Baptiste Joseph Fourier

Z Vět 106 a 113 ihned plyne následující důsledek:

DŮSLEDEK 114. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

DŮSLEDEK 115. *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v Hilbertově prostoru H, pak zobrazení $P\colon H \to H$, $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ je ortogonální lineární projekce na $\overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$. Dále je $\|P(x)\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ pro každé $x\in X$.*

DŮKAZ. Označme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$ a nechť $P\colon H\to Y$ je ortogonální lineární projekce na Y z Věty 100. Nechť $x\in H$. Pak $x = P(x) + z$, kde $z\in Y^\perp$. Odtud plyne, že $\langle x, e_\gamma\rangle = \langle P(x), e_\gamma\rangle$ pro každé $\gamma\in\Gamma$. Použijeme-li Větu 113 na prostor Y, pak obdržíme, že $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle P(x), e_\gamma\rangle e_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ a $\|P(x)\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle P(x), e_\gamma\rangle|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$.

□

PŘÍKLAD 116.

- Kanonické bázové vektory $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tvoří ortonormální bázi v Hilbertově prostoru ℓ_2 (Příklad 29).
- Obecněji, je-li Γ libovolná neprázdná množina, pak kanonické bázové vektory $e_\gamma = \chi_{\{\gamma\}}$, $\gamma\in\Gamma$ tvoří ortonormální bázi v Hilbertově prostoru $\ell_2(\Gamma)$. (Snadno to plyne např. z Věty 113, neboť je z definice splněna Parsevalova rovnost.)
- Pro Hilbertův prostor $L_2([0,2\pi])$ je systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx);\ n\in\mathbb{N}\right\}$ ortonormální bází. Ortonormalita plyne z klasické teorie Fourierových řad. Hustota lineárního obalu plyne z Fejérovy[19] věty zkombinované s důsledkem Luzinovy věty. Alternativně lze ukázat, že trigonometrický ortonormální systém je maximální: Nechť $f\in L_2([0,2\pi])$ je kolmé ke všem prvkům tohoto systému. Protože též $f\in L_1([0,2\pi])$, můžeme spočítat Fourierovy koeficienty příslušné funkci f. Ty jsou ovšem díky kolmosti rovny 0. Podle věty o jednoznačnosti to znamená, že $f = 0$ s. v., a tedy $f = 0$ v $L_2([0,2\pi])$.

  Nyní též vidíme, proč se řadě v (ii) ve Větě 113 říká abstraktní Fourierova řada: Pro bázi popsanou výše je to totiž formálně klasická Fourierova řada a čísla $\langle x, e_\gamma\rangle$ jsou přesně klasické Fourierovy koeficienty. Tato Fourierova řada ovšem konverguje ve smyslu prostoru $L_2([0,2\pi])$, nikoli bodově, jak se studuje v klasické teorii.

◇

PŘÍKLAD 117. Není-li ve Větě 113 prostor X úplný, pak tvrzení (v) nemusí být ekvivalentní ostatním tvrzením. Nechť e_n, $n\in\mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v prostoru ℓ_2. Dále položme $e = (\frac{1}{n})_{n=1}^\infty \in \ell_2$, $A = \{e_n;\ n\ge 2\}$ a $X = \operatorname{span}(\{e\}\cup A)$. Pak A je maximální ortonormální množina v X: Je-li $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in X$ splňující $x\perp A$, pak $0 = \langle x, e_n\rangle = x_n$ pro $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Je-li tedy $x = \alpha e + \sum_{i=2}^k \alpha_i e_i$, pak $0 = x_{k+1} = \alpha\frac{1}{k+1}$, tj. $\alpha = 0$. Proto i $\alpha_i = x_i = 0$ pro $i = 2,\dots,k$, neboli $x = 0$. Nicméně není pravda, že $X = \overline{\operatorname{span}}\,A$, neboť pro každý $x\in\operatorname{span}A$ je $x_1 = 0$, tedy i pro každý $x\in\overline{\operatorname{span}}\,A$ je $x_1 = 0$, což znamená, že $e\notin\overline{\operatorname{span}}\,A$.

Všimněme si též, že pro $Y = \overline{\operatorname{span}}\,A$ je $Y^\perp = \{0\}$, neboť A je maximální ortonormální, a tedy neplatí, že $X = Y\oplus Y^\perp$ (srovnejte s Větou 100).

◇

VĚTA 118 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907)). *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení $T\colon H\to\ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ lineární izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ.*

DŮKAZ. Zjevně T je lineární. Z Parsevalovy rovnosti (Věta 113) plyne, že $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ pro každé $x\in H$, a tedy T je izometrie do $\ell_2(\Gamma)$. Všimněme si, že $\{T(e_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ je množina kanonických bázových vektorů v $\ell_2(\Gamma)$. Díky linearitě tedy $\operatorname{Rng}T$ obsahuje všechny vektory v $\ell_2(\Gamma)$, které mají jen konečně mnoho nenulových souřadnic. Tyto vektory tvoří hustou podmnožinu v $\ell_2(\Gamma)$. Podle Tvrzení 60(c) je ovšem $\operatorname{Rng}T$ uzavřený, tudíž je roven celému $\ell_2(\Gamma)$.

□

[19] Lipót Fejér, roz. Leopold Weisz

TVRZENÍ 119. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li* $\dim X = n \in \mathbb{N}$, *pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li* $\dim X = \infty$ *a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.*

DŮKAZ. Nechť A je nějaká ortonormální báze X. Je-li $\dim X = n$, pak z Důsledku 110 a z definice ortonormální báze plyne, že A je (algebraickou) bází vektorového prostoru X. Tedy A má n prvků.

Je-li $\dim X = \infty$ a X je separabilní, pak A je spočetná podle Poznámky 107. Kdyby A byla konečná, pak dle definice ortonormální báze $\operatorname{span} A = X$, což je spor s $\dim X = \infty$.

□

Později uvidíme, že pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor (Věta 2.28).

VĚTA 120 (Heinrich Löwig[20] (1934), F. Riesz (1934)[21]). *Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I : H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.*

K důkazu se nám bude hodit následující pozorování:

LEMMA 121. *Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy* $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

DŮKAZ. Zjevně $\operatorname{span}\{x\} \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ a každý vektor $y \in X$ lze rozepsat jako

$$y = \left(y - \frac{f(y)}{f(x)}x\right) + \frac{f(y)}{f(x)}x,$$

kde $y - \frac{f(y)}{f(x)}x \in \operatorname{Ker} f$ a $\frac{f(y)}{f(x)}x \in \operatorname{span}\{x\}$.

□

DŮKAZ VĚTY 120. Nechť H je nad $\mathbb{K}$ a $y \in H$. Dle Tvrzení 84(a) je $f_y \in H^*$ a $\|f_y\| = \|y\|$. Protože skalární součin je sdruženě lineární ve druhé souřadnici, je i zobrazení I sdruženě lineární. Rovnost $\|I(y)\| = \|f_y\| = \|y\|$ tedy říká, že I je izometrie do, neboť $I(u) - I(v) = I(u - v)$. Ukažme, že je na. Je-li $f \in H^*$ nenulové dáno, pak $\operatorname{Ker} f$ je vlastní uzavřený podprostor H. Tedy dle Věty 100 platí, že $H = \operatorname{Ker} f \oplus Z$, kde $Z \perp \operatorname{Ker} f$. Ovšem $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$ (Lemma 121), tedy $\dim Z = 1$. To znamená, že $Z = \operatorname{span}\{z\}$ pro nějaké $z \in S_H$. Položme $y = \overline{f(z)}z$. Pak pro každé $x \in H$ máme $x = u + \alpha z$, kde $u \in \operatorname{Ker} f$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, takže

$$f_y(x) = \langle x, y\rangle = \big\langle u + \alpha z, \overline{f(z)}z\big\rangle = f(z)\big(\langle u, z\rangle + \alpha\langle z, z\rangle\big) = \alpha f(z)\|z\| = f(u + \alpha z) = f(x).$$

Tedy $I(y) = f_y = f$.

□

[20] roz. Jindřich František Josef Löwi

[21] Reprezentaci dokázal pro ℓ_2 D. Hilbert (1906), pro $L_2([0, 1])$ Maurice Fréchet (1907) a F. Riesz (1907). Proto se tato věta někdy nazývá Fréchetova-Rieszova.

Kapitola 2

Hahnova-Banachova věta a dualita

Jedním z důležitých objektů, se kterými se pracuje v lineární algebře, jsou lineární formy. Ve funkcionální analýze se budeme zabývat především lineárními formami spojitými. A priori však není zřejmé, že jsou na daném prostoru vůbec nějaké netriviální spojité lineární formy k dispozici. Úhelným kamenem funkcionální analýzy je tak věta o jejich existenci, totiž Hahnova-Banachova věta. Ta má celou řadu důležitých a dalekosáhlých důsledků a lze tak ji a její varianty právem pokládat za nejzásadnější nástroj funkcionální analýzy.

1. Hahnova-Banachova věta

Nejprve se podíváme blíže na to, jak vypadají komplexní lineární funkcionály. Připomeňme si, že pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $t \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) = \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta$, $\operatorname{Re}(t\alpha) = t\operatorname{Re}\alpha$ a podobně $\operatorname{Im}(\alpha + \beta) = \operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Im}\beta$, $\operatorname{Im}(t\alpha) = t\operatorname{Im}\alpha$. Pro funkci $f: A \to \mathbb{C}$ označíme $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ její reálnou, resp. imaginární složku, tj. $(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ pro $x \in A$ a podobně pro $\operatorname{Im} f$.

TVRZENÍ 1. *Nechť X je komplexní vektorový prostor. Pak funkce $f: X \to \mathbb{C}$ je (komplexní) lineární forma, právě když* $\operatorname{Re} f$ *je reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$ a platí* $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Fakt, že $\operatorname{Re} f$ je reálně-lineární je snadno vidět. Pro libovolné $x \in X$ máme $\operatorname{Re} f(ix) + i\operatorname{Im} f(ix) = f(ix) = if(x) = i\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Im} f(x)$, a tedy $\operatorname{Re} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x)$.

$\Leftarrow$ Snadno je vidět, že $\operatorname{Im} f$ je také reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$, odkud ihned plyne aditivita f. Dále, pro libovolné $x \in X$ je

$$f(ix) = \operatorname{Re} f(ix) + i\operatorname{Im} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x) - i\operatorname{Re} f(i^2x) = i\big(\operatorname{Re} f(x) + i\operatorname{Im} f(x)\big) = if(x).$$

Konečně, pro $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, a $x \in X$ pak máme $f(\alpha x) = f(ax + ibx) = f(ax) + f(ibx) = af(x) + ibf(x) = \alpha f(x)$.

□

DEFINICE 2. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p: X \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p: X \to [0, +\infty)$ se nazývá pseudonorma, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Zřejmě každá pseudonorma je sublineárním funkcionálem a pro každý sublineární funkcionál je $p(0) = 0$. Všimněme si, že pseudonorma se od normy liší pouze v jedné vlastnosti, a to, že mohou existovat nenulové vektory, na nichž je pseudonorma nulová.

VĚTA 3 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929)). *Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.*

(a) Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

(b) *Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

DŮKAZ. (a) *1. krok.* Nejprve ukážeme, že f lze rozšířit na podprostor $Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x\}$, kde $x \in X \setminus Y$. Uvědomme si, že vzorec $F(y + tx) = f(y) + t\alpha$ dobře definuje lineární rozšíření formy f na Z a že každé lineární rozšíření je tohoto tvaru a je jednoznačně určeno hodnotou $\alpha = F(x) \in \mathbb{R}$. Naším cílem je tedy nalézt $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $f(y) + t\alpha \leq p(y + tx)$ pro každé $y \in Y$ a $t \in \mathbb{R}$. To je ekvivalentní tomu, že α musí splňovat $\alpha \leq \frac{1}{t}\big(p(y + tx) - f(y)\big) = p(\frac{y}{t} + x) - f(\frac{y}{t})$ pro každé $y \in Y$ a $t > 0$ a zároveň $\alpha \geq \frac{1}{t}\big(p(y + tx) - f(y)\big) = f(-\frac{y}{t}) - p(-\frac{y}{t} - x)$ pro každé $y \in Y$ a $t < 0$. Snadno je vidět, že to nastane, právě když

$$\sup_{z \in Y}\big(f(z) - p(z - x)\big) \leq \alpha \leq \inf_{y \in Y}\big(p(y + x) - f(y)\big).$$

Existence požadovaného $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy bude zřejmá, jakmile ukážeme, že supremum na levé straně je nejvýše rovno infimu na straně pravé. K tomuto účelu zvolme pevně libovolné $z \in Y$. Pak pro každé $y \in Y$ platí $f(z) + f(y) = f(z + y) \leq p(z + y) = p(z - x + y + x) \leq p(z - x) + p(y + x)$ (zde jsme opět podstatně využili linearitu f), neboli $f(z) - p(z - x) \leq p(y + x) - f(y)$. Máme tedy $f(z) - p(z - x) \leq \inf_{y \in Y}\big(p(y + x) - f(y)\big)$ pro každé $z \in Y$, odkud již požadovaná nerovnost ihned plyne.

2. krok. Vezměme množinu

$$\mathcal{P} = \big\{(Z, g);\ Y \subset Z \subset X \text{ je podprostor } X, g \text{ je lineární forma na } Z \text{ rozšiřující } f \text{ a } g \leq p \text{ na } Z\big\}.$$

Definujme na $\mathcal{P}$ uspořádání takto: $(Z, g) \leq (W, h)$, pokud $Z \subset W$ a $g = h$ na Z. Pak $(\mathcal{P}, \leq)$ je částečně uspořádaná množina, která je neprázdná, neboť $(Y, f) \in \mathcal{P}$. Ukážeme, že jsou splněny předpoklady Zornova lemmatu: Je-li $\mathcal{R} = \{(Y_\gamma, f_\gamma);\ \gamma \in \Gamma\}$ řetězec v $\mathcal{P}$, pak je snadno vidět, že $Z = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$ je podprostor X obsahující Y. Funkce g na Z daná předpisem $g(x) = f_\gamma(x)$ pro $x \in Y_\gamma$ je zřejmě dobře definována, je lineární a splňuje $g \leq p$ na Z. Navíc (Z, g) majorizuje všechny prvky $\mathcal{R}$. Tedy (Z, g) je horní závora $\mathcal{R}$.

Podle Zornova lemmatu tedy existuje maximální prvek $(W, F) \in \mathcal{P}$. Pak nutně $W = X$, jinak bychom mohli F rozšířit na větší podprostor pomocí prvního kroku, což by byl spor s maximalitou (W, F). Tedy F je hledané rozšíření.

(b) Je-li X reálný, nalezneme rozšíření pomocí tvrzení (a). Pak ovšem $-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$, a tedy $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.

Je-li X komplexní, pak podle Tvrzení 1 je $f(x) = g(x) - ig(ix)$, kde $g = \operatorname{Re} f\colon Y_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je reálně-lineární forma. Protože $|g(x)| = |\operatorname{Re} f(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, můžeme použít předchozí případ na formu g a rozšířit ji na reálně-lineární formu $G\colon X_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $|G(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$. Položíme-li $F(x) = G(x) - iG(ix)$, pak F je lineární forma na X (Tvrzení 1), která zjevně rozšiřuje f. Dále, nechť $x \in X$. Najdeme $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ takové, že $|F(x)| = \alpha F(x)$. Pak $|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = G(\alpha x) - iG(i\alpha x)$, což je reálné číslo, a proto $G(i\alpha x) = 0$. Tedy $|F(x)| = G(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x)$. Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 4 (Hahnova-Banachova). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.*

DŮKAZ. Položme $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ pro $x \in X$. Pak p je pseudonorma na X splňující $|f| \leq p$ na Y. Dle Věty 3(b) existuje lineární forma F na X rozšiřující f taková, že $|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ pro každé $x \in X$. Tedy F je spojitý lineární funkcionál na X a $\|F\| \leq \|f\|$. Protože F rozšiřuje f, platí $\|F\| = \sup_{x \in B_X} |F(x)| \geq \sup_{x \in B_Y} |F(x)| = \sup_{x \in B_Y} |f(x)| = \|f\|$, tedy $\|F\| = \|f\|$.

□

Hahnova-Banachova věta je jedním z nejzásadnějších tvrzení funkcionální analýzy. Dále uvedeme několik z jejích mnoha přímých důsledků. Velkou důležitost mají zejména různé oddělovací věty.

DŮSLEDEK 5. *Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).*

DŮKAZ. Pro důkaz první části stačí bez újmy na obecnosti uvažovat $x \neq 0$. Uvažujme podprostor $Y = \operatorname{span}\{x\}$ a funkcionál na Y daný vzorcem $g(tx) = t\|x\|$ pro $t \in \mathbb{K}$. Pak zjevně $g \in Y^*$ a $\|g\| = 1$ (Lemma 1.45(b)). Dle Věty 4 existuje funkcionál $f \in X^*$ o normě 1, který rozšiřuje g. Tedy $f(x) = g(x) = \|x\|$. Pro důkaz druhé části použijeme první část na vektor $x - y$.

□

DŮSLEDEK 6 (Duální vyjádření normy). *Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.*

DŮKAZ. Pro $f \in B_{X^*}$ máme $|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|$. Na duhou stranu, dle Důsledku 5 existuje $f \in B_{X^*}$ takový, že $f(x) = \|x\|$, a tedy $|f(x)| = f(x) = \|x\|$.

□

VĚTA 7 (Oddělování bodu a podprostoru). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \in X \setminus Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.*

DŮKAZ. Položme $Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x\}$ a $d = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$ a definujme $g\colon Z \to \mathbb{K}$ předpisem $g(y+\alpha x) = \alpha d$ pro $y \in Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak g je lineární forma na Z a pro každé $y \in Y$ a $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ máme

$$|g(y + \alpha x)| = |\alpha| d \leq |\alpha| \left\| x - \left(-\frac{y}{\alpha}\right) \right\| = \|y + \alpha x\|$$

a $|g(y)| = 0 \leq \|y\|$. Tedy $g \in Z^*$ a $\|g\| \leq 1$. Vezměme nyní posloupnost $\{y_n\}$ v Y splňující $\|x - y_n\| \to d$. Pak $g\left(\frac{x-y_n}{\|x-y_n\|}\right) = \frac{d}{\|x-y_n\|} \to 1$, a tedy $\|g\| = 1$. Podle Věty 4 existuje $f \in X^*$ rozšiřující g a splňující $\|f\| = \|g\| = 1$. Pak $f = 0$ na Y a $f(x) = g(x) = d$.

□

VĚTA 8. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.
(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

DŮKAZ. (a) Nechť Y je konečněrozměrný podprostor X a $\{e_1, \dots, e_n\}$ je jeho báze. Definujme lineární funkcionály $f_1, \dots, f_n$ na Y pomocí hodnot na bázi: $f_j(e_i) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_i(e_i) = 1$. Protože Y je konečné dimenze, jsou funkcionály $f_1, \dots, f_n$ spojité na Y (Věta 1.66). Lze je tedy podle Hahnovy-Banachovy věty rozšířit na spojité lineární funkcionály $g_1, \dots, g_n$ na X (Věta 4). Pak zobrazení $P\colon X \to Y$ dané předpisem

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) e_j$$

je spojitá lineární projekce X na Y: Spojitost a linearita jsou zřejmé. Pro $y \in Y$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ máme $P(y) = P\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i P(e_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = y$, tedy P je projekce dle Faktu 1.73(b).

(b) Nechť $\dim(X/Y) = n$ a $\{e_1, \dots, e_n\} \subset X$ jsou vybrány tak, že $\{q(e_1), \dots, q(e_n)\}$ je báze X/Y, kde $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení. Definujme lineární funkcionály $f_1, \dots, f_n$ na X/Y pomocí hodnot na bázi: $f_j(q(e_i)) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_i(q(e_i)) = 1$. Všimněme si, že je-li $z = \sum_{i=1}^{n} z_i q(e_i) \in X/Y$, pak $f_j(z) = z_j$ pro $j = 1, \dots, n$. Protože X/Y je konečné dimenze, jsou funkcionály $f_1, \dots, f_n$ spojité na X/Y (Věta 1.66). Položme $g_j = f_j \circ q$, $j = 1, \dots, n$. Pak $g_1, \dots, g_n$ jsou spojité lineární funkcionály na X a zobrazení dané předpisem $P(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) e_j$ pro $x \in X$ je spojitá lineární projekce na $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, která je nulová na Y. (Fakt, že je to projekce, plyne z $P(e_i) = \sum_{j=1}^{n} g_j(e_i) e_j = e_i$ jako v případě (a).) Naopak, je-li $P(x) = 0$, pak $0 = g_i(P(x)) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) g_i(e_j) = g_i(x)$ pro $i = 1, \dots, n$. Tedy $f_i(q(x)) = 0$ pro $i = 1, \dots, n$, neboli $q(x) = 0$, tj. $x \in Y$. Dohromady tedy máme $Y = \operatorname{Ker} P$, což dle Tvrzení 1.74 znamená, že $Id_X - P$ je spojitá lineární projekce X na Y.

□

VĚTA 9. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li X^* separabilní, pak i X je separabilní.*

DůKAZ. Množina S_{X^*} je metrický podprostor metrického prostoru X^*, tedy je separabilní. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je hustá podmnožina S_{X^*}. Z vlastností duální normy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in S_X$ splňující $|f_n(x_n)| > \frac{1}{2}$ (Lemma 1.45(b)). Položme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak Y je separabilní, neboť lineární kombinace s racionálními koeficienty jsou husté v Y. Tvrdíme, že $X = Y$. Pokud tomu tak není, pak podle Věty 7 existuje $f \in S_{X^*}$ takový, že $f\restriction_Y = 0$. Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $\|f - f_n\| < \frac{1}{4}$. Pak $0 = |f(x_n)| = |f_n(x_n) - f_n(x_n) + f(x_n)| \geq |f_n(x_n)| - |f(x_n) - f_n(x_n)| \geq |f_n(x_n)| - \|f - f_n\|\|x_n\| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, což je spor.

□

DEFINICE 10. Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^\perp = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. zpětný anihilátor jako

$$B_\perp = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

POZNÁMKA 11. Pro prostor X se skalárním součinem zde máme kolizi ve značení, neboť symbolem $A^\perp$ značíme též ortogonální doplněk, což je podmnožina X (zatímco anihilátor $A^\perp$ je podmnožina X^*). Díky identifikaci z Věty 1.120 jsou tato tradiční značení naštěstí v případě Hilbertova prostoru relativně konzistentní a ve skutečnosti jsou anihilátory v jistém smyslu zobecněním ortogonálních doplňků: Je-li H Hilbertův prostor, $A \subset H$ a $I\colon H \to H^*$ identifikace z Věty 1.120, pak

$$\begin{aligned} I^{-1}(A^\perp) &= \{y \in H;\ I(y) \in A^\perp\} = \{y \in H;\ I(y)(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\} = \\ &= \{y \in H;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro každé } x \in A\}, \end{aligned}$$

tedy $I^{-1}(A^\perp)$ je roven ortogonálnímu doplňku A. Podobně,

$$\begin{aligned} I(A)_\perp &= \{x \in H;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in I(A)\} = \{x \in H;\ I(y)(x) = 0 \text{ pro každé } y \in A\} = \\ &= \{x \in H;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro každé } y \in A\}, \end{aligned}$$

tedy $I(A)_\perp$ je též roven ortogonálnímu doplňku A.

Uvědomme si, že z definice snadno plynou následují vztahy: $\{0\}^\perp = X^*$, $X^\perp = \{0\}$ a $\{0\}_\perp = X$. Pomocí Hahnovy-Banachovy věty (Důsledek 5) pak odvodíme, že $(X^*)_\perp = \{0\}$.

LEMMA 12. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*
(a) $A^\perp$ je uzavřený podprostor X^*,
(b) $B_\perp$ je uzavřený podprostor X,
(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}\, A$,
(d) $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\operatorname{span}}\, B$.

DůKAZ. (a) Snadno je vidět, že $A^\perp$ je podprostor X^*. Jestliže $\{f_n\}$ je posloupnost v $A^\perp$ konvergující k $f \in X^*$ a $x \in A$, pak $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (Fakt 1.46). Tedy $f \in A^\perp$.

(b) Zde si stačí uvědomit, že $B_\perp = \bigcap_{f\in B} \operatorname{Ker} f$.

(c) Je-li $x \in A$, pak pro každé $f \in A^\perp$ máme $f(x) = 0$, a tedy $x \in (A^\perp)_\perp$. To znamená, že $A \subset (A^\perp)_\perp$. Protože je $B_\perp$ uzavřený podprostor X pro každou $B \subset X^*$ dle (b), platí $\overline{\operatorname{span}}\, A \subset (A^\perp)_\perp$. Je-li $x \in X \setminus \overline{\operatorname{span}}\, A$, existuje $f \in X^*$ splňující $f(x) > 0$ a $f = 0$ na $\overline{\operatorname{span}}\, A$ (Věta 7). Tedy $f \in A^\perp$ a $f(x) \neq 0$. Proto $x \notin (A^\perp)_\perp$.

(d) Je-li $f \in B$, pak pro každé $x \in B_\perp$ máme $f(x) = 0$, a tedy $f \in (B_\perp)^\perp$. To znamená, že $B \subset (B_\perp)^\perp$. Protože je $A^\perp$ uzavřený podprostor X^* pro každou $A \subset X$ dle (a), platí $\overline{\operatorname{span}}\, B \subset (B_\perp)^\perp$.

□

V Příkladu 23 ukážeme, že v (d) v lemmatu výše nemusí nastat rovnost. „Správné znění" lemmatu uvedeme v oddílu 7.9 (Lemma 7.111).

2. Reprezentace duálů

V tomto oddílu si ukážeme, jakým způsobem lze interpretovat duální prostory k některým prostorům. Nejdůležitější jsou zejména konkrétní reprezentace duálů ke klasickým Banachovým prostorům.

TVRZENÍ 13. *Nechť X a Y jsou izometrické normované lineární prostory. Pak i prostory X^* a Y^* jsou izometrické.*

Důkaz odložíme až do oddílu 4.1, kde jej provedeme přirozeně pomocí tam zavedených pojmů. Tvrzení je pak přímým důsledkem Věty 4.6.

DEFINICE 14. Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme sdruženým exponentem k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Sdruženým exponentem k 1 je ∞, sdruženým exponentem k ∞ je 1 a sdruženým exponentem ke 2 je 2. Všimněme si ještě následujících vztahů: Jsou-li p, q sdružené exponenty, $1 \leq p < \infty$, pak $pq = p + q$, $q = \frac{p}{p-1}$ a $q = (q-1)p$.

POZNÁMKA. Připomeňme, že prostor všech lineárních forem na $\mathbb{K}^n$ je algebraicky izomorfní opět prostoru $\mathbb{K}^n$. Protože všechny lineární formy na $\mathbb{K}^n$ jsou spojité (Věta 1.66), je prostor $(\mathbb{K}^n)^*$ algebraicky izomorfní prostoru $\mathbb{K}^n$ a tento algebraický izomorfismus je dán lineárním zobrazením $I\colon \mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)^*$, $I(y)(x) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Protože každé lineární zobrazení z konečněrozměrného prostoru je spojité (Věta 1.66), je zobrazení I izomorfismus normovaných lineárních prostorů, a to ať bereme na $\mathbb{K}^n$ jakoukoli normu. Způsobem stejným jako v důkazu Věty 15(a), (b) níže lze ukázat, že I je izometrie prostoru $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_q)$ na prostor $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)^*$, kde p, q jsou sdružené exponenty, $1 \leq p \leq \infty$.

VĚTA 15 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům[1]).

(a) *Prostor c_0^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_1 pomocí zobrazení $I\colon \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(b) *Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_q pomocí zobrazení $I\colon \ell_q \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(c) *Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde*

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

(d) *Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde*

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Všimněme si, že ve skutečnosti je tvrzení (b) speciálním případem tvrzení (c) a (d). Nicméně z pedagogických důvodů je vhodné tvrzení (b) zformulovat i dokazovat zvlášť, neboť je výrazně jednodušší.

Obvykle se funkce sgn rozšiřuje na komplexní čísla vzorcem $\operatorname{sgn}\alpha = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Je tedy $\alpha = |\alpha| \operatorname{sgn}\alpha$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$. Nám se ovšem v následujícím důkazu bude hodit převrácená hodnota $\operatorname{sgn}\alpha$, což je shodou okolností též komplexně sdružené číslo $\overline{\operatorname{sgn}\alpha}$, proto budeme používat označení cgn.

[1] Pro ℓ_p, $1 < p < \infty$ Edmund Georg Hermann Landau (1907), pro $L_p([0,1])$, $1 < p < \infty$ F. Riesz (1909), pro $L_1([0,1])$ Hugo Dyonizy Steinhaus (1919).

Definujeme tedy $\operatorname{cgn}\alpha = \frac{|\alpha|}{\alpha}$ pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\operatorname{cgn} 0 = 0$. Platí $|\alpha| = \alpha \operatorname{cgn}\alpha$ a $|\operatorname{cgn}\alpha| \leq 1$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$. Všimněme si též, že je-li f měřitelná funkce (vzhledem k nějaké míře), pak funkce $\operatorname{sgn} f$ i $\operatorname{cgn} f$ jsou měřitelné.

Důkaz. (a) Nechť $y \in \ell_1$ je dáno. Pro každé $x \in c_0$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x\|_\infty |y_n| = \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in c_0^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|_1$. Pro opačnou nerovnost uvažujme vektory

$$x^n = (\operatorname{cgn} y_1, \dots, \operatorname{cgn} y_n, 0, 0, \dots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak $x^n \in B_{c_0}$ a platí

$$f_y(x^n) = \sum_{k=1}^{n} y_k \operatorname{cgn} y_k = \sum_{k=1}^{n}|y_k| \to \|y\|_1.$$

Tedy $\|f_y\| = \|y\|_{\ell_1}$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do.

Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in c_0^*$ a nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v c_0. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Vektor $x^n = (\operatorname{cgn} y_1, \dots, \operatorname{cgn} y_n, 0, 0, \dots)$ je v B_{c_0} pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy

$$\sum_{k=1}^{n}|y_k| = \sum_{k=1}^{n} y_k \operatorname{cgn} y_k = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) \operatorname{cgn} y_k = f\left(\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{cgn} y_k) e_k\right) = f(x^n) \leq \|f\|\|x^n\| \leq \|f\|.$$

Jelikož je $n \in \mathbb{N}$ libovolné, je $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_1$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in c_0$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

(b) Nejprve předpokládejme, že $1 < p < \infty$. Nechť $y \in \ell_q$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_p$ platí z Hölderovy nerovnosti[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q} = \|x\|_p \|y\|_q.$$

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in \ell_p^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|_q$. Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $y \neq 0$. Uvažujme vektor

$$x = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{-1/p}\big(|y_1|^{q-1} \operatorname{cgn} y_1, |y_2|^{q-1} \operatorname{cgn} y_2, \dots\big).$$

Je

$$\|x\|_p = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/p} = 1,$$

a tedy $x \in B_{\ell_p}$. Proto

$$\|f_y\| \geq |f_y(x)| = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/p}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^{q-1}(\operatorname{cgn} y_n) y_n\right| = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/p}}\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q = \|y\|_q,$$

což znamená, že $\|f_y\| = \|y\|_q$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do.

[2] Nerovnost dokázali v jiné formě Leonard James Rogers (1888) a Otto Ludwig Hölder (1889), který dokonce cituje Rogerse; v současné formě jak pro sumy, tak pro integrály ji pak zformuloval F. Riesz (1910).

Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in \ell_p^*$ a nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v ℓ_p. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q-1} (\operatorname{cgn} y_k) e_k.$$

Pak

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q-1} (\operatorname{cgn} y_k) f(e_k) = |f(x^n)| \leq \|f\| \|x^n\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/p}.$$

Odtud dostáváme $\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_q$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in \ell_p$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

Zbývá případ $p = 1$. Nechť $y \in \ell_\infty$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_1$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1.$$

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in \ell_1^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|_\infty$. Pro opačnou nerovnost uvažujme kanonické bázové vektory e_n, $n \in \mathbb{N}$ v ℓ_1. Máme $\|f_y\| \geq |f_y(e_n)| = |y_n|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboli $\|f_y\| \geq \|y\|_\infty$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do. Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in \ell_1^*$. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $|y_n| \leq \|f\| \|e_n\| = \|f\|$, tedy $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_\infty$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in \ell_1$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

(c), (d) Nechť $g \in L_q(\mu)$ je dáno. Pro každé $f \in L_p(\mu)$ platí z Hölderovy nerovnosti (pro $p > 1$), případně jednoduchým odhadem (pro $p = 1$)

$$\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Odtud plyne, že φ_g je dobře definovaná funkce. Dále φ_g je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $\varphi_g \in L_p(\mu)^*$ a $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$. Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $g \neq 0$. V případě $p > 1$ uvažujme funkci

$$f = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} |g|^{q-1} \operatorname{cgn} g.$$

Je

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \left(\int_\Omega |g|^{p(q-1)} \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = 1,$$

a tedy $f \in B_{L_p(\mu)}$. Proto

$$\|\varphi_g\| \geq |\varphi_g(f)| = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \left| \int_\Omega |g|^{q-1} (\operatorname{cgn} g) g \, \mathrm{d}\mu \right| = \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{-1/p} \int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_q,$$

což znamená, že $\|\varphi_g\| = \|g\|_q$. V případě, že $p = 1$ (a μ je tak dle předpokladu σ-konečná) vezměme $\varepsilon > 0$ libovolné a uvažujme množinu $A = \{x \in \Omega;\ |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$. Pak A je kladné míry, a tedy díky σ-konečnosti μ existuje $B \subset A$ splňující $0 < \mu(B) < +\infty$. Je $f = \frac{1}{\mu(B)}\chi_B \operatorname{cgn} g \in B_{L_1(\mu)}$, a proto

$$\|\varphi_g\| \geq |\varphi_g(f)| = \frac{1}{\mu(B)}\left|\int_B (\operatorname{cgn} g) g \,\mathrm{d}\mu\right| = \frac{1}{\mu(B)}\int_B |g| \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{\mu(B)}\int_B \big(\|g\|_\infty - \varepsilon\big) \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Odtud plyne $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$.

Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do. Ukažme nyní, že je na. Předpokládejme nejprve, že $\mu(\Omega) < +\infty$. Nechť je dán $\varphi \in L_p(\mu)^*$. Pro každou $A \in \mathcal{S}$ položme

$$\nu(A) = \varphi(\chi_A).$$

Poznamenejme, že díky předpokladu konečnosti míry je ν dobře definována. Funkce ν je komplexní (případně znaménková) míra na Ω. Vskutku, je-li $\{A_j;\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}$ systém po dvou disjunktních měřitelných množin a označíme-li $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, pak $\big\|\chi_A - \chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\big\|_p = \mu\big(A \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j\big)^{1/p} \to 0$ (zde opět využíváme faktu, že μ je konečná). Tedy díky spojitosti φ máme

$$\nu(A) = \varphi(\chi_A) = \lim_{n\to\infty} \varphi\big(\chi_{\bigcup_{j=1}^n A_j}\big) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\sum_{j=1}^n \chi_{A_j}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).$$

Zřejmě je ν absolutně spojitá vzhledem k μ (tj. $\nu(A) = 0$ pro každou $A \in \mathcal{S}$ splňující $\mu(A) = 0$), dle Radonovy-Nikodymovy věty[3] tedy existuje $g \in L_1(\mu)$ splňující $\nu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. To znamená, že $\varphi(\chi_A) = \nu(A) = \int_\Omega \chi_A g \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. Z linearity φ a z linearity integrálu tedy ihned plyne, že

$$\varphi(s) = \int_\Omega sg \,\mathrm{d}\mu \tag{1}$$

pro každou jednoduchou měřitelnou funkci s na Ω.

