Vybrané partie z funkcionální analýzy

Vybrané partie z funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů

Vybrané partie z funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita

Vybrané partie z funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita
- Úplnost v Banachových prostorech

Vybrané partie z funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita
- Úplnost v Banachových prostorech
- Lineární operátory

Vybrané partie z funkcionální analýzy

- Základy Banachových a Hilbertových prostorů
- Hahnova-Banachova věta a dualita
- Úplnost v Banachových prostorech
- Lineární operátory
- Slabá konvergence

I. Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti

Definice 1

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0, +\infty)$ nazýváme normou na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaným lineárním prostorem.

Tvrzení 2

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$.

(a) *Funkce* $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X.

Tvrzení 2

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$*.*

(a) *Funkce* $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X*.*

(b) *Norma je* 1*-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na* X*.*

Tvrzení 2

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$.

(a) *Funkce* $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X.

(b) *Norma je* 1*-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na* X.

(c) *Zobrazení* $+ \colon X \times X \to X$ *a* $\cdot \colon \mathbb{K} \times X \to X$ *jsou spojitá.*

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj.
  $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Definice 3

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Definice 3

Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Tvrzení 4

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.*

(b) *Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.*

Definice 5 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí
$A\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le B\|x\|_2$.

Definice 5 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 6

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Definice 5 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 6

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Lemma 7

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

Definice 5 (ekvivalentní normy)

Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí
$A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 6

Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Lemma 7

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.

Tvrzení 8

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*

Tvrzení 8

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*

(ii) *Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*

Tvrzení 8

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*

(ii) *Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*

(iii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí, že $\|x_n - x\|_1 \to 0$, právě když $\|x_n - x\|_2 \to 0$.*

Tvrzení 8

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*

(ii) *Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*

(iii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí, že $\|x_n - x\|_1 \to 0$, právě když $\|x_n - x\|_2 \to 0$.*

(iv) *Zobrazení $Id\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.*

Tvrzení 8

Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*

(ii) *Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*

(iii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí, že $\|x_n - x\|_1 \to 0$, právě když $\|x_n - x\|_2 \to 0$.*

(iv) *Zobrazení $Id\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.*

(v) *Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.*

Definice 9

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda) y \in M$.

Definice 9

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.
Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je konvexní kombinací vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Definice 9

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.
Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je konvexní kombinací vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Fakt 10

Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.

Definice 11

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu
$\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Definice 11

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 12

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak

$$\operatorname{conv} M = \Bigg\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \ldots, x_n \in M, \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\Bigg\}.$$

Definice 13

Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Definice 14

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako
$\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$
a uzavřený konvexní obal M jako
$\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Definice 14

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako
$\overline{\mathrm{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$
a uzavřený konvexní obal M jako
$\overline{\mathrm{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 15

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.

Definice 14

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako
$\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$
a uzavřený konvexní obal M jako
$\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 15

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.

Tvrzení 16

Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, M = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \overline{\operatorname{conv} M}$.

Věta 17

Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

Věta 17

Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

Důsledek 18

Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.

Věta 19

(a) *Prostor c_0 je separabilní.*

Věta 19

(a) *Prostor* c_0 *je separabilní.*

(b) *Prostor* ℓ_∞ *je neseparabilní.*

Věta 19

(a) *Prostor* c_0 *je separabilní.*

(b) *Prostor* ℓ_∞ *je neseparabilní.*

(c) *Je-li* K *kompaktní metrický prostor, je prostor* $C(K)$ *separabilní.*

Věta 19

(a) *Prostor* c_0 *je separabilní.*

(b) *Prostor* ℓ_∞ *je neseparabilní.*

(c) *Je-li* K *kompaktní metrický prostor, je prostor* $C(K)$ *separabilní.*

(d) *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je lebesgueovsky měřitelná a* $1 \leq p < \infty$*. Pak prostor* $L_p(\Omega, \lambda)$ *je separabilní.*

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 20

Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$.

