# I. Banachovy a Hilbertovy prostory

## 1. Základní vlastnosti

**Definice 1.** Nechť $X$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0, +\infty)$ nazýváme *normou* na $X$, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem*.

**Tvrzení 2.** *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.*

*(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na $X$.*

*(b) Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na $X$.*

*(c) Zobrazení $+\colon X \times X \to X$ a $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ jsou spojitá.*

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v $X$.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v $X$.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

**Definice 3.** *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

**Tvrzení 4.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor a $Y$ jeho podprostor.*

*(a) Je-li $Y$ Banachův, pak $Y$ je uzavřený v $X$.*

*(b) Je-li $X$ Banachův, pak $Y$ je Banachův, právě když $Y$ je uzavřený v $X$.*

**Definice 5** (ekvivalentní normy)**.** Nechť $X$ je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na $X$. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

**Věta 6.** *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

**Lemma 7.** *Nechť $X$ je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na $X$, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.*

**Tvrzení 8.** *Nechť $X$ je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na $X$ a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*

*(ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.*

*(iii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí, že $\|x_n - x\|_1 \to 0$, právě když $\|x_n - x\|_2 \to 0$.*

*(iv) Zobrazení $Id\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.*

*(v) Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.*

**Definice 9.** Nechť $X$ je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *konvexní kombinací* vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

**Fakt 10.** *Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.*

**Definice 11.** Nechť $X$ je vektorový prostor a $M \subset X$. *Konvexním obalem* $M$ nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

**Tvrzení 12.** *Nechť $X$ je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak*

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Definice 13.** Nechť $X$ je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

**Definice 14.** Nechť $X$ je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme *uzavřený lineární obal $M$* jako $\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a *uzavřený konvexní obal $M$* jako $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

**Fakt 15.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor, $Y$ je podprostor $X$ a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor $X$ a $\overline{C}$ je konvexní množina.*

**Tvrzení 16.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, M = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \overline{\operatorname{conv} M}$.*

**Věta 17.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.*

**Důsledek 18.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor $X$ je uzavřený v $X$.*

**Věta 19.**

*(a) Prostor $c_0$ je separabilní.*

*(b) Prostor $\ell_\infty$ je neseparabilní.*

*(c) Je-li $K$ kompaktní metrický prostor, je prostor $C(K)$ separabilní.*

*(d) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná a $1 \leq p < \infty$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.*

## 2. Řady v normovaných lineárních prostorech

**Definice 20.** Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje* k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je *absolutně konvergentní*, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

**Fakt 21.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v $X$. Pak*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

**Věta 22** (Test úplnosti)**.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor. Pak $X$ je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

**Definice 23.** Nechť $X$ je normovaný lineární prostor, $\Gamma$ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru $X$. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme *zobecněnou řadou*. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin $\Gamma$. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a $x$ nazýváme jejím součtem. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

**Tvrzení 24.** *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když*

$$\sup\left\{ \sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\} < +\infty.$$

*Potom platí*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\left\{ \sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}.$$

**Tvrzení 25.** *Nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ v normovaném lineárním prostoru $X$ konverguje k $x \in X$. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x$.*

## 3. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T: X \to Y$ mezi vektorovými prostory $X$, $Y$ nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineární*, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

**Fakt 26.** *Nechť $X$, $Y$ jsou vektorové prostory, $T: X \to Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li $M$ symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li $M$ konvexní, pak $T(M)$ je konvexní. Obdobně, je-li $N \subset Y$ symetrická, pak $T^{-1}(N)$ je symetrická, a je-li $N$ konvexní, pak $T^{-1}(N)$ je konvexní.*

**Tvrzení 27.** *Nechť $X$, $Y$ jsou normované lineární prostory a $T: X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i)* *$T$ je spojité.*

*(ii)* *$T$ je spojité v jednom bodě.*

*(iii)* *$T$ je spojité v* $0$.

*(iv)* *Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

*(v)* *$T$ je lipschitzovské.*

*(vi)* *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*

*(vii)* *$T(B_X)$ je omezená.*

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

**Lemma 28.** *Nechť $X$, $Y$ jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

*(a)* $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ *pro každé $x \in X$.*

*(b)* *Je-li $X$ netriviální, pak* $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.