Ukážeme, že platí $g \in L_q(\mu)$. Je-li $p > 1$, zvolme pevně $n \in \mathbb{N}$ a položme $A_n = \{x \in \Omega;\ |g(x)| \leq n\}$ a $f = \chi_{A_n}|g|^{q-1} \operatorname{cgn} g$. Existuje posloupnost $\{s_k\}$ jednoduchých měřitelných funkcí na Ω takových, že $s_k \to f$ bodově a navíc $|s_k(x)| \leq 4|f(x)|$ pro každé $x \in \Omega$ a $k \in \mathbb{N}$ (použijeme větu [R, Věta 1.17] na rozklad $f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^-$). Protože $|s_k - f|^p \leq 5^p|f|^p$, funkce $|f|$ je omezená a μ je konečná, máme podle Lebesgueovy věty $\|s_k - f\|_p \to 0$. Podobně, $|s_k g| \leq 4|f||g| \leq 4n^q$, tedy dle Lebesgueovy věty $\int_\Omega s_k g \,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$. Zkombinujeme-li oba tyto fakty se spojitostí φ a platností (1), dostaneme

$$\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega s_k g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\varphi(s_k) = \varphi(f) \leq \|\varphi\|\|f\|_p = \|\varphi\|\left(\int_{A_n}|g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Úpravou obdržíme $\int_\Omega \chi_{A_n}|g|^q \,\mathrm{d}\mu \leq \|\varphi\|^q$, a to platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Leviovy věty[4] o monotónní konvergenci tedy dostáváme $\|g\|_q \leq \|\varphi\|$.

V případě $p = 1$ díky (1) máme $\left|\int_A g \,\mathrm{d}\mu\right| = |\varphi(\chi_A)| \leq \|\varphi\|\|\chi_A\|_1 = \|\varphi\|\mu(A)$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. Podle věty [R, Věta 1.40] tedy platí $|g(x)| \leq \|\varphi\|$ pro s. v. $x \in \Omega$, odkud $\|g\|_\infty \leq \|\varphi\|$.

Protože $g \in L_q(\mu)$, je podle první části důkazu φ_g spojitý lineární funkcionál na $L_p(\mu)$. Protože $\varphi(s) = \varphi_g(s)$ pro každou jednoduchou měřitelnou funkci s na Ω (vizte (1)) a protože množina všech jednoduchých měřitelných funkcí na Ω je hustá v prostoru $L_p(\mu)$ ([R, Věta 3.13]), platí $\varphi = \varphi_g$ (Věta 16.3).

Dále uvažujme případ, kdy Ω má nekonečnou, ale σ-konečnou míru. Nechť $w \in L_1(\mu)$ je funkce splňující $0 < w(x) < 1$ pro všechna $x \in \Omega$ ([R, Lemma 6.9]). Definujme míru μ_1 na $\mathcal{S}$ vztahem $\mu_1(A) = \int_A w \,\mathrm{d}\mu$ pro $A \in \mathcal{S}$. Pak μ_1 je konečná míra. Definujme nyní funkcionál $\psi \in L_p(\mu_1)^*$ předpisem $\psi(h) = \varphi(w^{1/p}h)$ pro $h \in L_p(\mu_1)$. Funkcionál ψ je dobře definovaný, neboť

$$\int_\Omega |w^{1/p}h|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |h|^p w \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |h|^p \,\mathrm{d}\mu_1 < +\infty \tag{2}$$

[3] V $\mathbb{R}^n$ větu dokázal Johann Karl August Radon (1913), obecný případ pak Otton Marcin Nikodym (1930).

[4] Beppo Levi

pro každou $h \in L_p(\mu_1)$, a dále ψ je zjevně lineární a dle (2) máme $|\psi(f)| = |\varphi(w^{1/p} f)| \le \|\varphi\| \|w^{1/p} h\|_{L_p(\mu)} = \|\varphi\| \|h\|_{L_p(\mu_1)}$. Podle první části důkazu tedy existuje funkce $g_1 \in L_q(\mu_1)$ taková, že $\psi(f) = \int_\Omega f g_1 \, d\mu_1$ pro každou $f \in L_p(\mu_1)$. Položme $g = w^{1/q} g_1$, pokud $p > 1$, resp. $g = g_1$, pokud $p = 1$. Pak pro $p > 1$ máme $\int_\Omega |g|^q \, d\mu = \int_\Omega |g_1|^q w \, d\mu = \int_\Omega |g_1|^q \, d\mu_1 < +\infty$, zatímco pro $p = 1$ máme $\operatorname{ess\,sup}_\mu |g| = \operatorname{ess\,sup}_\mu |g_1| = \operatorname{ess\,sup}_{\mu_1} |g_1| < +\infty$, neboť míry μ a μ_1 mají přesně stejné nulové množiny. Tedy $g \in L_q(\mu)$. Konečně, pro každé $f \in L_p(\mu)$ máme $h = w^{-1/p} f \in L_p(\mu_1)$ (vizte (2)), takže

$$\varphi(f) = \psi(h) = \int_\Omega h g_1 \, d\mu_1 = \int_\Omega w^{-1/p} f g_1 w \, d\mu = \int_\Omega f g \, d\mu = \varphi_g(f).$$

Nyní se budeme věnovat případu, kdy $\mu(\Omega)$ není σ-konečná a $1 < p < \infty$. Pro $A \in \mathcal{S}$ lze prostor $L_p(A)$ přirozeným způsobem chápat jako podprostor $L_p(\Omega)$ sestávající z funkcí rovných 0 mimo A. Označme φ^A restrikci funkcionálu φ na podprostor $L_p(A)$. Zřejmě $\|\varphi^B\| \le \|\varphi^A\| \le \|\varphi\|$ pro každé $A, B \in \mathcal{S}$, $B \subset A$. Označme $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{S};\ A \text{ má } \sigma\text{-konečnou míru}\}$. Položme $\gamma = \sup_{A \in \mathcal{A}} \|\varphi^A\| \le \|\varphi\|$, nalezněme posloupnost množin $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ splňující $\lim_{n\to\infty} \|\varphi^{E_n}\| = \gamma$ a položme $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Pak $E \in \mathcal{A}$ a $\gamma \ge \|\varphi^E\| \ge \|\varphi^{E_n}\| \to \gamma$, tedy $\|\varphi^E\| = \gamma$. Poznamenejme, že nakonec se ukáže, že platí $\varphi(f) = \varphi^E(f\restriction_E)$ pro každé $f \in L_p(\Omega)$.

Podle předchozí části důkazu existuje pro každé $A \in \mathcal{A}$ jednoznačně určená funkce $g_A \in L_q(A)$ splňující $\varphi^A = \varphi_{g_A}$ a $\|\varphi^A\| = \|g_A\|_q$. Jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, pak snadno vidíme, že $\varphi_{g_B}(f) = \varphi^B(f) = \varphi(f) = \varphi^A(f) = \varphi_{g_A}(f) = \varphi_{g_A\restriction_B}(f)$ pro každou $f \in L_p(B)$, přičemž $g_A\restriction_B \in L_q(B)$. Tedy z jednoznačnosti vyjádření funkcionálu φ^B dostáváme $g_B = g_A$ s. v. na B. Položme $g = g_E$ a rozšiřme ji nulou na doplňku E. Pak $g \in L_q(\Omega)$. Ukážeme, že $\varphi = \varphi_g$. Nechť $A \in \mathcal{A}$, $A \cap E = \emptyset$. Protože $A \cup E \in \mathcal{A}$ a dále $g_{E\cup A} = g_E$ s. v. na E a $g_{E\cup A} = g_A$ s. v. na A, dostáváme

$$\begin{aligned}\gamma^q \ge \|\varphi^{E\cup A}\|^q = \|g_{E\cup A}\|_q^q = \int_{E\cup A} |g_{E\cup A}|^q \, d\mu = \int_E |g_{E\cup A}|^q \, d\mu + \int_A |g_{E\cup A}|^q \, d\mu =\\ = \int_E |g_E|^q \, d\mu + \int_A |g_A|^q \, d\mu = \|\varphi^E\|^q + \|g_A\|_q^q = \gamma^q + \|g_A\|_q^q,\end{aligned}$$

což znamená, že $g_A = 0$. (Poznamenejme, že toto je klíčové místo důkazu, a jediné, kde využíváme fakt $q < \infty$.) Pro každé $A \in \mathcal{A}$ a $f \in L_p(A)$ tedy máme

$$\begin{aligned}\varphi(f) = \varphi^A(f) = \int_A f g_A \, d\mu = \int_{A\setminus E} f g_A \, d\mu + \int_{A\cap E} f g_A \, d\mu = \int_{A\setminus E} f g_{A\setminus E} \, d\mu + \int_{A\cap E} f g_{A\cap E} \, d\mu =\\ = \int_{A\cap E} f g_E \, d\mu = \int_{A\cap E} f g \, d\mu = \int_A f g \, d\mu = \int_\Omega f g \, d\mu = \varphi_g(f),\end{aligned}$$

přičemž předposlední dvě rovnosti platí proto, že $g = 0$ mimo E a $f = 0$ mimo A. Rovnost $\varphi(f) = \varphi_g(f)$ tedy speciálně platí pro každou jednoduchou měřitelnou funkci f na Ω splňující $\mu(\{x \in \Omega;\ f(x) \ne 0\}) < +\infty$. Množina všech těchto funkcí je ovšem hustá v $L_p(\Omega)$ ([R, Věta 3.13]), odkud plyne $\varphi = \varphi_g$ (Věta 16.3).

□

POZNÁMKA. Všimněme si, že pro prostor ℓ_2 (nebo obecněji $L_2(\mu)$) máme dvě reprezentace duálu: „hilbertovskou“ reprezentaci pomocí sdruženě lineárního zobrazení $I_H : \ell_2 \to \ell_2^*$ z Věty 1.120 a „banachovskou“ reprezentaci pomocí lineárního zobrazení $I : \ell_2 \to \ell_2^*$ z Věty 15(b). Rozdíl je v tom, jak vypadá akce prvku $y \in \ell_2$ reprezentujícího funkcionál na prvek $x \in \ell_2$:

$$I_H(y)(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n},$$

$$I(y)(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n.$$

V případě reálného prostoru obě reprezentace splývají, v případě komplexního prostoru platí $I_H(y) = I(\overline{y})$. Pro prostor $L_2(\mu)$ je interpretace obou reprezentací analogická.

Důkaz následujícího tvrzení je podobný důkazu Věty 15(a), (b).

VĚTA 16. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Nechť q je sdružený exponent k p. Pak zobrazení $I\colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f,g)(x,y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

DŮKAZ. Nechť X, Y jsou nad $\mathbb{K}$. Označme $Z = X \oplus_p Y$. Zobrazení $Q_X\colon Z \to X$, $Q_X(x,y) = x$ a $Q_Y\colon Z \to Y$, $Q_Y(x,y) = y$ jsou zjevně spojité lineární operátory. Proto $I(f,g) = f \circ Q_X + g \circ Q_Y$ je spojitý lineární funkcionál na Z, a tedy I je dobře definováno. Zjevně I je lineární. Ukážeme, že I je na: Je-li $h \in Z^*$, pak položíme $f(x) = h(x,0)$ pro $x \in X$ a $g(y) = h(0,y)$ pro $y \in Y$. Snadno je vidět, že $f \in X^*$ a $g \in Y^*$. Máme $I(f,g)(x,y) = f(x) + g(y) = h(x,0) + h(0,y) = h(x,y)$ pro každé $(x,y) \in Z$, tedy $I(f,g) = h$.

Nakonec ukažme, že I je izometrie. Nechť $(f,g) \in X^* \oplus_q Y^*$. Předpokládejme nejprve, že $1 < p < \infty$. Pak s využitím Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |I(f,g)(x,y)| = \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\big) \leq \\ &\leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}^q + \|g\|_{Y^*}^q\big)^{\frac{1}{q}} \big(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\big)^{\frac{1}{p}} = \big(\|f\|_{X^*}^q + \|g\|_{Y^*}^q\big)^{\frac{1}{q}} = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $(f,g) \neq 0$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Položme $c = \big(\|f\|^q + \|g\|^q\big)^{\frac{1}{p}}$ a $\eta = \frac{c}{\|f\|^{q-1}+\|g\|^{q-1}}\varepsilon$. Nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \eta$, a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, aby $|f(x)| = \alpha f(x)$. Analogicky nalezneme $y \in B_Y$ tak, aby $|g(y)| > \|g\| - \eta$, a $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| = 1$, aby $|g(y)| = \beta g(y)$. Položme $u = \frac{1}{c}\big(\|f\|^{q-1}\alpha x, \|g\|^{q-1}\beta y\big) \in Z$. Pak

$$\|u\| = \frac{1}{c}\big(\|f\|^q\|x\|^p + \|g\|^q\|y\|^p\big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{c}\big(\|f\|^q + \|g\|^q\big)^{\frac{1}{p}} = 1$$

a

$$\begin{aligned}I(f,g)(u) &= \frac{1}{c}\big(\|f\|^{q-1}f(\alpha x) + \|g\|^{q-1}g(\beta y)\big) = \frac{1}{c}\big(\|f\|^{q-1}|f(x)| + \|g\|^{q-1}|g(y)|\big) > \\ &> \frac{\|f\|^q + \|g\|^q}{c} - \frac{\|f\|^{q-1} + \|g\|^{q-1}}{c}\eta = \big(\|f\|^q + \|g\|^q\big)^{\frac{1}{q}} - \varepsilon = \|(f,g)\| - \varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

Je-li $p = 1$, pak

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\big) \leq \\ &\leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \max\big\{\|f\|_{X^*}, \|g\|_{Y^*}\big\}\big(\|x\|_X + \|y\|_Y\big) = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $\|f\| \geq \|g\|$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \varepsilon$. Pak $\|I(f,g)\| \geq |I(f,g)(x,0)| = |f(x)| > \|f\| - \varepsilon = \|(f,g)\| - \varepsilon$. Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

Konečně, je-li $p = \infty$, pak

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\big) \leq \\ &\leq \sup_{(x,y)\in B_Z} \max\big\{\|x\|_X, \|y\|_Y\big\}\big(\|f\|_{X^*} + \|g\|_{Y^*}\big) = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné a nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \varepsilon$, a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, aby $|f(x)| = \alpha f(x)$. Analogicky nalezneme $y \in B_Y$ tak, aby $|g(y)| > \|g\| - \varepsilon$, a $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| = 1$, aby $|g(y)| = \beta g(y)$. Položme $u = (\alpha x, \beta y) \in Z$. Pak $\|u\| = \max\big\{|\alpha|\|x\|, |\beta|\|y\|\big\} \leq 1$ a

$$I(f,g)(u) = f(\alpha x) + g(\beta y) = |f(x)| + |g(y)| > \|f\| + \|g\| - 2\varepsilon = \|(f,g)\| - 2\varepsilon.$$

Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

□

Několik následujících tvrzení se bude týkat prostoru $C(K)$. Zformulujeme je v obecnější verzi pro kompaktní topologické prostory. Čtenář, který není obeznámen se základy topologie, si všude místo topologického prostoru může přestavovat metrický prostor.

DEFINICE 17. Nechť K je kompaktní topologický prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

FAKT 18. *Nechť K je kompaktní topologický prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak Λ je monotónní, tj. $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C(K)$ jsou reálné funkce splňující $f \leq g$. Dále Λ je automaticky spojitý a pro reálnou $f \in C(K)$ platí $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Tedy v reálném případě platí $\|\Lambda\| = \Lambda(1)$.*

DŮKAZ. Máme $\Lambda(g) - \Lambda(f) = \Lambda(g - f) \geq 0$, neboť $g - f \geq 0$. Pro reálnou $f \in C(K)$ platí $f \leq |f|$ a $-f \leq |f|$, odkud s použitím monotonie dostaneme $\Lambda(f) \leq \Lambda(|f|)$ a $-\Lambda(f) = \Lambda(-f) \leq \Lambda(|f|)$, což dohromady dává odhad $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Odtud v reálném případě platí, že $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(1)$ pro $f \in B_{C(K)}$. V komplexním případě pak $|\Lambda(f)| = |\Lambda(\mathrm{Re}\, f + i\, \mathrm{Im}\, f)| \leq |\Lambda(\mathrm{Re}\, f)| + |\Lambda(\mathrm{Im}\, f)| \leq \Lambda(|\mathrm{Re}\, f|) + \Lambda(|\mathrm{Im}\, f|) \leq 2\Lambda(|f|)$, a tedy $\|\Lambda\| \leq 2\Lambda(1)$.

□

Poznamenejme, že ve skutečnosti výše uvedená nerovnost $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$ platí i v komplexním případě, což ihned plyne z reprezentace níže.

VĚTA 19 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$). *Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.*

Všimněme si, že předchozí věta říká, že existuje bijekce mezi množinou všech regulárních borelovských *nezáporných* měr na K a množinou všech spojitých lineárních *nezáporných* funkcionálů na $C(K)$.

K důkazu budeme potřebovat Lemma 16.13 a Větu 16.14.

DŮKAZ. Důkaz je poměrně technický, proto nejprve nastíníme základní strategii. Předpokládejme, že míra μ má požadované vlastnosti. Z regularity plyne, že μ je jednoznačně určena svými hodnotami na otevřených, případně uzavřených, množinách. Zvolme například otevřené množiny. Pro každou otevřenou množinu $G \subset K$ platí $\mu(G) = \int_K \chi_G \, \mathrm{d}\mu$, kde na pravé straně je „evaluace funkcionálu Λ na funkci χ_G“. Zdálo by se tedy vhodné definovat $\mu(G) = \Lambda(\chi_G)$, ovšem hodnota $\Lambda(\chi_G)$ obvykle není definována, neboť χ_G není spojitá funkce (pokud G není obojetná). Přirozeným nápadem tedy je funkci χ_G aproximovat pomocí spojitých funkcí. Pro každou $f \in C(K)$, $0 \leq f \leq 1$ se $\mathrm{supp}\, f \subset G$ platí $\Lambda(f) = \int_G f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_G 1 \, \mathrm{d}\mu = \mu(G)$. Na druhou stranu, zvolíme-li libovolné $\varepsilon > 0$, pak z vnitřní regularity plyne existence uzavřené $F \subset G$ takové, že $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Dle Lemmatu 16.13 existuje $f \in C(K)$, $0 \leq f \leq 1$, která je rovna 1 na F a $\mathrm{supp}\, f \subset G$. Pak $\Lambda(f) = \int_G f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_F f \, \mathrm{d}\mu = \mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Platí tedy

$$\mu(G) = \sup\bigl\{\Lambda(f);\ f \in C(K), 0 \leq f \leq 1, \mathrm{supp}\, f \subset G\bigr\}. \tag{3}$$

Vztah (3) je tedy nutnou podmínkou, kterou musí míra μ splňovat, a proto je přirozené vyjít při konstrukci μ právě z tohoto vzorce. Hodnoty μ na borelovských množinách jsou pak jednoznačně určeny pomocí vnější regularity. Konstrukci lze tedy vést tak, že definujeme μ na otevřených množinách vzorcem (3) a na borelovských množinách vzorcem

$$\mu(E) = \inf\bigl\{\mu(G);\ G \supset E, G \text{ otevřená}\bigr\}, \tag{4}$$

ukážeme, že definice je konzistentní a že takto definovaná μ je regulární míra, a že tato míra reprezentuje funkcionál Λ. Kvůli technickým obtížím nicméně zkonstruujeme nejprve vnější míru tak, že definujeme hodnoty μ vzorcem (4) na *všech* podmnožinách K, a pak pomocí Carathéodoryovy[5] konstrukce ukážeme, že restrikce μ na borelovské množiny je míra. Konstrukce bude rozdělena do několika technických kroků:

[5] Constantin Carathéodory (Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή) (1914)

1. krok: Konstrukce vnější míry μ na K pomocí vzorců (3) a (4).
2. krok: Ukážeme, že borelovské množiny jsou carathéodoryovsky měřitelné vzhledem k μ, a tedy restrikce μ na borelovské množiny je regulární borelovská míra.
3. krok: Ukážeme, že μ reprezentuje funkcionál Λ.
4. krok: Ukážeme jednoznačnost μ.

1. krok. Pro každou otevřenou $G \subset K$ definujme $\mu(G)$ pomocí vzorce (3). Dále pro každou $E \subset K$, která není otevřená, definujme $\mu(E)$ pomocí vzorce (4). Je ihned vidět, že jsou-li $U, V \subset K$ otevřené a $U \subset V$, pak $\mu(U) \leq \mu(V)$. Odtud plyne, že vzorec (4) platí pro všechny $E \subset K$. Dále je zřejmé, že μ je nezáporná, konečná (Fakt 18), $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(E) \leq \mu(F)$ pro libovolné $E, F \subset K$, $E \subset F$. Zbývá ukázat σ-subaditivitu.

Nechť je dána posloupnost množin $\{E_n\}$ v K. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle (4) existují otevřené množiny $G_n \supset E_n$ splňující $\mu(G_n) < \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Pak G je otevřená množina a podle (3) existuje $f \in C(K)$ splňující $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subset G$ a $\Lambda(f) > \mu(G) - \varepsilon$. Množina $\operatorname{supp} f$ je uzavřená podmnožina K, tedy je kompaktní. Proto existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_i$. Položme $U_{m+1} = K \setminus \operatorname{supp} f$ a $U_i = G_i$, $i = 1, \dots, m$. Pak $\{U_1, \dots, U_{m+1}\}$ je otevřené pokrytí K, a tedy dle Věty 16.14 existují $g_1, \dots, g_{m+1} \in C(K)$ splňující $0 \leq g_i \leq 1$ a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ pro $i = 1, \dots, m+1$ a $\sum_{i=1}^{m+1} g_i = 1$. Protože $g_{m+1} = 0$ na $\operatorname{supp} f$, platí $\sum_{i=1}^{m} g_i = 1$ na $\operatorname{supp} f$. Položme $h_i = f g_i$, $i = 1, \dots, m$. Pak $h_i \in C(K)$, $0 \leq h_i \leq 1$ a $\operatorname{supp} h_i \subset U_i = G_i$ pro $i = 1, \dots, m$ a $f = \sum_{i=1}^{m} h_i$. Tedy

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\leq \mu(G) < \Lambda(f) + \varepsilon = \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \Lambda(h_i) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \mu(G_i) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) \leq \\
&\leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).
\end{aligned}
$$

Protože nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, je μ σ-subaditivní. Tedy μ je vnější míra na K.

2.krok. Nechť $\mathcal{S}$ je množina všech carathéodoryovsky měřitelných podmnožin K vzhledem k μ, tj. množin $E \subset K$ splňujících $\mu(T) = \mu(T \cap E) + \mu(T \setminus E)$ pro každou testovací $T \subset K$. Pak dle Caratheódoryovy věty je $\mathcal{S}$ σ-algebra a μ zúžená na $\mathcal{S}$ je míra (dokonce úplná). Je třeba ukázat, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny borelovské podmnožiny K. K tomu stačí ověřit, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny otevřené množiny.

Nejprve ukážeme, že μ je aditivní na otevřených množinách. Nechť tedy $U, V \subset K$ jsou disjunktní otevřené množiny. Díky subaditivitě μ stačí ukázat, že $\mu(U \cup V) \geq \mu(U) + \mu(V)$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Dle (3) existují $f, g \in C(K)$ splňující $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subset U$ a $0 \leq g \leq 1$, $\operatorname{supp} g \subset V$ takové, že $\Lambda(f) \geq \mu(U) - \varepsilon$ a $\Lambda(g) \geq \mu(V) - \varepsilon$. Protože U a V jsou disjunktní, platí $0 \leq f + g \leq 1$ a $\operatorname{supp}(f + g) \subset U \cup V$, a tedy

$$
\mu(U \cup V) \geq \Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g) \geq \mu(U) + \mu(V) - 2\varepsilon.
$$

Protože to platí pro každé $\varepsilon > 0$, dostáváme $\mu(U \cup V) \geq \mu(U) + \mu(V)$.

Nyní již relativně snadno dostaneme, že každá otevřená podmnožina K je carathéodoryovsky měřitelná vzhledem k μ. Nechť tedy $G \subset K$ je otevřená a $T \subset K$ je libovolná. Díky subaditivitě stačí ukázat, že $\mu(T) \geq \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle (4) existuje $U \supset T$ otevřená splňující $\mu(U) < \mu(T) + \varepsilon$. Ze (3) najdeme $f \in C(K)$ takovou, že $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp} f \subset U \cap G$ a $\Lambda(f) > \mu(U \cap G) - \varepsilon$. Podle Lemmatu 16.13 existuje otevřená množina V splňující $\operatorname{supp} f \subset V \subset \overline{V} \subset U \cap G$. Pak $\mu(V) \geq \Lambda(f) \geq \mu(U \cap G) - \varepsilon$. Množiny V a $U \setminus \overline{V}$ jsou disjunktní a otevřené. Z aditivity μ na otevřených množinách tedy dostáváme

$$
\begin{aligned}
\mu(T) > \mu(U) - \varepsilon \geq \mu\big(V \cup (U \setminus \overline{V})\big) - \varepsilon = \mu(V) + \mu(U \setminus \overline{V}) - \varepsilon \geq \\
\geq \mu(U \cap G) - \varepsilon + \mu(U \setminus G) - \varepsilon \geq \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G) - 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, tedy $\mu(T) \geq \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G)$.

Na závěr tohoto kroku si uvědomme, že z monotonie Λ plyne $\mu(K) = \Lambda(1) < +\infty$, speciálně μ je konečná na kompaktních podmnožinách K. Dále μ je zevně regulární přímo podle (4). Ovšem každá konečná zevně regulární míra je automaticky regulární i zevnitř. Tedy restrikce μ na borelovské množiny je regulární borelovská míra.

3. krok. Ukážeme, že $\Lambda(f) = \int_K f\,\mathrm{d}\mu$ pro každou $f \in C(K)$. S využitím rozkladu na reálnou a imaginární část a díky linearitě Λ a integrálu stačí dokázat reprezentaci pro reálné funkce. Dále si všimněme, že stačí dokázat nerovnost $\Lambda(f) \le \int_K f\,\mathrm{d}\mu$ pro každou reálnou $f \in C(K)$. Pak totiž aplikací této nerovnosti na $-f$ obdržíme opačnou nerovnost pro f.

Nechť je tedy dána reálná $f \in C(K)$ a nechť $a, b \in \mathbb{R}$ splňují $a \le f \le b$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$. Vskutku, máme-li požadovanou nerovnost dokázánu pro všechny nezáporné $g \in C(K)$, pak díky rovnosti $\Lambda(1) = \mu(K) = \int_K \chi_K\,\mathrm{d}\mu$ máme $\Lambda(f) = \Lambda(f - a\chi_K + a\chi_K) = \Lambda(f - a\chi_K) + a\Lambda(\chi_K) \le \int_K (f - a\chi_K)\,\mathrm{d}\mu + a\int_K \chi_K\,\mathrm{d}\mu = \int_K f\,\mathrm{d}\mu$. Zvolme libovolné $0 < \varepsilon < 1$ a reálná čísla $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} \le b < y_n$ splňující $y_i - y_{i-1} \le \varepsilon$ pro $i = 1, \ldots, n$. Protože f je spojitá, množiny

$$E_i = \{x \in K;\ y_{i-1} \le f(x) < y_i\}, \quad i = 1, \ldots, n$$

tvoří borelovský rozklad K. Dále množiny $\{x \in K;\ f(x) < y_i + \varepsilon\}$ jsou otevřené. Díky regularitě μ tedy existují otevřené množiny U_i, $i = 1, \ldots, n$ splňující $\mu(U_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$ a $E_i \subset U_i \subset \{x \in K;\ f(x) < y_i + \varepsilon\}$. Systém $\{U_1, \ldots, U_n\}$ tvoří otevřené pokrytí K, a tedy podle Věty 16.14 existují funkce $g_1, \ldots, g_n \in C(K)$ splňující $0 \le g_i \le 1$ a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ pro $i = 1, \ldots, n$ a $\sum_{i=1}^n g_i = 1$. Pak máme $g_i f \le (y_i + \varepsilon)g_i$ na K a $f \ge y_{i-1} \ge y_i - \varepsilon$ na E_i pro $i = 1, \ldots, n$, a tedy

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) &= \Lambda\left(f \sum_{i=1}^n g_i\right) = \sum_{i=1}^n \Lambda(g_i f) \le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Lambda(g_i) \le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\mu(U_i) \le \\
&\le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\Big) = \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) \le \\
&\le \sum_{i=1}^n \int_{E_i} (y_i - \varepsilon)\,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} n(b + 2\varepsilon) \le \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\big(2\mu(K) + b + 2\varepsilon\big) \\
&= \int_K f\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\big(2\mu(K) + b + 2\big),
\end{aligned}$$

přičemž první nerovnost plyne z monotonie Λ a druhá plyne z (3). Protože nerovnost platí pro libovolné $0 < \varepsilon < 1$, je tím důkaz 3. kroku dokončen.

4. krok. Nechť μ, ν jsou dvě regulární borelovské míry reprezentující funkcionál Λ. Vzhledem k vnější regularitě stačí ukázat, že se shodují na otevřených množinách. Nechť $G \subset K$ je otevřená množina. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Díky vnitřní regularitě existuje uzavřená množina $F \subset U$ splňující $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Podle Lemmatu 16.13 existuje $f \in C(K)$ splňující $0 \le f \le 1$, $f = 1$ na F a $\operatorname{supp} f \subset G$. Pak

$$\mu(G) < \mu(F) + \varepsilon \le \int_K f\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon = \int_K f\,\mathrm{d}\nu + \varepsilon \le \nu(G) + \varepsilon.$$

Toto platí pro každé $\varepsilon > 0$, a tedy $\mu(G) \le \nu(G)$. Prohozením rolí μ a ν dostaneme opačnou nerovnost.

□

Před studiem následující věty je nezbytné se seznámit s integrací vzhledem ke komplexním mírám, vizte např. Dodatek, pododdíl 16.3.4.

VĚTA 20 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$[6]). *Je-li K kompaktní Hausdorffův topologický prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I\colon M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde*

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f\,\mathrm{d}\mu.$$

[6] F. Riesz větu ukázal pro $C([a, b])$ pomocí Stieltjesova integrálu (1909-11), J. Radon zavedl míru a zobecnil větu na $\mathbb{R}^n$ (1913), pro kompaktní metrické prostory reprezentaci dokázal S. Banach (1937).

Tuto reprezentační větu dokážeme s pomocí Věty 19 a následujícího lemmatu.

LEMMA 21. *Nechť K je kompaktní topologický prostor a $\varphi \in C(K)^*$. Pak existuje nezáporný $\Lambda \in C(K)^*$ takový, že $|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$.*

DŮKAZ. Nechť $C^+(K)$ značí nezáporné spojité funkce na K. Pro $f \in C^+(K)$ a $h \in C(K)$ splňující $|h| \le f$ platí $|\varphi(h)| \le \|\varphi\|\|h\| \le \|\varphi\|\|f\|$. Můžeme tedy definovat nezápornou funkci $\Lambda\colon C^+(K) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\Lambda(f) = \sup\big\{|\varphi(h)|;\ h \in C(K), |h| \le f\big\}.$$

Snadno je vidět, že $\Lambda(f) \le \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C^+(K)$ splňují $f \le g$, a dále $\Lambda(cf) = c\Lambda(f)$ kdykoli $f \in C^+(K)$ a $c \ge 0$. Též ihned vidíme, že Λ splňuje náš požadavek $|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$. Zbývá nám ukázat, že Λ lze rozšířit na všechny funkce z $C(K)$ tak, aby to byl lineární funkcionál.

Ukažme nejprve, že Λ je aditivní na $C^+(K)$, tj. $\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$ pro libovolné $f_1, f_2 \in C^+(K)$. Nechť $f_1, f_2 \in C^+(K)$ jsou dány. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Dle definice existují $h_1, h_2 \in C(K)$ takové, že $|h_j| \le f_j$ a $|\varphi(h_j)| > \Lambda(f_j) - \varepsilon$, $j = 1, 2$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ splňují $|\alpha_j| = 1$ a $\alpha_j\varphi(h_j) = |\varphi(h_j)|$, $j = 1, 2$. Pak $|\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2| \le |h_1| + |h_2| \le f_1 + f_2$, takže

$$\Lambda(f_1)+\Lambda(f_2) < |\varphi(h_1)|+|\varphi(h_2)|+2\varepsilon = \varphi(\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2)+2\varepsilon \le \Lambda(|h_1|+|h_2|)+2\varepsilon \le \Lambda(f_1+f_2)+2\varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne odtud, že $\Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) \le \Lambda(f_1 + f_2)$.

Pro opačnou nerovnost uvažujme libovolnou funkci $h \in C(K)$ splňující $|h| \le f_1 + f_2$. Položme $V = \{x \in K;\ f_1(x) + f_2(x) > 0\}$ a pro $j = 1, 2$ definujme

$$h_j(x) = \begin{cases} \frac{f_j(x)h(x)}{f_1(x)+f_2(x)} & \text{pro } x \in V,\\ 0 & \text{pro } x \in K \setminus V. \end{cases}$$

Funkce h_j jsou zjevně spojité v bodech množiny V. Je-li $x \in K \setminus V$, pak $h(x) = 0$, a protože h je spojitá a platí $0 \le |h_j| \le |h|$, jsou i h_j spojité v x. Tedy $h_j \in C(K)$, $j = 1, 2$. Protože $h_1 + h_2 = h$ a $|h_j| \le f_j$, máme

$$|\varphi(h)| = |\varphi(h_1) + \varphi(h_2)| \le |\varphi(h_1)|+|\varphi(h_2)| \le \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2).$$

Protože tato nerovnost platí pro všechna $h \in C(K)$ splňující $|h| \le f_1 + f_2$, dostáváme, že $\Lambda(f_1 + f_2) \le \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$.

Na závěr dodefinujeme $\Lambda(f) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-)$ pro reálnou $f \in C(K)$ a v komplexním případě dále $\Lambda(f) = \Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f)$ pro obecnou $f \in C(K)$. (Poznamenejme, že definice jsou konzistentní, neboť $\Lambda(0) = 0$.) Zbývá nám ověřit linearitu Λ. Nechť nejprve $f, g \in C(K)$ jsou reálné. Položme $h = f + g$. Pak $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, neboli $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Z aditivity Λ pro nezáporné funkce tak dostáváme $\Lambda(h^+) + \Lambda(f^-) + \Lambda(g^-) = \Lambda(h^-) + \Lambda(f^+) + \Lambda(g^+)$, odkud již snadno obdržíme $\Lambda(h) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$. Komplexní případ pak snadno plyne z reálného a z aditivity Re a Im.

Konečně, snadno je vidět, že pro každou $f \in C(K)$ je $\Lambda(cf) = c\Lambda(f)$ pro $c \ge 0$ a $\Lambda(-f) = -\Lambda(f)$. V komplexním případě pak $\Lambda(if) = \Lambda(-\operatorname{Im} f) + i\Lambda(\operatorname{Re} f) = i\big(\Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f)\big) = i\Lambda(f)$. Tím je dokázáno, že Λ je lineární funkcionál na $C(K)$.

