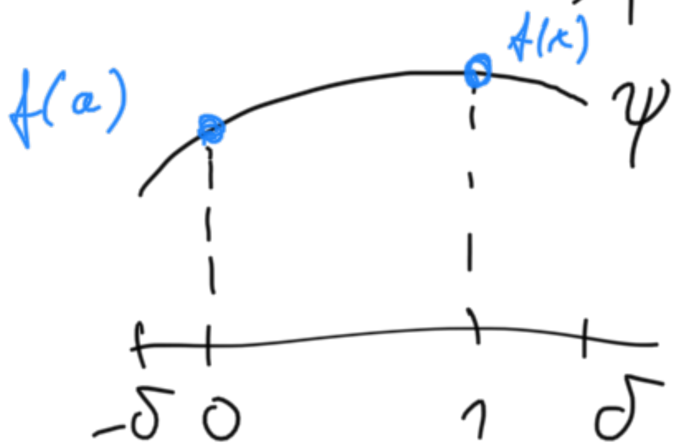
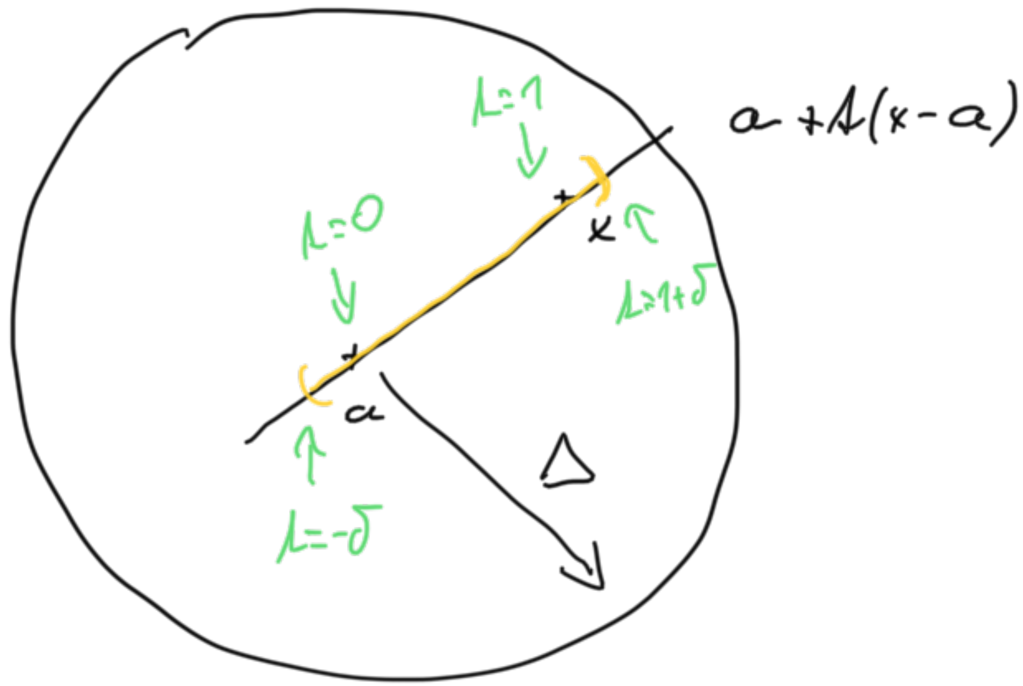
$$\psi(\lambda) = f(a+\lambda(x-a)), \quad \lambda \in (-\delta, 1+\delta)$$





$$\psi(\lambda) = f\Big(\underbrace{a_1+\lambda(x_1-a_1)}_{\varphi_1(\lambda)}, \dots, \underbrace{a_n+\lambda(x_n-a_n)}_{\varphi_n(\lambda)}\Big)$$

Der. d. fce:

$$\psi'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a_1+\lambda(x_1-a_1), \dots, a_n+\lambda(x_n-a_n)\big) \cdot \overbrace{\varphi_i'(\lambda)}^{x_i-a_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big(\overbrace{a_1+\lambda(x_1-a_1)}^{\varphi_1(\lambda)}, \dots, \overbrace{a_n+\lambda(x_n-a_n)}^{\varphi_n(\lambda)}\Big) \cdot (x_i-a_i)$$

$$\psi''(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-a_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\lambda(x-a)) \cdot \overbrace{\varphi_j'(\lambda)}^{x_j-a_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+t(x-a)) \cdot (x_i - a_i) \cdot (x_j - a_j) =$$

$$= (x-a)^T \nabla^2 f(a+t(x-a)) \cdot (x-a)$$

$\psi \in C^2$

[Pozn.: na ψ nelze použít Peanův tvar zbytku: $\psi(t) = \psi(0) + \psi'(0) + \frac{1}{2}\psi''(0) + \varepsilon_x(t)$]

