1. CVIČENÍ

1) Existuje inverzní zobrazení.

2) c) Čemu se rovná $(xy)^{-1}$?

3) Matematickou indukcí. Pro krok $n \to n+1$ je potřeba vhodně vynásobit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

4) $\sup_{x\in A}\bigl(\sup_{y\in B} f(x,y)\bigr) = \sup_{(x,y)\in A\times B} f(x,y) = \sup_{y\in B}\bigl(\sup_{x\in A} f(x,y)\bigr)$.

5) $\mathbb{C}^n$ je izomorfní $\mathbb{R}^{2n}$.

12) $\dim Y = \infty$: Položme $f_n = \chi_{(1/2^n, 1/2^n+1/2^{n+1})} - c_n \chi_{(1/2^n+1/2^{n+1}, 1/2^{n-1})}$ pro vhodnou konstantu $c_n \in \mathbb{R}$ takovou, aby $f_n \in Y$. Pak $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ je nekonečná lineárně nezávislá množina.

2. CVIČENÍ

3) Nechť $x, y \in \operatorname{Int} M$ a $\lambda \in [0,1]$. Nechť $r > 0$ je takové, že $U(x,r) \subset M$ a $U(y,r) \subset M$. Pak $U(\lambda x + (1-\lambda)y, r) \subset M$.

4) $\overline{U(x,r)} \subset B(x,r)$ je triviální. $B(x,r) \subset \overline{U(x,r)}$: Nechť $x \in B(x,r)$. Pak existuje $\{x_n\} \subset U(x,r)$ taková, že $x_n \to x$.
Diskrétní metrický prostor.

8) Lze např. ukázat, že doplněk je otevřený.

9) a) Srovnávací kritérium pro řady $\sum |x_n|^p$ a $\sum |x_n|^q$. Pro důkaz ostrosti inkluze vezměte vektor $(1/n^\alpha)_{n=1}^\infty$ pro vhodné $\alpha > 0$. b) Srovnávací kritérium pro integrály nebo Hölderova nerovnost.

11) Lze ukázat, že c_{00} je hustý v c_0, a že c_{00} je separabilní.

12) Lze ukázat, že $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ je hustý v ℓ_p, a že $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ je separabilní.

13) Vezměme systém $\{\chi_A;\ A \subset \mathbb{N}\}$. Jakou mají od sebe vzdálenost jednotlivé prvky tohoto systému? Jakou má tento systém mohutnost?

4. CVIČENÍ

1) $\|\phi\| = 1$, nabývá se pro posloupnosti s $\lim x_n = 1$.
2) $\|\phi\| = 1$, nabývá se v bodech sféry, které mají nezáporné souřadnice a liché souřadnice nulové.
3) $\|\phi\| = 1$, nabývá se v bodě $e_1 = (1,0,0,\dots)$.
4) $\|\phi\| = 1$, nenabývá se.
5) $\|\phi\| = \frac{1}{4}$, nabývá se právě ve funkci $\chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{(\frac{1}{2},1]}$.
6) $\|\phi\| = \frac{1}{4}$, nenabývá se.
7) $\|\phi\| = 1$, nabývá se v bodech sféry, které mají nezáporné sudé souřadnice a nekladné liché souřadnice.
8) $\|\phi\| = 1$, nenabývá se.
9) $\|\phi\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$, nabývá se v bodě $\bigl(\frac{\sqrt{6}}{n\pi}\bigr)_{n=1}^\infty$.
10) $\|\phi\| = 2$, nabývá se v každé $f \in C([0,1])$ takové, že $|f| \le 1$, $f(0) = 1$ a $f(1) = -1$.
11) $\|\phi\| = \frac{1}{2}$, nabývá se v každé $f \in L_\infty([0,1])$ takové, že $|f| \le 1$ a $f = 1$ na $[0, \frac{1}{2}]$ (s. v.).
12) $\|\phi\| = 1$, nenabývá se.
13) $\|\phi\| = \frac{1}{2}$, nenabývá se.