*(c)* $\|T\| = \inf\{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\|$ *pro každé* $x \in X\}$.

**Fakt 29.** *Nechť $X$, $Y$ jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k $T$ bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru $Y$.*

**Fakt 30.** *Nechť $X$, $Y$, $Z$ jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.*

**Věta 31.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor a $Y$ je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.*

**Definice 32.** Nechť $X$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme $X^*$ a nazýváme jej *duálním prostorem* k prostoru $X$.

**Věta 33.** *Je-li $X$ normovaný lineární prostor, je prostor $X^*$ úplný.*

**Definice 34.** Nechť $X$, $Y$ jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že $T$ je

- *izomorfismus* $X$ na $Y$ (nebo jen izomorfismus), pokud $T$ je bijekce $X$ na $Y$ a inverzní operátor $T^{-1}$ je spojitý;
- izomorfismus $X$ do $Y$ (nebo jen *izomorfismus do*), pokud $T$ je izomorfismus $X$ na $\operatorname{Rng} T$;
- *izometrie* $X$ na $Y$ (nebo jen izometrie), pokud $T$ je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie $X$ do $Y$ (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory $X$ a $Y$ jsou

- *izomorfní*, pokud existuje lineární izomorfismus $X$ na $Y$;
- *izometrické*, pokud existuje lineární izometrie $X$ na $Y$.

Říkáme, že prostor $X$ je

- *izomorfně vnořen* do $Y$, pokud existuje lineární izomorfismus $X$ do $Y$;
- *izometricky vnořen* do $Y$, pokud existuje lineární izometrie $X$ do $Y$.

*Poznámka* 35. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

**Tvrzení 36.** *Nechť $X$, $Y$ jsou normované lineární prostory.*

*(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

*(b) Je-li $X$ izomorfní s $Y$ a $X$ je Banachův, je i $Y$ Banachův.*

*(c) Je-li $X$ Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do, pak* $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený v $Y$.*

**Fakt 37.** *Nechť $X$, $Y$, $Z$ jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.*

*(a) Jsou-li $S$, $T$ izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.*

*(b) Jsou-li $S$, $T$ izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.*

## 4. Konečněrozměrné prostory

**Lemma 38** (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918))**.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor. Je-li $Y$ vlastní uzavřený podprostor $X$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že* $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

**Věta 39.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i)* $\dim X < \infty$.

*(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X$ je izomorfní s* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.

*(iii) $B_X$ je kompaktní.*

*(iv) Každé lineární zobrazení z $X$ do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.*

*(v) Každá lineární forma na $X$ je spojitá.*

*(vi) Každé dvě normy na $X$ jsou ekvivalentní.*

## 5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

**Definice 40.** Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Nechť $X$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $Y$ je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na $X$ jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující $x$, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

**Definice 41.** Nechť $X$ je vektorový prostor a $Y$ je jeho podprostor. Pak vektorový prostor $X/Y$ nazýváme *faktorprostorem* prostoru $X$ podle $Y$ nebo též *kvocientem* $X$ podle $Y$. Dále definujeme tzv. *kanonické kvocientové zobrazení* $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Nechť $X$ je normovaný lineární prostor a $Y$ jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\begin{aligned}\|\widehat{x}\|_{X/Y} &= \inf_{y\in\widehat{x}}\|y\| = \inf_{y\in Y}\|x+y\| = \inf_{y\in Y}\|x-y\| = \\ &= \operatorname{dist}(x+Y,0) = \operatorname{dist}(x,Y),\end{aligned}$$

Tato norma se nazývá *kanonická kvocientová norma*.

**Tvrzení 42.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor a $Y$ jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li $Y$ vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

**Věta 43.** *Nechť $X$ je Banachův prostor a $Y$ jeho uzavřený podprostor. Pak $X/Y$ je též Banachův prostor.*

**Definice 44.** Nechť $X$ je vektorový prostor a $A$, $B$ jsou jeho podprostory. Říkáme, že $X$ je *direktním (též algebraickým) součtem* $A$ a $B$ (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}(A \cup B)$. Je-li $A$ podprostor $X$, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá *algebraický doplněk* $A$ v $X$.

