1. CVIČENÍ

1) Nechť $f: X \to Y$ je prosté zobrazení a $A, B \subset X$. Ukažte, že je-li $f(A) = f(B)$, pak $A = B$.
2) a) Ukažte, že v pologrupě je jednotkový prvek určen jednoznačně a existuje-li levá i pravá jednotka, pak jsou si rovny a je to jednotka.
   b) Ukažte, že v monoidu M je ke každému $x \in M$ inverzní prvek určen jednoznačně a existuje-li k $x \in M$ levý i pravý invers, pak jsou si rovny a je to invers k x.
   c) Ukažte, že množina invertibilních prvků v monoidu tvoří grupu.
   d) Nechť X je množina. Ukažte, že $M(X) = \{f: X \to X\}$ s operací skládání je monoid. (Co je jednotkou?) Pro jaká $f \in M(X)$ existuje inverzní prvek k f a jak vypadá? Pro jaká $f \in M(X)$ existuje levý invers? Pro jaká $f \in M(X)$ existuje pravý invers? Ukažte, že existuje X a $f \in M(X)$ tak, že f má levý, ale nemá pravý invers (tj. k existenci inverzního zobrazení k f nestačí předpokládat $g \circ f = \mathrm{Id}_X$).
3) Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$ konvexní. Ukažte, že $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in M$ pro libovolné $x_1, \ldots, x_n \in M$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, +\infty)$ splňující $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.
4) Nechť $f: A \times B \to \mathbb{R}$. Ukažte, že
$$\sup_{x\in A}\bigl(\sup_{y\in B} f(x,y)\bigr) = \sup_{y\in B}\bigl(\sup_{x\in A} f(x,y)\bigr).$$
5) Ukažte, že podmnožina $\mathbb{C}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.
6) a) Ukažte, že v součinu metrických prostorů konvergence posloupností funguje „po složkách“.
   b) Nechť X, Y jsou metrické prostory. Ukažte, že je-li A hustá v X a B hustá v Y, pak $A \times B$ je hustá v $X \times Y$.
   c) Ukažte, že součin úplných metrických prostorů je úplný.
7) a) Ukažte, že podmnožina totálně omezeného metrického prostoru je totálně omezená.
   b) Ukažte, že uzávěr totálně omezené podmnožiny metrického prostoru je totálně omezený.
8) Nechť (X, μ) je prostor s mírou a $f, g: X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Ukažte, že $\operatorname{ess\,sup}(f+g) \le \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g$.
9) Dokažte následující důsledek Baireovy věty:

   Důsledek. *Nechť P je úplný metrický prostor, $\{F_n\} \subset P$ je posloupnost uzavřených množin v P a $P = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek.*

10) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dána posloupnost $\{f_n(k)\}_{k=1}^\infty$ předpisem
$$f_n(k) = \frac{k+1}{k^2+2} + \frac{n+1}{n^2 k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_\infty\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Dále zjistěte, zda je posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konvergentní v Banachových prostorech c_0 a ℓ_∞. Pokud ano, určete její limitu.
11) Nechť je dána posloupnost funkcí $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ předpisem
$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{n^2}{(n^2 - 1 + e^x)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in [0,1].$$
Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{C([0,1]), L_1([0,1]), L_2([0,1]), L_3([0,1]), L_\infty([0,1])\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Pokud ano, zjistěte, zda je posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konvergentní v Banachově prostoru X. Pokud ano, určete její limitu.
12) Nechť $Y \subset L_1([0,1])$ je množina daná předpisem
$$Y = \left\{ f \in L_1([0,1]);\ \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$
Určete, zda Y je podprostor $L_1([0,1])$, zda je uzavřený a jakou má případně dimenzi.
13) Nechť $Y \subset \ell_2$ je množina daná předpisem
$$Y = \left\{ x \in \ell_2;\ \sum_{n=1}^{7} x_n = 0 \right\}.$$
Určete, zda Y je podprostor ℓ_2, zda je uzavřený a jakou má případně dimenzi.