VG2: $\exists\, \xi \in (0,1)$ takové, že $\psi(1) = \psi(0) + \psi'(0) \cdot (1-0) + \frac{1}{2}\psi''(\xi) \cdot (1-0)^2$

$[a=0, x=1]$

$\psi(1) = f(x)$, $\psi(0) = f(a)$, $\psi'(0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = \nabla f(a) \cdot (x-a)$

Tedy $f(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^T \nabla^2 f(a + \xi(x-a)) \cdot (x-a)$.

Položme $\omega(x) = \dfrac{f(x) - T_2^{f,a}(x)}{\|x-a\|^2}$ pro $x \in B(a,\Delta) \setminus \{a\}$, $\omega(a) = 0$.

Pak zjevně $f(x) = T_2^{f,a}(x) + \omega(x) \cdot \|x-a\|^2$ pro $x \in B(a,\Delta)$.

dle Vy [illegible] pro $\forall x \in B(a,\Delta)\setminus\{a\}$ $\exists$ $\boxed{\xi(x) \in (0,1)}$:

$$\omega(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(x-a)^T\left(D^2 f(a+\xi(x)\cdot(x-a)) - D^2 f(a)\right)\cdot(x-a)}{\|x-a\|^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\xi(x)\cdot(x-a)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a)\right)\underbrace{\frac{x_i-a_i}{\|x-a\|}\cdot\frac{x_j-a_j}{\|x-a\|}}_{\le 1}$$

$|x_i - a_i| \le \|x-a\|$

$$|\omega(x)| \le \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big(\underbrace{a_1 + \overbrace{\xi(x)}^{\text{omez.}}\cdot\overbrace{(x_1-a_1)}^{\to 0}}_{\xrightarrow{x\to a}\ a_1}, \dots, \underbrace{a_n + \overbrace{\xi(x)}^{\text{omez.}}\cdot\overbrace{(x_n-a_n)}^{\to 0}}_{\xrightarrow{x\to a}\ a_n}\Big) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right|$$

nulová x omez.

VOLSF (S): $\xrightarrow{x\to a}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

$$\text{AL} \Rightarrow \lim_{x\to a}\omega(x) = 0$$

$\square$

Nutná podm. 1. řádu: $G \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná otevřená;

$f \in C^1(G)$, f má v $a \in G$ lok. extrém $\Rightarrow Df(a) = 0$.

(a je stacionární bod)

není postačující: $x \mapsto x^3$

$f(x,y) = x^2 - y^2$ ... v $[0,0]$ stac. bod, ne extrém

$f \in C^2(G)$, a je stac. bod f, pak

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}(x-a)^T D^2 f(a)(x-a) + \omega(x)\cdot \|x-a\|^2,$$

$$\lim_{x \to a} \omega(x) = 0$$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}(x-a)^T D^2 f(a)(x-a) + \omega(x)\cdot\|x-a\|^2$$

Lze očekávat, že na znaménko výrazu $f(x) - f(a)$ má zásadní vliv znaménko kvadratické formy $(x-a)^T D^2 f(a)(x-a)$

Pozn.: Je-li $D^2 f(a)$ pozitivně semidefinitní, pak na základě věty G8 nelze rozhodnout.

$f(x) = x^4$ min $\quad f''(0) = 0$

$f(x) = -x^4$ max.

Nicméně je-li $D^2 f(a)$ nenulová, $\Rightarrow$ není NSD

pak z VG7 plyne, že v a nemůže být lokální maximum.

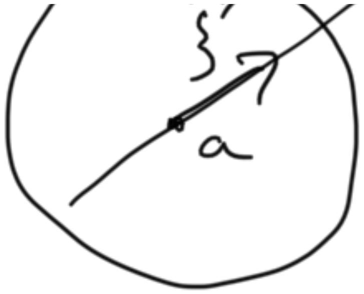
(Podobně pro NSD.)