**Definice 45.** Nechť $X$ je množina. Zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá *projekce*, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

**Fakt 46.** *Nechť $X$ je množina.*

*(a) Je-li $P\colon X \to X$ projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.*

*(b) Je-li $Y \subset X$ a $P\colon X \to Y$ zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak $P$ je projekce $X$ na $Y$.*

**Tvrzení 47.** *Nechť $X$ je vektorový prostor. Jsou-li $P_A$, $P_B$ projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ a $\operatorname{Ker} P_B = A$. Na druhou stranu, je-li $P$ lineární projekce v $X$, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.*

**Věta 48.** *Nechť $X$ je vektorový prostor a $Y$ jeho podprostor.*

*(a) Prostor $Y$ má algebraický doplněk v $X$.*

*(b) Je-li $A$ algebraický doplněk $Y$ v $X$, je $A$ algebraicky izomorfní s $X/Y$ (pomocí kanonického kvocientového zobrazení); speciálně* $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

**Definice 49.** Je-li $X$ vektorový prostor a $Y$ jeho podprostor, pak *kodimenzí* $Y$ (značíme $\operatorname{codim} Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku $Y$ (což je rovno dimenzi $X/Y$).

**Definice 50.** Je-li $X$ normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že $X$ je *topologickým součtem* $A$ a $B$, pokud jsou příslušné projekce $P_A$ a $P_B$ spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li $A$ podprostor $X$, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá *topologický doplněk* $A$ v $X$. Má-li $A$ topologický doplněk, pak říkáme, že je *komplementovaný* (v $X$).

**Věta 51.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.*

*(a) Je-li $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, jsou $Y$ a $Z$ uzavřené.*

*(b) Je-li $X$ Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde $Y$ a $Z$ jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$.*

## 6. Hilbertovy prostory

**Definice 52.** *Skalárním součinem* na vektorovém prostoru $X$ nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,

(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem*.

**Tvrzení 53** (Cauchyova-Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem. Pak*

*(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ pro každé $x, y \in X$.*

*(ii) Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro $x \in X$ je norma na $X$.*

**Definice 54.** Prostor se skalárním součinem $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

**Tvrzení 55.** *Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$.*

*(a) Pro libovolné $y \in X$ je $f_y\colon x \mapsto \langle x, y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na $X$ a $\|f_y\| = \|y\|$.*

*(b) Funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).*

**Fakt 56.** *Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle.$$

**Tvrzení 57** (rovnoběžníkové pravidlo)**.** *Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

**Tvrzení 58** (polarizační vzorec)**.** *Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big)$$

*v reálném případě, resp.*

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\big)$$

*v komplexním případě.*

**Důsledek 59.** *Nechť $X$, $Y$ jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak $T$ zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

**Věta 60.** *Nechť $X$, $Y$ jsou prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak na prostoru $X \oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na $X$ a $Y$, a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li $X$, $Y$ Hilbertovy prostory, pak $X \oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.*

**Definice 61.** Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají *ortogonální* (na sebe *kolmé*), pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek $x$ je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk $A$*.

**Fakt 62** (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.)**.** *Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

*Obecněji, jsou-li $x_1, \dots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak*

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

**Tvrzení 63.** *Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem.*

*(a) Je-li $Y$ podprostor $X$, pak $Y \cap Y^\perp = \{0\}$.*

*(b) $\{0\}^\perp = X$ a $X^\perp = \{0\}$.*

*(c) Pro $A \subset X$ je $A^\perp = (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$.*

*(d) Pro $A \subset X$ je $A^\perp$ uzavřený podprostor $X$.*

*(e) Je-li $X = Y + Z$ pro nějaké podprostory $Y, Z \subset X$ takové, že $Y \perp Z$, pak $Z = Y^\perp$, $Y = Z^\perp$ a $X = Y \oplus Z$.*

**Lemma 64.** *Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.*

**Věta 65** (Frigyes Riesz, 1934)**.** *Nechť $C$ je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru $H$. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

**Lemma 66** (F. Riesz, 1934)**.** *Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem, $Y$ je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \perp Y$.*

**Definice 67.** Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem a $P: X \to X$ je projekce. Pokud $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$, pak $P$ se nazývá ortogonální.