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 20

Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Definice 20

Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 20

Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Fakt 21

Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X. Pak

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Věta 22 (Test úplnosti)

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Definice 23

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou.

Definice 23

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Definice 23

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F \colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem.

Definice 23

Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Tvrzení 24

Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ *je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když*

$$\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathscr{F}(\Gamma)\right\} < +\infty.$$

Potom platí

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathscr{F}(\Gamma)\right\}.$$

Tvrzení 25

Nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *v normovaném lineárním prostoru* X *konverguje k* $x \in X$. *Pak i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje k* x.

3. Lineární operátory a funkcionály

3. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineární, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

3. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineární, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Fakt 26

Nechť X, Y jsou vektorové prostory, $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní. Obdobně, je-li $N \subset Y$ symetrická, pak $T^{-1}(N)$ je symetrická, a je-li N konvexní, pak $T^{-1}(N)$ je konvexní.

Tvrzení 27

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *T je spojité.*

(ii) *T je spojité v jednom bodě.*

(iii) *T je spojité v 0.*

(iv) *Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(v) *T je lipschitzovské.*

(vi) *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*

(vii) *$T(B_X)$ je omezená.*

Prostor $\mathscr{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 28

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) $\|T(x)\| \le \|T\|\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 28

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(b) *Je-li X netriviální, pak* $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 28

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(b) *Je-li* X *netriviální, pak* $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.

(c) $\|T\| = \inf\{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\|$ *pro každé* $x \in X\}$.

Fakt 29

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.

Fakt 29

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.

Fakt 30

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\| \|S\|$.

Věta 31

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Věta 31

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Definice 32

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

Věta 31

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Definice 32

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

Věta 33

Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.

Definice 34

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;

Definice 34

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;

Definice 34

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;

Definice 34

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na Rng T;
- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen izometrie do), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- izometricky vnořen do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- izometricky vnořen do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

Poznámka 35

Uvědomme si, že lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

Tvrzení 36

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty* $C_1, C_2 > 0$ *takové, že* $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

Tvrzení 36

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.*

Tvrzení 36

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) *$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.*

(c) *Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do, pak $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený v Y.*

Fakt 37

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

(a) *Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.*

(b) *Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.*

4. Konečněrozměrné prostory

Lemma 38 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918))

Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

Věta 39

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) *Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.*

(iii) *B_X je kompaktní.*

(iv) *Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.*

(v) *Každá lineární forma na X je spojitá.*

(vi) *Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.*

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 40

Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 41

Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktorprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y.

Definice 41

Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktorprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y. Dále definujeme tzv. kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| =$$
$$= \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y),$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| =$$
$$= \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y),$$

Tato norma se nazývá kanonická kvocientová norma.

Tvrzení 42

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.

Věta 43

Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.

Definice 44

Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \text{span}(A \cup B)$.

Definice 44

Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá algebraický doplněk A v X.

Definice 45

Nechť X je množina. Zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Definice 45

Nechť X je množina. Zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Fakt 46

Nechť X je množina.

(a) *Je-li $P\colon X \to X$ projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.*

Definice 45

Nechť X je množina. Zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Fakt 46

Nechť X je množina.

(a) *Je-li $P\colon X \to X$ projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.*

(b) *Je-li $Y \subset X$ a $P\colon X \to Y$ zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak P je projekce X na Y.*

Tvrzení 47

Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ a $\operatorname{Ker} P_B = A$.

Tvrzení 47

Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ a $\operatorname{Ker} P_B = A$. Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.

Věta 48

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*

Věta 48

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*

(b) *Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y (pomocí kanonického kvocientového zobrazení); speciálně* $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

Věta 48

Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X.*

(b) *Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y (pomocí kanonického kvocientového zobrazení); speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.*

Definice 49

Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzí Y (značíme codim Y) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Definice 50

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$.

Definice 50

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X.

Definice 50

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Definice 50

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Věta 51

Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.

(a) *Je-li $X = Y \oplus_t Z$, jsou Y a Z uzavřené.*

Definice 50

Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

Věta 51

Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.