Důkaz VG7: (i) dle nutné podm. 1. řádu je $Df(a) = o$.

sporem: Ukážeme, že není-li $D^2 f(a)$ NSD, pak v každém okolí $B(a,\delta)$ $\exists$ bod x, pro který $f(x) > f(a)$.

$$D^2 f(a) \text{ není NSD} \Rightarrow \exists\, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\} : \quad \xi^T D^2 f(a) \cdot \xi > 0$$

$a + t\cdot\xi$



Pro malá t platí, že

VGG

$$f(\underbrace{\vec a + t\vec\xi}_{x}) = f(\vec a) + \underbrace{\nabla f(\vec a)}_{=0} t\vec\xi + \frac{1}{2}(t\vec\xi)^T D^2 f(\vec a)(t\vec\xi) + \omega(\vec a + t\vec\xi)\cdot\|t\vec\xi\|^2,$$

kde $\lim_{x\to a}\omega(x) = 0$

Tedy $f(a+t\xi) - f(a) = t^2\Big(\overbrace{\frac{1}{2}\xi^T D^2 f(a)\xi}^{>0} + \omega(a+t\xi)\cdot\|\xi\|^2\Big).$

z def. limity $\exists\, t_0 > 0$: pro $t \in (0, t_0)$:

$$\omega(a+t\xi)\|\xi\|^2 > -\frac{1}{2}\xi^T D^2 f(a)\xi$$

$\Rightarrow$ pro $t\in(0,t_0)$ je $f(a+t\xi) > f(a)$

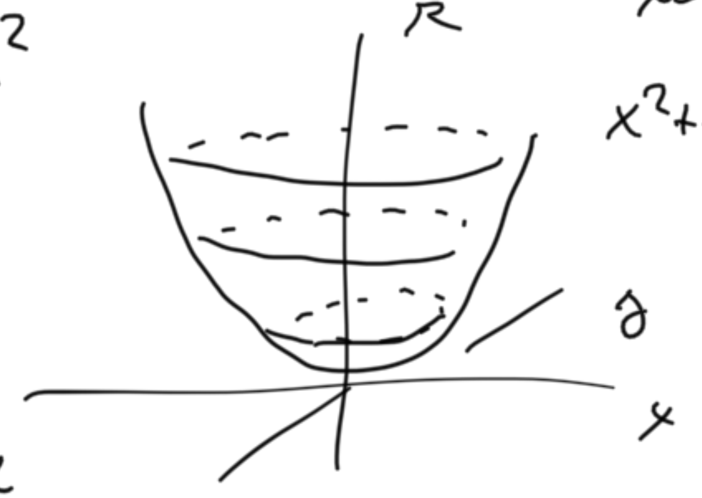
Spor

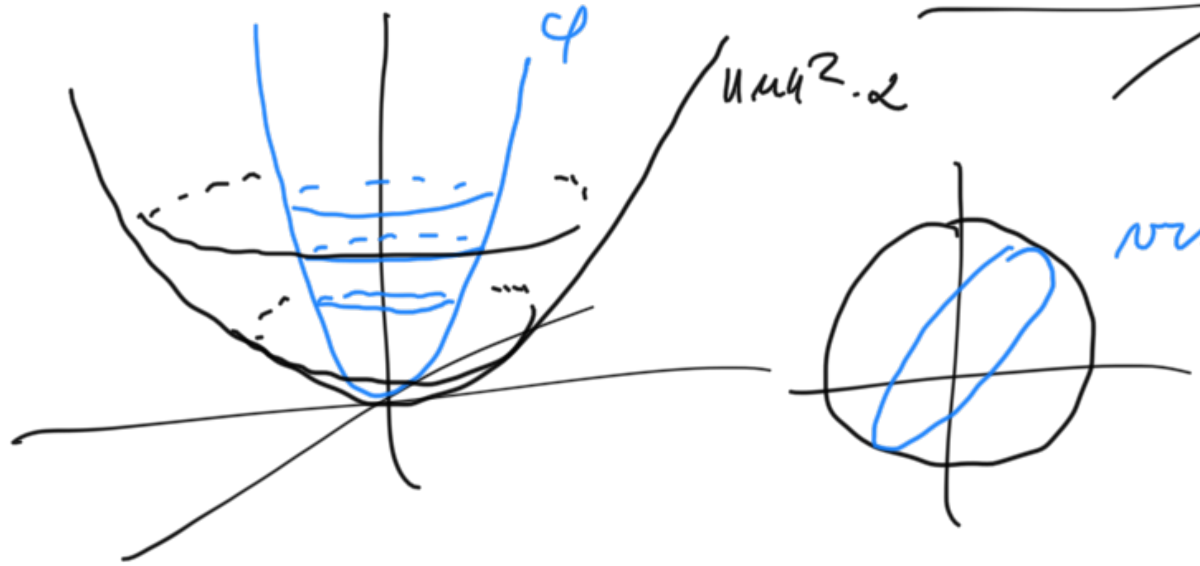
(ii) se dokáže analogicky (nebo přechodem $k -f$). □