**Věta 68.** *Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem a $P: X \to X$ je lineární projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i)* *$P$ je ortogonální.*

*(ii)* $\operatorname{Ker} P \perp \operatorname{Rng} P$.

*(iii)* $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Rng} P)^\perp$ *a* $\operatorname{Rng} P = (\operatorname{Ker} P)^\perp$.

*(iv)* $\|x - P(x)\| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Rng} P)$ *pro každé* $x \in X$.

*(v)* *$P$ je spojitá a $\|P\| \leq 1$ (tj. $P = 0$, nebo $\|P\| = 1$).*

**Věta 69** (F. Riesz, 1934)**.** *Nechť $Y$ je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $H$. Pak $H = Y \oplus_t Y^\perp$ a $H$ je izometrický prostoru $Y \oplus_2 Y^\perp$ pomocí kanonického zobrazení $T: x \mapsto \big(P_Y(x), P_{Y^\perp}(x)\big)$.*

**Důsledek 70.** *Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $A \subset H$. Pak $(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}}\, A$.*

**Definice 71.** Je-li $X$ prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina $A$ je

- *ortonormální*, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- *maximální ortonormální*, pokud $A$ je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující $A$ různá od $A$;
- *ortonormální báze*, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry $x_\gamma$.

**Věta 72.** *Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}}^\infty x_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$.*

**Lemma 73.** *Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde $x_\gamma$ jsou skaláry. Pak $x_\gamma = \langle x, e_\gamma \rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.*

**Fakt 74.** *Nechť $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak $\left\|\sum_{i \in F} a_i e_i\right\|^2 = \sum_{i \in F} |a_i|^2$ pro libovolné skaláry $a_i$, $i \in F$.*

**Důsledek 75.** *Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.*

**Lemma 76.** *Nechť $X$ je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v $X$. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i \in Y^\perp$.*

**Věta 77** (Besselova nerovnost)**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru $X$ se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.*

**Věta 78.** *Nechť $X$ je Hilbertův prostor a $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je ortonormální systém v $X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i)* $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ *pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

*(ii)* $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$ *pro každé $x \in X$.*

*(iii)* *$\{e_\gamma\}$ je ortonormální báze.*

*(iv)* $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

*(v)* *$\{e_\gamma\}$ je maximální ortonormální systém.*

**Důsledek 79.** *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

**Důsledek 80.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v Hilbertově prostoru $H$, pak zobrazení $P: H \to H$, $P(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$ je ortogonální lineární projekce na $\overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$. Dále je $\|P(x)\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ pro každé $x \in X$.*

**Věta 81** (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907))**.** *Je-li $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ortonormální báze Hilbertova prostoru $H$, je zobrazení $T: H \to \ell_2$, $T(x) = \{\langle x, e_n \rangle\}_{n=1}^\infty$ izometrie $H$ a $\ell_2$. Tedy každý separabilní nekonečněrozměrný Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2$.*

**Věta 82** (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))**.** *Nechť $H$ je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I: H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie $H$ na $H^*$.*

**Lemma 83.** *Nechť $X$ je vektorový prostor, $f$ je lineární forma na $X$ a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy* $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

# II. Hahnova-Banachova věta a dualita

## 1. Hahnova-Banachova věta

**Tvrzení 84.** *Nechť $X$ je komplexní vektorový prostor. Pak funkce $f: X \to \mathbb{C}$ je (komplexní) lineární forma, právě když* $\operatorname{Re} f$ *je reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$ a platí* $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

**Definice 85.** Nechť $X$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p: X \to \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární funkcionál*, pokud platí

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p: X \to [0, +\infty)$ se nazývá *pseudonorma*, pokud platí

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

**Věta 86** (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))**.** *Nechť $X$ je vektorový prostor a $Y$ je podprostor $X$.*

*(a) Je-li $X$ reálný, $p$ je sublineární funkcionál na $X$ a $f$ je lineární forma na $Y$ splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma $F$ na $X$ taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

*(b) Je-li $p$ pseudonorma na $X$ a $f$ je lineární forma na $Y$ splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma $F$ na $X$ taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

**Věta 87** (Hahnova-Banachova)**.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor, $Y$ je podprostor $X$ a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.*

**Důsledek 88.** *Nechť $X$ je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že $X^*$ odděluje body $X$).*

**Důsledek 89** (Duální vyjádření normy)**.** *Je-li $X$ normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak* $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.