2. CVIČENÍ

1) Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že $B(x,r) = x + B(0,r)$ a $B(0,r) = rB_X$.
2) Ukažte, že $B(x,r)$ a $U(x,r)$ v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.
3) Ukažte, že vnitřek konvexní množiny v normovaném lineárním prostoru je konvexní.
4) Ukažte, že v normovaném lineárním prostoru $\overline{U(x,r)} = B(x,r)$ a $\operatorname{Int} B(x,r) = U(x,r)$. Nalezněte příklad metrického prostoru, kde tyto identity neplatí.
5) Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $M \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ Ukažte, že $\overline{\alpha M} = \alpha \overline{M}$.
6) Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, Y je podprostor X, $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ukažte, že $\operatorname{dist}(\alpha x, Y) = |\alpha| \operatorname{dist}(x, Y)$.
7) Nechť X je normovaný lineární prostor, $F \subset X$ uzavřená a $K \subset X$ kompaktní.
   a) Ukažte, že $F + K$ je uzavřená.
   b) Ukažte, že je-li F kompaktní, pak $F + K$ je kompaktní.

c) Nalezněte uzavřené množiny $A, B \subset \mathbb{R}^2$ takové, že $A + B$ není uzavřená.

8) Ukažte, že c_0 je uzavřený podprostor c a c je uzavřený podprostor ℓ_∞. Ukažte, že c_{00} je podprostor c_0, který není uzavřený (a tedy to není Banachův prostor).

9) a) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory ℓ_p a ℓ_q pro $p < q$? Jaký je jejich vztah k prostoru c_0?
   b) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p([0,1])$ a $L_q([0,1])$ pro $p < q$?
   c) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p(\mathbb{R})$ a $L_q(\mathbb{R})$ pro $p < q$?

10) Vektory $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ v prostorech c_0 a ℓ_p, $1 \le p < \infty$, kde pouze n-tá souřadnice je rovna 1, budeme nazývat kanonické bázové vektory. Ukažte, že pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ v c_0, resp. ℓ_p platí $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, kde konvergenci řady chápeme v příslušné normě.

11) Ukažte, že prostor c_0 je separabilní.

12) Ukažte, že prostor ℓ_p, $1 \le p < \infty$ je separabilní.

13) Ukažte, že prostor ℓ_∞ je neseparabilní.

3. CVIČENÍ

1) Ukažte, že podprostor $\{(x_n)_{n=1}^\infty;\ x_1 = 0\} \subset c_0$ je lineárně izometrický celému prostoru c_0.
2) Ukažte, že prostor c je izomorfní prostoru c_0.
3) Ukažte, že prostor $L_1([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_1.
4) Ukažte, že prostor $C([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru c_0.

4. CVIČENÍ

Ukažte, že $\phi\colon X \to \mathbb{K}$ je spojitý lineární funkcionál, spočtěte jeho normu a zjistěte, zda ϕ své normy nabývá:

1) $X = c$, $\phi((x_n)) = \lim x_n$
2) $X = \ell_1$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty x_{2n}$
3) $X = \ell_1$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} x_n$
4) $X = c_0$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} x_n$
5) $X = L_\infty([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$
6) $X = C([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$
7) $X = \ell_1$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n x_n$
8) $X = \ell_1$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty (1 - \frac{1}{n}) x_{2n}$
9) $X = \ell_2$, $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} x_n$
10) $X = C([0,1])$, $\phi(f) = f(0) - f(1)$
11) $X = L_\infty([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$
12) $X = L_1([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$
13) $X = L_1([0,1])$, $\phi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$

5. CVIČENÍ

Úlohy z minula.

6. CVIČENÍ

A) Nechť $1 < p < \infty$, $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ a $f\colon X \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $f(x, y) = ax + by$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$. Nalezněte globální extrémy f na B_X. Je f spojitý lineární funkcionál na X? Pokud ano, jaká je jeho norma?

B) Ukažte, že $T\colon X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte, zda T své normy nabývá. Dále zkoumejte následující otázky: Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro. Je operátor T na? Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru.

1) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$
2) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^\infty$
3) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{n}{n+1} x_n)_{n=1}^\infty$
4) $X = Y = C([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$
5) $X = C([0,r])$, $Y = C^1([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$; na prostoru $C^1([a,b])$ je norma $\|f\| = \sup|f| + \sup|f'|$.
6) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)$
7) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$
8) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{n+1}{n} x_n)_{n=1}^\infty$
9) $X = \ell_1$, $Y = \ell_\infty$, $T((x_n)) = (x_1 + \dots + x_n)_{n=1}^\infty$
10) $X = Y = C([0,1])$, $Tf = f + f(1) - f(0)$
11) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2}) f(t)$
12) $X = Y = C([-1,1])$, $Tf(t) = f(t^2)$
13) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \dots)$ (těžší příklad)
14) $X = C^1([0,1])$, $Y = C([0,1])$, $T(f) = f' - f$
15) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$

16) $X = C^2([0,1])$, $Y = C([0,1])$, $Tf = f'' + f$; na prostoru $C^1([a,b])$ je norma $\|f\| = \sup|f| + \sup|f'| + \sup|f''|$.
17) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$
18) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p \le \infty$, $Tf = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$

7. CVIČENÍ

Úlohy z minula.