(a) *Je-li $X = Y \oplus_t Z$, jsou Y a Z uzavřené.*

(b) *Je-li X Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde Y a Z jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_t Z$.*

6. Hilbertovy prostory

Definice 52

Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,

(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme prostor se skalárním součinem.

6. Hilbertovy prostory

Definice 52

Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,

(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme prostor se skalárním součinem.

Tvrzení 53 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak

(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ *pro každé $x, y \in X$.*

(ii) *Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X.*

Definice 54

Prostor se skalárním součinem $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá Hilbertův prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Tvrzení 55

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *je prostor se skalárním součinem nad* $\mathbb{K}$*.*

(a) *Pro libovolné* $y \in X$ *je* $f_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ *spojitý lineární funkcionál na* X *a* $\|f_y\| = \|y\|$*.*

Tvrzení 55

Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *je prostor se skalárním součinem nad* $\mathbb{K}$*.*

(a) *Pro libovolné* $y \in X$ *je* $f_y \colon x \mapsto \langle x, y\rangle$ *spojitý lineární funkcionál na* X *a* $\|f_y\| = \|y\|$*.*

(b) *Funkce* $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ *je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).*

Fakt 56

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

Fakt 56

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

Tvrzení 57 (rovnoběžníkové pravidlo)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Tvrzení 58 (polarizační vzorec)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

Tvrzení 58 (polarizační vzorec)

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

Důsledek 59

Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in X$.

Věta 60

Nechť X, Y *jsou prostory se skalárním součinem nad* $\mathbb{K}$. *Pak na prostoru* $X \oplus_2 Y$ *existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na* X *a* Y, *a který indukuje normu* $\|\cdot\|_2$. *Speciálně, jsou-li* X, Y *Hilbertovy prostory, pak* $X \oplus_2 Y$ *je Hilbertův prostor.*

Definice 61

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$.

Definice 61

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$.

Definice 61

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$.

Definice 61

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^{\perp} = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá ortogonální doplněk A.

Fakt 62 (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.)

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \ldots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Tvrzení 63

Nechť X je prostor se skalárním součinem.

(a) *Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$.*

Tvrzení 63

Nechť X je prostor se skalárním součinem.

(a) *Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$.*

(b) $\{0\}^{\perp} = X$ *a* $X^{\perp} = \{0\}$.

Tvrzení 63

Nechť X je prostor se skalárním součinem.

(a) *Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$.*

(b) $\{0\}^{\perp} = X$ *a* $X^{\perp} = \{0\}$.

(c) *Pro $A \subset X$ je $A^{\perp} = (\overline{\operatorname{span}} A)^{\perp}$.*

Tvrzení 63

Nechť X je prostor se skalárním součinem.

(a) *Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$.*

(b) $\{0\}^{\perp} = X$ *a* $X^{\perp} = \{0\}$.

(c) *Pro $A \subset X$ je $A^{\perp} = (\overline{\operatorname{span}} A)^{\perp}$.*

(d) *Pro $A \subset X$ je $A^{\perp}$ uzavřený podprostor X.*

Tvrzení 63

Nechť X je prostor se skalárním součinem.

(a) *Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$.*

(b) $\{0\}^{\perp} = X$ *a* $X^{\perp} = \{0\}$.

(c) *Pro $A \subset X$ je $A^{\perp} = (\overline{\operatorname{span}} A)^{\perp}$.*

(d) *Pro $A \subset X$ je $A^{\perp}$ uzavřený podprostor X.*

(e) *Je-li $X = Y + Z$ pro nějaké podprostory $Y, Z \subset X$ takové, že $Y \perp Z$, pak $Z = Y^{\perp}$, $Y = Z^{\perp}$ a $X = Y \oplus Z$.*

Lemma 64

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y \rangle = \langle z, y \rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.

Věta 65 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, C)$.

Věta 65 (Frigyes Riesz, 1934)

Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, C)$.

Lemma 66 (F. Riesz, 1934)

Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \perp Y$.