**Věta 90** (Oddělování bodu a podprostoru)**.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor, $Y$ je uzavřený podprostor $X$ a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.*

**Věta 91** (Oddělování konvexních množin)**.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:*

*(a) Je-li $A$ otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že* $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ *pro každé $x \in A$.*

*(b) Je-li $A$ uzavřená a $B$ kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že* $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$.

**Věta 92.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor.*

*(a) Každý konečněrozměrný podprostor $X$ je komplementovaný.*

*(b) Každý uzavřený podprostor $X$ konečné kodimenze je komplementovaný.*

**Definice 93.** Je-li $X$ normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. *anihilátor* množiny $A$ jako

$$A^\perp = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. *zpětný anihilátor* jako

$$B_\perp = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

**Lemma 94.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*

*(a) $A^\perp$ je uzavřený podprostor $X^*$,*

*(b) $B_\perp$ je uzavřený podprostor $X$,*

*(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}} A$,*

*(d) $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\operatorname{span}} B$.*

## 2. Reprezentace duálů

**Tvrzení 95.** *Nechť $X$ a $Y$ jsou izometrické normované lineární prostory. Pak i prostory $X^*$ a $Y^*$ jsou izometrické.*

**Definice 96.** Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme *sdruženým exponentem* k $p$, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

**Věta 97** (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)**.**

*(a) Prostor $c_0^*$ je lineárně izometrický s prostorem $\ell_1$ pomocí zobrazení $I : \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i .$$

*(b) Je-li $1 \leq p < \infty$ a $q$ je sdružený exponent k $p$, pak prostor $\ell_p^*$ je lineárně izometrický s prostorem $\ell_q$ pomocí zobrazení $I : \ell_q \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde*

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i .$$

*(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a $q$ je sdružený exponent k $p$, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I : L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde*

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} fg \,\mathrm{d}\mu .$$

*(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se $\sigma$-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I : L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde*

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} fg \,\mathrm{d}\mu .$$

**Definice 98.** Nechť $K$ je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál $\Lambda$ na $C(K)$ je *nezáporný*, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

**Věta 99** (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)**.** *Nechť $K$ je kompaktní prostor a $\Lambda$ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra $\mu$ na $K$ splňující $\Lambda(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.*

**Věta 100** (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)**.** *Je-li $K$ kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na $K$ pomocí zobrazení $I : M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde*

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu .$$

## 3. Druhý duál a reflexivita

**Definice 101.** Nechť $X$ je normovaný lineární prostor. Symbolem $X^{**}$ značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru $X^*$. Tento prostor nazýváme *druhým duálem*.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. *evaluační funkcionál* $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

**Definice 102.** Nechť $X$ je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá *kanonické vnoření $X$ do $X^{**}$*.

**Tvrzení 103.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy $X$ navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor $X^{**}$*

**Věta 104.** *Pro každý normovaný lineární prostor $X$ existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že $X$ je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem $X$ existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že $X$ je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li $X_1$, $X_2$ dvě zúplnění $X$, pak existuje lineární izometrie $X_1$ na $X_2$, která je na $X$ identitou.*

**Definice 105.** Banachův prostor $X$ se nazývá *reflexivní*, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

**Věta 106.** *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

**Věta 107.** *Nechť $X$, $Y$ jsou Banachovy prostory.*

*(a) Je-li $X$ izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i $X$ reflexivní.*

*(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*

*(c) Prostor $X$ je reflexivní právě tehdy, když jeho duál $X^*$ je reflexivní.*

*(d) Je-li $X$ reflexivní a $Y$ jeho uzavřený podprostor, pak je $X/Y$ reflexivní.*

**Příklady 108.**

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru $\mu$ a $1 < p < \infty$.