□

DŮKAZ VĚTY 20. Nechť $\mu \in M(K)$ je dáno. Pro každé $f \in C(K)$ platí

$$\int_K |f|\,\mathrm{d}|\mu| \le \|f\||\mu|(K) = \|\mu\|\|f\|.$$

Odtud plyne, že φ_μ je dobře definovaná funkce a platí $|\varphi_\mu(f)| \le \int_K |f|\,\mathrm{d}|\mu| \le \|\mu\|\|f\|$. Dále φ_μ je zjevně lineární, a tedy $\varphi_\mu \in C(K)^*$ a $\|\varphi_\mu\| \le \|\mu\|$.

Na druhou stranu, dle Tvrzení 16.38 existuje borelovská funkce $h\colon K \to \mathbb{C}$ splňující $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in K$ a $\int_K f\,\mathrm{d}\mu = \int_K f h\,\mathrm{d}|\mu|$ pro každou $f \in L_1(|\mu|)$. Podle důsledku Luzinovy věty ([R, str. 71] nebo Důsledek 16.29) existuje posloupnost $\{f_n\} \subset B_{C(K)}$ taková, že $f_n(x) \to \overline{h}(x)$ pro $|\mu|$-s. v. $x \in K$. Pak z Lebesgueovy věty plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_\mu(f_n)| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_K f_n \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \int_K f_n h \, \mathrm{d}|\mu| \right| = \left| \int_K \overline{h} h \, \mathrm{d}|\mu| \right| = \int_K 1 \, \mathrm{d}|\mu| = |\mu|(K) = \|\mu\|.$$

Tedy $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\|$. Linearita zobrazení I je zřejmá, takže je to lineární izometrie do.

Ukažme, že I je na. Nechť $\varphi \in C(K)^*$. Dle Lemmatu 21 existuje nezáporný lineární funkcionál Λ na $C(K)$ splňující $|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$. Dle Věty 19 existuje na K (konečná) regulární borelovská nezáporná míra λ splňující $\Lambda(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou $f \in C(K)$. Máme tedy

$$|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|) = \int_K |f| \, \mathrm{d}\lambda = \|f\|_{L_1(\lambda)}$$

pro každou $f \in C(K)$. Odtud plyne, že jsou-li $f, g \in C(K)$ takové, že $f = g$ λ-s. v. na K, pak $|\varphi(f) - \varphi(g)| \le \|f - g\|_{L_1(\lambda)} = 0$, neboli $\varphi(f) = \varphi(g)$. Můžeme tedy chápat funkcionál φ jako lineární funkcionál $\tilde{\varphi}$ na prostoru $(C(K), \|\cdot\|_{L_1(\lambda)})$ jakožto podprostoru $L_1(\lambda)$. Navíc nerovnost výše ukazuje, že $\tilde{\varphi}$ je spojitý a $\|\tilde{\varphi}\| \le 1$. Protože $C(K)$ je hustý podprostor $L_1(\lambda)$ v normě prostoru $L_1(\lambda)$ ([R, Věta 3.14]), existuje jednoznačné rozšíření $\tilde{\varphi}$ na funkcionál $\psi \in L_1(\lambda)^*$ (Věta 1.62). Tedy dle Věty 15(d) existuje $g \in L_\infty(\lambda)$ taková, že $\psi(f) = \int_K fg \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou $f \in L_1(\lambda)$. Definujme komplexní borelovskou míru μ předpisem

$$\mu(E) = \int_E g \, \mathrm{d}\lambda$$

pro každou $E \subset K$ borelovskou. Dle Věty 16.35 je μ regulární. Pak díky Větě 16.37 máme $\varphi_\mu(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu = \int_K fg \, \mathrm{d}\lambda = \psi(f) = \tilde{\varphi}(f) = \varphi(f)$ pro každou $f \in C(K)$.

□

VĚTA 22 (Felix Hausdorff). *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.*

(a) Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

(b) Zobrazení $I\colon X^*/Y^\perp \to Y^*$ dané předpisem

$$I(\widehat{f}) = f\restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^\perp$ a Y^* lze identifikovat s $X^*/Y^\perp$.

DŮKAZ. (a) Je-li $f \in Y^\perp$ a jsou-li $x, y \in X$ takové, že $\widehat{x} = \widehat{y}$ v X/Y, pak $x - y \in Y$, a tedy $f(x) = f(y)$. Zobrazení I je tedy dobře definované. Zjevně I je lineární. Ukažme, že I je izometrie do: Nechť $f \in Y^\perp$. Pak $\|I(f)\| = \sup_{\widehat{x}\in U_{X/Y}} |I(f)(\widehat{x})| = \sup_{x\in U_X} |I(f)(\widehat{x})| = \sup_{x\in U_X} |f(x)| = \|f\|$, přičemž druhá rovnost plyne z faktu $U_{X/Y} = q(U_X)$, kde $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení (Tvrzení 1.69). Konečně, je-li $g \in (X/Y)^*$, pak $g \circ q \in X^*$ a navíc $g \circ q \in Y^\perp$. Zjevně $I(g \circ q) = g$, tedy I je na.

(b) Nejprve si uvědomme, že $Y^\perp$ je uzavřený podprostor X^* (Lemma 12(a)), a tedy $X^*/Y^\perp$ je normovaný lineární prostor. Dále, I je dobře definováno, neboť jsou-li $f, g \in X^*$ takové, že $\widehat{f} = \widehat{g}$ v $X^*/Y^\perp$, pak $f - g \in Y^\perp$, neboli $f = g$ na Y. Zjevně I je lineární. Ukažme, že I je izometrie do: Nechť $f \in X^*$. Je-li $h \in \widehat{f}$, pak $h\restriction_Y = f\restriction_Y$, tedy $\|h\| \ge \|f\restriction_Y\|$, odkud plyne $\|\widehat{f}\| = \inf_{h\in\widehat{f}} \|h\| \ge \|f\restriction_Y\| = \|I(\widehat{f})\|$. Na druhou stranu, dle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 4) existuje rozšíření $g \in X^*$ funkcionálu $f\restriction_Y \in Y^*$ splňující $\|g\| = \|f\restriction_Y\|$. Pak $g - f \in Y^\perp$, tj. $g \in \widehat{f}$. Proto $\|I(\widehat{f})\| = \|f\restriction_Y\| = \|g\| \ge \|\widehat{f}\|$. Konečně, je-li $g \in Y^*$ a $f \in X^*$ je rozšíření g z Hahnovy-Banachovy věty, pak $I(\widehat{f}) = f\restriction_Y = g$, a tedy I je na.

□

POZNÁMKA. Reprezentační věty z tohoto oddílu hovoří o tom, jak lze reprezentovat duální prostor pro konkrétní Banachovy prostory X v tom smyslu, že existuje lineární izometrie mezi nějakým Banachovým prostorem Y a duálem X^*. Nejdůležitější částí těchto reprezentačních vět jsou ovšem popisy toho, jakým způsobem prvek Y, který reprezentuje funkcionál na X, působí na prvky prostoru X.

Obvykle se prostory X^* a Y ztotožňují, říkáme tedy například „ℓ_1 je duálem k c_0“. Vždy je ovšem třeba mít na paměti, že toto ztotožnění je realizováno pomocí příslušné izometrie, a je důležité vědět, jak vypadá příslušná „akce“ konkrétního prvku prostoru Y na daný prvek prostoru X.

PŘÍKLAD 23. Uvažujme $X = \ell_1$ a $B = c_0 \subset \ell_\infty = \ell_1^*$. Pak B je uzavřený podprostor ℓ_1^* a $B_\perp = \{0\} \subset \ell_1$. Označíme-li totiž f_n kanonické bázové vektory v c_0, pak pro $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in B_\perp$ máme $x_n = f_n(x) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $(B_\perp)^\perp = \{0\}^\perp = \ell_1^* = \ell_\infty \supsetneqq c_0 = B$.

◇

3. Druhý duál a reflexivita

Reflexivní prostory jsou významnou třídou Banachových prostorů. Jejich důležitost spočívá především v tom, že v nich funguje jistá náhražka kompaktnosti jednotkové koule, jak uvidíme v oddílu 7.9. Definice reflexivního prostoru pracuje s druhým duálním prostorem. Význam této definice se lépe vyjasní opět až v oddílu 7.9

DEFINICE 24. Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$. Z definice je zřejmé, že ε_x je lineární, spojitost pak plyne z odhadu $|f(x)| \leq \|x\|\|f\|$.

DEFINICE 25. Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**}.

TVRZENÍ 26. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}*

DŮKAZ. Pro libovolná $x, y \in X$, $f \in X^*$ a skalár α máme $\varepsilon_{x+y}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \varepsilon_x(f) + \varepsilon_y(f) = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(f)$ a podobně $\varepsilon_{\alpha x}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha(\varepsilon_x(f)) = (\alpha\varepsilon_x)(f)$. Tedy zobrazení ε je lineární. Dále $\|\varepsilon(x)\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |\varepsilon_x(f)| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)| = \|x\|$ dle duálního vyjádření normy (Důsledek 6). Tedy ε je izometrie do. Je-li X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený dle Tvrzení 1.60(c).

□

Pomocí vnoření do druhého duálu snadno dokážeme následující pozorování.

TVRZENÍ 27. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak* $\dim X^* = \dim X$, *a to i v případě, že* $\dim X = \infty$.

DŮKAZ. Je-li $\dim X = n < \infty$, pak dimenze prostoru všech lineárních forem na X je rovna n. Podle Věty 1.66 je ovšem každá lineární forma na X spojitá, a tedy $\dim X^* = n$.

Nechť nyní $\dim X = \infty$. Ukážeme, že pak také $\dim X^* = \infty$. Předpokládejme, že to není pravda, tj. $\dim X^* < \infty$. Pak dle předchozí části je $\dim X^{**} < \infty$. Prostor X je ovšem izomorfní podprostoru X^{**}, a tedy $\dim X = \dim \varepsilon(X) \leq \dim X^{**} < \infty$, což je spor.

□

VĚTA 28. *Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.*

V důkazu využijeme následující lemma.

LEMMA 29. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak existují normovaný lineární prostor Z a lineární izometrie $S\colon Z \to Y$ na tak, že X je podprostor Z a $S \restriction_X = T$.*

DŮKAZ. Nechť e je taková množina, že uspořádaná dvojice $[e, y] \notin X$ pro každé $y \in Y$. Definujme množinu $Z = X \cup \{[e, y];\ y \in Y \setminus T(X)\}$ a zobrazení $S\colon Z \to Y$ předpisem $S(x) = T(x)$ pro $x \in X$ a $S([e, y]) = y$ pro $y \in Y \setminus T(X)$. Dle předpokladu na e je S dobře definováno. Snadno je vidět, že S je bijekce a zjevně $S \restriction_X = T$. Na množinu Z přesuneme vektorové operace z prostoru Y pomocí zobrazení S: Pro $x, y \in Z$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ definujeme $x + y = S^{-1}\big(S(x) + S(y)\big)$ a $\alpha \cdot x = S^{-1}\big(\alpha S(x)\big)$. Snadno lze ověřit, že Z s takto definovanými operacemi je vektorový prostor. Protože $S \restriction_X = T$ je lineární vzhledem k původním operacím na X, plyne odtud, že nově definované operace na X jakožto podmnožině Z souhlasí s původními vektorovými operacemi na X, a tedy X je vektorový podprostor Z. Definice vektorových operací na Z též přímo dává, že S je lineární zobrazení.

Podobně na Z přesuneme normu z Y: Pro $x \in Z$ definujeme $\|x\| = \|S(x)\|$. Linearita S snadno implikuje, že $\|\cdot\|$ je norma na Z. Protože $S \restriction_X = T$ je izometrie vzhledem k původní normě na X, plyne odtud, že nově definovaná norma na X jakožto podmnožině Z souhlasí s původními normou na X, a tedy X je podprostor Z jakožto normovaného lineárního prostoru. Konečně, z definice normy je přímo vidět, že S je izometrie.

□

DŮKAZ VĚTY 28. Podle Tvrzení 26 je ε lineární izometrie, tedy dle Lemmatu 29 použitého na zobrazení $T = \varepsilon$ a $Y = \overline{\varepsilon(X)}$ existují normovaný lineární prostor $\widehat{X}$ obsahující X a lineární izometrie $S\colon \widehat{X} \to Y$ na taková, že $S \restriction_X = \varepsilon$. Protože X^{**} je úplný (Věta 1.50), je i Y úplný (Tvrzení 1.5(b)), a tedy i $\widehat{X}$ je úplný (Věta 1.60(b)). Protože $S(X) = \varepsilon(X)$ je hustý v Y a S je homeomorfismus, plyne odtud, že X je hustý v $\widehat{X}$.

Nechť nyní X je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Podle první části existuje jeho zúplnění $\widehat{X}$ jakožto normovaného lineárního prostoru. Pak metrický prostor $\widehat{X} \times \widehat{X}$ je též úplný (Věta 16.6) a snadno je vidět, že $X \times X$ je v něm hustý. Funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ je dle Tvrzení 1.84(b) stejnoměrně spojitá na omezených podmnožinách $X \times X$, tedy existuje její spojité rozšíření $s\colon \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{K}$ (Věta 16.9). Funkce $(x, y, z) \mapsto s(x + y, z)$ a $(x, y, z) \mapsto s(x, z) + s(y, z)$ jsou spojité na prostoru $\widehat{X} \times \widehat{X} \times \widehat{X}$ a jsou si rovny na jeho husté podmnožině $X \times X \times X$ (z linearity skalárního součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$). Tedy dle Věty 16.3 platí $s(x + y, z) = s(x, z) + s(y, z)$ pro každé $x, y, z \in \widehat{X}$. Analogicky ověříme i ostatní vlastnosti skalárního součinu a též rovnost $s(x, x) = \|x\|^2_{\widehat{X}}$ pro každé $x \in \widehat{X}$. Tedy s je skalární součin na $\widehat{X}$ indukující úplnou normu na $\widehat{X}$.

K důkazu jednoznačnosti předpokládejme, že X_1 a X_2 jsou zúplnění X. Pak zobrazení Id_X chápané jako prvek $\mathcal{L}(X, X_2)$ lze rozšířit na spojitý lineární operátor $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, který je izometrií do (Věta 1.62). Podle Tvrzení 1.60(c) je $T(X_1)$ uzavřený v X_2. Tedy $X_2 = \overline{X}^{X_2} \subset T(X_1) \subset X_2$, takže $T(X_1) = X_2$.

□

DEFINICE 30. Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Povšimněme si, že je-li $X^{**} = \varepsilon(X)$ pro normovaný lineární prostor X, pak X je izometrický úplnému prostoru X^{**}. Tedy je úplný dle Věty 1.60(b). Podmínka $X^{**} = \varepsilon(X)$ ve výše zmíněné definici tedy nemůže být splněna pro prostory, které nejsou Banachovy.

VĚTA 31. *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

DŮKAZ. Nechť H je Hilbertův prostor nad $\mathbb{K}$. Mějme $F \in H^{**}$ dáno. Položme $f(x) = \overline{F(I(x))}$ pro $x \in H$, kde $I\colon H \to H^*$ je identifikace z Věty 1.120. Snadno je vidět, že $f \in H^*$, čili dle Věty 1.120 existuje $y \in H$ takové, že $f(x) = \langle x, y\rangle$ pro každé $x \in H$. Vezměme libovolné $g \in H^*$ a nalezněme $x \in H$ splňující $I(x) = g$. Pak

$$F(g) = F(I(x)) = \overline{\overline{F(I(x))}} = \overline{f(x)} = \overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle = g(y) = \varepsilon_y(g).$$

Tedy $F = \varepsilon_y = \varepsilon(y)$, odkud plyne, že ε je na.

Alternativně můžeme argumentovat následovně: Dle Věty 1.118 je H lineárně izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$, který je reflexivní podle Příkladu 34(b). Tedy je H reflexivní dle Věty 32(a).

□

VĚTA 32. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.
(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.
(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.
(d) Jsou-li X, Y reflexivní, je prostor $X \oplus_p Y$ reflexivní pro libovolné $1 \le p \le \infty$.
(e) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

DŮKAZ. (a) Nechť Y je reflexivní Banachův prostor, $T\colon X \to Y$ je lineární izomorfismus a je dán $F \in X^{**}$. Všimněme si, že $g \circ T \in X^*$ pro každé $g \in Y^*$, takže můžeme definovat

$$G(g) = F(g \circ T) \quad \text{pro } g \in Y^*.$$

Snadno je vidět, že G je lineární a $|G(g)| \le \|F\|\|g \circ T\| \le \|F\|\|T\|\|g\|$ (Fakt 1.47), tedy $G \in Y^{**}$. Protože Y je reflexivní, existuje $y \in Y$ splňující $\varepsilon_y = G$. Tvrdíme, že $x = T^{-1}(y)$ splňuje $\varepsilon_x = F$. Zvolme $f \in X^*$ libovolně. Pak $g = f \circ T^{-1} \in Y^*$, a tedy

$$F(f) = F(f \circ T^{-1} \circ T) = F(g \circ T) = G(g) = \varepsilon_y(g) = g(y) = f \circ T^{-1}(T(x)) = f(x) = \varepsilon_x(f).$$

Tedy kanonické vnoření ε je na.

Poznamenejme, že pokud již máme k dispozici teorii duálních operátorů, pak tvrzení (a) je přímočarým důsledkem jejich vlastností: Dle Věty 4.6(b) je T^{**} izomorfismus, tedy dle Tvrzení 4.5 je $\varepsilon_X = (T^{**})^{-1} \circ \varepsilon_Y \circ T$, přičemž všechny tři operátory vpravo jsou na.

(b) Nechť Y je uzavřený podprostor reflexivního prostoru X a nechť $\varepsilon_1\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2\colon Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Zafixujme $G \in Y^{**}$ a položme

$$F(f) = G(f \restriction_Y) \quad \text{pro } f \in X^*.$$

Pak $F \in X^{**}$, neboť $|F(f)| \le \|G\|\|f \restriction_Y\| \le \|G\|\|f\|$, a tedy existuje $x \in X$ splňující $\varepsilon_1(x) = F$. Dokonce $x \in Y$, protože v opačném případě by existoval funkcionál $f \in X^*$ splňující $f = 0$ na Y a $f(x) > 0$ (Věta 7), což by znamenalo, že

$$0 < f(x) = \varepsilon_1(x)(f) = F(f) = G(f \restriction_Y) = G(0) = 0.$$

Nakonec ukažme, že $\varepsilon_2(x) = G$. Dané $g \in Y^*$ rozšiřme pomocí Hahnovy-Banachovy věty na $f \in X^*$ a počítejme

$$\varepsilon_2(x)(g) = g(x) = f(x) = \varepsilon_1(x)(f) = F(f) = G(f \restriction_Y) = G(g).$$

(c) Nechť $\varepsilon_1\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2\colon X^* \to X^{***}$ jsou příslušná kanonická vnoření.

$\Rightarrow$ Je-li $\Phi \in X^{***}$ dáno, je $f = \Phi \circ \varepsilon_1 \in X^*$. Tvrdíme, že platí $\varepsilon_2(f) = \Phi$. Pro libovolné $F \in X^{**}$ totiž z reflexivity X najdeme $y \in X$ splňující $\varepsilon_1(y) = F$. Pak

$$\Phi(F) = \Phi(\varepsilon_1(y)) = f(y) = \varepsilon_1(y)(f) = F(f) = \varepsilon_2(f)(F).$$

Tedy ε_2 je na, což znamená, že X^* je reflexivní.

$\Leftarrow$ Z předchozí implikace plyne, že X^{**} je reflexivní. Podle Tvrzení 26 je $\varepsilon_1(X)$ uzavřený podprostor X^{**}, a tedy je reflexivní podle (b). Prostor X je izometrický prostoru $\varepsilon(X)$ (opět Tvrzení 26), a tedy je reflexivní podle (a).

(d) Nechť $1 \le p \le \infty$. Označme $\varepsilon\colon X \oplus_p Y \to (X \oplus_p Y)^{**}$, $\varepsilon_1\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2\colon Y \to Y^{**}$ příslušná kanonická vnoření a $I\colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ identifikaci z Věty 16. Nechť $H \in (X \oplus Y)^{**}$ je dáno. Položme $F(f) = H(I(f,0))$ pro $f \in X^*$ a $G(g) = H(I(0,g))$ pro $g \in Y^*$. Potom $F \in X^{**}$, neboť $|F(f)| \le \|H\|\|(f,0)\| \le \|H\|\|f\|$, a podobně $G \in Y^{**}$. Protože X a Y jsou reflexivní, existují prvky $x \in X$ a $y \in Y$ tak, že $\varepsilon_1(x) = F$ a $\varepsilon_2(y) = G$. Tvrdíme, že $\varepsilon(x,y) = H$. Je-li totiž $h \in (X \oplus_p Y)^*$, pak položíme $f(x) = h(x, 0)$ pro $x \in X$ a $g(y) = h(0, y)$ pro $y \in Y$. Pak $h = I(f, 0) + I(0, g)$, a dostáváme tedy

$$H(h) = H\big(I(f,0) + I(0,g)\big) = F(f) + G(g) = \varepsilon_1(x)(f) + \varepsilon_2(y)(g) = \\ = f(x) + g(y) = h(x, y) = \varepsilon_{(x,y)}(h).$$

Odtud plyne $\varepsilon_{(x,y)} = H$, čili ε je na.

(e) Nechť $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení a $I : Y^\perp \to (X/Y)^*$ je identifikace z Věty 22. Nechť $\Phi \in (X/Y)^{**}$ je dáno. Položme $G(f) = \Phi(I(f))$ pro $f \in Y^\perp$. Pak $G \in (Y^\perp)^*$ a dle Hahnovy-Banachovy věty existuje jeho spojité rozšíření $F \in X^{**}$. Protože X je reflexivní, existuje $x \in X$ splňující $\varepsilon_x = F$. Chceme ukázat, že $\varepsilon_{\widehat{x}} = \Phi$. Nechť tedy $\varphi \in (X/Y)^*$ je libovolné. Pak $f = \varphi \circ q \in Y^\perp$ a $I(f) = \varphi$, neboť $I(f)(\widehat{y}) = f(y) = \varphi \circ q(y) = \varphi(\widehat{y})$ pro každé $y \in X$. Tedy

$$\Phi(\varphi) = \Phi(I(f)) = G(f) = F(f) = \varepsilon_x(f) = f(x) = \varphi(\widehat{x}) = \varepsilon_{\widehat{x}}(\varphi).$$

□

TVRZENÍ 33. *Je-li X separabilní reflexivní Banachův prostor, pak i X^* je separabilní.*

DůKAZ. Prostor X^{**} je izometrický separabilnímu X, tedy je separabilní. Pak X^* je separabilní dle Věty 9.

□

PŘÍKLADY 34.

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.
(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.
(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.
(d) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor[7]), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

DůKAZ. (a) Dle Věty 1.66 je každý konečněrozměrný prostor izomorfní prostoru $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, který je reflexivní, neboť je Hilbertův (Věta 31). Izomorfismus ovšem zachovává reflexivitu (Věta 32(a)).

(b) Nechť $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$ označuje identifikaci z Věty 15(c). Je-li $\Phi \in L_p(\mu)^{**}$ dáno, je $\Phi \circ I \in L_q(\mu)^*$. Opět podle Věty 15(c) tedy existuje $f \in L_p(\mu)$ splňující

$$\int gf \,\mathrm{d}\mu = \Phi \circ I(g) \quad \text{pro každé } g \in L_q(\mu).$$

Pak $\Phi = \varepsilon_f$, protože pro libovolné $\varphi \in L_p(\mu)^*$ nalezneme $g \in L_q(\mu)$ s vlastností $I(g) = \varphi$ a spočteme

$$\Phi(\varphi) = \Phi(I(g)) = \Phi \circ I(g) = \int gf \,\mathrm{d}\mu = \int fg \,\mathrm{d}\mu = I(g)(f) = \varepsilon_f(I(g)) = \varepsilon_f(\varphi).$$

(c) Prostor c_0^{**} je izometrický prostoru ℓ_∞ (Věta 15(a), Tvrzení 13 a Věta 15(b)). Prostor c_0 je ovšem separabilní, zatímco prostor ℓ_∞ je neseparabilní (Věta 1.26). Tedy c_0^{**} není izomorfní c_0, proto c_0 není reflexivní.

Prostor ℓ_1 není reflexivní podle Věty 32(a) a (c), neboť je izometrický c_0^*. Podobně, prostor ℓ_∞ není reflexivní, neboť je izometrický ℓ_1^* (případně proto, že nereflexivní c_0 je jeho uzavřeným podprostorem (Věta 32(b))). Prostor $L_1([0,1])$ není reflexivní podle Věty 32(b), neboť podle Příkladu 1.57 obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_1, který není reflexivní. Prostor $L_\infty([0,1])$ není reflexivní, neboť je izometrický duálu k nereflexivnímu prostoru $L_1([0,1])$ (Věta 15(d)).

Prostor $C([0,1])$ není reflexivní dle Tvrzení 33, neboť je separabilní (Věta 1.26(c)), zatímco jeho duál není separabilní. Vskutku, všimněme si, že duál obsahuje nespočetnou množinu Diracových[8] měr $\{\delta_x;\ x \in [0,1]\}$. Tato množina je ovšem 2-separovaná: Jsou-li $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, pak snadno vyrobíme spojitou funkci $f\colon [0,1] \to [-1,1]$, která splňuje $f(x) = 1$, $f(y) = -1$. Pak $f \in B_{C([0,1])}$, a tedy $\|\delta_x - \delta_y\| \geq (\delta_x - \delta_y)(f) = \delta_x(f) - \delta_y(f) = f(x) - f(y) = 2$.

[7] Robert Clarke James (1951)

[8] Paul Adrien Maurice Dirac

Alternativně lze argumentovat tím, že $C([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický nereflexivnímu prostoru c_0 (Příklad 1.58).

(d) Konstrukce Jamesova prostoru je mimo rámec těchto skript.

$\square$

Kapitola 3

Úplnost v Banachových prostorech

Tato kapitola studuje roli úplnosti v Banachových prostorech. Ukazuje se, že kombinace lineární a úplné metrické struktury má netriviální důsledky, jako jsou Princip stejnoměrné omezenosti (Věta 1) a Věta o otevřeném zobrazení (Věta 5).

VĚTA 1 (Princip stejnoměrné omezenosti[1]). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.
(ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

DŮKAZ[2]. (i)⇒(ii) je zřejmá.

(ii)⇒(i) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \{x \in X;\ \|T(x)\| \leq n \text{ pro každé } T \in \mathcal{A}\}.$$

Pak jsou F_n uzavřené množiny pokrývající díky (ii) celé X. Podle Baireovy věty[3] (Důsledek 16.11) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že F_{n_0} má neprázdný vnitřek. Existuje tedy koule $B(x_0, r) \subset F_{n_0}$. Nechť nyní $T \in \mathcal{A}$ je libovolný. Pro každé $x \in B_X$ je $x_0 + rx \in B(x_0, r)$, a tedy $\|T(rx)\| = \|T(x_0 + rx - x_0)\| \leq \|T(x_0 + rx)\| + \|T(x_0)\| \leq 2n_0$. Odtud $\|T(x)\| \leq \frac{2n_0}{r}$, což znamená, že $\|T\| \leq \frac{2n_0}{r}$. Proto je $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} \leq \frac{2n_0}{r}$.

□

DŮSLEDEK 2. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.*

DŮKAZ. Nejprve ukážeme, že T je lineární. Zvolme $x, y \in X$ a skalár α libovolně. Pak díky spojitosti vektorových operací platí $T(x + y) = \lim T_n(x + y) = \lim\bigl(T_n(x) + T_n(y)\bigr) = \lim T_n(x) + \lim T_n(y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \lim T_n(\alpha x) = \lim \alpha T_n(x) = \alpha \lim T_n(x) = \alpha T(x)$. Dále, pro pevné $x \in X$ ze spojitosti normy plyne $\lim\|T_n(x)\| = \|T(x)\|$, speciálně posloupnost $\{\|T_n(x)\|\}$ je omezená. Z principu stejnoměrné omezenosti (Věta 1) plyne, že posloupnost $\{\|T_n\|\}$ je omezená. Pak pro libovolné $x \in B_X$ platí $\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|T_n(x)\| = \liminf_{n\to\infty}\|T_n(x)\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|T_n\| \in \mathbb{R}$. Tedy T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \leq \liminf\|T_n\|$.

□

Následující příklad ukazuje, že bez úplnosti Princip stejnoměrné omezenosti neplatí.

PŘÍKLAD 3. Nechť $X = c_{00}$ a $\mathcal{A} = \{nf_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, kde f_n jsou kanonické souřadnicové funkcionály. Pak pro každé $x \in X$ je množina $\{n \in N;\ f_n(x) \neq 0\}$ konečná, a tedy $\sup\{|nf_n(x)|;\ n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Nicméně $\sup\{\|nf_n\|;\ n \in \mathbb{N}\} = \sup\{n;\ n \in \mathbb{N}\} = +\infty$.

◇

DEFINICE 4. Zobrazení $f: X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

[1] Větu dokázal pro $C([0, 1])$ Eduard Helly (1912). Jeho důkaz funguje i v obecném případě. Obecné verze podali S. Banach (1922), H. Hahn (1922) a Theophil Henry Hildebrandt (1923). Nejznámější verzi publikovali S. Banach a H. Steinhaus (1927), proto se věta často nazývá Banachova-Steinhausova.

[2] Důkaz využívající Baireovu větu pochází od Stanisława Sakse (1927).

[3] René-Louis Baire ji zformuloval pro $\mathbb{R}$ (1899), základní myšlenka pochází ovšem už od Williama Fogga Osgooda (1897).

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení (ne nutně spojité), které je otevřené. Pak T je na. Vskutku, $T(X)$ je otevřená množina obsahující 0, tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $U(0,\delta) \subset T(X)$. Protože $T(X)$ je podprostor Y, obsahuje speciálně všechny násobky $U(0,\delta)$, a tedy $T(X) = Y$. Jedním z nejzákladnějších výsledků teorie Banachových prostorů je fakt, že pro spojité lineární operátory platí i věta obrácená. Zásadní roli zde ovšem hraje úplnost.

VĚTA 5 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

K důkazu použijeme následující lemma.

LEMMA 6 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0,s) \subset \overline{T(U(0,r))}$, pak dokonce $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.*

DŮKAZ. Nejprve si povšimněme, že lze bez újmy na obecnosti uvažovat pouze případ $r = s = 1$. Vskutku, máme-li již dokázané tvrzení v tomto případě a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ splňuje předpoklady pro nějaká $r, s > 0$, pak operátor $\frac{r}{s}T$ splňuje $U(0,1) \subset \overline{(\frac{r}{s}T)(U(0,1))}$, a tedy podle případu $r = s = 1$ platí $U(0,1) \subset (\frac{r}{s}T)(U(0,1))$, odkud $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.

Nechť tedy $r = s = 1$ a nechť je dáno $z \in U_Y$. Najdeme $\delta \in (0,1)$ takové, že $\|z\| < 1-\delta$. Ukážeme, že $y = \frac{1}{1-\delta}z \in T\left(\frac{1}{1-\delta}U_X\right)$. Pak totiž $z = (1-\delta)y \in (1-\delta)T\left(\frac{1}{1-\delta}U_X\right) = T(U_X)$. Pomocí matematické indukce najdeme $y_0, y_1, y_2 \ldots \in Y$ takové, že

(i) $y_0 = 0$,
(ii) $\|y - y_n\| < \delta^n$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
(iii) $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}U_X)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Je $\|y\| < 1$, a tedy je volbou $y_0 = 0$ podmínka (ii) splněna. Předpokládejme nyní, že $n \in \mathbb{N}$ a již máme nalezeny prvky $y_0, \ldots, y_{n-1}$. Pak

$$y - y_{n-1} \in \delta^{n-1}U_Y \subset \delta^{n-1}\overline{T(U_X)} = \overline{\delta^{n-1}T(U_X)} = \overline{T(\delta^{n-1}U_X)},$$

a tedy existuje $w \in T(\delta^{n-1}U_X)$ splňující $\|y - y_{n-1} - w\| < \delta^n$. Pak $y_n = y_{n-1} + w$ splňuje požadované podmínky. Tím je konstrukce završena.

Nyní pro každé $n \in \mathbb{N}$ ze (iii) zvolíme $x_n \in \delta^{n-1}U_X$ takové, že $y_n - y_{n-1} = T(x_n)$. Protože $\delta < 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolutně konvergentní, a díky úplnosti X je tedy konvergentní (Věta 1.30). Označme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Pak dle Faktu 1.28 máme $\|x\| \le \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty}\delta^{n-1} = \frac{1}{1-\delta}$. Tedy $x \in \frac{1}{1-\delta}U_X$. Ukážeme, že $T(x) = y$, čímž bude důkaz završen:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(y_n - y_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} y_N = y,$$

přičemž poslední rovnost platí díky (ii).

□

DŮKAZ VĚTY 5. Stačí ukázat, že $T(U_X)$ obsahuje kouli $U(0,\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Vskutku, nechť $G \subset X$ je otevřená a $y \in T(G)$ je libovolný. Nechť dále $x \in G$ splňuje $y = T(x)$. Pak existuje $r > 0$ takové, že $U(x,r) \subset G$. Máme tedy $U(y,\delta r) = y + rU(0,\delta) \subset y + rT(U_X) = T(x + rU_X) = T(U(x,r)) \subset T(G)$.

Protože T je na, platí

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nU_X\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nU_X) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{T(nU_X)}.$$

Z Baireovy věty (Důsledek 16.11) plyne existence $n \in \mathbb{N}$ takového, že $\overline{T(nU_X)}$ má neprázdný vnitřek, tedy obsahuje nějakou kouli $U(x,r)$. Množina $\overline{T(nU_X)}$ je konvexní a symetrická (Fakty 1.43 a 1.21), proto je $U(0,r) \subset \overline{T(nU_X)}$ (Fakt 1.19). Podle Lemmatu 6 ovšem platí $U(0,r) \subset T(nU_X)$, a tedy $U(0,\frac{r}{n}) \subset T(U_X)$.

□

DŮSLEDEK 7 (S. Banach, 1929). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.*

DůKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá. $\Leftarrow$ Spojitost T^{-1} plyne z otevřenosti T, tedy z Věty 5.

□

FAKT 8. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Definujme $\widehat{T}: X/\operatorname{Ker} T \to Y$ předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$. Pak $\widehat{T} \in \mathcal{L}(X/\operatorname{Ker} T, Y)$, $\|\widehat{T}\| = \|T\|$, $\widehat{T}$ je prosté a $T = \widehat{T} \circ q$, kde $q: X \to X/\ker T$ je kanonické kvocientové zobrazení.*

DůKAZ. Je-li $\widehat{x} = \widehat{y}$, pak $x - y \in \operatorname{Ker} T$, a tedy $T(x) = T(y)$. Proto je $\widehat{T}$ dobře definované lineární zobrazení. Vzorec $T = \widehat{T} \circ q$ je jen přeformulovaná definice $\widehat{T}$. Díky Tvrzení 1.69 a Lemmatu 1.45(b) je $\sup_{z \in U_{X/\operatorname{Ker} T}} \|\widehat{T}(z)\| = \sup_{z \in q(U_X)} \|\widehat{T}(z)\| = \sup_{x \in U_X} \|\widehat{T} \circ q(x)\| = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\| = \|T\|$. Tedy $\widehat{T}$ je spojité (Tvrzení 1.44) a $\|\widehat{T}\| = \|T\|$ (Lemma 1.45(b)). Konečně, je-li $\widehat{x} \in \operatorname{Ker} \widehat{T}$, pak $x \in \operatorname{Ker} T$, což znamená, že $\widehat{x} = 0$, a tedy $\widehat{T}$ je prosté.