Definice 67

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je projekce. Pokud $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$, pak P se nazývá ortogonální.

Definice 67

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je projekce. Pokud $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$, pak P se nazývá ortogonální.

Věta 68

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je lineární projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *P je ortogonální.*

(ii) $\operatorname{Ker} P \perp \operatorname{Rng} P$.

(iii) $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Rng} P)^{\perp}$ *a* $\operatorname{Rng} P = (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$.

(iv) $\|x - P(x)\| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Rng} P)$ *pro každé* $x \in X$.

(v) *P je spojitá a $\|P\| \leq 1$ (tj. $P = 0$, nebo $\|P\| = 1$).*

Věta 69 (F. Riesz, 1934)

Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = Y \oplus_{\mathrm{t}} Y^{\perp}$ a H je izometrický prostoru $Y \oplus_2 Y^{\perp}$ pomocí kanonického zobrazení $T\colon x \mapsto \big(P_Y(x), P_{Y^{\perp}}(x)\big)$.

Důsledek 70

Nechť H je Hilbertův prostor a $A \subset H$. Pak $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{span}} A$.

Definice 71

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;

Definice 71

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;

Definice 71

Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Věta 72

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} x_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Lemma 73

Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ *je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a* $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$, *kde* x_γ *jsou skaláry. Pak* $x_\gamma = \langle x, e_\gamma \rangle$ *pro každé* $\gamma \in \Gamma$.

Lemma 73

Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ *je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a* $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$*, kde* x_γ *jsou skaláry. Pak* $x_\gamma = \langle x, e_\gamma \rangle$ *pro každé* $\gamma \in \Gamma$*.*

Fakt 74

Nechť $\{e_i\}_{i \in F}$ *je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak* $\left\| \sum_{i \in F} a_i e_i \right\|^2 = \sum_{i \in F} |a_i|^2$ *pro libovolné skaláry* a_i*,* $i \in F$*.*

Lemma 73

Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ *je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a* $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$*, kde* x_γ *jsou skaláry. Pak* $x_\gamma = \langle x, e_\gamma\rangle$ *pro každé* $\gamma \in \Gamma$.

Fakt 74

Nechť $\{e_i\}_{i\in F}$ *je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak* $\left\|\sum_{i\in F} a_i e_i\right\|^2 = \sum_{i\in F} |a_i|^2$ *pro libovolné skaláry* a_i, $i \in F$.

Důsledek 75

Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.

Lemma 76

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i\in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i \in Y^{\perp}$.

Lemma 76

Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i\in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i \in Y^{\perp}$.

Věta 77 (Besselova nerovnost)

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.

Věta 78

Nechť X *je Hilbertův prostor a* $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *je ortonormální systém v* X*. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé* $x \in X$ *(tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé* $x \in X$*.*

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$*.*

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Věta 78

Nechť X je Hilbertův prostor a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé* $x \in X$ *(tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé* $x \in X$*.*

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Důsledek 79

Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

Důsledek 80

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *ortonormální soustava v Hilbertově prostoru* H*, pak zobrazení* $P\colon H \to H$*,* $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *je ortogonální lineární projekce na* $\overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$*.*

Důsledek 80

Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *ortonormální soustava v Hilbertově prostoru* H*, pak zobrazení* $P\colon H \to H$*,* $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *je ortogonální lineární projekce na* $\overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$*. Dále je* $\|P(x)\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé* $x \in X$*.*

Věta 81 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907))

Je-li $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ortonormální báze Hilbertova prostoru* H*, je zobrazení* $T\colon H \to \ell_2$, $T(x) = \{\langle x, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ *izometrie* H *a* ℓ_2*. Tedy každý separabilní nekonečněrozměrný Hilbertův prostor je izometrický prostoru* ℓ_2*.*

Věta 82 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))

Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.

Věta 82 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))

Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.