(c) Prostory $c_0$, $\ell_1$, $\ell_\infty$, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

(d) Existuje Banachův prostor $J$ (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s $J^{**}$.

**Věta 109** (Robert Clarke James (1964))**.** *Nechť $X$ je Banachův prostor. Pak $X$ je reflexivní, právě když každý funkcionál z $X^*$ nabývá na $B_X$ své normy.*

# III. Úplnost v Banachových prostorech

**Věta 110** (Princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť $X$ je Banachův prostor, $Y$ je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i)* $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

*(ii) Pro každé $x \in X$ je* $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

**Důsledek 111.** *Nechť $X$ je Banachův prostor, $Y$ je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X,Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $\|T\| \le \liminf \|T_n\|$.*

**Definice 112.** Zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory $X$, $Y$ se nazývá *otevřené*, pokud $f(G)$ je otevřená množina v $Y$ pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

**Věta 113** (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)**.** *Nechť $X, Y$ jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak $T$ je otevřené zobrazení.*

**Důsledek 114** (S. Banach, 1929)**.** *Nechť $X, Y$ jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak $T$ je izomorfismus $X$ na $Y$, právě když $T$ je prostý a na.*

**Důsledek 115.** *Nechť $X$, $Y$ jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Prostor $Y$ je lineárně izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$ pomocí zobrazení $\widehat{T} : X/\operatorname{Ker} T \to Y$ daného předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$.*

**Definice 116.** Je-li $f : X \to Y$ zobrazení množiny $X$ do množiny $Y$, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení $f$*. Říkáme, že zobrazení $f : X \to Y$, kde $X$, $Y$ jsou metrické prostory, *má uzavřený graf*, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

**Věta 117** (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)**.** *Nechť $X$, $Y$ jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak $T$ je spojité, právě když má uzavřený graf.*

# IV. Lineární operátory

## 1. Duální operátory

**Věta 118.** *Nechť $H$ je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H)$ takový, že pro každé $x, y \in H$ platí*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle.$$

**Definice 119.** Operátor $T^\star$ z předcházející věty nazýváme *hilbertovsky adjungovaným* operátorem k $T$.

**Věta 120.** *Nechť $H$ je Hilbertův prostor.*

*(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$, je $(T^\star)^\star = T$.*

*(b) Zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H)$ na $\mathcal{L}(H)$.*

*(c) Nechť $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Pak $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$. Dále $Id^\star = Id$.*

**Definice 121.** Nechť $X, Y$ jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá *duální* (nebo též (banachovsky) *adjungovaný*) operátor k $T$.

**Věta 122.** *Nechť $X$, $Y$, $Z$ jsou normované lineární prostory.*

*(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.*

*(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*

*(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.*

**Věta 123.** *Jsou-li $X$, $Y$ normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí*

*(a)* $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,

*(b)* $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,

*(c)* $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,

*(d)* $\overline{\operatorname{Rng} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

*(e) Jsou-li navíc $X$, $Y$ Banachovy a* $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak* $\operatorname{Rng} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

**Věta 124.** *Nechť $X$, $Y$ jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

*(a) $T^*$ je prostý, právě když* $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v $Y$.*

*(b) $T$ je izomorfismus na, právě když $T^*$ je izomorfismus na. V tomto případě pak platí, že $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

*(c) $T$ izometrie na, právě když $T^*$ je izometrie na.*

## 2. Kompaktní operátory

**Definice 125.** Nechť $X, Y$ jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak $T$ se nazývá *kompaktní operátor*, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v $Y$. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z $X$ do $Y$ značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor $T$ se nazývá *konečněrozměrný*, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z $X$ do $Y$ jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

**Tvrzení 126.** *Nechť $X$, $Y$ jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z $X$ do $Y$ je automaticky spojitý. Dále, je-li $T\colon X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i) $T$ je kompaktní.*

*(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.*

*(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v $X$, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.*

**Věta 127.** *Nechť $X$, $Y$ jsou Banachovy prostory.*

*(a) Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.*

*(b) $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.*

*(c) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.*

**Věta 128** (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť $X$, $Y$ jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak $T^*$ je kompaktní, právě když $T$ je kompaktní.*