6. CVIČENÍ

1) $\|T\| = 1$, nabývá se v každém bodě S_{ℓ_2}. T je izometrie do, obor hodnot je $\{(x_n);\ x_1 = 0\}$.
2) $\|T\| = 1$, nabývá se v bodech αe_1, kde $|\alpha| = 1$. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažujte vektory e_n).
3) $\|T\| = 1$, nenabývá se. Pro nerovnost $\|T\| \ge 1$ lze posloupnost vektorů e_n. T je izomorfizmus na, $\|T^{-1}\| = 2$.
4) $\|T\| = r$, nabývá se v konstantních funkcích $f(x) = \alpha$, $|\alpha| = 1$. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažujte funkce $\sin(nx)$).
5) $\|T\| = r + 1$, nabývá se v konstantních funkcích $f(x) = \alpha$, $|\alpha| = 1$. T je prostý, není na. T je izomorfismus do, obor hodnot je $\{g \in C^1([0,r]);\ g(0) = 0\}$, $\|T^{-1}\| = 1$.
6) T je izometrie na.
7) $\|T\| = 1$, norma se nabývá v bodech S_{ℓ_2}, které mají liché souřadnice nulové. T není prostý, $\operatorname{Ker} T$ tvoří prvky, které mají sudé souřadnice nulové. T není na, $\operatorname{Rng} T$ tvoří prvky, které mají liché souřadnice nulové. T je ortogonální projekce.
8) $\|T\| = 2$, nabývá se v bodech αe_1, kde $|\alpha| = 1$. T je izomorfizmus na, $\|T^{-1}\| = 1$.
9) $\|T\| = 1$, nabývá se v bodech S_{ℓ_1}, jejichž všechny souřadnice jsou nezáporné nebo jsou všechny nekladné. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažujte vektory $(1,-1,1,-1,\dots,1,-1,0,0,\dots)$).
10) $\|T\| = 3$, nabývá se ve funkcích αf splňujících $|f| \le 1$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $|\alpha| = 1$. T je prostý a na. T je izomorfismus na, $\|T^{-1}\| = 3$, $T^{-1}(g) = g + g(0) - g(1)$.
11) $\|T\| = \frac{1}{2}$, nabývá se ve funkcích f splňujících $|f| \le 1$ a $|f(0)| = 1$ nebo $|f(1)| = 1$. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažujte funkce $f_n \colon [0,1] \to [0,1]$ splňující $f_n(\frac{1}{2}) = 1$ a $f_n = 0$ mimo interval $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})$).
12) $\|T\| = 1$, nabývá se ve funkcích f, $|f| \le 1$, pro které existuje $x \in [0,1]$ splňující $|f(x)| = 1$. T není prostý, $\operatorname{Ker} T$ tvoří funkce nulové na $[0,1]$. T není na, $\operatorname{Rng} T$ tvoří sudé funkce.
13) T je izomorfismus na, $\|T\| = \|T^{-1}\| = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
14) $\|T\| = 1$, nabývá se např. ve funkci konstantní 1. T není prostý, $\operatorname{Ker} T = \{ce^x;\ c \in \mathbb{K}\}$. T je na.

15) Pro $p = \infty$ je to izometrie na. Pro $1 \le p < \infty$ je $\|T\| = 2^{\frac{1}{p}}$, nenabývá se. (Pro důkaz $\|T\| \le 2^{\frac{1}{p}}$ použijte větu o substituci. Pro důkaz $\|T\| \ge 2^{\frac{1}{p}}$ uvažte funkce $n^{\frac{1}{p}} \chi_{[1-\frac{1}{n},1]}$.) T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažte funkce $n^{\frac{1}{p}} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}$).

16) $\|T\| = 1$, nabývá se např. ve funkci konstantní 1. T není prostý, $\operatorname{Ker} T = \operatorname{span}\{\sin, \cos\}$. T je na.

17) $\|T\| = 1$, pro $p = \infty$ se nabývá např. ve funkci konstantní 1, pro $1 \le p < \infty$ se nenabývá. T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažte funkce $n^{\frac{1}{p}} \chi_{[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}]}$).

18) $\|T\| = 1$, pro $p = \infty$ se nabývá např. ve funkci konstantní 1, pro $1 \le p < \infty$ se nabývá v těch funkcích, které jsou s. v. nulové na $[\frac{1}{2}, 1]$. T není prostý, $\operatorname{Ker} T$ obsahuje funkce s. v. nulové na $[0, \frac{1}{2}]$. T není na.

8. CVIČENÍ

1) $e \notin \overline{\operatorname{span}}\, A$

2) $B_\perp = \{0\}$, $(B_\perp)^\perp = \ell_\infty$

3) a) $\{1, x \mapsto \sqrt{3}(2x-1)\}$, $P(f)(x) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + 3\big(\int_0^1 (2t-1) f(t)\,\mathrm{d}t\big)(2x-1) = 2\big(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\big)(2-3x) + 6\big(\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t\big)(2x-1)$, $P(t \mapsto t^2)(x) = x - \frac{1}{6}$

b) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, x \mapsto \frac{\sqrt{6}}{2}x, x \mapsto \frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2 - \frac{1}{3})\}$, $P(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\big(\int_{-1}^1 t f(t)\,\mathrm{d}t\big)x + \frac{45}{8}\big(\int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3}) f(t)\,\mathrm{d}t\big)(x^2 - \frac{1}{3}) = \frac{9}{8}\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\big(\int_{-1}^1 t f(t)\,\mathrm{d}t\big)x + \frac{45}{8}\big(\int_{-1}^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t\big)(x^2 - \frac{1}{3})$, $P(t \mapsto t^3)(x) = \frac{3}{5}x$, $P(\sin)(x) = 3(\sin 1 - \cos 1)x$

c) $\{\sqrt{3}(\frac{1}{2^n})_{n=1}^\infty, \sqrt{200}\big(\frac{3}{5}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\big)_{n=1}^\infty\}$, $P(e_1) = \frac{20}{3}\big(\frac{1}{3^n} - \frac{3}{8}\frac{1}{2^n}\big)_{n=1}^\infty$

9. CVIČENÍ

1) $T^*(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2 + 2y_3, y_1 - y_2 + y_3)$, $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{T^*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $T^*((y_n)) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$

3) $T^*((y_n)) = (0, y_1, y_2, y_3, \dots)$

4) $T^*((y_n)) = (y_1, i y_2, y_3, i y_4, \dots)$; $T^\star((y_n)) = (y_1, -i y_2, y_3, -i y_4, \dots)$

5) $T^*((y_n)) = (y_1 - 2y_2, y_2 - y_1, y_3, y_4, \dots)$

6) $T^*((y_n)) = (-\frac{1}{2}y_2, \frac{2}{1}y_1, -\frac{2}{3}y_4, \frac{3}{2}y_3, \dots, -\frac{n}{n+1}y_{2n}, \frac{n+1}{n}y_{2n-1}, \dots)$

7) $T^*((y_n)) = \big(\sum_{k=n}^\infty \frac{y_k}{k}\big)_{n=1}^\infty$

8) $T^*((y_n)) = (y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \dots)$

9) $T^* g(t) = 2t g(t^2)$

10) $T^* g = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot g$

11) $T^* g(s) = \int_0^1 \min\{s, t\} g(t)\,\mathrm{d}t$

12) $T^* g = g + \int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t \cdot \chi_{[0,1]}$

13) $T^* g = \big(\int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t\big)_{n=1}^\infty$

14) $T^* \mu = \big(\int_{[0,1]} t^n\,\mathrm{d}\mu(t)\big)_{n=1}^\infty$

15) $T^* \mu(A) = \int_A \mu([t, 1])\,\mathrm{d}t$, tj. hustota míry $T^*\mu$ je $t \mapsto \mu([t, 1])$

16) $T^* \mu(A) = \mu\big(\{t \in [0, 1];\ 1 - t \in A\}\big) = \mu(1 - A)$, tj. $T^*\mu$ je obraz míry μ při zobrazení $t \mapsto 1 - t$

17) $T^* \mu(A) = \mu\big(\{t \in [-1, 1];\ t^2 \in A\}\big)$, tj. $T^*\mu$ je obraz míry μ při zobrazení $t \mapsto t^2$

18) $T^* \mu = \mu + \mu([0, 1]) \cdot (\delta_1 - \delta_0)$

10. CVIČENÍ

1) ano, 2) ne, 3) ne, 4) ne, 5) ano: $\|T - T_n\| \le \frac{1}{n+1}$, 6) ano: $\|T - T_n\| \le \frac{1}{n+1}$, 7) ano: $\|T - T_n\| \le \sqrt{\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^2}}$, 8) ano: $\|T - T_n\| \le \frac{1}{n+1}$, 9) ne, 10) ne: $T|_Y$ je izomorfismus, kde $Y = \{f \in X;\ f = 0 \text{ s.v. na } [0, \frac{1}{2}]\}$, 11) ano: $\|T - T_n\| \le \frac{1}{n+2}$, 12) ne: $T|_Y$ je identita, kde $Y = \{f \in X;\ f(0) = f(1)\}$

11. CVIČENÍ

1) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset, \sigma(T) = B(0, 1)$, 2) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = U(0, 1), \sigma(T) = B(0, 1)$, 3) $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{0, 1\}$, 4) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T) = \{i, -i\}$, 5) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \{0\}$, 6) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\frac{n+1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \{1\}$, 7) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T) = \{1\}$, 8) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0, 1]$, 9) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{0\}$ – položme $F(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ a řešme rovnici $\lambda F' - F = g$, 10) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0, 1]$, 11) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T) = \{0, 1\}$, 12) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma(T) = \{0, 1\}$