Lemma 83

Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

Tvrzení 84

Nechť X je komplexní vektorový prostor. Pak funkce $f\colon X \to \mathbb{C}$ je (komplexní) lineární forma, právě když $\operatorname{Re} f$ *je reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$ a platí* $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

Definice 85

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Definice 85

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p\colon X \to [0, +\infty)$ se nazývá pseudonorma, pokud platí

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 86 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))

Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.

(a) *Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Věta 86 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))

Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.

(a) *Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \le p(x)$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Věta 87 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

Věta 87 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

Důsledek 88

Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).

Věta 87 (Hahnova-Banachova)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

Důsledek 88

Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).

Důsledek 89 (Duální vyjádření normy)

Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.

Věta 90 (Oddělování bodu a podprostoru)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.

Věta 90 (Oddělování bodu a podprostoru)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.

Věta 91 (Oddělování konvexních množin)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ pro každé $x \in A$.*

Věta 90 (Oddělování bodu a podprostoru)

Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.

Věta 91 (Oddělování konvexních množin)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:

(a) *Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ pro každé $x \in A$.*

(b) *Je-li A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$.*

Věta 92

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.*

Věta 92

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.*

(b) *Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.*

Definice 93

Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^\perp = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Definice 93

Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^{\perp} = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. zpětný anihilátor jako

$$B_{\perp} = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Lemma 94

Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak

(a) $A^\perp$ *je uzavřený podprostor* X^*,

(b) $B_\perp$ *je uzavřený podprostor* X,

(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}\, A$,

(d) $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\operatorname{span}}\, B$.

2. Reprezentace duálů

Tvrzení 95

Nechť X *a* Y *jsou izometrické normované lineární prostory. Pak i prostory* X^* *a* Y^* *jsou izometrické.*

Definice 96

Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme sdruženým exponentem k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Věta 97 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)

(a) *Prostor* c_0^* *je lineárně izometrický s prostorem* ℓ_1 *pomocí zobrazení* $I\colon \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, *kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Věta 97 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)

(a) *Prostor* c_0^* *je lineárně izometrický s prostorem* ℓ_1 *pomocí zobrazení* $I\colon \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, *kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(b) *Je-li* $1 \leq p < \infty$ *a* q *je sdružený exponent k* p, *pak prostor* ℓ_p^* *je lineárně izometrický s prostorem* ℓ_q *pomocí zobrazení* $I\colon \ell_q \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, *kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu.$$

Definice 98

Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Definice 98

Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Věta 99 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)

Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.

Věta 100 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)

Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I\colon M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

3. Druhý duál a reflexivita

Definice 101

Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 102

Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**}.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 102

Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**}.

Tvrzení 103

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}

Věta 104

Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor.

Věta 104

Pro každý normovaný lineární prostor X *existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že* X *je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem* X *existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že* X *je jeho hustý podprostor.*

Věta 104

Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.

Definice 105

Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Definice 105

Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Věta 106

Každý Hilbertův prostor je reflexivní.

Věta 107

Nechť X, Y *jsou Banachovy prostory.*

(a) *Je-li* X *izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i* X *reflexivní.*

Věta 107

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

(b) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

Věta 107

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

(b) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

(c) *Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.*

Věta 107

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.*

(b) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

(c) *Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.*

(d) *Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.*

Příklady 108

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

Příklady 108

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

Příklady 108

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

Příklady 108

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

(d) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

Věta 109 (Robert Clarke James (1964))

Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když každý funkcionál z X^* nabývá na B_X své normy.

III. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 110 (Princip stejnoměrné omezenosti)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) *Pro každé $x \in X$ je* $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Věta 110 (Princip stejnoměrné omezenosti)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) *Pro každé $x \in X$ je* $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Věta 110 (Princip stejnoměrné omezenosti)

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) *Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.*

Důsledek 111

Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

Definice 112

Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Definice 112

Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 113 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.

Důsledek 114 (S. Banach, 1929)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.

Důsledek 114 (S. Banach, 1929)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.

Důsledek 115

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Prostor Y je lineárně izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$ pomocí zobrazení $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ daného předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$.

Definice 116

Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme **grafem zobrazení f**.

Definice 116

Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Definice 116

Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 117 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.