## 3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

**Tvrzení 129.** *Nechť $X$ je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $T$ je invertovatelný, právě když $T$ je bijekce.*

**Definice 130.** Nechť $X$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme *vlastním číslem* operátoru $T$, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme *vlastním prostorem* příslušným číslu $\lambda$. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu $\lambda$ se nazývají *vlastní vektory* příslušné číslu $\lambda$. Množina všech vlastních čísel operátoru $T$ se nazývá *bodové spektrum* operátoru $T$ a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

*Spektrum* operátoru $T$ je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertovatelný. Spektrum operátoru $T$ značíme $\sigma(T)$.

**Věta 131.** *Nechť $X$ je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li $X$ komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

**Věta 132.** *Nechť $X$ je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.*

**Tvrzení 133.** *Nechť $X$ je Banachův prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$.*

**Věta 134.** *Nechť $X$ je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$ a $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.*

**Věta 135** (Fredholmova alternativa)**.** *Nechť $X$ je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

**Důsledek 136.** *Nechť $X$ je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

**Lemma 137.** *Nechť $X$ je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru $T$ a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

**Věta 138.** *Nechť $X$ je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.*

**Důsledek 139.** *Nechť $X$ je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru $T$, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.*

**Věta 140** (Druhá Fredholmova věta)**.** *Nechť $X$ je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

**Věta 141** (Třetí Fredholmova věta)**.** *Nechť $X$ je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

# V. Slabá konvergence

**Definice 142.** Nechť $X$ je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ konverguje *slabě* k $x \in X$, jestliže pro každé $f \in X^*$ platí, že $f(x_n) \to f(x)$. Značíme to $x_n \xrightarrow{w} x$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\} \subset X^*$ konverguje *slabě s hvězdičkou* k $f \in X^*$, jestliže pro každé $x \in X$ platí, že $f_n(x) \to f(x)$. Značíme to $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

**Fakt 143.** *Limity slabá i slabá s hvězdičkou jsou určeny jednoznačně.*

**Lemma 144.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor.*

*(a) Je-li $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$ a $x_n \to x$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$.*

*(b) Je-li $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$ a $f_n \xrightarrow{w} f$, pak $f_n \xrightarrow{w^*} f$.*

*(c) Je-li $X$ reflexivní Banachův prostor, $\{f_n\} \subset X^*$ a $f \in X^*$, pak $f_n \xrightarrow{w} f$, právě když $f_n \xrightarrow{w^*} f$.*

**Lemma 145.** *Každá slabě i slabě s hvězdičkou konvergentní posloupnost je omezená.*

**Věta 146.** *Nechť $X$ je Banachův prostor. Pak $X$ je reflexivní, právě když každá omezená posloupnost v $X$ má slabě konvergentní podposloupnost.*

**Tvrzení 147.** *Pro následující Banachovy prostory $X$, posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$ platí:*

*(a) Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

*(b) Pokud $X = \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$, pak $x_n \xrightarrow{w^*} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

*(c) Pokud $X = C(K)$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(t) \to x(t)$ pro každé $t \in K$.*

**Tvrzení 148.** *Nechť $X = L_p(\mu)$, $\{f_n\} \subset X$ a $f \in X$.*

*(a) Je-li $1 < p < \infty$, pak $f_n \xrightarrow{w} f$, právě když $\{f_n\}$ je omezená a $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ pro každou měřitelnou $A$ konečné míry.*

*(b) Je-li $p = 1$ a $\mu$ je $\sigma$-konečná, pak $f_n \xrightarrow{w} f$, právě když $\{f_n\}$ je omezená a $\int_A f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_A f(t)\,\mathrm{d}t$ pro každou měřitelnou $A$.*

*(c) Je-li $1 < p < \infty$, $\{f_n\}$ je omezená a $f_n \to f$ bodově s.v., pak $f_n \xrightarrow{w} f$.*

*(d) Je-li $1 < p < \infty$, $\{f_n\}$ je omezená a $f_n \to f$ v míře, pak $f_n \xrightarrow{w} f$.*