□

DůSLEDEK 9. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak platí:*

(a) Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \leq c\|y\|$.

(b) Zobrazení $\widehat{T}: X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.

DůKAZ. (a) Díky Větě 5 existuje $r > 0$ takové, že $T(B_X) \supset B_Y(0, r)$. Nechť nyní $y \in Y \setminus \{0\}$ je dáno. Pak $\frac{r}{\|y\|} y \in B_Y(0, r)$, a tedy existuje $x \in B_X$ splňující $T(x) = \frac{r}{\|y\|} y$. Protože $T\left(\frac{\|y\|}{r} x\right) = y$ a $\left\|\frac{\|y\|}{r} x\right\| \leq \frac{1}{r}\|y\|$, tvrzení platí s konstantou $c = \frac{1}{r}$.

(b) Zjevně $\widehat{T}$ je na. Tvrzení tedy plyne z Faktu 8 a Důsledku 7.

□

Jak ukazují následující příklady, předpoklady na úplnost zdrojového i cílového prostoru ve větě o otevřeném zobrazení jsou naprosto podstatné.

PŘÍKLAD 10. Položme $X = c_0$ a uvažujme operátor $T: X \to c_0$ definovaný předpisem $T(x) = \left(\frac{1}{n} x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ pro $x = (x_n) \in X$. Ihned je vidět, že T je prostý spojitý lineární operátor a $\|T\| \leq 1$. Položme dále $Y = T(X)$. Pak $T: X \to Y$ je na, X je úplný, ale ukážeme, že T není otevřené zobrazení. Nejprve si všimněme, že $c_{00} \subset Y$, neboť pro libovolný $y = \sum_{n=1}^{k} y_n e_n \in c_{00}$, kde e_n jsou kanonické bázové vektory, je $T\left(\sum_{n=1}^{k} n y_n e_n\right) = y$. Předpokládejme nyní, že T je otevřené zobrazení. Pak $B(0, r) \subset T(U_X)$ pro nějaké $r > 0$. Protože $c_{00} \subset Y$, je speciálně $z_k = \sum_{n=1}^{k} r e_n \in T(U_X)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ splňuje $k > \frac{1}{r}$. Protože T je prostý, jediný prvek, který se zobrazí na z_k, je prvek $\sum_{n=1}^{k} n r e_n \in X$, jehož norma je ovšem rovna $kr > 1$, a tím pádem tento prvek nepatří do U_X. To je spor.

◇

PŘÍKLAD 11. Nechť $Y = (Y, \|\cdot\|_1)$ je libovolný nekonečněrozměrný Banachův prostor. Podle Věty 1.66 existuje na Y norma $\|\cdot\|_2$, která není ekvivalentní normě $\|\cdot\|_1$. Z důkazu Věty 1.66 je vidět, že můžeme předpokládat, že $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ pro každé $x \in Y$. Protože normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ nejsou ekvivalentní, existuje posloupnost $\{x_n\} \subset Y$ splňující $\|x_n\|_1 = 1$ a $\|x_n\|_2 > n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $X = (Y, \|\cdot\|_2)$ a uvažujme lineární operátor $T: X \to Y$, $T = Id_X$. Pak T je spojitý, neboť $\|T(x)\|_1 = \|x\|_1 \leq \|x\|_2$ pro každé $x \in X$. Zjevně Y je úplný a T je na. Ukážeme sporem, že T není otevřené zobrazení. Předpokládejme, že $B(0, r) \subset T(U_X)$ pro nějaké $r > 0$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ splňuje $k > \frac{1}{r}$. Pak $\|r x_k\|_1 = r$, $T^{-1}(r x_k) = \{r x_k\}$, ale $\|r x_k\|_2 > rk > 1$, tedy $r x_k \notin U_X$. To je spor.

◇

DEFINICE 12. Je-li $f: X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f. Říkáme, že zobrazení $f: X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina graf f je uzavřená v $X \times Y$.

Je-li $f : X \to Y$ spojité zobrazení mezi metrickými prostory X a Y, pak má uzavřený graf. Vskutku, nechť $\{(x_n, y_n)\}$ je posloupnost v množině graf f konvergující k $(x, y) \in X \times Y$. Pak $x_n \to x$, a tedy $f(x_n) \to f(x)$. Zároveň ovšem $f(x_n) = y_n \to y$, tedy dle jednoznačnosti limity $y = f(x)$, což znamená, že $(x, y) \in$ graf f. Lineární zobrazení mezi Banachovými prostory mají tu významnou vlastnost, že pro ně platí i opačná implikace:

VĚTA 13 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z poznámky před větou.

$\Leftarrow$ Snadno je vidět, že kanonické „projekce“ $P : X \oplus_\infty Y \to X$, $P(x, y) = x$ a $Q : X \oplus_\infty Y \to Y$, $Q(x, y) = y$ jsou spojité lineární operátory, a že zobrazení $S : X \to X \oplus_\infty Y$, $S(x) = (x, T(x))$ je lineární. Proto je $G = \operatorname{graf} T = S(X)$ vektorový podprostor $X \oplus_\infty Y$, který je dle předpokladu uzavřený. Tedy G je Banachův prostor (Tvrzení 1.5(b)). Dále uvažujme zobrazení $\tilde{S} : X \to G$, $\tilde{S} = S$. Pak $\tilde{S}$ je bijekce a $P\restriction_G$ je inverzní k $\tilde{S}$. Zobrazení $P\restriction_G$ je spojité lineární zobrazení, které je prosté a na. Dle Důsledku 7 je jeho inverze $\tilde{S}$ spojitá. Proto je i $T = Q \circ \tilde{S}$ spojité.

$\square$

DŮKAZ VĚTY 1.78(B). Nechť $P_Y : X \to Y$ je projekce příslušná rozkladu $X = Y \oplus Z$. Protože Y je uzavřený podprostor Banachova prostoru X, je to také Banachův prostor, takže díky Větě 13 stačí ukázat, že P_Y má uzavřený graf. Nechť tedy $\{(x_n, y_n)\}$ je posloupnost v graf P_Y konvergující k $(x, y) \in X \oplus_\infty Y$. Pak $x_n \to x$ a $y_n \to y$. Dále $x_n - y_n = x_n - P_Y(x_n) \in Z$ (Tvrzení 1.74) a díky uzavřenosti Z tak máme $x - y = \lim(x_n - y_n) \in Z$. Tedy $x = y + (x - y)$, kde $y \in Y$ a $x - y \in Z$, je jednoznačný rozklad x, což znamená, že $y = P_Y(x)$, neboli $(x, y) \in$ graf P_Y.

$\square$

Kapitola 4

Lineární operátory

Velké množství různých problémů (např. lineárních diferenciálních rovnic) lze přirozeně formulovat pomocí abstraktních lineárních operátorů. V této kapitole se tedy budeme zabývat studiem jejich chování. Někdy je užitečné příslušný problém formulovat v tzv. „duální formě“, začneme proto studiem duálních operátorů.

1. Duální operátory

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Abychom zlepšili přehlednost některých komplikovanějších výrazů, které by obsahovaly příliš mnoho závorek, budeme často výrazy typu $T(x)$ zkracovat jako Tx.

DEFINICE 1. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k T. (Ve Větě 2 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**}.

VĚTA 2. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*
(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.
(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.
(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.

DŮKAZ. (a) Pro dané $f \in Y^*$ je funkce $x \mapsto f(Tx)$ zjevně lineární a spojitá na X, tudíž se jedná o prvek X^*. Zobrazení $T^*\colon Y^* \to X^*$ je tedy dobře definované. Snadno je vidět, že T^* je lineární operátor. Dále platí

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|T^* f\| = \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_X} |T^* f(x)| = \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_X} |f(Tx)| = \\ &= \sup_{x \in B_X} \sup_{f \in B_{Y^*}} |f(Tx)| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \|T\|,\end{aligned}$$

přičemž předposlední rovnost plyne z duálního vyjádření normy (Důsledek 2.6). Tedy $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(b) Linearita zobrazení $T \mapsto T^*$ se snadno ověří: Nechť $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a α je skalár. Zvolme $f \in Y^*$ libovolně. Pak $(S+T)^* f(x) = f\big((S+T)x\big) = f(Sx+Tx) = f(Sx)+f(Tx) = S^* f(x)+T^* f(x) = (S^* f + T^* f)(x)$ a $(\alpha T)^* f(x) = f\big((\alpha T)x\big) = f\big(\alpha(Tx)\big) = \alpha f(Tx) = \alpha\big(T^* f(x)\big) = \big(\alpha(T^* f)\big)(x)$ pro každé $x \in X$, neboli $(S+T)^* f = S^* f + T^* f = (S^* + T^*) f$ a $(\alpha T)^* f = \alpha(T^* f) = (\alpha T^*) f$. Odtud $(S+T)^* = S^* + T^*$ a $(\alpha T)^* = \alpha T^*$. Izometrie pak plyne z (a).

(c) Nechť $f \in Z^*$ je libovolné. Pak pro každé $x \in X$ platí $(S \circ T)^* f(x) = f(S \circ Tx) = f\big(S(Tx)\big) = S^* f(Tx) = T^*(S^* f)(x)$, tedy $(S \circ T)^* f = T^*(S^* f) = (T^* \circ S^*) f$. Odtud $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Konečně, pro $f \in X^*$ a $x \in X$ máme $Id_X^* f(x) = f(Id_X x) = f(x) = Id_{X^*} f(x)$.

$\square$

PŘÍKLAD 3. Nechť $X = \mathbb{K}^n$ a $Y = \mathbb{K}^m$ s libovolnými normami a nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Z lineární algebry víme, že T je reprezentován jistou maticí $A \in M(m \times n)$ tak, že $T(x) = Ax$ pro $x \in \mathbb{K}^n$. Zkoumejme, jak vypadá duální operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$. Použijeme-li standardní reprezentaci duálu z lineární algebry spolu s Větou 1.66, pak $X^* = \mathbb{K}^n$ a $Y^* = \mathbb{K}^m$, přičemž $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j x_j$ pro $f = (f_j)_{j=1}^n \in X^*$ a $x = (x_j)_{j=1}^n \in X$ a analogicky pro Y^*. V této reprezentaci je tedy $T^*\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$. Nechť $f \in Y^* = \mathbb{K}^m$. Pro každé $x \in X = \mathbb{K}^n$ platí, že

$$\begin{aligned} T^*f(x) = f(Tx) = f(Ax) = \sum_{j=1}^m f_j (Ax)_j = \sum_{j=1}^m f_j \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = \\ = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk} f_j \right) x_k = \sum_{k=1}^n (A^{\mathrm{T}} f)_k x_k = (A^{\mathrm{T}} f)x, \end{aligned}$$

kde A^{T} je matice transponovaná k matici A. Tedy $T^*(f) = A^{\mathrm{T}} f$, neboli T^* je reprezentován maticí A^{T}.

Je-li na X a Y eukleidovská norma, pak X a Y jsou Hilbertovy prostory. Vedle reprezentace duálů použité výše tedy máme k dispozici ještě reprezentaci z Věty 1.120 (která se v komplexním případě liší). Podívejme se, jak vypadá T^* v této reprezentaci. Opět je $X^* = \mathbb{K}^n$ a $Y^* = \mathbb{K}^m$, ale $f(x) = \sum_{j=1}^n \overline{f_j} x_j$ pro $f = (f_j)_{j=1}^n \in X^*$ a $x = (x_j)_{j=1}^n \in X$ (a analogicky pro Y^*). Pro $T^*\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ v této reprezentaci tedy pro každé $f \in Y^* = \mathbb{K}^m$ a $x \in X = \mathbb{K}^n$ platí, že

$$\begin{aligned} T^*f(x) = f(Tx) = f(Ax) = \sum_{j=1}^m \overline{f_j} (Ax)_j = \sum_{j=1}^m \overline{f_j} \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = \\ = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk} \overline{f_j} \right) x_k = \sum_{k=1}^n \overline{\left(\sum_{j=1}^m \overline{a_{jk}} f_j \right)} x_k = \sum_{k=1}^n \overline{(\overline{A}^{\mathrm{T}} f)_k} x_k = (\overline{A}^{\mathrm{T}} f)x, \end{aligned}$$

kde $\overline{A}^{\mathrm{T}} = (\overline{a_{kj}})$ pro $A = (a_{jk})$. Tedy $T^*(f) = \overline{A}^{\mathrm{T}} f$, neboli T^* je reprezentován maticí $\overline{A}^{\mathrm{T}}$.

◇

VĚTA 4. *Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, pak platí, že*
(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^{\perp}$,
(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_{\perp}$,
(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_{\perp}$,
(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.
(e) Jsou-li navíc X, Y Banachovy a $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak* $\operatorname{Rng} T^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.

DŮKAZ. Tvrzení (a) dostaneme z ekvivalencí

$$f \in \operatorname{Ker} T^* \;\Leftrightarrow\; T^*f = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X\colon T^*f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X\colon f(Tx) = 0 \;\Leftrightarrow\; f \in (\operatorname{Rng} T)^{\perp}.$$

Tvrzení (b) dokážeme obdobně, přičemž pro druhou ekvivalenci používáme Hahnovu-Banachovu větu (Důsledek 2.5):

$$x \in \operatorname{Ker} T \;\Leftrightarrow\; Tx = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall f \in Y^*\colon f(Tx) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall f \in Y^*\colon (T^*f)(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (\operatorname{Rng} T^*)_{\perp}.$$

(c) Díky (a) a Lemmatu 2.12(c) platí $(\operatorname{Ker} T^*)_{\perp} = \big((\operatorname{Rng} T)^{\perp}\big)_{\perp} = \overline{\operatorname{Rng} T}$.

(d) Díky (b) a Lemmatu 2.12(d) platí $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \big((\operatorname{Rng} T^*)_{\perp}\big)^{\perp} \supset \overline{\operatorname{Rng} T^*}$.

(e) Díky (d) stačí dokázat inkluzi $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} \subset \operatorname{Rng} T^*$. Nechť $f \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ je dáno. Zobrazení $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to \operatorname{Rng} T$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je dle Důsledku 3.9(b) lineárním izomorfismem, a tedy k němu existuje inverze $\widehat{T}^{-1} \in \mathscr{L}(\operatorname{Rng} T, X/\operatorname{Ker} T)$. Pro $y \in \operatorname{Rng} T$ položme $g(y) = I(f)(\widehat{T}^{-1}y)$, kde $I\colon (\operatorname{Ker} T)^{\perp} \to (X/\operatorname{Ker} T)^*$ je identifikace z Věty 2.22(a). Pak $g \in (\operatorname{Rng} T)^*$ a podle Hahnovy-Banachovy věty existuje jeho rozšíření $\tilde{g} \in Y^*$. Tvrdíme, že $T^*\tilde{g} = f$. Nejprve si všimněme, že pro každé $x \in X$ platí $\widehat{T}^{-1}(Tx) = \widehat{x}$. Proto $T^*\tilde{g}(x) = \tilde{g}(Tx) = g(Tx) = I(f)\big(\widehat{T}^{-1}(Tx)\big) = I(f)(\widehat{x}) = f(x)$ pro každé $x \in X$.

□

Poznamenejme, že „správné znění“ tvrzení (d) uvedeme v oddílu 7.9 (Věta 7.113).

TVRZENÍ 5 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak*

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Tedy $T^{**}(\varepsilon_X(X)) \subset \varepsilon_Y(Y)$ a označíme-li $\varepsilon\colon Y \to \varepsilon_Y(Y)$, $\varepsilon = \varepsilon_Y$, a $S : \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**}\restriction_{\varepsilon_X(X)}$, pak $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$.

Ztotožníme-li prostory X, Y s jejich kanonickými vnořeními v X^{**}, Y^{**}, pak výše uvedené tvrzení neformálně říká, že $T = T^{**}\restriction_X$.

DŮKAZ. Nechť $x \in X$. Pro každé $f \in Y^*$ platí

$$(\varepsilon_Y(Tx))(f) = f(Tx) = T^* f(x) = (\varepsilon_X(x))(T^* f) = \big(T^{**}(\varepsilon_X(x))\big)(f),$$

tedy $\varepsilon_Y(Tx) = T^{**}(\varepsilon_X(x))$. Odtud $\varepsilon_Y \circ T = T^{**} \circ \varepsilon_X$.

□

VĚTA 6. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*
(a) T^* je prostý, právě když $\operatorname{Rng} T$ je hustý v Y.
(b) Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
(c) Je-li T izometrie na, pak T^* je izometrie na.
Je-li X úplný, pak v (b) a (c) platí i opačné implikace.

DŮKAZ. (a) Díky Větě 4(c) je $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$. Je-li tedy T^* prostý, pak $\overline{\operatorname{Rng} T} = \{0\}_\perp = Y$. Na druhou stranu, je-li $\operatorname{Rng} T$ je hustý v Y, pak $\operatorname{Ker} T^* \subset \big((\operatorname{Ker} T^*)_\perp\big)^\perp = Y^\perp = \{0\}$ dle Lemmatu 2.12(d).

(b) Nechť $f \in Y^*$. Pro každé $y \in Y$ platí

$$\big((T^{-1})^*(T^* f)\big)(y) = T^* f(T^{-1} y) = f\big(T(T^{-1}y)\big) = f(y),$$

tedy $(T^{-1})^*(T^* f) = f$. Obráceně, nechť $g \in X^*$. Pro každé $x \in X$ platí

$$T^*\big((T^{-1})^* g\big)(x) = (T^{-1})^* g(Tx) = g\big(T^{-1}(Tx)\big) = g(x),$$

tedy $T^*\big((T^{-1})^* g\big) = g$. To znamená, že $(T^{-1})^*$ je inverzním operátorem k T^*, a tedy T^* je izomorfismus na.

(c) Pro $f \in Y^*$ máme $\|T^* f\| = \sup_{x \in B_X} |T^* f(x)| = \sup_{x \in B_X} |f(Tx)| = \sup_{y \in B_Y} |f(y)| = \|f\|$. Z (b) pak plyne, že T^* je na.

Nechť nyní X je úplný. Je-li T^* izomorfismus na, pak dle (b) je T^{**} též izomorfismus na. Podle Tvrzení 5 je tedy T složením izomorfismů do, proto je to izomorfismus do (Fakt 1.61). Je tedy $\operatorname{Rng} T$ uzavřený v Y (Tvrzení 1.60(c)). Podle (a) to ovšem znamená, že T je na. Je-li T^{**} navíc izometrie, pak z Tvrzení 5 a Faktu 1.61 plyne, že T je izometrie.

□

2. Kompaktní operátory

Ukazuje se, že mnoho operátorů vyskytujících se při studiu různých problémů (např. diferenciálních rovnic) vykazuje jisté shodné rysy – jsou to tzv. kompaktní operátory. Analýza chování těchto operátorů je jednodušší, neboť tyto operátory mají mnohé vlastnosti podobné vlastnostem konečněrozměrných operátorů (matic), vizte roli kompaktnosti v oddílu 1.4.

Nechť X je metrický prostor. Připomeňme, že množina $M \subset X$ se nazývá relativně kompaktní v X, pokud $\overline{M}$ je kompaktní, a že M je relativně kompaktní v X, právě když z každé posloupnosti prvků M lze vybrat podposloupnost konvergující v X. Je-li X úplný, pak M je relativně kompaktní v X, právě když je totálně omezená. Je-li Y metrický prostor takový, že X je jeho podprostor a M je relativně kompaktní v X, pak M je i relativně kompaktní v Y.

PŘÍKLAD 7 (Hilbertova krychle). Položme

$$Q = \{x = (x_n) \in \ell_2;\ |x_n| \le \tfrac{1}{n} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}.$$

Pak Q je kompaktní podmnožina ℓ_2: Platí, že $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in \ell_2;\ |f_n(x)| \le \frac{1}{n}\}$, kde f_n jsou kanonické souřadnicové funkcionály, proto je Q je uzavřená podmnožina ℓ_2. Stačí tedy ukázat, že je totálně omezená.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$, a tedy $\sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$ pro každé $x \in Q$. Označme $R\colon \ell_2 \to \mathbb{K}^m$ restrikci na prvních m souřadnic, tj. $R(x) = (x_n)_{n=1}^{m}$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, a všimněme si, že $\|R(x)\|_2 \le \|x\|_2$ pro každé $x \in \ell_2$. Speciálně, $\|R(x)\|_2 \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < +\infty$ pro $x \in Q$. Čili množina $R(Q)$ je omezená v prostoru $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_2)$, tedy je tam totálně omezená a existuje k ní konečná $\frac{\varepsilon}{2}$-síť $A \subset \mathbb{K}^m$. Rozšiřme vektory z A zpět do ℓ_2 pomocí nulových souřadnic: položíme $\tilde{A} = \{x = (x_n) \in \ell_2;\ R(x) \in A \text{ a } x_n = 0 \text{ pro } n > m\}$. Pak $\tilde{A}$ je konečná množina a tvrdíme, že tvoří ε-síť pro Q. Nechť tedy $x \in Q$. Pak existuje $y \in A$ takové, že $\|R(x) - y\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $z \in \tilde{A}$ je takový, že $R(z) = y$. Pak

$$\|x - z\|_2 = \left(\|R(x) - R(z)\|_2^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} < \left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

◇

DEFINICE 8. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tradičně se též používají poněkud nekonzistentní zkratky $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$, $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X)$ a $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X, X)$.

TVRZENÍ 9. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T\colon X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je kompaktní.
(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.
(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

DŮKAZ. Je-li $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, je $T(B_X)$ relativně kompaktní, a tedy omezená. Tudíž T je spojitý dle Tvrzení 1.44.

Nechť nyní $T\colon X \to Y$ je lineární. (i)⇒(ii) je zřejmá.

(ii)⇒(iii) Je-li $r > 0$ takové, že $\{x_n\} \subset B(0, r)$, pak $\frac{1}{r}x_n \subset B_X$. Protože $\{T(\frac{1}{r}x_n)\} \subset T(B_X)$, existuje rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ taková, že $\{T(\frac{1}{r}x_{n_k})\}$ je konvergentní. Pak ovšem i $\{T(x_{n_k})\} = \{rT(\frac{1}{r}x_{n_k})\}$ je konvergentní.

(iii)⇒(i) Nechť $A \subset X$ je omezená a $\{y_n\}$ je posloupnost v $T(A)$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in A$ takové, že $y_n = T(x_n)$. Tedy $\{x_n\}$ je omezená a dle předpokladu lze z $\{y_n\} = \{T(x_n)\}$ vybrat konvergentní podposloupnost. To znamená, že $T(A)$ je relativně kompaktní.

□

PŘÍKLAD 10. Definujme $T \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ předpisem $T(x) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ pro $x = (x_n)$. Snadno je vidět, že T je lineární operátor. Protože $T(B_{\ell_2}) \subset Q$, kde Q je Hilbertova krychle (Příklad 7), je T kompaktní dle Tvrzení 9. Nicméně T není konečněrozměrný, neboť $T(\ell_2)$ obsahuje lineárně nezávislou množinu $\{e_n\}$ kanonických bázových vektorů.

Na druhou stranu, identita na ℓ_2 je příkladem spojitého lineárního operátoru, který není kompaktní, neboť obraz jednotkové koule obsahuje množinu $\{e_n\}$ kanonických bázových vektorů, která je $\sqrt{2}$-separovaná (tj. $\|e_k - e_n\| \ge \sqrt{2}$ pro $k \ne n$), takže není relativně kompaktní.

◇

Uvědomme si, že lineární operátor T můžeme chápat jako lineární zobrazení do libovolného nadprostoru $\operatorname{Rng} T$. Kompaktnost lineárního operátoru ovšem může zásadně záviset na tom, jaký cílový prostor bereme, neboť v definici se bere uzávěr $T(A)$ v cílovém prostoru, a pro různé prostory můžeme dostat různé uzávěry. Vizte též následující tvrzení.

TVRZENÍ 11. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

(a) Je-li Z normovaný lineární prostor a Y je podprostor Z, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.
(b) Je-li Z uzavřený podprostor Y a $\operatorname{Rng} T \subset Z$, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.

DŮKAZ. (a) Pro $A \subset X$ omezenou je $T(A)$ relativně kompaktní v Y, a tedy i relativně kompaktní v Z.

(b) Nechť $A \subset X$ je omezená. Protože Z je uzavřený v Y, je množina $\overline{T(A)}^Z = Z \cap \overline{T(A)}^Y$ uzavřená v Y, a tedy $\overline{T(A)}^Z = \overline{T(A)}^Y$. Proto je $\overline{T(A)}^Z$ kompaktní.

□

VĚTA 12. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.
(b) $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.
(c) Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.
(d) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.
(e) Pokud X a Y jsou úplné, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ a $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený, pak $T \in \mathcal{F}(X, Y)$.

Všimněme si, že poslední tvrzení nám říká, že „netriviální“ (tj. nikoli konečněrozměrné) kompaktní lineární operátory mezi Banachovými prostory nemají nikdy uzavřený Rng.

DŮKAZ. (a) $\Leftarrow$ je zřejmá, neboť v tom případě $\operatorname{Rng} T \subset \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\}$.

$\Rightarrow$ Nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je nějaká báze $\operatorname{Rng} T$. Definujme lineární formy $g_1, \dots, g_n$ na $\operatorname{Rng} T$ hodnotami na bázi následovně:

$$g_i(y_j) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Protože $\operatorname{Rng} T$ je konečněrozměrný, jsou $g_1, \dots, g_n$ spojité lineární funkcionály (Věta 1.66). Všimněme si, že pro každý prvek $y \in \operatorname{Rng} T$ platí

$$y = \sum_{i=1}^n g_i(y) y_i.$$

Vskutku, máme-li $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ pro nějaké skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, pak $g_j(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_j(y_i) = \alpha_j$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$. Položme $f_i = g_i \circ T \in X^*$ pro $i = 1, \dots, n$. Pak $T(x) = \sum_{i=1}^n g_i(T(x)) y_i = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$.

(b) Kompaktní lineární operátory jsou spojité, je tedy $\mathcal{K}(X, Y)$ podmnožinou $\mathcal{L}(X, Y)$. Jsou-li $S, T \in \mathcal{K}(X, Y)$ pak $(S + T)(B_X) \subset S(B_X) + T(B_X) \subset \overline{S(B_X)} + \overline{T(B_X)}$, přičemž množina vpravo je kompaktní dle Tvrzení 1.23. Tedy $(S+T)(B_X)$ je relativně kompaktní v Y, což znamená, že $S+T$ je kompaktní operátor (Tvrzení 9). Podobně, pro α skalár a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ je $\overline{(\alpha T)(B_X)} = \alpha \overline{T(B_X)}$, tedy je to kompakt, neboť je to spojitý obraz kompaktu $\overline{T(B_X)}$ (Tvrzení 1.2(c)). Opět díky Tvrzení 9 je tak operátor αT kompaktní. To dokazuje, že $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostorem $\mathcal{L}(X, Y)$.

Dále, nechť $S, T \in \mathcal{F}(X, Y)$ a $\alpha \neq 0$ je skalár. Pak $\operatorname{Rng}(S+T) \subset \operatorname{Rng} S + \operatorname{Rng} T$ a $\operatorname{Rng}(\alpha T) = \operatorname{Rng} T$, tedy $\operatorname{Rng}(S+T)$ i $\operatorname{Rng}(\alpha T)$ jsou konečněrozměrné. Konečně, $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený v Y (Důsledek 1.25), takže $\overline{T(B_X)} \subset \operatorname{Rng} T$. Množina $\overline{T(B_X)}$ je tedy omezená uzavřená podmnožina konečněrozměrného prostoru, takže je kompaktní (Věta 1.66). Proto je $\mathcal{F}(X, Y)$ podprostorem $\mathcal{K}(X, Y)$.

(c) Nechť $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{K}(X, Y)$ konvergující k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dále nalezneme množinu $\{x_1, \dots, x_k\} \subset B_X$ takovou, že

$\{T_n(x_1), \dots, T_n(x_k)\}$ je konečná $\frac{\varepsilon}{3}$-síť pro $T_n(B_X)$. Ukážeme, že $\{T(x_1), \dots, T(x_k)\}$ je konečná ε-síť pro $T(B_X)$. Pro $x \in B_X$ totiž nalezneme $i \in \{1, \dots, k\}$ tak, že $\|T_n(x) - T_n(x_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak

$$\|T(x)-T(x_i)\| \leq \|T(x)-T_n(x)\|+\|T_n(x)-T_n(x_i)\|+\|T_n(x_i)-T(x_i)\| < \|T-T_n\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|T_n-T\| < \varepsilon.$$

Tedy $T(B_X)$ je totálně omezená, a protože Y je úplný, je T kompaktní dle Tvrzení 9.

(d) Nechť Z je normovaný lineární prostor, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{K}(Y, Z)$. Pak $S(B_X)$ je omezená, a tedy $T \circ S(B_X) = T(S(B_X))$ je relativně kompaktní, neboli $T \circ S \in \mathcal{K}(X, Z)$.

Obráceně, nechť $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Položme $A = T(B_X)$. Pak $\overline{A}$ je kompaktní, tedy $S(\overline{A})$ je také kompaktní. Proto je $S \circ T(B_X) = S(A) \subset S(\overline{A})$ relativně kompaktní, což znamená, že $S \circ T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

(e) Označme $Z = \operatorname{Rng} T$. Pak Z je uzavřený podprostor Y, tedy je Banachův a podle věty o otevřeném zobrazení (Věta 3.5) je $T\colon X \to Z$ otevřené zobrazení. Relativně kompaktní množina $T(B_X)$ tedy obsahuje $B_Z(0, r)$ pro nějaké $r > 0$, což znamená, že $B_Z(0, r)$, a tedy i B_Z, je kompaktní. Díky Větě 1.66 tedy platí, že $\dim \operatorname{Rng} T = \dim Z < \infty$.

□

VĚTA 13 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Položme $K = \overline{T(B_X)}$ a $\mathcal{F} = \{f \restriction_K;\ f \in B_{Y^*}\}$. Pak K je kompaktní a $\mathcal{F} \subset C(K)$. Dále pro každé $f \in B_{Y^*}$ díky spojitosti f platí $\|f \restriction_K\|_{C(K)} = \sup_{y \in K}|f(y)| = \sup_{y \in T(B_X)}|f(y)| = \sup_{x \in B_X}|f(T(x))| \leq \|f\|\|T\| \leq \|T\|$. Tedy $\mathcal{F} \subset C(K)$ je omezená množina stejně spojitých (dokonce 1-lipschitzovských) funkcí na kompaktním prostoru K. Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty[1] to znamená, že $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v $C(K)$.

Nechť nyní $\{f_n\}$ je posloupnost v B_{Y^*}. Položme $g_n = f_n \restriction_K$. Pak $\{g_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{F}$, a tedy existuje podposloupnost $\{g_{n_k}\}$ konvergentní v $C(K)$. Tvrdíme, že pak $\{T^* f_{n_k}\}$ je cauchyovská: Pro $k, l \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\|T^* f_{n_k} - T^* f_{n_l}\| &= \|T^*(f_{n_k} - f_{n_l})\| = \sup_{x \in B_X} \left|T^*(f_{n_k} - f_{n_l})(x)\right| = \sup_{x \in B_X} |(f_{n_k} - f_{n_l})(Tx)| \leq \\ &\leq \sup_{z \in K} |(f_{n_k} - f_{n_l})(z)| = \|g_{n_k} - g_{n_l}\|_{C(K)}.\end{aligned}$$

Protože $\{g_{n_k}\}$ je cauchyovská, je i $\{T^* f_{n_k}\}$ cauchyovská, a tedy konvergentní v X^*. Odtud plyne, že $T^*(B_{Y^*})$ je relativně kompaktní v X^*.

$\Rightarrow$ Nechť $\varepsilon_X\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y\colon Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Podle první části důkazu je T^{**} kompaktní, takže je kompaktní i $T^{**} \restriction_{\varepsilon_X(X)}\colon \varepsilon_X(X) \to Y^{**}$. Označme $S\colon \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**} \restriction_{\varepsilon_X(X)}$. Podprostor $\varepsilon_Y(Y)$ je uzavřený v Y^{**} (Tvrzení 2.26), tedy $S \in \mathcal{K}(\varepsilon_X(X), \varepsilon_Y(Y))$ dle Tvrzení 11(b). Podle Tvrzení 5 a Věty 12(d) je tedy $T = \varepsilon_Y^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$ kompaktní.

□

Poznamenejme, že z důkazu je vidět, že implikace $\Leftarrow$ v předchozí větě platí i pro Y neúplný.

PŘÍKLAD 14. Nechť $K \in L_2([0, 1]^2)$. Ukážeme, že operátor $T\colon L_2([0, 1]) \to L_2([0, 1])$ definovaný předpisem

$$Tf(t) = \int_0^1 K(t, s) f(s) \,\mathrm{d}s$$

je kompaktní lineární operátor. Takovýto operátor se nazývá integrální operátor. Funkce K se nazývá jádro integrálního operátoru.

Nejprve si uvědomme, že je-li $f \in L_2([0, 1])$, pak díky Fubiniově větě[2] patří funkce $(t, s) \mapsto f(s)$ do $L_2([0, 1]^2)$. Z Hölderovy nerovnosti tedy plyne, že funkce $(t, s) \mapsto K(t, s) f(s)$ patří do $L_1([0, 1]^2)$. Podle

[1] Pro $C([0, 1])$ dokázal postačující podmínku pro relativní kompaktnost (v jiném jazyce) Giulio Ascoli (1883), že je to podmínka nutná ukázal Cesare Arzelà (1889).

[2] Guido Fubini (1907)

Fubiniovy věty je tedy pro s. v. $t \in [0,1]$ hodnota $Tf(t)$ dobře definována a funkce Tf je měřitelná. Dále, opět s využitím Hölderovy nerovnosti a Fubiniovy věty, je

$$\begin{aligned}\int_0^1 |Tf(t)|^2\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left|\int_0^1 K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}t \le \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t \le \\ &\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s \int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \|f\|^2\|K\|^2.\end{aligned}$$

Tedy vskutku $Tf \in L_2([0,1])$. Ihned je vidět, že T je lineární operátor, a nerovnost výše implikuje, že T je spojitý a $\|T\| \le \|K\|$. Níže ukážeme, že T je kompaktní.

Nejprve předpokládejme, že jádro K je spojité. Ukážeme, že pak T zobrazuje do $C([0,1])$ a je to kompaktní operátor z $L_2([0,1])$ do $C([0,1])$. Nechť $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti K plyne existence $\delta > 0$ takového, že $|K(t,s) - K(u,s)| < \varepsilon$ kdykoli $s,t,u \in [0,1]$, $|t-u| < \delta$. Pak pro každou $f \in B_{L_2([0,1])}$ a libovolná $t,u \in [0,1]$ splňující $|t-u| < \delta$ platí

$$\begin{aligned}|Tf(t) - Tf(u)| &= \left|\int_0^1 K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^1 K(u,s)f(s)\,\mathrm{d}s\right| \le \int_0^1 |K(t,s) - K(u,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s \le \\ &\le \int_0^1 \varepsilon|f(s)|\,\mathrm{d}s \le \varepsilon\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} = \varepsilon\|f\|_2 \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy $Tf \in C([0,1])$. Navíc jsme ukázali, že $T(B_{L_2([0,1])})$ je stejně spojitá podmnožina $C([0,1])$. Protože pro každou $f \in B_{L_2([0,1])}$ a libovolné $t \in [0,1]$ platí

$$|Tf(t)| \le \int_0^1 |K(t,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s \le \int_0^1 \|K\|_\infty |f(s)|\,\mathrm{d}s \le \|K\|_\infty \left(\int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \le \|K\|_\infty,$$

je množina $T(B_{L_2([0,1])})$ omezená v $C([0,1])$. Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty je tedy $T(B_{L_2([0,1])})$ relativně kompaktní v $C([0,1])$.