IV. Lineární operátory

1. Duální operátory

Věta 118

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H)$ takový, že pro každé $x, y \in H$ platí

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^\star y \rangle.$$

Věta 118

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H)$ takový, že pro každé $x, y \in H$ platí

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^\star y \rangle.$$

Definice 119

Operátor $T^\star$ z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k T.

Věta 120

Nechť H je Hilbertův prostor.

(a) *Je-li $T \in \mathscr{L}(H)$, je $(T^\star)^\star = T$.*

Věta 120

Nechť H je Hilbertův prostor.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$, je $(T^\star)^\star = T$.*

(b) *Zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H)$ na $\mathcal{L}(H)$.*

Věta 120

Nechť H je Hilbertův prostor.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$, je $(T^\star)^\star = T$.*

(b) *Zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H)$ na $\mathcal{L}(H)$.*

(c) *Nechť $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Pak $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$. Dále $Id^\star = Id$.*

Definice 121

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá duální (nebo též (banachovsky) adjungovaný) operátor k T.

Věta 122

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.*

Věta 122

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.*

(b) *Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*

Věta 122

Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(a) *Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.*

(b) *Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*

(c) *Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.*

Věta 123

Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí

(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,

(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,

(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,

(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

(e) *Jsou-li navíc X, Y Banachovy a* $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak* $\operatorname{Rng} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Věta 124

Nechť X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*.*

(a) T^* *je prostý, právě když* $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v* Y*.*

Věta 124

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(a) *T^* je prostý, právě když* $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v Y.*

(b) *T je izomorfismus na, právě když T^* je izomorfismus na. V tomto případě pak platí, že $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Věta 124

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) *T^* je prostý, právě když* $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v Y.*

(b) *T je izomorfismus na, právě když T^* je izomorfismus na. V tomto případě pak platí, že $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

(c) *T izometrie na, právě když T^* je izometrie na.*

2. Kompaktní operátory

Definice 125

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá **kompaktní operátor**, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y.

2. Kompaktní operátory

Definice 125

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Definice 125

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi.

Definice 125

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud Rng T má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tvrzení 126

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T: X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *T je kompaktní.*

(ii) *$T(B_X)$ je relativně kompaktní.*

(iii) *Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.*

Věta 127

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

Věta 127

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.*

Věta 127

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) *Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.*

(c) *Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.*

Věta 128 (J. P. Schauder, 1930)

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 129

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertovatelný, právě když T je bijekce.

Definice 130

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$.

Definice 130

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ.

Definice 130

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ.

Definice 130

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Definice 130

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathscr{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.
Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertovatelný. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Věta 131

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.

Věta 132

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.

Tvrzení 133

Nechť X je Banachův prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, *pak* $0 \in \sigma(T)$.

Tvrzení 133

Nechť X je Banachův prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$.

Věta 134

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$ a $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.

Věta 135 (Fredholmova alternativa)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.

Věta 135 (Fredholmova alternativa)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.

Důsledek 136

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Lemma 137

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Lemma 137

Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Věta 138

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.

Důsledek 139

Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.

Věta 140 (Druhá Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

Věta 140 (Druhá Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

Věta 141 (Třetí Fredholmova věta)

Nechť X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) &= \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \\ &= \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.\end{aligned}$$

V. Slabá konvergence

Definice 142

Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ konverguje slabě k $x \in X$, jestliže pro každé $f \in X^*$ platí, že $f(x_n) \to f(x)$. Značíme to $x_n \stackrel{w}{\to} x$.

V. Slabá konvergence

Definice 142

Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ konverguje slabě k $x \in X$, jestliže pro každé $f \in X^*$ platí, že $f(x_n) \to f(x)$. Značíme to $x_n \xrightarrow{w} x$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\} \subset X^*$ konverguje slabě s hvězdičkou k $f \in X^*$, jestliže pro každé $x \in X$ platí, že $f_n(x) \to f(x)$. Značíme to $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

V. Slabá konvergence

Definice 142

Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ konverguje slabě k $x \in X$, jestliže pro každé $f \in X^*$ platí, že $f(x_n) \to f(x)$. Značíme to $x_n \xrightarrow{w} x$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\} \subset X^*$ konverguje slabě s hvězdičkou k $f \in X^*$, jestliže pro každé $x \in X$ platí, že $f_n(x) \to f(x)$. Značíme to $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Fakt 143

Limity slabá i slabá s hvězdičkou jsou určeny jednoznačně.