8. CVIČENÍ

1) Nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v prostoru ℓ_2. Položme $e = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, $A = \{e_n;\ n \ge 2\}$ a $X = \operatorname{span}(\{e\} \cup A)$. Ukažte, že A je maximální ortonormální množina v X. Ukažte, že $X \neq \overline{\operatorname{span}}\, A$. Je prostor X úplný? Platí $X = Y \oplus Y^{\perp}$ pro $Y = \overline{\operatorname{span}}\, A$?

2) Nechť $X = \ell_1$ a $B = c_0 \subset \ell_\infty = \ell_1^*$. Nalezněte $B_\perp$. Ukažte, že $(B_\perp)^\perp \supsetneqq \overline{\operatorname{span}}\, B$.

3) Je dán je Hilbertův prostor H a jeho uzavřený podprostor $Y \subset H$. Nalezněte nějakou ortonormální bázi Y, napište vzorec pro ortogonální projekci na Y, a nalezněte nejbližší bod v Y k bodu $x_0 \in H$.

a) $H = L_2([0,1])$, Y je podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 1, $x_0(t) = t^2$.
b) $H = L_2([-1,1])$, Y je podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = t^3$; $x_0 = \sin$.
c) $H = \ell_2$, $Y = \operatorname{span}\{(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}, (\frac{1}{3^n})_{n=1}^{\infty}\}$, $x_0 = e_1$.

9. CVIČENÍ

Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.

1) $X = (\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{K}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$; napište reprezentující matice.
2) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$
3) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$
4) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1, ix_2, x_3, ix_4, \dots)$; jak vypadá hilbertovsky adjungovaný operátor $T^\star$?
5) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \dots)$
6) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (\frac{2}{1}x_2, -\frac{1}{2}x_1, \frac{3}{2}x_4, -\frac{2}{3}x_3, \dots, \frac{n+1}{n}x_{2n}, -\frac{n}{n+1}x_{2n-1}, \dots)$
7) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \big(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\big)_{n=1}^{\infty}$
8) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \big(\sum_{k=n}^{\infty} x_k\big)_{n=1}^{\infty}$
9) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p < \infty$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$
10) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p < \infty$, $T(f)(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$
11) $X = Y = L_2([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \min\{s,t\} f(s)\,\mathrm{d}s$
12) $X = Y = L_1([0,2])$, $Tf = f + \int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s$
13) $X = \ell_1$, $Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p < \infty$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$
14) $X = \ell_1$, $Y = C([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$
15) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^t f$
16) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = f(1-t)$
17) $X = Y = C([-1,1])$, $Tf(t) = f(t^2)$
18) $X = Y = C([0,1])$, $Tf(t) = f + f(1) - f(0)$

10. CVIČENÍ

Určete, zda je operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ kompaktní.

1) $X = (\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{K}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$
2) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$
3) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$
4) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$
5) $X = Y = c_0$, $T((x_n)) = \big(\frac{1}{n}x_n\big)_{n=1}^{\infty}$
6) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \big(\frac{1}{n}x_n\big)_{n=1}^{\infty}$
7) $X = \ell_2$, $Y = \ell_1$, $T((x_n)) = \big(\frac{1}{n}x_n\big)_{n=1}^{\infty}$
8) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \big(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\big)_{n=1}^{\infty}$
9) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \big(\sum_{k=n}^{\infty} x_k\big)_{n=1}^{\infty}$
10) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \le p < \infty$, $T(f)(t) = tf(t)$
11) $X = \ell_1$, $Y = L_1([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$
12) $X = Y = C([0,1])$, $Tf = f + f(1) - f(0)$

11. CVIČENÍ

Pro následující operátory $T \in \mathcal{L}(X)$ určete $\sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

1) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$
2) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$
3) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$
4) $X = \ell_1$, $T((x_n)) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1}, \dots)$
5) $X = c_0$, $T((x_n)) = \big(\frac{1}{n} x_n\big)_{n=1}^{\infty}$
6) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = \big(\frac{n+1}{n} x_n\big)_{n=1}^{\infty}$
7) $X = C([0,1])$, $Tf = f + f(1) - f(0)$
8) $X = C([0,1])$, $Tf(t) = tf(t)$
9) $X = C([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$
10) $X = L_p([0,1])$, kde $1 \leq p < \infty$, $T(f)(t) = tf(t)$
11) $X = C([-1,1])$, $Tf(t) = f(|t|)$
12) $X = Y = L_p([0,1])$, kde $1 \leq p \leq \infty$, $T(f)(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$