Nechť dále $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $L_2([0,1])$. Pak z ní lze vybrat podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ tak, že $\{Tf_{n_k}\}$ je konvergentní v $C([0,1])$, neboli stejnoměrně konvergentní. Protože míra $[0,1]$ je konečná, plyne odtud, že $\{Tf_{n_k}\}$ je konvergentní i v prostoru $L_2([0,1])$. Ukázali jsme tedy, že pokud jádro K je spojité, pak je operátor $T\colon L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ kompaktní (Tvrzení 9).

Konečně, nechť jádro K je obecné. Pak dle důsledku Luzinovy věty ([R, Věta 3.14]) existuje posloupnost spojitých funkcí $\{K_n\} \subset C([0,1]^2)$ takových, že $\|K_n - K\|_2 \to 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme operátor $T_n\colon L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ předpisem $T_n f(t) = \int_0^1 K_n(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$. Pak podle předchozí části jsou operátory T_n kompaktní. Máme $(T_n - T)f = \int_0^1 \big(K_n(t,s) - K(t,s)\big)f(s)\,\mathrm{d}s$, tedy operátor $T_n - T$ je integrální operátor s jádrem $K_n - K$. Na začátku jsme si spočetli, že pro takovéto operátory platí $\|T_n - T\| \le \|K_n - K\|_2$, odkud plyne, že $T_n \to T$ v prostoru $\mathcal{L}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$. Jeho podprostor $\mathcal{K}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$ je ovšem uzavřený (Věta 12(c)), tedy $T \in \mathcal{K}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$.

◇

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů[3]

Vlastní čísla čtvercové matice nesou v řadě otázek klíčovou informaci ke zjištění chování matice, zajímají nás např. při hledání Jordanova kanonického tvaru matice. Pro obecné operátory je nutné tento pojem

[3]Tato teorie se zabývá řešením lineárních rovnic $T(x) = y$ pro jistou třídu lineárních operátorů T. Základy položil Erik Ivar Fredholm (1903), který se zabýval integrálními rovnicemi souvisejícími s operátorem z Příkladu 14. Moderní obecnou formu této teorii dal F. Riesz (1916), kterému ovšem chyběla Hahnova-Banachova věta, takže o záležitosti vyžadující dualitu ji doplnil J. P. Schauder (1930). Proto se tato teorie někdy nazývá Rieszova-Schauderova teorie.

poněkud rozšířit (tzv. spektrum[4]), ale i v této situaci se jedná o zásadní informaci pro zkoumání vlastností daného operátoru. Pro kompaktní operátory pak dostáváme Fredholmovy věty 24, 30 a 31, které ukazují, že kompaktní operátory se chovají podobným způsobem jako matice.

Nechť X je normovaný lineární prostor. V tomto oddílu se budeme zabývat studiem operátorů z $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$, kterým budeme říkat operátory na X. Označíme-li $O\colon X \to X$, $O(x) = 0$ a $I = Id_X$, pak snadno nahlédneme, že $(\mathcal{L}(X), +, -, \circ, O, I)$, kde za operaci násobení $\circ$ bereme skládání operátorů, tvoří (nekomutativní) okruh s jednotkou. (Distributivita zleva platí díky linearitě operátorů z $\mathcal{L}(X)$.) V dalším bude I (případně I_X) vždy značit identitu na příslušném prostoru (na prostoru X).

Podívejme se nyní blíže na invertovatelné prvky (vzhledem k násobení, neboli skládání) okruhu $\mathcal{L}(X)$. Prvek $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertovatelný, právě když k němu existuje inverzní prvek $S \in \mathcal{L}(X)$, tj. prvek splňující $T \circ S = I$ a $S \circ T = I$. Z první rovnosti plyne, že T je nutně na, zatímco ze druhé rovnosti plyne, že T je prostý. Dohromady pak dostáváme, že S je inverzním zobrazením k bijekci T. Vidíme tedy, že T je invertovatelný, právě když je to bijekce a inverzní zobrazení T^{-1} je prvkem $\mathcal{L}(X)$. Inverzní zobrazení k lineárnímu je ovšem automaticky lineární, stačí tedy testovat pouze spojitost inverzního zobrazení T^{-1}. (Vidíme též, že algebraické značení inverzního prvku k T v okruhu $\mathcal{L}(X)$ jako T^{-1} není v kolizi se značením pro inverzní zobrazení.) Podle dřívějších definic je tedy T invertovatelným prvkem v $\mathcal{L}(X)$, právě když T je izomorfismus X na X. Pro Banachovy prostory je ovšem každá bijekce izomorfismem (Důsledek 3.7). Dostáváme tedy následující tvrzení:

TVRZENÍ 15. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertovatelný, právě když T je bijekce.*

Připomeňme ještě, že invertovatelné prvky v okruhu tvoří grupu, tj. jsou-li $S, T \in \mathcal{L}(X)$ invertovatelné, pak i $S \circ T$ je invertovatelný a $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Poznamenejme nakonec, že z Věty 12 plyne, že $\mathcal{K}(X)$ tvoří ideál v $\mathcal{L}(X)$.

DEFINICE 16. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertovatelný. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Je-li X Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$, pak $\lambda I - T$ není invertovatelný, právě když $\lambda I - T$ není prostý nebo není na (Tvrzení 15). Tedy λ je ve spektru T, právě když rovnice $T(x) - \lambda x = 0$ má více řešení nebo rovnice $T(x) - \lambda x = y$ nemá řešení pro nějakou pravou stranu $y \in X$.

Následující větu si dokážeme až v oddílu 10.2 (Věty 10.40 a 10.51(b)). Důkaz neprázdnosti vyžaduje netriviální znalosti z komplexní analýzy.

VĚTA 17. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní a netriviální, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

PŘÍKLAD 18. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $P \in \mathcal{L}(X)$ je netriviální projekce (tj. $P \neq 0$ a $P \neq I$). Pak $\sigma(P) = \sigma_{\mathrm{p}}(P) = \{0, 1\}$. Pro $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ je $(\lambda I - P)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} P$.

Vskutku, jelikož $P \neq I$, podprostor $\operatorname{Ker} P$ je nenulový, a tedy $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(P)$. Dále $I - P$ je netriviální projekce, a tedy $\operatorname{Ker}(I - P)$ je nenulový, neboli $1 \in \sigma_{\mathrm{p}}(P)$. Nechť nyní $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Předpokládejme, že $(\lambda I - P) \circ T = I$. Pak $\lambda T - P \circ T = I$, takže $P \circ T = \lambda T - I$. Dále $P = P \circ I = P \circ (\lambda I - P) \circ T = (\lambda P - P) \circ T = (\lambda - 1) P \circ T = (\lambda - 1)(\lambda T - I)$. Odtud plyne, že $T = \frac{1}{\lambda}\big(\frac{1}{\lambda-1} P + I\big)$. Pro takto definované T je pak $(\lambda I - P) \circ T = \frac{1}{\lambda-1} P + I - \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} P - \frac{1}{\lambda} P = I$ a podobně $T \circ (\lambda I - P) = I$.

$\diamond$

Následující dvě tvrzení mohou být užitečná při výpočtu spekter některých konkrétních operátorů.

[4]Tento pojem pravděpodobně pochází z Hilbertova studia lineárních integrálních rovnic (1906).

LEMMA 19. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertovatelný. Pak $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že $0 \notin \sigma(T)$. Dále zjevně stačí dokázat pouze implikaci $\Leftarrow$ a tu pak aplikovat na T^{-1} a $\frac{1}{\lambda}$. Nechť tedy $\lambda \notin \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Pak $\lambda I - T$ je invertovatelný. Položíme-li $S = \left(\frac{1}{\lambda}I - T^{-1}\right) \circ T$, pak $S = \frac{1}{\lambda}T - I = -\frac{1}{\lambda}(\lambda I - T)$, a tedy S je invertovatelný. Proto je invertovatelný i operátor $S \circ T^{-1} = \frac{1}{\lambda}I - T^{-1}$. Odtud plyne, že $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(T^{-1})$.

$\square$

TVRZENÍ 20. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je izomorfismus na. Pak $\sigma(T) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|T\|\right\}$.*

DŮKAZ. Nechť $\lambda \in \sigma(T)$. Pak $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1}) \subset B(0, \|T^{-1}\|)$ dle Lemmatu 19 a Věty 17. Tedy $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \leq \|T^{-1}\|$, neboli $|\lambda| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Druhá nerovnost plyne přímo z Věty 17.

$\square$

VĚTA 21. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.*

DŮKAZ. Podle Věty 2 je $\lambda I_{X^*} - T^* = (\lambda I_X - T)^*$, a tedy podle Věty 6 je $\lambda I_{X^*} - T^*$ invertovatelný, právě když $\lambda I_X - T$ je invertovatelný.

$\square$

Poznamenejme, že na neúplném prostoru platí pouze $\sigma(T^*) \subset \sigma(T)$.

TVRZENÍ 22. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$. Jestliže $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$, pak $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

DŮKAZ. Nechť $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$. Předpokládejme, že $0 \notin \sigma(T)$. Pak operátor $-T = 0I - T$ je invertovatelný, a tedy i T je invertovatelný. Podle Věty 12(d) to znamená, že $I = T^{-1}T$ je kompaktní operátor. Tedy $B_X = I(B_X)$ je kompaktní podmnožina X. To je spor s předpokladem, že $\dim X = \infty$ (Věta 1.66).

Nechť nyní $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$. Dle známé věty z lineární algebry platí, že $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Rng} T = \dim X$, a tedy $\dim \operatorname{Ker} T > 0$. To znamená, že $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

$\square$

VĚTA 23. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$. Je-li X Banachův, pak $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.*

DŮKAZ. Označme $Y = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Pak $T = \lambda I$ na Y, a tedy $\lambda B_Y = T(B_Y)$ je relativně kompaktní množina v X. Protože ovšem Y je uzavřený v X, je λB_Y uzavřená v X, a tedy kompaktní v Y. Z Věty 1.66 potom plyne, že $\dim Y < \infty$.

Dále, podle Věty 2.8(a) existuje Z uzavřený podprostor X takový, že $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$. Označme $S = (\lambda I - T)\restriction_Z$ a všimněme si, že S je prostý: Je-li $S(x) = 0$ pro $x \in Z$, pak $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T) = Y$, tedy $x = 0$. Dále pro každé $x \in X$ máme $(\lambda I - T)(x) = (\lambda I - T)(P_Y x + P_Z x) = (\lambda I - T)(P_Z x) = S(P_Z x)$. Odtud plyne, že $\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = S(Z) = \operatorname{Rng} S$. Ukážeme, že S je izomorfismus do.

Pokud S není izomorfismus do, pak z Tvrzení 1.60(a) plyne existence posloupnosti $\{x_n\} \in S_Z$ takové, že $S(x_n) \to 0$. Protože T je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ taková, že $T(x_{n_k}) \to x$ pro nějaké $x \in X$. Pak ovšem také $\lambda x_{n_k} = (\lambda I - T)(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) = S(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) \to 0 + x = x$. Odtud plyne, že $\frac{x}{\lambda} \in S_Z$, neboť Z je uzavřený. Díky tomu máme $S(x_{n_k}) \to S(\frac{x}{\lambda})$, což znamená, že $S(\frac{x}{\lambda}) = 0$. To je ale ve sporu s prostotou S.

Je-li tedy X úplný, pak $\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = \operatorname{Rng} S$ je uzavřený dle Tvrzení 1.60(c).

$\square$

VĚTA 24 (Fredholmova alternativa). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Tvrzení věty lze interpretovat následujícím způsobem: Rovnice $(\lambda I - T)x = y$ má řešení pro každou pravou stranu $y \in X$, právě když příslušná homogenní rovnice $(\lambda I - T)x = 0$ má pouze triviální řešení. Protože na konečněrozměrném prostoru je každý lineární operátor kompaktní, lze každý lineární operátor na konečněrozměrném prostoru zapsat ve tvaru $I - T$, T kompaktní. Fredholmova alternativa je tedy zobecněním známé věty o řešitelnosti soustav n lineárních rovnic o n neznámých.

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Označme $S = \lambda I - T$ a předpokládejme, že S není na. Nejprve si všimněme následujícího pozorování: Nechť A je libovolná množina a $f : A \to A$ je prosté zobrazení, které není na. Označíme-li $B = f(A) \subsetneqq A$, pak $f\restriction_B : B \to B$ je opět prosté zobrazení, které není na. Vskutku, $f(B) \subset f(A) = B$, tedy $f\restriction_B$ zobrazuje do B. Dále, je-li $f\restriction_B : B \to B$ na, pak $f(B) = f\restriction_B(B) = B = f(A)$, tedy z prostoty f plyne $A = B$, což je spor.

Aplikujme nyní toto pozorování iterativně na S: Položme $X_0 = X$ a $X_n = \operatorname{Rng} S\restriction_{X_{n-1}}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Podle Věty 23 je $\operatorname{Rng} S$ Banachův, takže S je izomorfismus do (Důsledek 3.7). Tedy i restrikce S na libovolný podprostor X je izomorfismus do, odkud indukcí plyne, že každý podprostor X_n je uzavřený v X (Tvrzení 1.60(c)). Dále díky pozorování výše indukcí obdržíme, že $X_n \subsetneqq X_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že to je ve sporu s kompaktností T.

Pro každé $n \geq 0$ existuje $x_n \in S_{X_n}$ splňující $\operatorname{dist}(x_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ (Lemma 1.63). Pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ máme $T(x_m) - T(x_n) = S(x_n) - S(x_m) + \lambda x_m - \lambda x_n$. Protože $S(x_n) \in X_{n+1}$ a $S(x_m) \in X_{m+1} \subset X_{n+1}$, je $u = S(x_n) - S(x_m) + \lambda x_m \in X_{n+1}$. Proto

$$\|T(x_m) - T(x_n)\| = |\lambda| \left\| \frac{u}{\lambda} - x_n \right\| \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Tedy posloupnost $\{T(x_n)\}$ nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností T.

$\Rightarrow$ Z Vět 2 a 6(a) plyne, že operátor $\lambda I_{X^*} - T^* = (\lambda I_X - T)^*$ je prostý. Podle Schauderovy věty (Věta 13) je T^* kompaktní, takže podle první části důkazu je $\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = X^*$. Věta 4(b) pak dává

$$\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \Big(\operatorname{Rng}\big((\lambda I_X - T)^*\big)\Big)_\perp = \big(\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp = (X^*)_\perp = \{0\},$$

tedy $\lambda I_X - T$ je prostý.

□

Poznamenejme, že z důkazu (s využitím poznámky za Větou 13) je vidět, že implikace $\Rightarrow$ v předchozí větě platí i pro neúplný prostor X.

DŮSLEDEK 25. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T)$.*

DŮKAZ. Je-li $\lambda \notin \sigma_p(T)$, pak $\lambda I - T$ je prostý. Je-li navíc $\lambda \neq 0$, pak z Fredholmovy alternativy (Věta 24) plyne, že $\lambda I - T$ je bijekce. Podle Tvrzení 15 to znamená, že $\lambda I - T$ je invertovatelný, a tedy $\lambda \notin \sigma(T)$.

□

LEMMA 26. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

DŮKAZ. Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ jsou různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_{n+1}$ jsou k nim příslušející vlastní vektory. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ jsou skaláry splňující $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = 0$. Pak $0 = T\big(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\big) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k T(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \lambda_k x_k$, a tedy

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \lambda_k x_k - \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k.$$

Díky indukčnímu předpokladu platí, že $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0$ pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Tím pádem i $\alpha_{n+1} = 0$.

□

VĚTA 27. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.*

DŮKAZ. Zvolme $r > 0$. Předpokládejme, že množina $\{\lambda \in \sigma(T);\ |\lambda| > r\}$ je nekonečná. Pak v ní podle Důsledku 25 existuje posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ navzájem různých vlastních čísel. Nechť $\{x_n\}$ jsou k nim příslušné vlastní vektory. Položme $X_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ díky Lemmatu 26 platí $X_n \subsetneq X_{n+1}$ a X_n je uzavřený v X_{n+1} (Důsledek 1.25). Podle Rieszova lemmatu (Lemma 1.63) existují $z_n \in S_{X_n}$ takové, že $\operatorname{dist}(z_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Tvrdíme, že platí $T(z_n) \in X_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda_n z_n - T(z_n) \in X_{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Vskutku, nechť $z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ pro nějaká $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Pak $T(z_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i x_i \in X_n$ a $\lambda_n z_n - T(z_n) = \lambda_n \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_n - \lambda_i) x_i \in X_{n-1}$. Pak pro libovolná $m, k \in \mathbb{N}$, $m > k$ máme $\lambda_m z_m - T(z_m) + T(z_k) \in X_{m-1}$, a tedy

$$\|T(z_m) - T(z_k)\| = \big\|\lambda_m z_m - \big(\lambda_m z_m - T(z_m) + T(z_k)\big)\big\| \geq$$
$$\geq \operatorname{dist}(\lambda_m z_m, X_{m-1}) = |\lambda_m| \operatorname{dist}(z_m, X_{m-1}) \geq r\frac{1}{2}.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{T(z_n)\}$ nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností T.

□

Zkombinujeme-li Tvrzení 22, Větu 27, Důsledek 25 a Větu 23, obdržíme následující shrnutí:

DŮSLEDEK 28. *Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní prostor.*

Na druhou stranu, následující příklad ukazuje, že pro nekompaktní operátory může spektrum vypadat téměř jakkoli.

PŘÍKLAD 29. Nechť $R\colon \ell_\infty \to \mathcal{L}(\ell_2)$ je izometrické vnoření z Příkladu 1.59 (všechny prostory jsou nad $\mathbb{K}$). Pak pro každé $y \in \ell_\infty$ je $\sigma_p(R(y)) = \operatorname{Rng} y = \{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a $\sigma(R(y)) = \overline{\operatorname{Rng} y}$. Dále je $R(c_0) \subset \mathcal{K}(\ell_2)$. Odtud plyne, že pro každou $K \subset \mathbb{K}$ neprázdnou kompaktní existuje $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$ takový, že $\sigma(T) = K$, a pro každou posloupnost $\{y_n\} \subset \mathbb{K}$ konvergující k 0 existuje $T \in \mathcal{K}(\ell_2)$ takový, že $\sigma_p(T) = \{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

Vskutku, je-li $y \in \ell_\infty$, pak zjevně $y_n \in \sigma_p(T_y)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť $T_y(e_n) = y_n e_n$. Na druhou stranu, pokud $\lambda \notin \operatorname{Rng} y$, pak rovnice $T_y(x) = \lambda x$, neboli $(y_n x_n)_{n=1}^\infty = (\lambda x_n)_{n=1}^\infty$, nemá nenulové řešení v ℓ_2. Dále, jelikož $\sigma(T_y)$ je uzavřená množina (Věta 17), platí $\overline{\operatorname{Rng} y} = \overline{\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}} \subset \sigma(T_y)$. Na druhou stranu, je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \overline{\operatorname{Rng} y}$ pak $v = \big(\frac{1}{\lambda - y_n}\big)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$. Označíme-li $u = (\lambda - y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$, pak $T_v \circ T_u = T_u \circ T_v = I$, a tedy $T_u = \lambda I - T_y$ je invertovatelný. Tedy $\lambda \notin \sigma(T_y)$, z čehož plyne inkluze $\sigma(T_y) \subset \overline{\operatorname{Rng} y}$.

Dále snadno nahlédneme, že $R(c_{00}) \subset \mathcal{F}(\ell_2)$, odkud dle Věty 12(b), (c) plyne, že $R(c_0) \subset \overline{\mathcal{F}(\ell_2)} \subset \mathcal{K}(\ell_2)$. Konečně, je-li $K \subset \mathbb{K}$ neprázdná kompaktní, pak existuje spočetná hustá množina $\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ v K. Pak pro $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ je $\sigma(T_y) = \overline{\operatorname{Rng} y} = K$.

◇

Z Vět 23, 4 a 2 okamžitě plyne následující tvrzení, které popisuje, jak nalézt prostor všech pravých stran, pro které je rovnice $(\lambda I - T)x = y$ řešitelná, pomocí prostoru řešení příslušné adjungované (duální) homogenní rovnice.

VĚTA 30 (Druhá Fredholmova věta). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

Poslední věta popisuje vztahy mezi velikostmi prostoru všech pravých stran, pro které je rovnice $(\lambda I - T)x = y$ řešitelná, a prostoru všech řešení příslušné homogenní rovnice.

VĚTA 31 (Třetí Fredholmova věta). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

Všimněme si, že první rovnost je zobecněním Fredholmovy alternativy. Nicméně my Fredholmovu alternativu využijeme v důkazu.

DŮKAZ. Označme $S = \lambda I_X - T$. Dokážeme nejprve nerovnost

$$\dim \operatorname{Ker} S \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S. \tag{1}$$

Předpokládejme opak, tj. $\dim \operatorname{Ker} S > \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S$. Dle Věty 23 je $\operatorname{Ker} S$ konečněrozměrný a $\operatorname{Rng} S$ uzavřený. Podle předpokladu je tedy $\operatorname{Rng} S$ konečné kodimenze. Díky Větě 2.8 platí

$$X = \operatorname{Ker} S \oplus_{\mathrm{t}} E = \operatorname{Rng} S \oplus_{\mathrm{t}} F,$$

kde E, F jsou uzavřené podprostory X a $\dim \operatorname{Ker} S > \dim F$. Nechť $A\colon \operatorname{Ker} S \to F$ je lineární zobrazení, které je na a $Ay = 0$ pro nějaké nenulové $y \in \operatorname{Ker} S$ (stačí definovat A pomocí bází). Zobrazení A je spojité díky konečné dimenzi prostoru $\operatorname{Ker} S$ (Věta 1.66). Nechť $P : X \to \operatorname{Ker} S$ je spojitá lineární projekce příslušná prvnímu rozkladu. Položme $U = T - A \circ P$. Pak $A \circ P \in \mathcal{F}(X)$, a tedy $U \in \mathcal{K}(X)$ díky Větě 12(b).

Podívejme se nyní na operátor $\lambda I_X - U$. Platí, že $\lambda I_X - U = S + A \circ P$. Je-li $z \in X$, pak existují $z_1 \in \operatorname{Rng} S$ a $z_2 \in F$ splňující $z = z_1 + z_2$. Všimněme si, že $\operatorname{Rng} S = S(E + \operatorname{Ker} S) = S(E) + S(\operatorname{Ker} S) = S(E)$. Tedy existují $x_1 \in E$ a $x_2 \in \operatorname{Ker} S$ splňující $S(x_1) = z_1$ a $A(x_2) = z_2$. Pak $(\lambda I_X - U)(x_1 + x_2) = (S + A \circ P)x_1 + (S + A \circ P)x_2 = Sx_1 + A(Px_1) + Sx_2 + A(Px_2) = z_1 + z_2 = z$. Tedy $\lambda I_X - U$ je na. Z Fredholmovy alternativy (Věta 24) plyne, že $\lambda I_X - U$ je prostý. To je ale ve sporu s faktem, že $(\lambda I_X - U)y = Sy + A(Py) = Ay = 0$. Tím máme dokázánu nerovnost (1).

Uvědomme si, že $\lambda I_{X^*} - T^* = S^*$ (Věta 2). Podle Věty 13 je $T^* \in \mathcal{K}(X^*)$. Podle první části důkazu aplikované na $T^* \in \mathcal{K}(X^*)$ je tedy

$$\dim \operatorname{Ker} S^* \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^*.$$

Dále, podle druhé Fredholmovy věty (Věta 30) je $X^*/\operatorname{Rng} S^* = X^*/(\operatorname{Ker} S)^\perp$. Tento prostor je ovšem izomorfní prostoru $(\operatorname{Ker} S)^*$ (Věta 2.22(b)). Tedy

$$\operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^* = \dim(\operatorname{Ker} S)^* = \dim \operatorname{Ker} S.$$

Podobně, $\operatorname{Ker} S^* = (\operatorname{Rng} S)^\perp$ (Věta 4(a)). Protože $\operatorname{Rng} S$ je uzavřený, je $(\operatorname{Rng} S)^\perp$ izomorfní s $(X/\operatorname{Rng} S)^*$ (Věta 2.22(a)). Tedy $\dim \operatorname{Ker} S^* = \dim(X/\operatorname{Rng} S)^* = \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S$ (vizte Tvrzení 2.27). Dáme-li nyní dohromady dokázané rovnosti a nerovnosti spolu s nerovností (1), dostaneme

$$\dim \operatorname{Ker} S \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S = \dim \operatorname{Ker} S^* \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^* = \dim \operatorname{Ker} S.$$

$\square$

Kapitola 5

Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

Od obecné teorie normovaných lineárních prostorů nyní na chvíli odbočíme ke klasičtější analýze, totiž k Fourierově transformaci. Ta je základním nástrojem v řadě matematických problémů, ať už je to teorie parciálních diferenciálních rovnic, prostorů funkcí či harmonická analýza. Než se však do této problematiky pustíme, je třeba se seznámit s takzvanou konvolucí funkcí, což je velmi užitečný nástroj, jak vytvářet funkce s požadovanými vlastnostmi pomocí „integrálního průměrování“. Jako jeden z mnoha důsledků obdržíme hustotu hladkých funkcí v prostorech L_p (Důsledek 15).

1. Konvoluce funkcí

V tomto oddílu budeme pracovat s funkcemi na prostoru $\mathbb{R}^d$ pro nějaké $d \in \mathbb{N}$ a s mírou μ, která je nějakým kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Normu na $\mathbb{R}^d$ budeme uvažovat eukleidovskou, tj. $\|\cdot\|_2$.

DEFINICE 1. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Konvoluce funkce f s funkcí g je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Správnější by bylo označovat konvoluci symbolem $f *_\mu g$, neboť výsledek závisí na míře μ. Tradiční značení vyžaduje, abychom z kontextu věděli, jaká míra je použita. Funkce g se někdy nazývá jádrem konvoluce.

VĚTA 2. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) *Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.*
(b) *Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f * (g + h) = f * g + f * h$ a $(f + g) * h = f * h + g * h$ na definičních oborech pravých stran.*
(c) *Nechť $1 \le p, q, r \le \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge 2$. Je-li $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$ a $h \in L_r(\mu)$, pak $(f * g) * h = f * (g * h)$ μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$.*

Důležitým speciálním případem v (c) je $p = q = r = 1$.

DŮKAZ. (a) Nechť $\mu = C\lambda$ a $x \in \mathbb{R}^d$. Definujme $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ předpisem $\varphi(z) = x - z$. Pak φ je diferencovatelná bijekce a $|J_\varphi|(z) = 1$ v každém bodě $z \in \mathbb{R}^d$. Tedy dle věty o substituci

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)C\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi(z))g(x-\varphi(z))C\,\mathrm{d}\lambda(z) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(z)f(x-z)\,\mathrm{d}\mu(z),$$

pokud jeden z integrálů konverguje. Odtud již tvrzení (a) plyne.

(b) Nechť $x \in \mathbb{R}^d$ je takové, že $f * g(x)$ a $f * h(x)$ jsou definovány. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y) \cdot (g+h)(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d} f(y)h(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y),$$

a tedy $f*(g+h)(x) = f*g(x) + f*h(x) = \big(f*g + f*h\big)(x)$. Druhá rovnost plyne z právě dokázané rovnosti a tvrzení (a).

Důkaz (c) odložíme na později (str. 75), až se o konvoluci dozvíme více.

□

Nyní se zaměříme na otázku, kdy je konvoluce definována.

LEMMA 3. *Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je lebesgueovsky měřitelná.*
(a) Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je funkce $y \mapsto f(x-y)$ lebesgueovsky měřitelná na $\mathbb{R}^d$.
(b) Funkce $(x, y) \mapsto f(y)$ a $(x, y) \mapsto f(x-y)$ jsou lebesgueovsky měřitelné na $(\mathbb{R}^d)^2$.

DŮKAZ. V celém důkazu bude měřitelná znamenat lebesgueovsky měřitelná.

(a) Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $h(y) = f(x-y)$ pro $y \in \mathbb{R}^d$. Je-li $G \subset \mathbb{K}$ otevřená, pak je snadno vidět, že $h^{-1}(G) = x - f^{-1}(G)$. Množina $f^{-1}(G)$ je měřitelná, a protože Lebesgueova míra je symetrická a translačně invariantní, je i množina $h^{-1}(G)$ měřitelná. Funkce h je tedy měřitelná.

(b) Označme $\varphi(x, y) = f(y)$ a $\psi(x, y) = f(x-y)$. Nechť $G \subset \mathbb{K}$ je otevřená. Položme $A = f^{-1}(G)$. Pak $A \subset \mathbb{R}^d$ je měřitelná a $\varphi^{-1}(G) = \mathbb{R}^d \times A \subset (\mathbb{R}^d)^2$. Je to tedy měřitelný obdélník, a tím pádem měřitelná množina. Dále definujme $T : (\mathbb{R}^d)^2 \to (\mathbb{R}^d)^2$ předpisem $T(x, y) = (x-y, y)$. Pak zjevně T je prosté lineární zobrazení, a tedy bijekce $(\mathbb{R}^d)^2$ na $(\mathbb{R}^d)^2$. Platí, že $\psi^{-1}(G) = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2;\ x-y \in A\} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2;\ T(x, y) \in A \times \mathbb{R}^d\} = T^{-1}(A \times \mathbb{R}^d)$. Množina $A \times \mathbb{R}^d$ je měřitelný obdélník v $(\mathbb{R}^d)^2$, a tedy měřitelná množina, proto i její obraz při lineárním zobrazení T^{-1} je měřitelná množina (vizte např. [R, str. 175]).

□

LEMMA 4. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \in L_1(\mu)$. Položíme-li $F(x, y) = f(y)g(x-y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^d$, pak $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.*

DŮKAZ. Podle Lemmatu 3(b) je funkce F měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. S využitím věty o substituci jako v důkazu Věty 2(a) obdržíme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x, y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \cdot \|g\|_1 \, \mathrm{d}\mu(y) = \|g\|_1 \|f\|_1 < +\infty,$$

odkud podle Fubiniovy věty plyne, že $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

□

DEFINICE 5. Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x-y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Všimněme si, že je-li $y \in \mathbb{R}^d$, pak pro libovolné $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ platí $\tau_y(f+g) = \tau_y f + \tau_y g$ a $\tau_y(\alpha f) = \alpha \tau_y f$, tj. τ_y je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory všech funkcí na $\mathbb{R}^d$.

VĚTA 6. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pak zobrazení $\tau : \mathbb{R}^d \to L_p(\mu)$ dané předpisem $\tau(x) = \tau_x f$ je stejnoměrně spojité.*

DŮKAZ. Uvědomme si, že díky větě o substituci pro libovolné $g \in L_p(\mu)$ a $y \in \mathbb{R}^d$ platí, že $\|\tau_y g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_y g(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(u)|^p \, \mathrm{d}\mu(u) = \|g\|_p^p$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle důsledku Luzinovy věty ([R, Věta 3.14]) existuje $g \in C(\mathbb{R}^d)$ s kompaktním nosičem K taková, že $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Nechť $r > 0$ je takové, že $K \subset B(0, r)$, a položme $B = B(0, r+1)$.

Protože g je stejnoměrně spojitá a $\mu(B) < +\infty$, existuje $0 < \delta \leq 1$ takové, že $|g(u) - g(v)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(B)^{1/p}}$ kdykoli $u, v \in \mathbb{R}^d$, $\|u - v\| < \delta$. Nechť nyní $x, y \in \mathbb{R}^d$ jsou takové, že $\|x - y\| < \delta$. Je-li $u + x - y \in K$, pak $\|u\| \leq \|u + x - y\| + \|x - y\| \leq r + 1$, tedy $u \in B$. S využitím věty o substituci tedy máme

$$\begin{aligned}\|\tau_x g - \tau_y g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_x g(z) - \tau_y g(z)|^p \, \mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(z - x) - g(z - y)|^p \, \mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(u) - g(u + x - y)|^p \, \mathrm{d}\mu(u) = \int_B |g(u) - g(u + x - y)|^p \, \mathrm{d}\mu(u) \leq \\ &\leq \int_B \frac{\varepsilon^p}{3^p \mu(B)} \, \mathrm{d}\mu(z) = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.\end{aligned}$$

Dohromady tak dostáváme

$$\begin{aligned}\|\tau(x) - \tau(y)\|_p &= \|\tau_x f - \tau_y f\|_p \leq \|\tau_x f - \tau_x g\|_p + \|\tau_x g - \tau_y g\|_p + \|\tau_y g - \tau_y f\|_p \leq \\ &\leq \|\tau_x (f - g)\|_p + \frac{\varepsilon}{3} + \|\tau_y (g - f)\|_p = \|f - g\|_p + \frac{\varepsilon}{3} + \|g - f\|_p < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Připomeňme, že $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$ je vektorový prostor lokálně integrovatelných funkcí definovaných na měřitelné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tj. funkcí $f : \Omega \to \mathbb{K}$ takových, že pro každé $x \in \Omega$ existuje okolí $U \subset \Omega$ bodu x takové, že $f\restriction_U$ je integrovatelná. Poznamenejme, že z Lindelöfovy[1] vlastnosti množiny Ω plyne, že funkce z $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$ jsou automaticky měřitelné. Z vlastností kompaktních množin pak plyne, že je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$ a $K \subset \Omega$ kompaktní, pak $f\restriction_K$ je integrovatelná. Dále se snadno nahlédne, že $C(\mathbb{R}^d) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mu)$ a $L_p(\mathbb{R}^d, \mu) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mu)$ pro každé $1 \leq p \leq \infty$.

VĚTA 7. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) *Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \leq p, q \leq \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*
(b) *Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.*
(c) *Jsou-li f, g měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D, pak $f * g$ je měřitelná na D.*
(d) *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definována μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*
(e) *Nechť $1 \leq p, q \leq \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, pak $f * g$ je definovaná μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_r(\mu)$ a platí $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$, kde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.*

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in \mathbb{R}^d$. Funkce $y \mapsto f(y)g(x-y)$ je μ-měřitelná dle Lemmatu 3(a) a $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (pro $1 < p, q < \infty$ to plyne z Hölderovy nerovnosti, jinak je odhad přímočarý; též využíváme větu o substituci). Tedy $f * g$ je definována na celém $\mathbb{R}^d$ a $|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dále díky Větě 2(a) můžeme bez újmy na obecnost předpokládat, že $q < \infty$. Položme $h(z) = g(-z)$ pro $z \in \mathbb{R}^d$. Dle věty o substituci je $h \in L_q(\mu)$. Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^d$ pomocí Hölderovy nerovnosti (resp. přímočarého odhadu pro $p = \infty$) dostáváme

$$\begin{aligned}|f * g(x) - f * g(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \big(g(x - z) - g(y - z) \big) \, \mathrm{d}\mu(z) \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \big(h(z - x) - h(z - y) \big) \, \mathrm{d}\mu(z) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \big(\tau_x h - \tau_y h \big)(z) \, \mathrm{d}\mu(z) \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \left| \big(\tau_x h - \tau_y h \big)(z) \right| \mathrm{d}\mu(z) \leq \|f\|_p \|\tau_x h - \tau_y h\|_q.\end{aligned}$$

Věta 6 nyní implikuje stejnoměrnou spojitost $f * g$.