Lemma 144

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Je-li $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ a $x_n \to x$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Lemma 144

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Je-li* $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ *a* $x_n \to x$, *pak* $x_n \stackrel{w}{\to} x$.

(b) *Je-li* $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$ *a* $f_n \stackrel{w}{\to} f$, *pak* $f_n \stackrel{w^*}{\to} f$.

Lemma 144

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Je-li* $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ *a* $x_n \to x$, *pak* $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) *Je-li* $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$ *a* $f_n \xrightarrow{w} f$, *pak* $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

(c) *Je-li X reflexivní Banachův prostor,* $\{f_n\} \subset X^*$ *a* $f \in X^*$, *pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Lemma 144

Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) *Je-li* $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ *a* $x_n \to x$, *pak* $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) *Je-li* $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$ *a* $f_n \xrightarrow{w} f$, *pak* $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

(c) *Je-li* X *reflexivní Banachův prostor,* $\{f_n\} \subset X^*$ *a* $f \in X^*$, *pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Lemma 145

Každá slabě i slabě s hvězdičkou konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 146

Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když každá omezená posloupnost v X má slabě konvergentní podposloupnost.

Tvrzení 147

Pro následující Banachovy prostory X, posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí:

(a) *Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

Tvrzení 147

Pro následující Banachovy prostory X, posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí:

(a) *Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

(b) *Pokud $X = \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$, pak $x_n \stackrel{w^*}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

Tvrzení 147

Pro následující Banachovy prostory X, posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí:

(a) *Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

(b) *Pokud $X = \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$, pak $x_n \stackrel{w^*}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

(c) *Pokud $X = C(K)$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(t) \to x(t)$ pro každé $t \in K$.*

Tvrzení 148

Nechť $X = L_p(\mu)$, $\{f_n\} \subset X$ *a* $f \in X$.

(a) *Je-li* $1 < p < \infty$, *pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A *konečné míry.*

Tvrzení 148

Nechť $X = L_p(\mu)$, $\{f_n\} \subset X$ *a* $f \in X$.

(a) *Je-li* $1 < p < \infty$, *pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A *konečné míry.*

(b) *Je-li* $p = 1$ *a* μ *je* σ*-konečná, pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A.

Tvrzení 148

Nechť $X = L_p(\mu)$, $\{f_n\} \subset X$ *a* $f \in X$.

(a) *Je-li* $1 < p < \infty$, *pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A *konečné míry.*

(b) *Je-li* $p = 1$ *a* μ *je* σ*-konečná, pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A.

(c) *Je-li* $1 < p < \infty$, $\{f_n\}$ *je omezená a* $f_n \to f$ *bodově s.v., pak* $f_n \xrightarrow{w} f$.

Tvrzení 148

Nechť $X = L_p(\mu)$, $\{f_n\} \subset X$ *a* $f \in X$.

(a) *Je-li* $1 < p < \infty$, *pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A *konečné míry.*

(b) *Je-li* $p = 1$ *a* μ *je* σ*-konečná, pak* $f_n \xrightarrow{w} f$, *právě když* $\{f_n\}$ *je omezená a* $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ *pro každou měřitelnou* A.

(c) *Je-li* $1 < p < \infty$, $\{f_n\}$ *je omezená a* $f_n \to f$ *bodově s.v., pak* $f_n \xrightarrow{w} f$.

(d) *Je-li* $1 < p < \infty$, $\{f_n\}$ *je omezená a* $f_n \to f$ *v míře, pak* $f_n \xrightarrow{w} f$.