$$\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$$

$\vec{u} = (x,y)$

$$x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$$

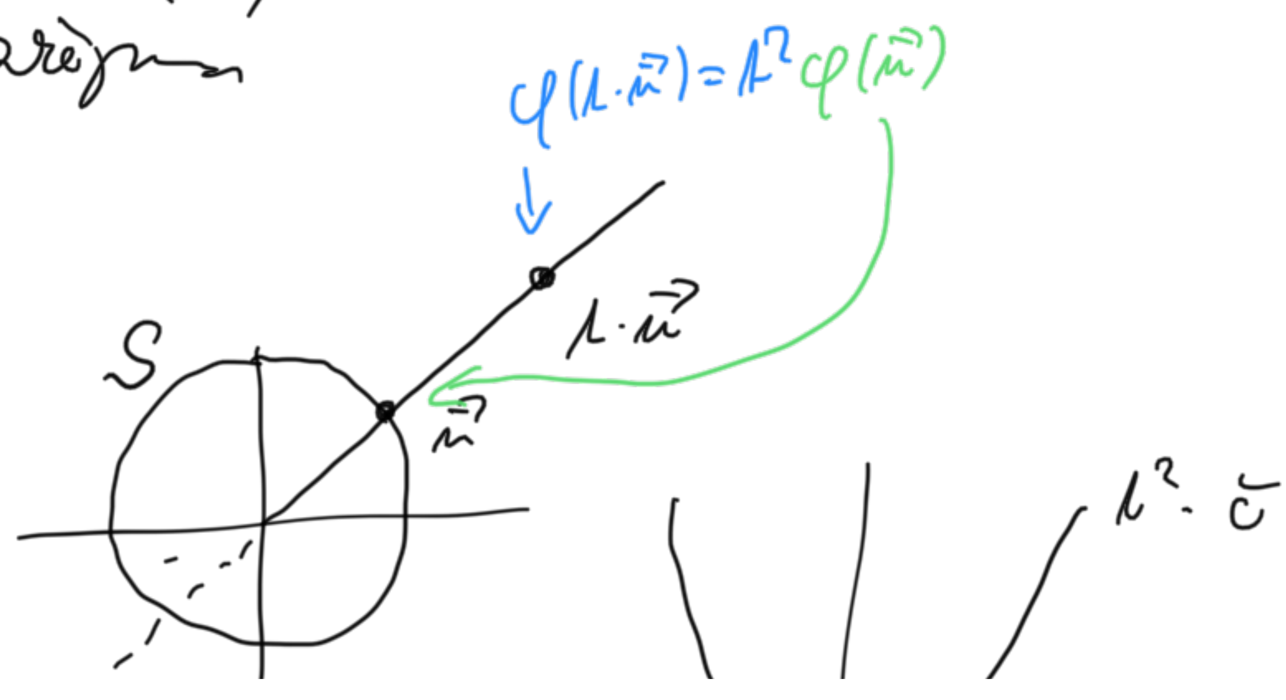




Důkaz L64: „⇐" je zřejmé

„⇒" nechť φ je PD.

$$\forall t > 0: \ \varphi(t \cdot \vec{u}) = t^2 \varphi(\vec{u})$$



φ je spojitá na $\mathbb{R}^n$ (z def. maticového násobení)

$S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ .... omez., uzavřená, tedy kompaktní

φ nabývá na S minima, tj. $\exists y \in S : \varphi(y) = \min\limits_S \varphi$.

Položme $\alpha = \varphi(y)$. φ je PD $\Rightarrow$ $\underline{\alpha > 0}$.