[1] Ernst Leonard Lindelöf

(b) Nechť $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $y \mapsto f(y)g(x-y)$ je μ-měřitelná dle Lemmatu 3(a). Položme $K = \operatorname{supp} g$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{x-K} |f(y)||g(x-y)| \,\mathrm{d}\mu(y) \le \|g\|_\infty \int_{x-K} |f(y)| \,\mathrm{d}\mu(y),$$

přičemž poslední integrál je konečný, neboť množina $x - K$ je kompaktní. Tedy hodnota $f * g(x)$ je definována.

Nechť nyní $x \in \mathbb{R}^d \setminus (\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)$. Pak pro $y \in \operatorname{supp} f$ platí $x - y \notin \operatorname{supp} g$, a tedy

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) \,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\operatorname{supp} f} f(y)g(x-y) \,\mathrm{d}\mu(y) = 0.$$

Odtud plyne, že $\{x \in \mathbb{R}^d;\ f * g(x) \neq 0\} \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Podle Tvrzení 1.23 je ovšem množina $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ uzavřená, a tedy $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

Konečně, ukažme spojitost. Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $L = B(x,1) - K$. Pak L je kompaktní (Tvrzení 1.23). Položme $h(z) = (\chi_L f)(-z)$ pro $z \in \mathbb{R}^d$. Pak $h \in L_1(\mu)$. Nechť $y \in B(x,1)$ je libovolné. Pak s využitím Věty 2 dostáváme

$$\begin{aligned}
|f * g(x) - f * g(y)| &= |g * f(x) - g * f(y)| = \left| \int_K g(z)\big(f(x-z) - f(y-z)\big) \,\mathrm{d}\mu(z) \right| = \\
&= \left| \int_K g(z)\big(h(z-x) - h(z-y)\big) \,\mathrm{d}\mu(z) \right| \le \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)|\big|h(z-x) - h(z-y)\big| \,\mathrm{d}\mu(z) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)|\big|\big(\tau_x h - \tau_y h\big)(z)\big| \,\mathrm{d}\mu(z) \le \|g\|_\infty \|\tau_x h - \tau_y h\|_1,
\end{aligned}$$

přičemž třetí rovnost platí proto, že je-li $z \in K$, pak $x - z, y - z \in L$, a tedy $g(z)\big(f(x-z) - f(y-z)\big) = g(z)\big((\chi_L f)(x-z) - (\chi_L f)(y-z)\big)$ pro každé $z \in \mathbb{R}^d$. Věta 6 nyní implikuje spojitost $f * g$ v bodě x.

(c) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $A_n = \{y \in \mathbb{R}^d;\ |f(y)| \le n\} \cap B(0,n)$ a $B_n = \{y \in \mathbb{R}^d;\ |g(y)| \le n\} \cap B(0,n)$. Pak A_n i B_n jsou měřitelné množiny. Položme dále $f_n = \chi_{A_n} f$ a $g_n = \chi_{B_n} g$. Pak zjevně $f_n \to f$ a $g_n \to g$ bodově na $\mathbb{R}^n$ a $|f_n(x)| \le |f(x)|$, $|g_n(x)| \le |g(x)|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Odtud plyne, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^d$ platí $f_n(y)g_n(x-y) \to f(y)g(x-y)$ a $|f_n(y)g_n(x-y)| \le |f(y)g(x-y)|$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n, g_n \in L_1(\mu) \cap L_\infty(\mu)$, a tedy dle (a) je $f_n * g_n$ definována a spojitá na celém $\mathbb{R}^d$. Pro $x \in D$ je podle předpokladu $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty$, takže dle Lebesgueovy věty $f_n * g_n(x) \to f * g(x)$. Funkce $f * g$ je tedy na D bodovou limitou spojitých funkcí, a proto je tam měřitelná.

(d) Položíme-li $F(x,y) = f(y)g(x-y)$, pak dle Lemmatu 4 je $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1\|g\|_1$. Podle Fubiniovy věty tedy platí, že $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \,\mathrm{d}\mu(y)$ konverguje pro μ-s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ a $f * g \in L_1(\mu)$. Použijeme-li Fubiniovu větu ještě jednou, dostaneme

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \,\mathrm{d}\mu(y) \right| \mathrm{d}\mu(x) \le \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)| \,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |F(x,y)| \,\mathrm{d}\mu \times \mu = \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

(e) Případ sdružených exponentů je (a), případ $p = q = 1$ je (d). Zbývají případy, kdy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ a $1 < \max\{p,q\} < \infty$, což znamená, že $r < \infty$. Dle Lemmatu 3(b) je funkce $F(x,y) = |f(y)|^p |g(x-y)|^q$ nezáporná měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$, a tedy dle Fubiniovy věty (a věty o substituci) platí

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^q \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \|g\|_q^q \,\mathrm{d}\mu(y) = \|f\|_p^p \|g\|_q^q < +\infty. \quad (1)
\end{aligned}$$

To znamená, že integrál $\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ je konečný pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Dále, je-li $p = 1$, pak $r = q > 1$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ dostáváme pomocí Hölderovy nerovnosti

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{1-\frac{1}{r}} \big(|f(y)|^{\frac{1}{r}}|g(x-y)|\big)\,\mathrm{d}\mu(y) \le$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}} = \|f\|_1^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Je-li $q = 1$, pak obdržíme analogicky $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \le \|g\|_1^{1-\frac{1}{r}} \big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\big)^{\frac{1}{r}}$. Konečně, je-li $p, q > 1$, pak $\frac{1}{r} < \frac{1}{p}$, $\frac{1}{r} < \frac{1}{q}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ tak dostáváme pomocí Hölderovy nerovnosti (Věta 16.18 pro $\alpha_1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$ a $\alpha_3 = \frac{1}{r}$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(x-y)|^{1-\frac{q}{r}} \big(|f(y)|^{\frac{p}{r}}|g(x-y)|^{\frac{q}{r}}\big)\,\mathrm{d}\mu(y) \le$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^q\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}} =$$
$$= \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_q^{1-\frac{q}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Všimněme si, že díky předchozím výpočtům je tento odhad platný i pro $p = 1$ nebo $q = 1$. Protože poslední číslo v tomto odhadu je konečné pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$, je funkce $f * g$ je definována skoro všude na $\mathbb{R}^d$ a platí $|f * g(x)| \le \|f\|_p^{1-p/r} \|g\|_q^{1-q/r} \big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\big)^{1/r}$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Podle (c) je funkce $f * g$ měřitelná a můžeme tedy s pomocí (1) odhadnout

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|^r\,\mathrm{d}\mu(x) \le \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

□

DŮKAZ VĚTY 2(C). Pomocí Lemmatu 3 snadno odvodíme, že funkce $F_x(y,z) = f(z)g(y-z)h(x-y)$ je měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dále je $|f| \in L_p(\mu)$, $|g| \in L_q(\mu)$ a $|h| \in L_r(\mu)$. Z předpokladu na p, q, r plyne, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$ nebo $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge 1$. Předpokládejme nejprve, že nastane první případ. Pak dle Věty 7(e) je $|f| * |g| \in L_u(\mu)$, kde $\frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Protože $\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 + \frac{1}{r} \ge 1$, opětovným použitím Věty 7(e) dostáváme, že $\big(|f| * |g|\big) * |h|(x)$ je definována pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. To znamená, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)g(y-z)h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(z)\right) \mathrm{d}\mu(y) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)||g(y-z)|\,\mathrm{d}\mu(z)\right) |h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f| * |g|(y)|h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty$$

pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Z Fubiniovy věty tedy plyne, že $F_x \in L_1(\mu \times \mu)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$.

Podobně, jestliže $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge 1$, pak dle Věty 7(e) je $|g| * |h| \in L_u(\mu)$, kde $\frac{1}{u} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$. Protože $\frac{1}{p} + \frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1 \ge 1$, opětovným použitím Věty 7(e) dostáváme, že $|f| * \big(|g| * |h|\big)(x)$ je definována pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. S využitím věty o substituci to znamená, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)g(y-z)h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y-z)||h(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(z) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(u)||h(x-z-u)|\,\mathrm{d}\mu(u)\right) \mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|\big(|g| * |h|\big)(x-z)\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty$$

pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Z Fubiniovy věty tedy i ve druhém případě plyne, že $F_x \in L_1(\mu \times \mu)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$.

Konečně, opětovným použitím Fubiniovy věty spolu s větou o substituci tedy pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ dostáváme

$$\begin{aligned}(f*g)*h(x) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(y-z)\,\mathrm{d}\mu(z)\right)h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} F_x(y,z)\,\mathrm{d}\mu(z)\right)\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} F_x(y,z)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y-z)h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(u)h(x-z-u)\,\mathrm{d}\mu(u)\right)\mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g*h(x-z)\,\mathrm{d}\mu(z) = f*(g*h)(x).\end{aligned}$$

□

DEFINICE 8. Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme multiindexem délky d. Řádem multiindexu α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d, pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α, tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(symboly ∂x_i^0 ve vyjádření výše vynecháváme). Speciálně, pro $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$ a $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je $D^0 f = f$. Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Je-li f funkce na Ω s komplexními hodnotami, pak $D^\alpha f(x) = D^\alpha(\mathrm{Re}\, f)(x) + iD^\alpha(\mathrm{Im}\, f)(x)$ pro $x \in \Omega$. Připomeňme, že symbolem $C^k(\Omega, \mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ značíme funkce z Ω do $\mathbb{K}$ takové, že mají spojité všechny parciální derivace všech řádů až do k včetně (resp. všech řádů, pokud $k = \infty$) na Ω. Obvykle používáme zkratku $C^k(\Omega, \mathbb{K}) = C^k(\Omega)$ a těleso skalárů je nutné poznat z kontextu.

Uvědomme si, že ne každá parciální derivace je tvaru D^α pro nějaký multiindex α (např. $\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}$). Nicméně pokud derivujeme funkce z $C^k(\Omega)$, pak si díky větě o záměně parciálních derivací vystačíme pouze s parciálními derivacemi D^α. Díky Větě 16.1 lze tedy obvykle pracovat pouze s parciálními derivacemi D^α.

POZNÁMKA 9. Je-li $f \in C^k(\Omega)$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \le k$, pak $\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f$. Vskutku, f je konstantní (nulová) na otevřené množině $G = \Omega \setminus \operatorname{supp} f$, a tedy $D^\alpha f = 0$ na G. Tudíž $\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \overline{\Omega \setminus G}^{\Omega} = \Omega \setminus G = \operatorname{supp} f$. Na druhou stranu není neobvyklé, že $\operatorname{supp} D^\alpha f \subsetneq \operatorname{supp} f$: je-li f konstantní nenulová, pak $\operatorname{supp} f = \Omega$, ale $\operatorname{supp} D^\alpha f = \emptyset$ pro $\alpha \neq 0$.

DEFINICE 10. Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K});\ \operatorname{supp} \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá prostor testovacích funkcí na A.

Obvykle používáme zkratku $\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \mathcal{D}(A)$ a těleso skalárů je nutné poznat z kontextu.

Uvědomme si, že $\mathcal{D}(A)$ je podprostor vektorového prostoru $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{D}(A)$ je podprostor $\mathcal{D}(B)$, pokud $A \subset B$. Snadno je vidět, že pro každou $f \in \mathcal{D}(A)$ a každý multiindex α je $D^\alpha f \in \mathcal{D}(A)$ (Poznámka 9).

PŘÍKLAD 11. Funkce $p(x) = \|x\|^2$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ patří do $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Platí totiž $\frac{\partial p}{\partial x_i}(x) = 2x_i$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}(x) = 2$ a $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$ pro $i \neq j$ a všechny ostatní parciální derivace jsou nulové.

Definujme funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{pro } t \in (-1, 1), \\ 0 & \text{pro } t \notin (-1, 1). \end{cases}$$

Pak není obtížné spočítat, že $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (jediná potíž je v bodech ± 1), a zjevně $\{t \in \mathbb{R};\ \varphi(t) \neq 0\} = (-1, 1)$, takže $\operatorname{supp} \varphi = [-1, 1]$. Tedy $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Konečně, položíme-li $\psi = \varphi \circ p$, pak ihned vidíme, že $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\{x \in \mathbb{R}^d;\ \psi(x) \neq 0\} = U(0, 1)$ a $\operatorname{supp} \psi = B(0, 1)$.

◇

Vzhledem k tomu, že nosič funkce lze posouvat a měnit jeho velikost pomocí transformace $x \mapsto ax + b$, která zachovává hladkost, předchozí příklad ukazuje, že pro libovolnou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ obsahuje netriviální nezápornou funkci.

VĚTA 12. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ pro každý multiindex α délky d.*

DŮKAZ. Dle Věty 7(b) jsou funkce $f * g$ i $f * D^\alpha g$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ definovány a spojité na celém $\mathbb{R}^d$. Dále ukážeme platnost vzorce $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ indukcí podle $|\alpha|$. Odtud plyne, že $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ pomocí Věty 16.1.

Nechť nejprve $k = 1$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Funkce $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ je spojitá s kompaktním nosičem, a tedy existuje $C > 0$ takové, že $\left|\frac{\partial g}{\partial x_j}(y)\right| \leq C$ pro každé $y \in \mathbb{R}^d$. Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $\varphi(t) = f * g(x + te_j)$ pro $t \in (-1, 1)$. Dále položme $F(t, y) = f(y)g(x + te_j - y)$ pro $t \in (-1, 1)$ a $y \in \mathbb{R}^d$ a všimněme si, že $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} F(t, y)\,\mathrm{d}\mu(y)$. Pak pro každé $t \in (-1, 1)$ je funkce $y \mapsto F(t, y)$ měřitelná. Dále pro každé $y \in \mathbb{R}^d$ a $t \in (-1, 1)$ je $\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = f(y)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x + te_j - y)$. Položme $K = B(x, 1) - \operatorname{supp} g$. Pak K je kompaktní (Tvrzení 1.23) a je-li $t \in (-1, 1)$ a $y \in \mathbb{R}^d \setminus K$, pak $x + te_j - y \notin \operatorname{supp} g$, takže $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x + te_j - y) = 0$. Pro $h = C\chi_K|f|$ je tedy $h \in L_1(\mu)$ a $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(t, y)\right| \leq h(y)$ pro každé $y \in \mathbb{R}^d$ a $t \in (-1, 1)$. Konečně, $y \mapsto F(0, y) \in L_1(\mu)$, neboť $f * g(x)$ je definována. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru tedy máme $\frac{\partial f * g}{\partial x_j}(x) = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial t}(0, y)\,\mathrm{d}\mu(y) = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$.

Nechť nyní $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| > 1$ a předpokládejme, že vzorec platí pro libovolné D^β takové, že $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ a $|\beta| < |\alpha|$. Nechť $j \in \{1, \dots, d\}$ je nejmenší takové, že $\alpha_j > 0$. Pak $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$, přičemž $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1$, a tedy s využitím indukčního předpokladu a dále již dokázaného případu $k = 1$ obdržíme

$$D^\alpha(f * g) = \frac{\partial}{\partial x_j}\big(D^{\alpha - e_j}(f * g)\big) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f * D^{\alpha - e_j} g) = f * \frac{\partial}{\partial x_j}(D^{\alpha - e_j} g) = f * D^\alpha g.$$

□

DEFINICE 13. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

VĚTA 14. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

(b) Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \leq p < \infty$, potom $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.

DŮKAZ. (a) Podle Věty 7(a) jsou funkce $f * g_n$ definovány na celém $\mathbb{R}^d$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2}$ kdykoli $u, v \in \mathbb{R}^d$ splňují $\|u - v\| \leq \delta$. Nechť $M > 0$ je takové, že $|f(x)| \leq M$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dle Důsledku 16.17 existuje $r > 0$ takové, že $\int_{B(0,r)} g\,\mathrm{d}\mu > 1 - \frac{\varepsilon}{4M}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ pak dle věty o substituci (užijeme $\varphi(x) = nx$, $J_\varphi(x) = n^d$) máme $\int_{B(0,r/n)} g_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{B(0,r/n)} n^d g(nx)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{B(0,r)} g(u)\,\mathrm{d}\mu(u) > 1 - \frac{\varepsilon}{4M}$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\frac{r}{n_0} < \delta$. Pak pro každé

$n \geq n_0$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že

$$\begin{aligned}
\left|f * g_n(x) - f(x)\right| &= \left|g_n * f(x) - f(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) f(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) - f(x)\int_{\mathbb{R}^d} g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y)\left|f(x-y) - f(x)\right|\mathrm{d}\mu(y) = \\
&= \int_{B(0,\frac{r}{n})} g_n(y)\left|f(x-y) - f(x)\right|\mathrm{d}\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\frac{r}{n})} g_n(y)\left|f(x-y) - f(x)\right|\mathrm{d}\mu(y) \leq \\
&\leq \int_{B(0,\frac{r}{n})} g_n(y)\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\frac{r}{n})} g_n(y) 2M \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

přičemž jsme využili komutativitu konvoluce (Věta 2(a)).

(b) Podle Věty 7(e) existuje $A \subset \mathbb{R}^d$ taková, že $\mu(A) = 0$ a všechny funkce $f * g_n$ jsou definovány na $\mathbb{R}^d \setminus A$. Podobně jako v případě (a) a s využitím Jensenovy nerovnosti[2] ([R, Věta 3.3]) dostáváme, že pro každé $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$ platí, že

$$\left|f * g_n(x) - f(x)\right|^p = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x-y) - f(x)\big) g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right|^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Díky Fubiniově větě (a Lemmatu 3(b)) je tedy

$$\begin{aligned}
\|f * g_n - f\|_p^p &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\mu(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(-y) g_n(y)\,\mathrm{d}\mu = \varphi * g_n(0),
\end{aligned}$$

kde $\varphi(y) = \|\tau_{-y} f - f\|_p^p$. Funkce φ je zjevně omezená a díky Větě 6 je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}^d$, a tedy $\varphi * g_n(0) \to \varphi(0) = 0$ dle (a).

□

DŮSLEDEK 15. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $1 \leq p < \infty$. Pak množina $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_p(\Omega, \mu)$ (ve smyslu restrikce na Ω).*

DŮKAZ. Nechť $f \in L_p(\Omega)$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje kompaktní $K \subset \Omega$ taková, že $\delta = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) > 0$ a $\|f - \chi_K f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ (stačí použít Důsledek 16.17 na $K_n = \{x \in B_{\mathbb{R}^d}(0,n);\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$). Položme $h = \chi_K f$. Vezměme nějakou nezápornou funkci $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $\operatorname{supp} g \subset B(0,\delta)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu = 1$ a položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak podle Věty 14(b) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|h - h * g_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, a tedy $\|f - h * g_n\|_p \leq \|f - h\|_p + \|h - h * g_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Podle Věty 12 je $h * g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a podle Věty 7(b) je $\operatorname{supp} h * g_n \subset K + B(0,\delta) \subset \Omega$, tedy $h * g_n \in \mathcal{D}(\Omega)$.

□

Následující příklad se nám bude hodit později.

PŘÍKLAD 16. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ a $b - a \leq d - c$. Pak

$$\chi_{(a,b)} * \chi_{(c,d)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, a+c], \\ x - (a+c) & \text{pro } x \in [a+c, b+c], \\ b - a & \text{pro } x \in [b+c, a+d], \\ b + d - x & \text{pro } x \in [a+d, b+d], \\ 0 & \text{pro } x \in [b+d, +\infty). \end{cases}$$

[2] Johan Willem Ludwig Valdemar Jensen (1906)

Vskutku, $\chi_{(a,b)} * \chi_{(c,d)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}(y)\chi_{(c,d)}(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_a^b \chi_{(c,d)}(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{x-b}^{x-a} \chi_{(c,d)}\,\mathrm{d}\lambda$, odkud již uvedený vzorec snadno plyne.

$\diamond$

2. Fourierova transformace

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$. V tomto oddílu budeme konvoluci funkcí na $\mathbb{R}^d$ rozumět vzhledem k míře μ_d.

Fourierova transformace je základním příkladem transformace Gelfandovy, kterou se budeme zaobírat v oddílu 10.5 (vizte též kapitolu 14). Umožňuje reprezentovat funkce z $L_1(\mu_d)$ pomocí funkcí z $C_0(\mathbb{R}^d)$ takovým způsobem, že diferenciální vlastnosti se přenášejí na vlastnosti algebraické. To je fundamentálním rysem celé teorie, neboť tím získáváme nástroj pro převádění (parciálních) diferenciálních rovnic na rovnice algebraické. Na prostoru $L_2(\mu_d)$ je pak možno realizovat Fourierovu transformaci jakožto izometrický lineární operátor na $L_2(\mu_d)$ (takzvanou Fourierovu-Plancherelovu transformaci), který slouží jako základní „transformace souřadnic" na tomto prostoru.

DEFINICE 17. Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak Fourierovou transformací funkce f rozumíme funkci $\widehat{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definovanou jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_d(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}^d$.

PŘÍKLAD 18. Nechť $r > 0$. Pak $\widehat{\chi_{(-r,r)}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin rt}{t}$ pro $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ a $\widehat{\chi_{(-r,r)}}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}r$. Vskutku, $\widehat{\chi_{(-r,r)}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^r e^{-itx}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-r}^r \big(\cos(-tx) + i\,\sin(-tx)\big)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{\sin tx}{t}]_{-r}^r$ (díky lichosti funkce sin), odkud již výsledek ihned plyne.

$\diamond$

Dříve, než se podíváme na vlastnosti Fourierovy transformace, zavedeme ještě několik užitečných pojmů.

DEFINICE 19. Prostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d) = C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Z věty o stejnoměrné limitě posloupnosti spojitých funkcí plyne, že $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ je uzavřený podprostor Banachova prostoru $\ell_\infty(\mathbb{R}^d)$, a tedy je to Banachův prostor.

DEFINICE 20. Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Snadno se nahlédne, že $C_0(\mathbb{R}^d)$ je uzavřeným podprostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, tedy je to Banachův prostor. Na druhou stranu, $C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ je podprostorem $C_0(\mathbb{R}^d)$, a není příliš obtížné si rozmyslet, že je ve skutečnosti hustým podprostorem. (Stačí funkci z $C_0(\mathbb{R}^d)$ vynásobit funkcí $x \mapsto 1-\min\{\operatorname{dist}(x, B(0,R)), 1\}$.) Příkladem funkce z $C_0(\mathbb{R}^d)$, která nemá kompaktní nosič, je $\frac{1}{1+\|x\|^2}$.

Intuitivně lze říci, že funkce z $C_0(\mathbb{R}^d)$ „jdou v nekonečnu k nule". Přesněji, je-li $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

LEMMA 21 (G. F. B. Riemann (1853), H. Lebesgue (1903)). *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak*

$$\lim_{\|t\|\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = 0.$$

DŮKAZ. Protože $e^{-i\pi} = -1$, pro $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ máme díky větě o substituci

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} -f(x)e^{-i\left\langle t,x+\frac{\pi}{\|t\|^2}t\right\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} -f\Big(u - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)e^{-i\langle t,u\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u).$$

Odtud

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)\Big)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left|f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)\right|\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{2}\left\|\tau_0 f - \tau_{\pi t/\|t\|^2} f\right\|_1.\end{aligned}$$

Tvrzení lemmatu nyní plyne z Věty 6.

□

V této kapitole budeme pro funkci f definovanou na $\mathbb{R}^d$ značit její „otočení" symbolem $\tilde{f}$, tj. $\tilde{f}(x) = f(-x)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

VĚTA 22. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru $L_1(\mu_d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) Nechť $y \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a naopak pro funkci $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle}f(x)$ platí $\widehat{h} = \tau_y \widehat{f}$.

(c) Je-li $c \neq 0$ a $h(x) = f(\frac{x}{c})$, pak $\widehat{h}(t) = |c|^d \widehat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$. Speciálně, $\widehat{\tilde{f}} = \tilde{\widehat{f}}$.

(d) $\widehat{\overline{\tilde{f}}} = \overline{\widehat{f}}$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_j f(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(g) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

(h) $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d$.

Pro důkaz tvrzení (e) budeme potřebovat následující tři lemmata:

LEMMA 23. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f \in L_1([a, +\infty))$. Předpokládejme dále, že f je absolutně spojitá na každém intervalu $[a, b]$, $b > a$, nebo že f' existuje vlastní na celém $[a, +\infty)$. Je-li $f' \in L_1([a, +\infty))$, pak* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

DŮKAZ. Uvědomme si, že podle našich předpokladů platí $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ pro každé $x \in (a, +\infty)$ (vizte např. [R, Věty 7.20 a 7.21]). Z Heineovy věty a Důsledku 16.17 plyne, že $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a) + \int_a^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$, speciálně tedy limita existuje. Protože $f \in L_1([a, +\infty))$, nezbývá, než aby byla nulová.

□

LEMMA 24. *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, f, g mají (vlastní) derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$ a platí $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, g je omezená a g' je spojitá a omezená. Pak $\int_{\mathbb{R}} f'g\,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}} fg'\,\mathrm{d}\lambda$.*

DŮKAZ. Podle předpokladu je funkce fg' spojitá na $\mathbb{R}$ a má konvergentní Lebesgueův integrál. Tedy existuje i konečný Newtonův integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. Dále díky Lemmatu 23 platí $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Podle věty o integraci per partes pro Newtonův integrál tedy máme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrál zcela vlevo dle předpokladu konverguje i jako Lebesgueův integrál. Rovnost tedy platí i pro integrály v Lebesgueově smyslu.

□

LEMMA 25. *Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je omezená a $j \in \{1, \dots, d\}$. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ existují všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_b(\mathbb{R}^d)$, pak $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} g \, d\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial g}{\partial x_j} \, d\lambda$.*

DŮKAZ. Označme $F(u, v) = f(u_1, \dots, u_{j-1}, v, u_j, \dots, u_{d-1})$, $G(u, v) = g(u_1, \dots, u_{j-1}, v, u_j, \dots, u_{d-1})$, $F_1(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(u_1, \dots, u_{j-1}, v, u_j, \dots, u_{d-1})$ a $G_1(u, v) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(u_1, \dots, u_{j-1}, v, u_j, \dots, u_{d-1})$ pro $u \in \mathbb{R}^{d-1}$, $v \in \mathbb{R}$. Dle předpokladu je $F, F_1 \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Podle Fubiniovy věty tedy existují množiny $A, B \subset \mathbb{R}^{d-1}$ míry 0 takové, že $v \mapsto F(u, v) \in L_1(\mathbb{R})$ pro všechna $u \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus A$ a $v \mapsto F_1(u, v) \in L_1(\mathbb{R})$ pro všechna $u \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus B$. Položme $E = A \cup B$. Pak díky Fubiniově větě máme

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) g(x) \, d\lambda_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} F_1(u, v) G(u, v) \, d\lambda_1(v) \right) d\lambda_{d-1}(u) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1} \setminus E} \left(\int_{\mathbb{R}} F_1(u, v) G(u, v) \, d\lambda_1(v) \right) d\lambda_{d-1}(u) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1} \setminus E} \left(-\int_{\mathbb{R}} F(u, v) G_1(u, v) \, d\lambda_1(v) \right) d\lambda_{d-1}(u) = \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(u, v) G_1(u, v) \, d\lambda_1(v) \right) d\lambda_{d-1}(u) = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) \, d\lambda_d(x),
\end{aligned}$$

přičemž druhá a čtvrtá rovnost platí díky tomu, že E má nulovou míru, a třetí rovnost plyne z Lemmatu 24.

□

DŮKAZ VĚTY 22. (a) Nechť $t \in \mathbb{R}^d$ a $\{t_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}^d$ konvergující k t. Pak díky spojitosti skalárního součinu pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí $f(x)e^{-i\langle t_n, x\rangle} \to f(x)e^{-i\langle t, x\rangle}$. Protože $|f(x)e^{-i\langle t_n, x\rangle}| = |f(x)|$, je podle Lebesgueovy věty $\lim \widehat{f}(t_n) = \lim \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t_n, x\rangle} \, d\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t, x\rangle} \, d\mu_d = \widehat{f}(t)$. Tedy $\widehat{f}$ je spojitá v t. Dále zjevně $|\widehat{f}(t)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, d\mu_d(x) = \|f\|_1$. Fakt, že $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ nyní plyne z Lemmatu 21. Konečně, linearita Fourierovy transformace je zřejmá z definice.

(b) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{\tau_y f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)e^{-i\langle t, x\rangle} \, d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-i\langle t, u\rangle} e^{-i\langle t, y\rangle} \, d\mu_d(u) = e^{-i\langle y, t\rangle} \widehat{f}(t).$$

Dále

$$\widehat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle y, x\rangle} f(x)e^{-i\langle t, x\rangle} \, d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t - y, x\rangle} \, d\mu_d(x) = \widehat{f}(t - y) = \tau_y \widehat{f}(t).$$

(c) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\tfrac{x}{c}\right)e^{-i\langle t, x\rangle} \, d\mu_d(x) = |c|^d \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-i\langle t, cu\rangle} \, d\mu_d(u) = |c|^d \widehat{f}(ct).$$

(d) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{\overline{\tilde{f}}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)} e^{-i\langle t, x\rangle} \, d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)e^{-i\langle t, -x\rangle}} \, d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)e^{-i\langle t, x\rangle}} \, d\mu_d(x) = \overline{\widehat{f}(t)}.$$

(e) Díky Lemmatu 25 máme

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-i\langle t, x\rangle} \, d\lambda(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-it_j)e^{-i\langle t, x\rangle} \, d\lambda(x) = it_j \widehat{f}(t).$$

(f) Zvolme pevně $t \in \mathbb{R}^d$ a položme $\varphi(u) = \widehat{f}(t + ue_j)$ pro $u \in \mathbb{R}$. Dále položme $F(u, x) = f(x)e^{-i\langle t + ue_j, x\rangle}$ pro $u \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}^d$ a všimněme si, že $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^d} F(u, x) \, d\mu_d(x)$. Pak pro každé $u \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto F(u, x)$ měřitelná. Dále pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $u \in \mathbb{R}$ je $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x) = -ix_j f(x)e^{-i\langle t + ue_j, x\rangle} = h(x)e^{-i\langle t + ue_j, x\rangle}$, takže $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(u, x)\right| = |h(x)|$. Dle předpokladu je tedy h integrovatelná majoranta. Konečně, zjevně $x \mapsto F(0,x) \in L_1(\mu_d)$. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru tak máme $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial u}(0,x)\, \mathrm{d}\mu_d(x) = \widehat{h}(t)$.

(g) Zvolme pevně libovolné $t \in \mathbb{R}^d$. Dle Lemmatu 3(b) je funkce $F(x,y) = f(y)g(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle}$ měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. Dále $|F(x,y)| = |f(y)||g(x-y)|$ a aplikujeme-li Lemma 4 na $|F|$, dostaneme, že $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Můžeme tedy použít Fubiniovu větu a substituci $\varphi(u) = u + y$ k výpočtu

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} f * g(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\, \mathrm{d}\mu_d(y) \bigg) e^{-i\langle t,x\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) e^{-i\langle t,x\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(x) \bigg)\, \mathrm{d}\mu_d(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-i\langle t,u+y\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(u) \bigg)\, \mathrm{d}\mu_d(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle t,y\rangle} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-i\langle t,u\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(u) \bigg)\, \mathrm{d}\mu_d(y) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t).\end{aligned}$$

(h) Položme $F(x,y) = f(y)g(x)e^{-i\langle x,y\rangle}$. Pak F je dle Lemmatu 3(b) měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. Máme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)|\, \mathrm{d}\mu_d(x) \bigg)\, \mathrm{d}\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\, \mathrm{d}\mu_d(x) \bigg)\, \mathrm{d}\mu_d(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty,$$

podle Fubiniovy věty, tedy $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Proto můžeme použít Fubiniovu větu ještě jednou k výpočtu

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) g(x)\, \mathrm{d}\mu_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(y) \bigg) g(x)\, \mathrm{d}\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle} g(x)\, \mathrm{d}\mu_d(x) \bigg)\, \mathrm{d}\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\widehat{g}(y)\, \mathrm{d}\mu_d(y).\end{aligned}$$

□

Pro budoucí použití se nám bude hodit nalézt nějakou omezenou spojitou funkci, jejíž Fourierova transformace je regularizačním jádrem.

PŘÍKLAD 26. Definujme funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$. Pak $g \in L_1(\mu_d)$,

$$\widehat{g}(t) = \big(\tfrac{2}{\pi}\big)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+t_j^2},$$

funkce $\widehat{g}$ je nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}\, \mathrm{d}\mu_d = 1$.

Nezápornost funkce $\widehat{g}$ je zjevná a její integrál snadno spočteme pomocí Fubiniovy věty. Stejně snadno pomocí Fubiniovy věty odvodíme, že $g \in L_1(\mu_d)$. Dokažme tedy platnost vzorce. Nechť nejprve $d = 1$. Zvolme $t \in \mathbb{R}$ pevné. Funkce g je sudá, proto

$$\widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-itx}\, \mathrm{d}\mu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\big(\cos(-tx) + i\sin(-tx)\big)\, \mathrm{d}\mu_1(x) = 2\int_{[0,+\infty)} e^{-x}\cos(tx)\, \mathrm{d}\mu_1(x).$$

Pomocí integrace per partes snadno odvodíme, že $\int e^{-x}\cos(tx)\, \mathrm{d}x \overset{c}{=} e^{-x} \cdot \frac{t\sin(tx)-\cos(tx)}{1+t^2}$ na $\mathbb{R}$. Odtud dostáváme, že $\widehat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\int_0^\infty e^{-x}\cos(tx)\, \mathrm{d}x = \big(\frac{2}{\pi}\big)^{1/2} \frac{1}{1+t^2}$.

Je-li nyní $d > 1$, pak díky Fubiniově větě a případu $d = 1$ dostáváme

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|} e^{-i\sum_{j=1}^d t_j x_j}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \big(e^{-|x_j|} e^{-it_j x_j}\big)\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^d \big(e^{-|x_j|} e^{-it_j x_j}\big)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\cdots \mathrm{d}\mu_1(x_d) = \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} \big(e^{-|x_j|} e^{-it_j x_j}\big)\,\mathrm{d}\mu_1(x_j) = \\ &= \prod_{j=1}^d \big(\tfrac{2}{\pi}\big)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+t_j^2} = \big(\tfrac{2}{\pi}\big)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+t_j^2}.\end{aligned}$$

◇

LEMMA 27. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$. Položme $g_n(x) = n^d \widehat{g}(-nx)$ a $h_n(x) = g(\frac{x}{n})$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle t,x\rangle} h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

DŮKAZ. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Protože g_n je omezená (Věta 22(a)), je $f * g_n$ definována na celém $\mathbb{R}^d$ (Věta 7(a)). Pro libovolné $x \in \mathbb{R}^d$ tedy máme

$$\begin{aligned} f * g_n(x) &= g_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g_n(y)\,\mathrm{d}\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) n^d \widehat{g}(-ny)\,\mathrm{d}\mu_d(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+t) n^d \widehat{g}(nt)\,\mathrm{d}\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_{-x} f(t) \widehat{h_n}(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\tau_{-x} f}(t) h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t),\end{aligned}$$

přičemž při výpočtu jsme použili postupně substituci $\varphi(y) = -y$ a Větu 22(c), (h) a (b).

□

VĚTA 28 (o inverzi). *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

DŮKAZ. Nechť g je funkce z Příkladu 26. Pak $x \mapsto \widehat{g}(-x)$ je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$. Všimněme si též, že $g(0) = 1$. Nechť g_n a h_n jsou funkce z Lemmatu 27. Podle Lemmatu 27 pro libovolné $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t)$. Pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ je $h_n(t) \to g(0) = 1$. Protože $|\widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} h_n(t)| \leq |\widehat{f}(t)|$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a dle předpokladu $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, můžeme použít Lebesgueovu větu. Dostáváme tak $f * g_n(x) \to \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Na druhou stranu, podle Věty 14(b) platí, že $f * g_n \to f$ v $L_1(\mu_d)$. Existuje tedy podposloupnost $\{g_{n_k}\}$ taková, že $f * g_{n_k}(x) \to f(x)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ ([R, Věta 3.12]). Z jednoznačnosti limity pak dostáváme, že $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$.