$\left\|\frac{u}{\|u\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|u\|}\cdot u\right\| = \frac{1}{\|u\|}\cdot\|u\| = 1$

Je-li nyní $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, pak $\frac{u}{\|u\|} \in S \Rightarrow$

$$\varphi(u) = \varphi\left(\|u\|\cdot\frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\|^2\,\varphi\Big(\underbrace{\frac{u}{\|u\|}}_{\in S}\Big) \geq \|u\|^2\cdot\alpha.$$

Pro ND obdobně nebo využijeme $-\varphi$. $\square$

Důkaz V68: (iii) plyne z V67.

(i) Nechť $D^2f(a)$ je ND, tj. kvadr. forma $F(u) = u^T D^2 f(a)\, u$

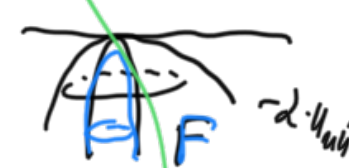
je ND.

$Df(a) = o \overset{V66}{\Rightarrow}$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} F(x-a) + \omega(x)\cdot\|x-a\|^2 \text{ pro}$$

x z okolí a, přičemž $\lim_{x \to a} \omega(x) = 0$.

Dle L69 $\exists \alpha > 0 : \forall u \in \mathbb{R}^n$ je $F(u) \le -\alpha \cdot \|u\|^2$



Tedy $f(x) \le f(a) - \frac{1}{2}\alpha \|x-a\|^2 + \omega(x)\cdot\|x-a\|^2 =$

$= f(a) + \|x-a\|^2 \big(\underbrace{\omega(x) - \tfrac{1}{2}\alpha}\big)$ pro x z okolí a.

$\exists \Delta > 0 : \forall x \in B(a,\Delta) \setminus \{a\}$ je $\omega(x) < \frac{1}{2}\alpha$,

tj. $\forall x \in B(a,\Delta) \setminus \{a\}$ je $f(x) < f(a)$.

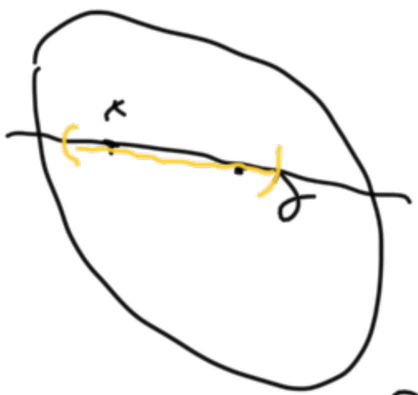
Tedy a je bod ostrého lok. maxima fce f.

(ii) analogicky

$\square$

[illegible]: „$\Leftarrow$" Zvolme $x, y \in G$ libovolné.

CHCI: $\forall \lambda \in \langle 0, 1\rangle : f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.



G je otevřená $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \lambda x + (1-\lambda) y \in G$ pro $\lambda \in (-\delta, 1+\delta)$

Vezmeme pomocnou fci $\psi(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda) y)$, $\lambda \in (-\delta, 1+\delta)$

Dle věty o der. sl. fce je ψ třídy C^2 a platí

$$\psi''(\lambda) = (x-y)^T \underbrace{\nabla^2 f(\lambda x + (1-\lambda) y)}_{NSD} (x-y) \leq 0 \quad \text{pro } \lambda \in (-\delta, 1+\delta).$$

Věta z MI: ψ je konkávní, tj.

$$\forall \lambda \in \langle 0,1\rangle : f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \psi(\lambda) = \psi(\lambda \cdot 1 + (1-\lambda)\cdot 0) \geq$$
$$\geq \lambda \psi(1) + (1-\lambda)\cdot \psi(0) =$$
$$= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

„$\Rightarrow$" Zvolme $x \in G$ libovolné.

TRIK: definuji fci $g: G \to \mathbb{R}$ předpisem

gradient. vektor

$$g(y) = f(y) - \nabla f(x) \cdot y$$

skalární násobení

$\nabla g(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$

Snadno lze vidět, že g je také konkávní.

Dále $\nabla g(x) = 0$. Tedy dle Důsl. 30 z MII

je x bod maxima fce $g \overset{V67}{\Longrightarrow} \nabla^2 g(x)$ je NSD.

ale $\nabla^2 g(x) = \nabla^2 f(x)$.

$\square$

Pozn.: Je-li $\forall x \in G$ matice $\nabla^2 f(x)$ dokonce ND, pak f je ryze konkávní na G.

Opačná implikace neplatí $(x \mapsto -x^4)$