Předpokládejme nyní, že je f navíc spojitá. Protože $x \mapsto \widehat{\widehat{f}}(-x)$ je spojitá dle Věty 22(a) a $f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$ na husté podmnožině $\mathbb{R}^d$, musejí se tyto funkce rovnat všude (Věta 16.3).

□

DŮSLEDEK 29. *Fourierova transformace $\mathcal{F} : L_1(\mu_d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ je prosté zobrazení. Je-li $g \in L_1(\mu_d)$ spojitá a $\widehat{g} \in L_1(\mu_d)$, pak $g \in \operatorname{Rng} \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}(g) = \widetilde{\widehat{g}}$.*

DŮKAZ. Je-li $\mathcal{F}(f) = 0$, pak dle věty o inverzi je $f(x) = 0$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Tedy $\operatorname{Ker} \mathcal{F} = \{0\}$. Máme-li nyní g jako v předpokladech, pak dle věty o inverzi a Věty 22(c) je $g = \mathcal{F}(\widetilde{\widehat{g}})$, odkud již tvrzení okamžitě plyne.

□

DŮSLEDEK 30. *Jsou-li* $f, g \in L_1(\mu_d)$ *takové, že* $\widehat{f}, \widehat{g}, fg, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$*, pak* $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

DŮKAZ. Položme $h = \widehat{f} * \widehat{g}$. Protože $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$ a $\widehat{g}$ je omezená (Věta 22(a)), je h definovaná a spojitá na $\mathbb{R}^d$ a navíc $h \in L_1(\mu_d)$ (Věta 7(a), (d)). Dále je $\widehat{h} = \widehat{\widehat{f} * \widehat{g}} = \widehat{\widehat{f}}\widehat{\widehat{g}}$ (Věta 22(g)), a tedy $\widehat{h}(t) = f(-t)g(-t) = fg(-t)$ pro s. v. $t \in \mathbb{R}^d$ (Věta 28). Dle předpokladu je tak $\widehat{h} \in L_1(\mu_d)$ a opětovnou aplikací věty o inverzi spolu s Větou 22(c) dostáváme, že $h = \widehat{\widehat{\widehat{h}}} = \widehat{\widehat{h}} = \widehat{fg}$.

□

PŘÍKLAD 31. Nechť $\mathcal{F}: L_1(\mu_1) \to C_0(\mathbb{R})$ je Fourierova transformace. Pak inverzní Fourierova transformace $\mathcal{F}^{-1}$ není spojitá. Speciálně, díky Důsledku 3.7 tedy $\mathcal{F}$ není na.

Vskutku, položme $f_n = \chi_{(-n,n)}$ a $g_n = f_1 * f_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dle Příkladu 16 je $g_n \in C_0(\mathbb{R}) \cap L_1(\mu_1)$ a $\|g_n\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$. Dále je $\widehat{g_n}(t) = \widehat{f_1}(t)\widehat{f_n}(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin t \sin nt}{t^2}$ dle Věty 22(g) a Příkladu 18, takže $\widehat{g_n} \in L_1(\mu_1)$. Podle Důsledku 29 tak dostáváme, že $\mathcal{F}^{-1}(g_n)(x) = \widetilde{\widehat{g_n}}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin x \sin nx}{x^2}$. Tedy

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}^{-1}(g_n)\|_1 &= \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin x \sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\mu_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin x \sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda \geq \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x \sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda \geq \\ &\geq \sqrt{\frac{2}{\pi^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2}{\pi}x|\sin nx|}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda = \sqrt{\frac{2^3}{\pi^5}}\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin y|}{y}\,\mathrm{d}\lambda \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,\end{aligned}$$

což znamená, že lineární zobrazení $\mathcal{F}^{-1}$ není spojité.

◇

VĚTA 32 (Michel Plancherel, 1910). *Existuje právě jedna lineární izometrie* $F: L_2(\mu_d) \to L_2(\mu_d)$ *na taková, že* $F(f) = \widehat{f}$ *pro každou* $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.

DŮKAZ. Pro zkrácení zápisu budeme v tomto důkazu používat zkratky $L_2 = L_2(\mu_d)$ a $L_1 = L_1(\mu_d)$. Nechť $u \in L_2 \cap L_1$. Položme $v(x) = \overline{u(-x)}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $v \in L_2 \cap L_1$, a tedy dle Věty 7(a) a (d) je funkce $f = u * v$ stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_1$. Dále dle Věty 22(g) a (d) platí, že $\widehat{f} = \widehat{u}\,\widehat{v} = \widehat{u}\,\overline{\widehat{u}} = |\widehat{u}|^2 \geq 0$. Nechť g je funkce z Příkladu 26. Pak $x \mapsto \widehat{g}(-x)$ je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$. Nechť g_n a h_n jsou funkce z Lemmatu 27. Funkce h_n jsou nezáporné a snadno nahlédneme, že pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ je posloupnost $\{h_n(t)\}_{n=1}^\infty$ neklesající a konverguje ke $g(0) = 1$. Použijeme-li nyní postupně Větu 14(a), Lemma 27 a Leviovu větu o monotónní konvergenci, dostaneme

$$\begin{aligned}\|u\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\overline{u(y)}\,\mathrm{d}\mu_d(y) = f(0) = \lim_{n\to\infty} f * g_n(0) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}h_n\,\mathrm{d}\mu_d = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{u}|^2\,\mathrm{d}\mu_d = \|\widehat{u}\|_2^2.\end{aligned}$$

Zobrazení $u \mapsto \widehat{u}$ je tedy lineární izometrie z podprostoru $L_2 \cap L_1$ prostoru L_2 do prostoru L_2. Podprostor $L_2 \cap L_1$ je ovšem v prostoru L_2 hustý (obsahuje např. jednoduché funkce nulové mimo množinu konečné míry, dále vizte např. [R, Věta 3.13]; alternativně lze použít Důsledek 15), a tedy podle Věty 1.62 existuje jednoznačné rozšíření tohoto zobrazení na zobrazení $F \in \mathcal{L}(L_2, L_2)$, které je izometrie do.

Ukažme nyní, že F je na. Podle Tvrzení 1.60(c) je $\operatorname{Rng} F$ uzavřený v L_2. Pokud $\operatorname{Rng} F \neq L_2$, pak podle Hahnovy-Banachovy věty (Důsledek 2.7) existuje $\varphi \in L_2^*$ takový, že $\|\varphi\| = 1$ a $\varphi = 0$ na $\operatorname{Rng} F$. Podle Věty 2.15 existuje $f \in L_2$ takové, že $\varphi = \varphi_f$. Speciálně tedy platí $\varphi_f(\widehat{u}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u}f = 0$ pro každou $u \in L_2 \cap L_1$. Z hustoty $L_2 \cap L_1$ v L_2 plyne existence posloupnosti $\{f_n\} \subset L_2 \cap L_1$ takové, že $f_n \to f$ v L_2. Zvolme libovolně $u \in L_2 \cap L_1$. Protože $u, \widehat{u}, F(f) \in L_2$, je $\varphi_u, \varphi_{\widehat{u}}, \varphi_{F(f)} \in L_2^*$. Máme tedy $\varphi_{\widehat{u}}(f_n) \to \varphi_{\widehat{u}}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{u}\,\mathrm{d}\mu_d = 0$. Ze spojitosti F plyne, že $\widehat{f_n} = F(f_n) \to F(f)$. Dle Věty 22(h) tedy máme

$$\begin{aligned}\varphi_{F(f)}(u) &= \int_{\mathbb{R}^d} uF(f)\,\mathrm{d}\mu_d = \varphi_u(F(f)) = \lim_{n\to\infty}\varphi_u(\widehat{f_n}) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f_n}u\,\mathrm{d}\mu_d = \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n\widehat{u}\,\mathrm{d}\mu_d = \lim_{n\to\infty}\varphi_{\widehat{u}}(f_n) = 0.\end{aligned}$$

Protože to platí pro každé u z husté podmnožiny L_2, plyne odtud, že $F(f) = 0$, a z prostoty F dostáváme $f = 0$, což je spor s nenulovostí φ_f.

□

Poznamenejme, že zatímco Fourierova transformace funkce z $L_1(\mu_d)$ je určena jakožto funkce definovaná v každém bodě $\mathbb{R}^d$, transformace F z Plancherelovy věty určuje „Fourierův obraz" pouze jakožto prvek $L_2(\mu_d)$, tedy třídu ekvivalence funkcí na $\mathbb{R}^d$ rovných skoro všude.

Následující příklad ukazuje, jak lze v některých případech nalézt Fourierovu-Plancherelovu transformaci funkce $f \in L_2(\mu_1)$.

PŘÍKLAD 33. Nechť $f \in L_2(\mu_1)$. Označme $f_n = \chi_{(-n,n)} f$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \in L_1(\mu_1) \cap L_2(\mu_1)$, existuje tedy Fourierova transformace $\widehat{f_n}$. Předpokládejme, že posloupnost funkcí $\{\widehat{f_n}\}$ konverguje skoro všude k nějaké funkci g. Pak $F(f) = g$, kde F značí rozšíření Fourierovy transformace na $L_2(\mu_1)$ dané Větou 32. Vskutku, z Lebesgueovy věty plyne, že $f_n \to f$ v $L_2(\mu_1)$. Díky spojitosti F tedy $F(f_n) \to F(f)$ v $L_2(\mu_1)$. Proto existuje vybraná posloupnost $\{f_{n_k}\}$ taková, že $F(f_{n_k}) \to F(f)$ skoro všude. Ale $F(f_{n_k}) = \widehat{f_{n_k}}$, což jsou funkce konvergující dle předpokladu skoro všude ke g. Tedy $F(f) = g$.

◇

PŘÍKLAD 34. Nechť $f \in L_2(\mathbb{R})$ má omezený nosič (zde míníme f jako funkci definovanou bodově). Pak $\widehat{f}$ má omezený nosič, právě když $f = 0$ s. v.

Vskutku, nejprve si uvědomme, že za daných předpokladů je $f \in L_1(\mathbb{R})$, takže Fourierova transformace funkce f je definována. Nechť $r > 1$ je takové, že $\operatorname{supp} f \subset [-(r-1), r-1]$. Označme h prvek Hilbertova prostoru $L_2([-r,r])$, který je reprezentován funkcí $f\restriction_{[-r,r]}$, a dále označme $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2r}} e^{i\frac{\pi}{r}nx}$. Systém $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $L_2([-r,r])$ (vizte též Příklad 1.116). Protože $\langle h, g_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2r}} \int_{-r}^{r} f(x) e^{-i\frac{\pi}{r}nx}\,\mathrm{d}\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\, \widehat{f}(\frac{\pi}{r}n)$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$, plyne odtud, že $h = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\frac{\pi}{r}n) g_n$.

Předpokládáme-li nyní, že $\widehat{f}$ má omezený nosič, pak existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $h = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(\frac{\pi}{r}n) g_n$ Označíme-li $g(z) = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(\frac{\pi}{r}n) g_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$, pak $f = g$ s. v. na $[-r,r]$. Speciálně, $g = 0$ s. v. na $(r-1, r)$. Funkce g je ovšem holomorfní, a protože je nulová na omezené nekonečné množině (tj. na množině mající hromadný bod), je $g = 0$.

◇

Kapitola 16

Dodatek

1. Funkce více proměnných

VĚTA 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že funkce $D^\alpha f$ jsou spojité na Ω pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ splňující $|\alpha| \le k$. Pak $f \in C^k(\Omega)$.*

DŮKAZ. Použijeme indukci dle k. Pro $k = 1$ se jedná přímo o definici prostoru $C^1(\Omega)$. Nechť nyní $k > 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro menší řády. Pak z indukčního předpokladu plyne, že $f \in C^{k-1}(\Omega)$. Musíme ukázat, že všechny parciální derivace k-tého řádu funkce f jsou spojité na Ω. Nechť tedy $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$. Pro zkrácení zápisu budeme používat následující symboliku: $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$ apod. Nalezněme permutaci π množiny $\{1, \dots, k\}$ takovou, že $i_{\pi(1)} \le i_{\pi(2)} \le \cdots \le i_{\pi(k)}$, a uvědomme si, že existuje multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takový, že $\partial_{i_{\pi(1)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f = D^\alpha f$. Rozlišíme dva případy. Nejprve předpokládejme, že $\pi(1) = 1$. Protože $f \in C^{k-1}(\Omega)$, platí

$$\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$. Odtud

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f\big)(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f\big)(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce.

Nechť nyní $\pi(1) > 1$ a nechť $\sigma\colon \{1, \dots, k-2\} \to \{2, \dots, k\} \setminus \{\pi(1)\}$ je nějaká bijekce. Protože $f \in C^{k-1}(\Omega)$, platí

$$\partial_{i_1}\partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f(x) = \partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f(x) \quad \text{a} \tag{1}$$

$$\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f(x) \tag{2}$$

pro každé $x \in \Omega$. Označme $g = \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f$. Pak $g \in C^1(\Omega)$ a díky (1) platí

$$\partial_{i_{\pi(1)}}\partial_{i_1} g(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_1}\partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f\big)(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f\big)(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce. Podle věty o záměně druhých parciálních derivací (viz např. [Z, Věta 2.87]) tedy platí $\partial_{i_1}\partial_{i_{\pi(1)}} g(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\partial_{i_1} g(x) = D^\alpha f(x)$ pro každé $x \in \Omega$. Odtud a s pomocí (2) pak dostaneme

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f\big)(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_{\pi(1)}}\partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f\big)(x) = \partial_{i_1}\partial_{i_{\pi(1)}} g(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce.

□

■■■[potřebujeme větu o lokálně stejnoměrné konvergenci $D^\alpha f_n$ na $\mathbb{R}^n$]

2. Metrické prostory

VĚTA 2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Podmnožina $\mathbb{C}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z obecné věty o kompaktních metrických prostorech.

$\Leftarrow$ Definujme zobrazení $f : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_2)$ předpisem

$$f(z_1, \dots, z_n) = (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n).$$

Snadno je vidět, že f je bijekce. Dále

$$\|(z_1,\ldots,z_n)-(y_1,\ldots,y_n)\|_2^2 = \|(z_1-y_1,\ldots,z_n-y_n)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\big((\mathrm{Re}(z_i-y_i))^2+(\mathrm{Im}(z_i-y_i))^2\big) = \|f(z_1-y_1,\ldots,z_n-y_n)\|_2^2 =$$

$$= \|f(z_1,\ldots,z_n)-f(y_1,\ldots,y_n)\|_2^2,$$

tedy f je izometrické zobrazení. Speciálně f je homeomorfismus, který zobrazuje omezené množiny na omezené množiny. Odtud již tvrzení plyne.

□

VĚTA 3. *Nechť P a Q jsou metrické prostory, $f, g\colon P\to Q$ jsou spojitá zobrazení a $M\subset P$ je hustá v P. Jestliže $f=g$ na M, pak $f=g$ na celém P.*

DŮKAZ. Zvolme $x\in P$. Pak z hustoty M plyne existence posloupnosti $\{x_n\}\subset M$ splňující $x_n\to x$. Tedy $f(x)=\lim f(x_n)=\lim g(x_n)=g(x)$.

□

FAKT 4. *Nechť (P,ρ) je metrický prostor a $A\subset P$. Pak funkce $x\mapsto \mathrm{dist}(x,A)$ je stejnoměrně spojitá na P.*

DŮKAZ. Zvolme $\varepsilon>0$. Nechť $x,y\in P$, $\rho(x,y)<\frac{\varepsilon}{2}$. Pak existuje $a\in A$ takové, že $\rho(x,a)<\mathrm{dist}(x,A)+\frac{\varepsilon}{2}$. Pak $\mathrm{dist}(y,A)-\mathrm{dist}(x,A)<\rho(y,a)-\rho(x,a)+\frac{\varepsilon}{2}\le\rho(x,y)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Opačnou nerovnost obdržíme snadno záměnou x za y.

□

LEMMA 5. *Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $K\subset P$ je kompaktní a $K\subset G\subset P$ je otevřená. Pak* $\mathrm{dist}(K,P\setminus G)>0$.

DŮKAZ. Dle Faktu 4 je funkce $x\mapsto\mathrm{dist}(x,P\setminus G)$ spojitá na P, nabývá tedy na kompaktu K minima, např. v bodě $y\in K$. Pak $\mathrm{dist}(K,P\setminus G)=\mathrm{dist}(y,P\setminus G)>0$, neboť $P\setminus G$ je uzavřená a $y\notin P\setminus G$.

□

VĚTA 6. *Součin $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ úplných metrických prostorů $X_1,\ldots,X_n$ je též úplný.*

DŮKAZ. Nechť $\rho_1,\ldots,\rho_n$ jsou příslušné metriky na $X_1,\ldots,X_n$. Označme $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ a připomeňme, že součinová metrika je dána vzorcem $\rho(x,y)=\max_{i=1,\ldots,n}\{\rho_i(x(i),y(i))\}$ pro prvky $x,y\in X$, $x=(x(i))_{i=1}^n$, $y=(y(i))_{i=1}^n$. Nechť $\{x_k\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Pro každé $i\in\{1,\ldots,n\}$ a $k,l\in\mathbb{N}$ máme $\rho_i(x_k(i),x_l(i))\le\rho(x_k,x_l)$, tedy pro každé $i\in\{1,\ldots,n\}$ je posloupnost $\{x_k(i)\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská v X_i. Z úplnosti X_i plyne existence $x(i)\in X_i$ takového, že $\lim_k x_k(i)=x(i)$ v prostoru X_i. Položme $x=(x(1),\ldots,x(n))\in X$. Pak zjevně $x_n\to x$ v X.

□

VĚTA 7. *Nechť (P,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $f\colon P\to Q$, $A\subset P$ a $a\in A'$. Pak limita $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ existuje, právě když je splněna následující (Bolzanova-Cauchyova) podmínka:*

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x,y\in(U(a,\delta)\setminus\{a\})\cap A\colon \sigma(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je téměř zřejmá.

$\Leftarrow$ Protože $a\in A'$, existuje posloupnost $\{x_n\}\subset A\setminus\{a\}$ taková, že $x_n\to a$. Snadno ověříme, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská: Zvolme $\varepsilon>0$. Nechť $\delta>0$ je příslušné δ z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $x_n\in U(a,\delta)$ pro každé $n\ge n_0$. Tedy $\sigma(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$ kdykoli $m,n\ge n_0$. Protože prostor Q je úplný, existuje $y=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\in Q$. Tvrdíme, že $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=y$:

Zvolme libovolné $\varepsilon>0$. Pak existuje $\delta>0$ takové, že $\sigma(f(u),f(v))<\frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $u,v\in(U(a,\delta)\setminus\{a\})\cap A$. Dále existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $x_n\in U(a,\delta)$ pro každé $n\ge n_0$, a $n_1\ge n_0$ takové, že

$\sigma(f(x_n), y) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $n \geq n_1$. Tedy $\sigma(f(x), y) \leq \sigma(f(x), f(x_{n_1})) + \sigma(f(x_{n_1}), y) < \varepsilon$ pro každé $x \in (U(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap A$.

□

VĚTA 8. *Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f : M \to Q$ je stejnoměrně spojité zobrazení. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité na P.*

DŮKAZ. Zobrazení f zřejmě splňuje v každém bodě $a \in P \setminus M$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku z Věty 7. Můžeme tedy položit $g(a) = f(a)$ pro $a \in M$ a $g(a) = \lim_{x \to a, x \in M} f(x)$ pro $a \in P \setminus M$. Ukážeme, že takto definované zobrazení $g\colon P \to Q$ je stejnoměrně spojité na P: Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u, v \in M$ a $\rho(u, v) < \delta$. Nechť nyní $x, y \in P$, $\rho(x, y) < \frac{\delta}{3}$. Je-li $x \in M$, položme $x_1 = x$. V opačném případě existuje $0 < \delta_1 \leq \frac{\delta}{3}$ takové, že $\sigma(g(x), f(u)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u \in U(x, \delta_1) \cap M$. Z hustoty M tedy plyne existence $x_1 \in M$ splňujícího $\rho(x, x_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(x), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Obdobně obdržíme $y_1 \in M$ splňující $\rho(y, y_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(y), f(y_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\rho(x_1, y_1) \leq \rho(x_1, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_1) < \delta$. Dohromady tedy máme $\sigma(g(x), g(y)) \leq \sigma(g(x), f(x_1)) + \sigma(f(x_1), f(y_1)) + \sigma(f(y_1), g(y)) < \varepsilon$.

Jednoznačnost rozšíření plyne z Věty 3.

□

Následující drobné zobecnění plyne snadno z důkazu Věty 8.

VĚTA 9. *Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f : M \to Q$ je zobrazení stejnoměrně spojité na omezených podmnožinách M. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité na omezených podmnožinách P.*

POZNÁMKA 10. Není obtížné si rozmyslet, že Tietzeova věta o rozšiřování spojitých funkcí platí i pro funkce s komplexními hodnotami: Nechť X je prostor, ve kterém platí Tietzeova věta (např. metrický prostor), $F \subset X$ je uzavřená množina a $f : F \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak $f = u + iv$, kde u, v jsou spojité reálné funkce na F. Podle Tietzeovy věty tedy existují reálné funkce U, V spojité na X rozšiřující u, resp. v. Položme $h = U + iV$. Pak h je spojitá na X a rozšiřuje f. Na závěr položme $R = \sup_{x \in F} |f(x)|$ a definujme $\varphi\colon \mathbb{C} \to B_{\mathbb{C}}(0, R)$ předpisem $\varphi(z) = z$ pro $|z| \leq R$ a $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ pro $|z| > R$. Pak φ je spojité zobrazení (tzv. spojitá retrakce na $B_{\mathbb{C}}(0, R)$). Funkce $g = \varphi \circ h$ je tedy spojitá na X a snadno je vidět, že g rozšiřuje f a $\sup_{x \in X} |g(x)| \leq R$.

Často využijeme následující přímý důsledek Baireovy věty:

DŮSLEDEK 11. *Nechť P je úplný metrický prostor, $\{F_n\} \subset P$ je posloupnost uzavřených množin v P a $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že všechny F_n mají prázdný vnitřek. Pak všechny F_n jsou řídké v P, tedy P je první kategorie (v sobě). Podle Baireovy věty je ovšem P druhé kategorie, což je spor.

□

FAKT 12. *Nechť P je separabilní metrický prostor. Je-li $\mathcal{F}$ libovolný systém uzavřených podmnožin P, pak existuje jeho spočetný podsystém $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ takový, že $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{S}$.*

DŮKAZ. Množina $P \setminus \bigcap \mathcal{F}$ má Lindelöfovu vlastnost, takže existuje spočetný podsystém $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ takový, že $P \setminus \bigcap \mathcal{F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (P \setminus F) = \bigcup_{F \in \mathcal{S}} (P \setminus F) = P \setminus \bigcap \mathcal{S}$.

□

Připomeňme, že pro funkci $f : P \to \mathbb{K}$ na metrickém prostoru P je nosič f definován jako $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in P;\ f(x) \neq 0\}}$.

LEMMA 13. ■■■*[doplnit hausdorffovost do použití] Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor, $F \subset K$ je uzavřená a $U \subset K$, $U \supset F$ je otevřená. Pak platí:*

(a) Existuje otevřená $V \subset K$ splňující $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

(b) Existuje spojitá funkce $f\colon K \to [0,1]$ splňující $f = 1$ na F a $\operatorname{supp} f \subset U$.

DŮKAZ. Důkaz provedeme pouze pro metrický kompaktní prostor K.

(a) Pokud je F prázdná, stačí položit $V = \emptyset$. V případě $U = K$ položíme $V = K$. Ve zbývajících případech platí $d = \operatorname{dist}(F, K \setminus U) > 0$, neboť $x \mapsto \operatorname{dist}(x, K \setminus U)$ je spojitá funkce (Fakt 4), která nabývá minima na kompaktní množině F. Položíme-li tedy

$$V = \left\{x \in K;\ \operatorname{dist}(x, F) < \tfrac{d}{2}\right\},$$

máme $F \subset V \subset \overline{V} \subset \{x \in K;\ \operatorname{dist}(x, F) \leq \frac{d}{2}\} \subset U$, přičemž opět využíváme spojitosti funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, F)$.

(b) Je-li F prázdná, položíme $f = 0$ na K, je-li $U = K$, položíme $f = 1$ na K. Ve zbývajících případech najdeme díky tvrzení (a) otevřenou množinu $V \subset K$ splňující $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Požadovanou funkci pak získáme pomocí formule

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, K \setminus V)}{\operatorname{dist}(x, K \setminus V) + \operatorname{dist}(x, F)} \quad \text{pro } x \in K.$$

Skutečně, podobně jako v (a) odvodíme, že $\operatorname{dist}(F, K \setminus V) > 0$, odkud plyne, že jmenovatel je vždy kladný. Pak f je spojitá díky Faktu 4, zjevně $f = 1$ na K a $\{x \in K;\ f(x) > 0\} \subset V$, tedy $\operatorname{supp} f \subset \overline{V} \subset U$.

□

VĚTA 14 (Spojitý rozklad jednotky). *Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $\{U_1, \dots, U_n\}$ je pokrytí K otevřenými množinami. Pak existují spojité funkce $f_1, \dots, f_n\colon K \to [0,1]$ splňující* $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ *pro $i = 1, \dots, n$ a $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ pro každé $x \in K$.*

DŮKAZ. Pro každý bod $x \in K$ najdeme $i \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $x \in U_i$, a z Lemmatu 13(a) nalezneme otevřenou množinu V_x splňující $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_i$. Díky kompaktnosti existuje konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_m \in K$ tak, že $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_{x_j}$. Definujme uzavřené množiny F_i, $i = 1, \dots, n$ jako

$$F_i = \bigcup \left\{\overline{V_{x_j}};\ \overline{V_{x_j}} \subset U_i\right\}.$$

Pak každá F_i je uzavřená množina splňující $F_i \subset U_i$ a platí $K \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$. Podle Lemmatu 13(b) existují spojité funkce $g_1, \dots, g_n\colon K \to [0,1]$ takové, že $g_i = 1$ na F_i a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Pak $\sum_{i=1}^n g_i > 0$ na K. Pro $i = 1, \dots, n$ a $x \in K$ položme

$$f_i(x) = \frac{g_i(x)}{\sum_{j=1}^n g_j(x)}.$$

Pak f_i je spojitá funkce do $[0,1]$ a $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ pro $i = 1, \dots, n$ a platí $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ pro každé $x \in K$.

□

Nechť P je metrický prostor. Symbol $\operatorname{Bs}(P)$ značí σ-algebru všech borelovských podmnožin P a $\operatorname{Bf_b}(P)$ značí systém všech omezených borelovských funkcí na P.

Následující tvrzení je zjednodušenou verzí klasické Lebesgueovy-Hausdorffovy věty.

VĚTA 15. *Nechť P je metrický prostor. Nechť Φ je nejmenší systém funkcí na P, který obsahuje $C_b(P)$ a je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností. Pak $\Phi = \operatorname{Bf_b}(P)$.*

DŮKAZ. Prostor $\operatorname{Bf_b}(P)$ je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností (bodová limita posloupnosti funkcí měřitelných vzhledem k σ-algebře je opět měřitelná), takže $\Phi \subset \operatorname{Bf_b}(P)$. Abychom dokázali opačnou inkluzi, ukážeme nejprve, že Φ je uzavřený na lineární kombinace a součin. Za tím účelem definujeme pro ordinály $\alpha \in [0, \omega_1)$ množiny Φ_α pomocí transfinitní rekurze. Položme $\Phi_0 = C_b(P)$ a pro $\alpha \in (0, \omega_1)$ definujme

$$\Phi_\alpha = \left\{f\colon P \to \mathbb{K};\ f \text{ je bodovou limitou nějaké omezené posloupnosti } \{f_n\} \subset \textstyle\bigcup_{\beta<\alpha} \Phi_\beta\right\}.$$

Zřejmě $\Phi_\alpha \subset \Phi_\beta$ pro $\alpha \leq \beta < \omega_1$. Pomocí transfinitní indukce snadno nahlédneme, že každá z množin Φ_α je uzavřená na součet, násobek skalárem a součin, a že $\Phi_\alpha \subset \Phi$. Na druhou stranu množina $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Phi_\alpha$ je uzavřená vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností: je-li $f_n \to f$ pro $f_n \in \Phi_{\alpha_n}$, pak

$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$, a tedy $f_n \in \Phi_\beta$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, takže $f \in \Phi_{\beta+1}$. To znamená, že $\Phi = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Phi_\alpha$, a tedy Φ je uzavřený na lineární kombinace a součin.

Dále ukážeme, že $\chi_A \in \Phi$ pro každou borelovskou $A \subset P$. Označme $\mathcal{S} = \{A \in \mathrm{Bs}(P);\ \chi_A \in \Phi\}$. Pak $\mathcal{S}$ je σ-algebra: Zřejmě $\emptyset \in \mathcal{S}$. Je-li $A \in \mathcal{S}$, pak $\chi_{P\setminus A} = 1 - \chi_A \in \Phi$, tedy $P \setminus A \in \mathcal{S}$. Dále pro $A, B \in \mathcal{S}$ je $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B \in \Phi$, odkud plyne, že $\mathcal{S}$ je uzavřená na konečná sjednocení. Jsou-li nyní $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ a $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, pak položíme $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{S}$ a obdržíme, že $\chi_{B_n} \to \chi_A$ bodově, takže $A \in \mathcal{S}$.

Ukážeme-li, že $\mathcal{S}$ obsahuje uzavřené podmnožiny P, dostaneme, že $\mathcal{S} = \mathrm{Bs}(P)$. Nechť $F \subset P$ je uzavřená. Definujme $f_n(x) = (1 - n \operatorname{dist}(x, F))^+$ pro $x \in P$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \in C_b(P)$, posloupnost $\{f_n\}$ je omezená a $f_n \to \chi_F$ bodově, takže $\chi_F \in \Phi_1 \subset \Phi$.

Systém Φ tedy obsahuje všechny jednoduché borelovské funkce na P. Protože každá omezená borelovská funkce je bodovou limitou omezené posloupnosti jednoduchých borelovských funkcí, plyne odtud, že $\mathrm{Bf}_b(P) \subset \Phi$.

□

3. Teorie míry

LEMMA 16. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ a $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory a $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ je součinová σ-algebra na $X \times Y$. Je-li $A \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, pak* $\mathrm{card}\{A^x;\ x \in X\} \le \mathfrak{c}$, *kde $A^x = \{y \in Y;\ (x, y) \in A\}$.*

DŮKAZ. Označme $\mathcal{A} = \big\{A \subset X \times Y;\ \mathrm{card}\{A^x;\ x \in X\} \le \mathfrak{c}\big\}$. Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra. Protože každý měřitelný obdélník zjevně leží v $\mathcal{A}$, plyne odtud, že $\mathcal{S} \times \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$, což dokazuje tvrzení lemmatu.

Platí, že $\{(X \times Y)^x;\ x \in X\} = \{Y\}$, a tedy $X \times Y \in \mathcal{A}$. Dále pro $A \subset X \times Y$ a $x \in X$ je $Y \setminus A^x = (X \times Y \setminus A)^x$. Zobrazení $\Phi\colon M \mapsto Y \setminus M$ tedy zobrazuje $\{A^x;\ x \in X\}$ na $\{(X \times Y \setminus A)^x;\ x \in X\}$, odkud plyne, že $X \times Y \setminus A \in \mathcal{A}$ kdykoli $A \in \mathcal{A}$.

Nechť nyní $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje prosté zobrazení $\psi_n\colon \{A_n^x;\ x \in X\} \to (0, 1)$. Je-li $M \in \big\{\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^x;\ x \in X\big\}$, pak zvolme libovolně $x \in X$ tak, že $M = \big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^x$, a položme $\Psi(M) = \big(\psi_n(A_n^x)\big)_{n=1}^\infty \in (0, 1)^{\mathbb{N}}$. Pak $\Psi\colon \big\{\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^x;\ x \in X\big\} \to (0, 1)^{\mathbb{N}}$ je prosté: Je-li $\Psi(M) = \Psi(N)$, pak existují $x, y \in X$ taková, že $M = \big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^x$, $N = \big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^y$ a $\psi_n(A_n^x) = \psi_n(A_n^y)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z prostory ψ_n dostaneme, že $A_n^x = A_n^y$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že $\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^x = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^x = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^y = \big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)^y$, neboli $M = N$. Odtud již snadno plyne, že $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

□

3.1. Nezáporné míry

Následující tvrzení je přímým důsledkem Lebesgueovy věty o konvergenci (případně zobecněné věty Leviho).

DŮSLEDEK 17. *Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a $E, E_n \subset \Omega$ jsou měřitelné podmnožiny splňující buď $E_n \subset E_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ nebo $E_{n+1} \subset E_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $E = \bigcap_{n=1}^\infty E_n$. Nechť dále $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pak $\|\chi_E f - \chi_{E_n} f\|_p \to 0$. Speciálně, v případě $p = 1$ platí $\int_{E_n} f \,\mathrm{d}\mu \to \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Posloupnost $\{\chi_{E_n} f\}$ konverguje bodově k $\chi_E f$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|\chi_E f - \chi_{E_n} f|^p \le |f|^p$. Podle Lebesgueovy věty tedy $\|\chi_E f - \chi_{E_n} f\|_p^p = \int_\Omega |\chi_E f - \chi_{E_n} f|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0$.

□

VĚTA 18 (Hölderova nerovnost). *Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, $f_1, \dots, f_n$ jsou nezáporné měřitelné funkce na Ω a $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Pak*

$$\int_\Omega f_1 \cdots f_n \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha_n}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_n}.$$

DŮKAZ. Použijeme matematickou indukci dle $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ je nerovnost triviální. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $f_1, \dots, f_{n+1}$ jsou nezáporné měřitelné funkce na Ω a $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} > 0$ splňují $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. Položme $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 0$, $p = \frac{1}{\alpha}$, $q = \frac{1}{\alpha_{n+1}}$, $f = f_1 \cdots f_n$ a $g = f_{n+1}$. Pak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a tedy podle Hölderovy nerovnosti pro f a g máme

$$\int_\Omega f_1 \cdots f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega g^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}} \cdots f_n^{\frac{1}{\alpha}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\alpha} \left(\int_\Omega f_{n+1}^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\alpha_{n+1}}.$$

Položíme-li $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha} > 0$ pro $i = 1, \dots, n$, pak $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$, a tedy dle indukčního předpokladu použitého na funkce $f_1^{\frac{1}{\alpha}}, \dots, f_n^{\frac{1}{\alpha}}$ dostaneme

$$\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}} \cdots f_n^{\frac{1}{\alpha}} \, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta_1}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\beta_1} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta_n}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\beta_n} = \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha_n}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{\alpha_n}{\alpha}},$$

což v kombinaci s nerovností výše dává požadovaný výsledek.

□

VĚTA 19. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{S})$ *je měřitelný prostor,* μ *je míra na* $\mathcal{S}$ *a* $g \colon \Omega \to [0, +\infty]$ *je nezáporná měřitelná. Pak množinová funkce definovaná předpisem*

$$\nu(E) = \int_E g \, \mathrm{d}\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ *je míra na* $\mathcal{S}$ *a platí*

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu$$

pro každou reálnou $f \in L^*(\nu)$ ■■■*[Co to značí?], resp. pro každou komplexní* $f \in L_1(\nu)$.

DŮKAZ. Fakt, že ν je míra a že integrální vzorec platí pro každou nezápornou měřitelnou f je známý (viz např. [R, Věta 1.29]). Pro reálnou $f \in L^*(\nu)$ máme $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu = \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\nu - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\nu = \int_\Omega f^+ g \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- g \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega (fg)^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega (fg)^- \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu$. Pro komplexní $f \in L_1(\nu)$ pak $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu = \int_\Omega \operatorname{Re} f \, \mathrm{d}\nu + i \int_\Omega \operatorname{Im} f \, \mathrm{d}\nu = \int_\Omega (\operatorname{Re} f) g \, \mathrm{d}\mu + i \int_\Omega (\operatorname{Im} f) g \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \operatorname{Re}(fg) \, \mathrm{d}\mu + i \int_\Omega \operatorname{Im}(fg) \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu$.

□

Nechť μ, ν jsou míry na σ-algebře $\mathcal{S}$. Fakt, že $\mu(E) \leq \nu(E)$ pro každou $E \in \mathcal{S}$ budeme značit $\mu \leq \nu$.

LEMMA 20. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{S})$ *je měřitelný prostor a* μ, ν *jsou míry na* $\mathcal{S}$. *Je-li* $\mu \leq \nu$, *pak* $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu$ *pro každou nezápornou měřitelnou* $f \colon \Omega \to [0, +\infty]$.

DŮKAZ. Díky linearitě integrálu nerovnost zjevně platí pro nezáporné jednoduché měřitelné funkce. Přechodem k supremu obdržíme nerovnost pro obecné nezáporné měřitelné funkce.

□

TVRZENÍ 21. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{S})$ *je měřitelný prostor a* μ, ν *jsou míry na* $\mathcal{S}$. *Pak funkce* $\mu + \nu$ *na* $\mathcal{S}$ *definovaná jako* $(\mu + \nu)(E) = \mu(E) + \nu(E)$ *pro* $E \in \mathcal{S}$ *je míra a* $\int_\Omega f \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu$ *pro každou nezápornou měřitelnou* $f \colon \Omega \to [0, +\infty]$. *Dále je* $L_1(\mu + \nu) = L_1(\mu) \cap L_1(\nu)$ *a vzorec platí též pro každou* $f \in L_1(\mu + \nu)$.

DŮKAZ. Funkce $\mu + \nu$ je zjevně nezáporná a $(\mu + \nu)(\emptyset) = 0 + 0 = 0$. Jsou-li $E_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní, pak $(\mu + \nu)\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu + \nu)(E_n)$. Tedy $\mu + \nu$ je míra na $\mathcal{S}$.

Snadno je vidět, že vzorec $\int_\Omega f \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu$ platí pro jednoduché měřitelné funkce f. Je-li nyní $f \colon \Omega \to [0, +\infty]$ měřitelná, pak existuje neklesající posloupnost nezáporných jednoduchých měřitelných funkcí $\{s_n\}$ konvergující bodově k f. Pak dle věty Leviho platí $\int_\Omega f \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \lim \int_\Omega s_n \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \lim\big(\int_\Omega s_n \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega s_n \, \mathrm{d}\nu\big) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu$.

Konečně, ze vzorce $\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\nu$ pro f měřitelnou dostáváme, že $L_1(\mu) \cap L_1(\nu) \subset L_1(\mu+\nu)$. Na druhou stranu, je-li $f \in L_1(\mu+\nu)$, pak dle Lemmatu 20 platí $\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\mu+\nu)$, a tedy $f \in L_1(\mu)$. Analogicky obdržíme, že $f \in L_1(\nu)$. Na závěr spočteme, že $\int_\Omega f\,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega f^+\,\mathrm{d}(\mu+\nu) - \int_\Omega f^-\,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega f^+\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^+\,\mathrm{d}\nu - \left(\int_\Omega f^-\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^-\,\mathrm{d}\nu\right) = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f\,\mathrm{d}\nu$.

□

3.2. Regularita měr

Čtenář, který není seznámen s pojmem topologického prostoru, si může níže všude místo pojmu „topologický prostor“ dosadit pojem „metrický prostor“.

DEFINICE 22. Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je míra na $\mathcal{S}$. Řekneme, že μ je

- zevně regulární, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \inf\{\mu(G);\ G \supset E, G \text{ otevřená}\}$;
- zevnitř regulární, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \sup\{\mu(F);\ F \subset E, F \text{ uzavřená}\}$;
- těsná, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E, K \text{ kompaktní}\}$.

■■■[regularni: termín bych použil jen pro $M(K)$, zevne+zevnitr+konecna na kompaktech; nebo: zevne+tesna+konecna na komp.]

LEMMA 23. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je těsná konečná míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou $E \in \mathcal{S}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují kompaktní $K \subset X$ a otevřená $G \subset X$ takové, že $K \subset E \subset G$ a $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$.*

DŮKAZ. Díky těsnosti existují kompaktní množiny $K \subset E$ a $H \subset X \setminus E$ takové, že $\mu(K) > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2}$ a $\mu(H) > \mu(X \setminus E) - \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $G = X \setminus H$. Pak G je otevřená, $K \subset E \subset G$ a $G \setminus E = (X \setminus H) \setminus E = (X \setminus H) \cap (X \setminus E) = (X \setminus E) \setminus H$. Tedy $\mu(G \setminus E) = \mu((X \setminus E) \setminus H) = \mu(X \setminus E) - \mu(H) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dohromady $\mu(G \setminus K) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus K) = \mu(G \setminus E) + \mu(E) - \mu(K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

LEMMA 24. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou $E \in \mathcal{S}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují uzavřená $F \subset X$ a otevřená $G \subset X$ takové, že $F \subset E \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Speciálně, μ je i zevnitř regulární.*

DŮKAZ. Nechť $\{A_n\} \subset \mathcal{S}$ je posloupnost množin konečné míry splňující $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Z vnější regularity plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ existence otevřené $G_n \subset X$ takové, že $G_n \supset E \cap A_n$ a $\mu(G_n) < \mu(E \cap A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < +\infty$. Pak $\mu(G_n \setminus (E \cap A_n)) = \mu(G_n) - \mu(E \cap A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Položíme-li nyní $G = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$, pak G je otevřená a $E \subset G$. Dále je snadno vidět, že $G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^\infty G_n \setminus (E \cap A_n)$, a tedy

$$\mu(G \setminus E) \le \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty G_n \setminus (E \cap A_n)\right) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(G_n \setminus (E \cap A_n)) < \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplikujeme-li nyní již dokázanou část na množinu $X \setminus E$, pak dostaneme otevřenou $U \subset X$ splňující $X \setminus E \subset U$ a $\mu(U \setminus (X \setminus E)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Položíme-li $F = X \setminus U$, pak F je uzavřená, $F \subset E$ a $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $\mu(G \setminus F) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus F) < \varepsilon$.

□

LEMMA 25. *Nechť X je topologický prostor a μ je borelovská míra na X taková, že $X = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Je-li $E \subset X$ typu F_σ, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje uzavřená $F \subset E$ taková, že $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$.*

DŮKAZ. Položme $H = X \setminus E$. Pak H je G_δ, takže $H = \bigcap_{n=1}^\infty H_n$, kde $H_n \subset X$ jsou otevřené a $H_{n+1} \subset H_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $H^k = H \cap U_k$ a $H_n^k = H_n \cap U_k$ pro $k, n \in \mathbb{N}$. Množiny H_n^k jsou otevřené, $H^k = \bigcap_{n=1}^\infty H_n^k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $H = \bigcup_{k=1}^\infty H^k$. Pro pevné $k \in \mathbb{N}$ je $H_{n+1}^k \subset H_n^k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\mu(H_1^k) \le \mu(U_k) < +\infty$, takže $\lim_{n\to\infty} \mu(H_n^k) = \mu(H^k)$. Existuje tedy $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že

$\mu(H^k_{n_k}) < \mu(H^k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Odtud plyne, že $\mu(H^k_{n_k} \setminus H^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Konečně, definujme $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} H^k_{n_k}$. Pak G je otevřená, $H \subset G$ a $G \setminus H \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(H^k_{n_k} \setminus H^k)$. Tedy $\mu(G \setminus H) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

Na závěr stačí položit $F = X \setminus G$.

□

LEMMA 26. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je míra na $\mathcal{S}$ taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Pak systém*

$$\mathcal{A} = \big\{A \in \mathcal{S};\ \textit{pro každé } \varepsilon > 0 \textit{ existují uzavřená } F \subset X \textit{ a otevřená } G \subset X \textit{ takové, že } F \subset A \subset G \textit{ a } \mu(G \setminus F) < \varepsilon\big\}.$$

je σ-algebra.

DŮKAZ. Zjevně $X \in \mathcal{A}$ (stačí vzít $F = G = X$). Dále nechť $A \in \mathcal{A}$ a $\varepsilon > 0$. Nechť uzavřená $F \subset X$ a otevřená $G \subset X$ jsou takové, že $F \subset A \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Pak $X \setminus G \subset X \setminus A \subset X \setminus F$ a $\mu\big((X \setminus F) \setminus (X \setminus G)\big) = \mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Odtud plyne, že $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Konečně, nechť $A_n \in \mathcal{A}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a nechť $\varepsilon > 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť uzavřená $F_n \subset X$ a otevřená $G_n \subset X$ jsou takové, že $F_n \subset A_n \subset G_n$ a $\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Položme $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak G je otevřená, E je F_σ, $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset G$ a $\mu(G \setminus E) \le \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus F_n\big) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dle Lemmatu 25 pak existuje uzavřená $F \subset E$ taková, že $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$, a tedy $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

□

VĚTA 27. *Nechť X je topologický prostor takový, že každá otevřená množina je F_σ (např. metrický prostor), a nechť μ je borelovská míra na X taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Pak μ je zevně i zevnitř regulární. Je-li navíc X K_σ, pak μ je dokonce těsná.*

DŮKAZ. Systém $\mathcal{A}$ z Lemmatu 26 je σ-algebra, která díky předpokladu a Lemmatu 25 obsahuje otevřené množiny, a tedy je rovna borelovské σ-algebře na X. To znamená, že μ je zevně i zevnitř regulární. Je-li navíc X K_σ, pak pro každou uzavřenou $F \subset X$ existuje neklesající posloupnost kompaktních množin $\{K_n\}$ taková, že $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, takže $\mu(F) = \lim \mu(K_n) = \sup\{\mu(K);\ K \subset F,\ K \text{ kompaktní}\}$. Odtud snadno plyne, že μ je těsná.

□

VĚTA 28 (Nikolaj Nikolajevič Luzin (1912)). *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou μ-měřitelnou funkci $f\colon X \to \mathbb{K}$ a $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset X$ uzavřená taková, že $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ a $f\restriction_F$ je spojitá.*

DŮKAZ. Nechť $\{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze otevřených množin v $\mathbb{K}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme z Lemmatu 24 uzavřenou $F_n \subset X$ a otevřenou $G_n \subset X$ tak, že $F_n \subset f^{-1}(U_n) \subset G_n$ a $\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Pak je $F = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus F_n)$ uzavřená a platí, že $\mu(X \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Restrikce $f\restriction_F$ je pak spojitá, protože pro $n \in \mathbb{N}$ je množina $(f\restriction_F)^{-1}(U_n) = f^{-1}(U_n) \cap F = G_n \cap F$ otevřená v F. (Poslední rovnost plyne z toho, že $G_n \cap F \subset F_n$.)

□

DŮSLEDEK 29. *Nechť X je normální topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny, μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$ a $f\colon X \to \mathbb{K}$ je μ-měřitelná funkce. Pak platí následující:*

(a) Existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na X taková, že $f_n \to f$ μ-skoro všude a $\sup_{x\in X}|f_n(x)| \le \sup_{x\in X}|f(x)|$ *pro každé $n \in \mathbb{N}$.*
(b) Existuje borelovská funkce g na X rovnající se f μ-skoro všude.

DŮKAZ. Dle Věty 28 existuje posloupnost $\{H_n\}$ uzavřených množin v X taková, že $f\restriction_{H_n}$ je spojitá a $\mu(X \setminus H_n) < \frac{1}{n}$. Položme $F_n = \bigcup_{j=1}^{n} H_j$. Pak F_n jsou uzavřené množiny takové, že $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$,

$\mu(X \setminus F_n) \leq \mu(X \setminus H_n) < \frac{1}{n}$ a $f\restriction_{F_n}$ je spojitá. Vskutku, je-li $F \subset \mathbb{K}$ uzavřená, pak

$$(f\restriction_{F_n})^{-1}(F) = \bigcup_{j=1}^{n} (f\restriction_{H_j})^{-1}(F),$$

přičemž množiny $(f\restriction_{H_j})^{-1}(F)$ jsou uzavřené v H_j, a tedy i v X. Proto je $(f\restriction_{F_n})^{-1}(F)$ uzavřená v X, a tedy i v F_n.

Položíme-li $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, pak A je borelovská a $\mu(X \setminus A) \leq \mu(X \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, takže $\mu(X \setminus A) = 0$.

(a) Dle Poznámky 10 existují spojité funkce $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ takové, že $f_n = f\restriction_{F_n}$ a $\sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq \sup_{x \in F_n} |f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $x \in A$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in F_n$ pro $n \geq n_0$, a tedy $f_n(x) = f(x)$ pro $n \geq n_0$. To znamená, že $f_n \to f$ bodově na A.

(b) Funkce $g = \chi_A f$ je rovna f skoro všude. Ukažme, že je borelovská: Nechť $G \subset \mathbb{K}$ je libovolná otevřená množina. Je-li $0 \in G$, položme $B = X \setminus A$, jinak položme $B = \emptyset$. Pak

$$g^{-1}(G) = \big((X \setminus A) \cap g^{-1}(G)\big) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(F_n \cap g^{-1}(G)\big) = B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (f\restriction_{F_n})^{-1}(G).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je ovšem množina $(f\restriction_{F_n})^{-1}(G)$ otevřená v F_n, a tedy borelovská v X. Proto je $g^{-1}(G)$ borelovská.

□

3.3. Nosič míry

DEFINICE 30. Nechť X je topologický prostor a μ je míra na X definovaná alespoň na borelovských podmnožinách X. Pak nosič μ je definován jako $\operatorname{supp} \mu = X \setminus \bigcup\{G \subset X \text{ otevřená};\ \mu(G) = 0\}$.

Nosič míry μ je uzavřená množina.

FAKT 31. *Nechť X je topologický prostor a μ je nenulová míra na X definovaná alespoň na borelovských podmnožinách X. Je-li μ těsná na otevřených množinách, pak $\mu(X \setminus \operatorname{supp} \mu) = 0$ a $\mu(\operatorname{supp} \mu) > 0$.*

DŮKAZ. Položme $U = \bigcup\{G \subset X \text{ otevřená};\ \mu(G) = 0\}$. Je-li $K \subset U$ kompaktní, pak existují $G_1, \dots, G_n \subset X$ otevřené takové, že $\mu(G_j) = 0$ a $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j$. Odtud plyne, že $\mu(K) = 0$. Pak ovšem $\mu(U) = \sup\{\mu(K);\ K \subset U,\ K \text{ kompaktní}\} = 0$. Dále $\mu(\operatorname{supp} \mu) = \mu(X) - \mu(U) = \mu(X) > 0$.

□

TVRZENÍ 32. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je konečná míra na $\mathcal{S}$ těsná na otevřených množinách. Je-li $\operatorname{supp} \mu = \{x\}$ pro nějaké $x \in X$, pak existuje $c \in (0, +\infty)$ takové, že $\mu = c\delta_x$.*

DŮKAZ. Položme $c = \mu(\{x\})$. Pak $c \in (0, +\infty)$ dle Faktu 31. Nechť $E \in \mathcal{S}$. Je-li $x \notin E$, pak $\mu(E) \leq \mu(X \setminus \operatorname{supp} \mu) = 0$ dle Faktu 31. Je-li $x \in E$, pak $\mu(E) = \mu(\{x\}) + \mu(E \setminus \{x\}) = c + 0 = c$. Tedy $\mu = c\delta_x$.

□

3.4. Komplexní míry

Připomeňme, že μ je komplexní (resp. znaménková) míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ jestliže $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ (resp. $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$) splňuje $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ pro libovolné $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní. ■■■[nekonečna?]

Dále připomeňme, že variace míry μ je funkce $|\mu|$ definovaná na $\mathcal{S}$ předpisem

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)|;\ A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S},\ A_j \subset A \text{ po dvou disjunktní},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Variace komplexní míry je konečná nezáporná míra a je to nejmenší nezáporná míra, která majorizuje funkci $A \mapsto |\mu(A)|$ ([R, kapitola 6]).

Označme $\operatorname{Re}\mu, \operatorname{Im}\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ množinové funkce definované vzorci $(\operatorname{Re}\mu)(E) = \operatorname{Re}(\mu(E))$ a $(\operatorname{Im}\mu)(E) = \operatorname{Im}(\mu(E))$ pro $E \in \mathcal{S}$. Pak $\operatorname{Re}\mu$ a $\operatorname{Im}\mu$ jsou znaménkové míry: Jsou-li $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní, pak $(\operatorname{Re}\mu)\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_j\bigr) = \operatorname{Re}\bigl(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re}\mu)(A_n)$ díky spojitosti a aditivitě funkce $z \mapsto \operatorname{Re} z$. Analogicky pro $\operatorname{Im}\mu$.

Označíme-li Jordanův rozklad znaménkové míry ν jako $\nu = \nu^+ - \nu^-$, pak $\mu = \operatorname{Re}\mu + i\operatorname{Im}\mu = (\operatorname{Re}\mu)^+ - (\operatorname{Re}\mu)^- + i(\operatorname{Im}\mu)^+ - i(\operatorname{Im}\mu)^-$.

LEMMA 33. *Nechť μ je komplexní míra na σ-algebře $\mathcal{S}$. Pak $|\operatorname{Re}\mu| \le |\mu|$, $|\operatorname{Im}\mu| \le |\mu|$ a $|\mu| \le |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu| = (\operatorname{Re}\mu)^+ + (\operatorname{Re}\mu)^- + (\operatorname{Im}\mu)^+ + (\operatorname{Im}\mu)^-$.*

DŮKAZ. Platí $|\operatorname{Re}\mu(E)| \le |\mu(E)|$ pro každou $E \in \mathcal{S}$. Odtud snadno plyne, že $|\operatorname{Re}\mu| \le |\mu|$ a analogicky pro $\operatorname{Im}\mu$. Na druhou stranu, pro $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S}$ platí

$$\sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)| = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(\operatorname{Re}\mu(E_j))^2 + (\operatorname{Im}\mu(E_j))^2} \le \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Re}\mu(E_j)| + \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Im}\mu(E_j)|,$$

odkud plyne, že $|\mu| \le |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu|$.

□

LEMMA 34. *Nechť μ je komplexní míra na σ-algebře $\mathcal{S}$. Pak $|\mu|(A) \le 4\sup_{E\in\mathcal{S}, E\subset A} |\mu(E)|$ pro každou $A \in \mathcal{S}$.*

DŮKAZ. Označme $M = \sup_{E\in\mathcal{S}, E\subset A} |\mu(E)|$. Nechť je nejprve μ reálná. Jsou-li $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$, $A_j \subset A$ po dvou disjunktní a označíme-li $I = \{1, \dots, n\}$ a $I^+ = \{j \in I;\ \mu(A_j) \ge 0\}$, pak $\sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)| = \sum_{j\in I^+} \mu(A_j) - \sum_{j\in I\setminus I^+} \mu(A_j) = \mu\bigl(\bigcup_{j\in I^+} A_j\bigr) - \mu\bigl(\bigcup_{j\in I\setminus I^+} A_j\bigr) \le 2M$. Tedy $|\mu|(A) \le 2M$.

Je-li nyní μ komplexní, pak s využitím Lemmatu 33 a předchozího odhadu obdržíme, že $|\mu|(A) \le |\operatorname{Re}\mu|(A) + |\operatorname{Im}\mu|(A) \le 2\sup_{E\in\mathcal{S}, E\subset A} |\operatorname{Re}\mu(E)| + 2\sup_{E\in\mathcal{S}, E\subset A} |\operatorname{Im}\mu(E)| \le 4M$.

□

Řekneme, že komplexní míra μ je zevně regulární, resp. zevnitř regulární, resp. těsná, pokud její variace $|\mu|$ má příslušnou vlastnost.

VĚTA 35. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny, μ je σ-konečná zevně regulární nezáporná míra na $\mathcal{S}$ a ν je komplexní míra na $\mathcal{S}$ splňující $\nu \ll \mu$. Pak $|\nu|$ je zevnitř i zevně regulární.*

DŮKAZ. Nechť $E \in \mathcal{S}$ a $\varepsilon > 0$. Z absolutní spojitosti $|\nu|$ vzhledem k μ ([R, Tvrzení 6.8(e), Věta 6.11]) plyne existence $\delta > 0$ takového, že je-li $A \in \mathcal{S}$ a $\mu(A) < \delta$, pak $|\nu|(A) < \varepsilon$. Z Lemmatu 24 plyne existence $G \supset E$ otevřené takové, že $\mu(G \setminus E) < \delta$. Pak $|\nu|(G \setminus E) < \varepsilon$, tedy $|\nu|(G) = |\nu|(E) + |\nu|(G \setminus E) < |\nu|(E) + \varepsilon$. Vnitřní regularita $|\nu|$ plyne z Lemmatu 24.

□

Nechť μ je komplexní míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$. Pak $\mu = \operatorname{Re}\mu + i\operatorname{Im}\mu$. Můžeme tedy definovat integrál vzhledem ke komplexní míře μ vzorcem

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\operatorname{Re}\mu + i\int_\Omega f\,\mathrm{d}\operatorname{Im}\mu,$$

jsou-li oba integrály vpravo konvergentní. Označíme-li Jordanův rozklad znaménkové míry ν jako $\nu = \nu^+ - \nu^-$, pak můžeme vzorec výše psát následovně:

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+ - \int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^- + i\int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^+ - i\int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^-.$$

■■■[integral je linearni???]

Snadno nahlédneme, že $\int_\Omega \chi_E\,\mathrm{d}\mu = \mu(E)$ pro $E \in \mathcal{S}$, a tedy z linearity $\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j)$ pro jednoduchou měřitelnou funkci $s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}$.

TVRZENÍ 36. *Nechť (Ω, μ) je prostor s komplexní mírou a nechť $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce. Pak $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ je definován, právě když $f \in L_1(|\mu|)$.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Podle Lemmat 33 a 20 platí $\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+ \le \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}|\mu| < +\infty$, což znamená, že $\int_\Omega f\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+$ konverguje; analogické tvrzení platí i pro integrály vzhledem k $(\operatorname{Re}\mu)^-$, $(\operatorname{Im}\mu)^+$ a $(\operatorname{Im}\mu)^-$. Tedy $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ je definován.

$\Rightarrow$ Z Lemmat 33 a 20 a Tvrzení 21 plyne, že $\int_\Omega |f|\,\mathrm{d}|\mu| \le \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+ + \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^- + \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^+ + \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^-$.

□

VĚTA 37. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, μ je nezáporná míra na $\mathcal{S}$ a $g \in L_1(\mu)$. Pak množinová funkce definovaná předpisem*

$$\nu(E) = \int_E g\,\mathrm{d}\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ je komplexní míra na $\mathcal{S}$ a platí

$$(\operatorname{Re}\nu)^+(E) = \int_E (\operatorname{Re}g)^+\,\mathrm{d}\mu, \quad (\operatorname{Re}\nu)^-(E) = \int_E (\operatorname{Re}g)^-\,\mathrm{d}\mu,$$
$$(\operatorname{Im}\nu)^+(E) = \int_E (\operatorname{Im}g)^+\,\mathrm{d}\mu, \quad (\operatorname{Im}\nu)^-(E) = \int_E (\operatorname{Im}g)^-\,\mathrm{d}\mu,$$
$$|\nu|(E) = \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu,$$
$$\int_E f\,\mathrm{d}\nu = \int_E fg\,\mathrm{d}\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ a každou $f \in L_1(|\nu|)$.

DŮKAZ. Pro $E_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní máme díky Důsledku 17 rovnost $\nu\big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\big) = \int_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} g\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{j=1}^n E_j} g\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \int_{E_j} g\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n)$. Tedy ν je komplexní míra na $\mathcal{S}$.

Nechť $E \in \mathcal{S}$ a $f \in L_1(|\nu|)$. Předpokládejme nejprve, že g je reálná. Položme $P = \{x \in \Omega;\ g(x) \ge 0\}$ a $N = \{x \in \Omega;\ g(x) < 0\}$. Snadno vidíme, že (P, N) je Hahnův rozklad Ω příslušný znaménkové míře ν. Tedy $\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = \int_{E\cap P} g\,\mathrm{d}\mu = \int_{E\cap P} g^+\,\mathrm{d}\mu = \int_E g^+\,\mathrm{d}\mu$ a podobně $\nu^-(E) = -\nu(E\cap N) = -\int_{E\cap N} g\,\mathrm{d}\mu = -\int_{E\cap N} -g^-\,\mathrm{d}\mu = \int_E g^-\,\mathrm{d}\mu$. Dle Věty 19 je tedy $\int_E f\,\mathrm{d}\nu = \int_E f\,\mathrm{d}\nu^+ - \int_E f\,\mathrm{d}\nu^- = \int_E fg^+\,\mathrm{d}\mu - \int_E fg^-\,\mathrm{d}\mu = \int_E f(g^+ - g^-)\,\mathrm{d}\mu = \int_E fg\,\mathrm{d}\mu$.

Nechť nyní g je obecná komplexní. Pak $(\operatorname{Re}\nu)(E) = \operatorname{Re}\int_E g\,\mathrm{d}\mu = \int_E \operatorname{Re}g\,\mathrm{d}\mu$ a analogicky $(\operatorname{Im}\nu)(E) = \operatorname{Im}\int_E g\,\mathrm{d}\mu = \int_E \operatorname{Im}g\,\mathrm{d}\mu$. Tedy dle předchozí části důkazu je $\int_E f\,\mathrm{d}\nu = \int_E f\,\mathrm{d}\operatorname{Re}\nu + i\int_E f\,\mathrm{d}\operatorname{Im}\nu = \int_E f\operatorname{Re}g\,\mathrm{d}\mu + i\int_E f\operatorname{Im}g\,\mathrm{d}\mu = \int_E f(\operatorname{Re}g + i\operatorname{Im}g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E fg\,\mathrm{d}\mu$.

Konečně, ukažme, že $|\nu|(E) = \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu$. Protože $A \mapsto \int_A |g|\,\mathrm{d}\mu$ je nezáporná míra majorizující $|\mu(A)|$, plyne odtud, že $|\nu|(E) \le \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu$. Pro opačnou nerovnost zvolme $\varepsilon > 0$ a nechť $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$, kde $E_j \in \mathcal{S}$, $E_j \subset E$ jsou po dvou disjunktní, je jednoduchá funkce taková, že $\int_E |g - s|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$ ([R, Věta 3.13]). Pak $|\nu(E_j)| = \left|\int_{E_j} g\,\mathrm{d}\mu\right| \ge \left|\int_{E_j} s\,\mathrm{d}\mu\right| - \left|\int_{E_j}(g - s)\,\mathrm{d}\mu\right| \ge |\alpha_j|\mu(E_j) - \int_{E_j}|g - s|\,\mathrm{d}\mu$, a tedy $|\nu|(E) \ge \sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| \ge \sum_{j=1}^n |\alpha_j|\mu(E_j) - \sum_{j=1}^n \int_{E_j}|g - s|\,\mathrm{d}\mu \ge \int_E |s|\,\mathrm{d}\mu - \int_E |g - s|\,\mathrm{d}\mu \ge \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu - 2\int_E |g - s|\,\mathrm{d}\mu > \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu - 2\varepsilon$.

□

TVRZENÍ 38. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ je komplexní míra na $\mathcal{S}$. Pak existuje $\mathcal{S}$-měřitelná funkce $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ taková, že $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in \Omega$ a*

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fh\,\mathrm{d}|\mu|$$

pro každou $f \in L_1(|\mu|)$.

DŮKAZ. Dle [R, Věta 6.12] existuje $\mathcal{S}$-měřitelná funkce $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ taková, že $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in \Omega$ a $\mu(E) = \int_E h\,\mathrm{d}|\mu|$ pro každou $E \in \mathcal{S}$. Zbytek plyne z Věty 37.

□

DŮSLEDEK 39. *Nechť μ je komplexní míra na Ω. Pak*

$$\left|\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}|\mu|$$

pro každou $f \in L_1(|\mu|)$.

DŮKAZ. Nechť h je funkce z Tvrzení 38. Pak $\left|\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_\Omega f h \,\mathrm{d}|\mu|\right| \le \int_\Omega |f h| \,\mathrm{d}|\mu| = \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}|\mu|$. □

Pro komplexní míry platí následující varianta Lebesgueovy věty:

VĚTA 40. *Nechť (Ω, μ) je prostor s komplexní mírou a $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na Ω taková, že $f_n \to f$ bodově $|\mu|$-s. v. Pokud existuje $g \in L_1(|\mu|)$ taková, že pro $|\mu|$-s. v. $x \in \Omega$ je $|f_n(x)| \le g(x)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (speciálně pokud posloupnost $\{f_n\}$ je omezená), pak $f \in L_1(|\mu|)$, $\int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}|\mu| \to 0$ a $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Pro $|\mu|$-s. v. $x \in \Omega$ je $|f(x)| = \lim |f_n(x)| \le g(x)$, a tedy $f \in L_1(|\mu|)$. Dále $|\mu|$-s. v. $x \in \Omega$ platí, že $|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x)| + |f(x)| \le 2g(x)$, a tedy z Lebesgueovy věty plyne, že $\int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}|\mu| \to 0$. S pomocí Důsledku 39 tak dostaneme, že $\left|\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}|\mu| \to 0$. □

DEFINICE 41. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Nechť $M(X)$ značí prostor všech měr na $(X, \mathcal{S})$, kde vektorové operace definujeme bodově a uvažujeme normu $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

VĚTA 42. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, pak $M(X)$ je Banachův prostor. Navíc platí $|\mu + \nu| \le |\mu| + |\nu|$, $\mu, \nu \in M(X)$.*

DŮKAZ. Zjevně je $M(X)$ vektorový prostor. Pro $\mu, \nu \in M(X)$ máme

$$|(\mu + \nu)(A)| \le |\mu(A)| + |\nu(A)| \le |\mu|(A) + |\nu|(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Z této nerovnosti již snadno plyne odhad $|\mu + \nu| \le |\mu| + |\nu|$.

Krok 1. Pro $\mu \in M(X)$ a $c \in \mathbb{K}$ platí

$$|c\mu|(X) = \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |c\mu(B)| = |\mu|(A) = |c| \sup_{\mathcal{B} \in \pi(A)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)| = |c|\|\mu\|.$$

Dále pro $\mu, \nu \in M(X)$ platí

$$\begin{aligned} \|\mu + \nu\| = |\mu + \nu|(X) &= \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu + \nu(B)| \\ &\le \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)| + \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nu(B)| = \|\mu\| + \|\nu\|. \end{aligned}$$

Konečně pokud $\|\mu\| = 0$, tj. $|\mu|(X) = 0$, pak pro každé $A \in \mathcal{S}$ máme

$$|\mu(A)| \le |\mu|(A) \le |\mu|(X) = 0,$$

a tedy $\mu = 0$. Proto je $M(X)$ normovaný prostor.

Krok 2. K důkazu úplnosti použijeme Větu 1.30. Nechť $\sum_{n=1}^\infty \mu_n$ je absolutně konvergentní řada v $M(X)$. Pro libovolné $A \in \mathcal{S}$ pak máme

$$\sum_{n=1}^\infty |\mu_n(A)| \le \sum_{n=1}^\infty |\mu_n|(A) \le \sum_{n=1}^\infty \|\mu_n\| < \infty,$$

a tedy lze položit

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Zjevně je pak μ konečně aditivní a platí $\mu(\emptyset) = 0$.

Nechť $\{C_k\}$ je klesající posloupnost měřitelných množin splňujících $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \emptyset$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \|\mu_n\| < \varepsilon$. Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{k\to\infty} |\mu_n|(A_k) = 0$, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\mu_n|(C_k) < \frac{\varepsilon}{n_0}$, $n = 1, \dots, n_0$. Pak pro $k \geq k_0$ platí

$$|\mu(C_k)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(C_k)| \leq |\sum_{n=1}^{n_0} \mu_n(C_k)| + |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mu_n(A_k)| \leq \sum_{n=1}^{n_0} |\mu_n|(A_k) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|\mu_n\| \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{n_0} + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Tedy $\mu(C_k) \to 0$.

Nechť nyní $\{A_j\}$ je disjunktní systém měřitelných množin a $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$. Položme $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ a $C_n = A \setminus B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{C_n\}$ je klesající posloupnost s vlastností $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$. Dle předcházející úvahy tedy máme pro

$$|\mu(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)| = |\mu(B_n) + \mu(C_n) - \mu(\cup_{k=1}^{n} A_k)| = |\mu(B_n) + \mu(C_n) - \mu(B_n)| = |\mu(C_n)| \to 0.$$

Tedy $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Krok 3. Ověřme nyní, že $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\nu_n(A) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu_k(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Dle předcházejícího jsou míry ν_n v $M(X)$ a platí $\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \nu_n$. Pro libovolné $\mathcal{B} \in \pi(X)$ nyní máme

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} |(\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k)(B)| = \sum_{B\in\mathcal{B}} |\nu_n(B)| \leq \sum_{B\in\mathcal{B}} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mu_k(B)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{B\in\mathcal{B}} |\mu_k(B)| \leq \sum_{k=n+1} \|\mu_k\|.$$

Tedy $\|\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k\| \to 0$.

□

VĚTA 43. *Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $M(K)$ značí systém všech konečných komplexních borelovských zevně i zevnitř regulárních měr na K (vizte Definici 22). Pak $M(K)$ s operacemi a normou jako ve Větě 42 je Banachův prostor.*

DŮKAZ. V průběhu důkazu budeme zevně a zevnitř regulární borelovské míře říkat regulární míra. Již víme, že komplexní míry na $\mathrm{Bs}(K)$ tvoří Banachův prostor. Zbývá ukázat, že limita posloupnosti regulárních měr je regulární. Nechť tedy $\{\mu_n\}$ je posloupnost regulárních měr konvergující v normě ke komplexní míře borelovské míře μ. Nechť $E \in \mathrm{Bs}(K)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|\mu - \mu_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$, a nalezneme množiny $F \subset E \subset G$, kde F uzavřená a G otevřená, takové, že $|\mu_n|(G \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak

$$|\mu|(G \setminus F) = |\mu - \mu_n + \mu_n|(G \setminus F) \leq |\mu - \mu_n|(G \setminus F) + |\mu_n|(G \setminus F) \leq \|\mu - \mu_n\| + |\mu_n|(G \setminus F) < \varepsilon.$$

□

Následující významnou větu uvedeme bez důkazu.

VĚTA 44 (O. M. Nikodym (1933)). *Nechť $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních měr na σ-algebře $\mathcal{S}$ konvergující bodově k funkci μ na $\mathcal{S}$. Pak pro každou posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_k(A_n)$ konverguje stejnoměrně pro $k \in \mathbb{N}$. Tedy μ je komplexní míra.*