Matematika IV

Program

Program

- Diferenční rovnice

Program

- Diferenční rovnice
- Diferenciální rovnice

Frisch a Samuelson:
Systém je dynamický, jestliže jeho chování v čase je určeno funkcionální rovnicí, jejíž neznámé závisí podstatným způsobem na čase.

XII. Diferenční rovnice

Leonardo Fibonacci (asi 1175–1250)

Definice

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}$, $p_k \neq 0$, a nechť dále $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}$, $p_k \neq 0$, a nechť dále $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešením rovnice (1) rozumíme každou posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (1) pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Definice

Nechť $k \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}$, $p_k \neq 0$, a nechť dále $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty budeme rozumět rovnici

$$y(n+k)+p_1 y(n+k-1)+\cdots+p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$.
Řešením rovnice (1) rozumíme každou posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (1) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pokud chceme, aby řešení rovnice (1) splňovalo podmínky

$$y(1) = y_1, \dots, y(k) = y_k, \quad (2)$$

kde čísla $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ jsou předem dána (tzv. počáteční podmínky), pak hovoříme o počáteční úloze.

Pokud $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak rovnice (1) má tvar

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Tato rovnice se nazývá homogenní.

Věta 1

Počáteční úloha (1), (2) *má právě jedno řešení.*

Věta 1

Počáteční úloha (1), (2) *má právě jedno řešení.*

Věta 2

Množina řešení rovnice (3) *tvoří vektorový podprostor dimenze k prostoru všech reálných posloupností.*

Věta 1

Počáteční úloha (1), (2) *má právě jedno řešení.*

Věta 2

Množina řešení rovnice (3) *tvoří vektorový podprostor dimenze* k *prostoru všech reálných posloupností.*

Poznámka

Bázi prostoru řešení rovnice (3) se říká též fundamentální systém řešení rovnice (3).

Věta 1

Počáteční úloha (1), (2) *má právě jedno řešení.*

Věta 2

Množina řešení rovnice (3) *tvoří vektorový podprostor dimenze* k *prostoru všech reálných posloupností.*

Poznámka

Bázi prostoru řešení rovnice (3) se říká též fundamentální systém řešení rovnice (3).

Definice

Charakteristickým polynomem rovnice (3) budeme rozumět polynom

$$\lambda \mapsto \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k.$$

Věta 3

Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *jsou všechny navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice* (3) *s násobnostmi* $r_1, \dots, r_s$. *Nechť* $\xi_1, \dots, \xi_l$ *jsou všechny navzájem různé kořeny charakteristického polynomu rovnice* (3) *s kladnou imaginární částí a násobnostmi* $q_1, \dots, q_l$, *přičemž* $\xi_j = \mu_j(\cos \nu_j + i \sin \nu_j)$, $\mu_j > 0$, $\nu_j \in \langle 0, 2\pi)$, $j = 1, \dots, l$. *Pak následující posloupnosti tvoří bázi prostoru řešení rovnice* (3)*:*

Věta 3

Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice (3) *s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$. Nechť $\xi_1, \dots, \xi_l$ jsou všechny navzájem různé kořeny charakteristického polynomu rovnice* (3) *s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \dots, q_l$, přičemž $\xi_j = \mu_j(\cos \nu_j + i \sin \nu_j)$, $\mu_j > 0$, $\nu_j \in \langle 0, 2\pi)$, $j = 1, \dots, l$. Pak následující posloupnosti tvoří bázi prostoru řešení rovnice* (3)*:*

Věta 3

Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *jsou všechny navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice* (3) *s násobnostmi* $r_1, \dots, r_s$. *Nechť* $\xi_1, \dots, \xi_l$ *jsou všechny navzájem různé kořeny charakteristického polynomu rovnice* (3) *s kladnou imaginární částí a násobnostmi* $q_1, \dots, q_l$, *přičemž* $\xi_j = \mu_j(\cos \nu_j + i \sin \nu_j)$, $\mu_j > 0$, $\nu_j \in \langle 0, 2\pi)$, $j = 1, \dots, l$. *Pak následující posloupnosti tvoří bázi prostoru řešení rovnice* (3):

$$
\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \ldots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \ldots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos \nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin \nu_l n\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \ldots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \ldots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos \nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin \nu_l n\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \ldots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \ldots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos \nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin \nu_l n\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \dots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \dots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \dots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \dots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \dots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos \nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \dots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin \nu_l n\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \ldots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \ldots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos \nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin \nu_l n\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \ldots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \ldots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos \nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin \nu_l n\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \ldots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \ldots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, \\
 & & \vdots & \\
\{\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos \nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin \nu_l n\}
\end{array}
$$

Věta 4

Nechť posloupnosti $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}, \{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *tvoří fundamentální systém řešení rovnice* (3). *Nechť posloupnost* $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *je řešením rovnice* (1). *Potom posloupnost* $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *řeší rovnici* (1), *právě když existují konstanty* $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ *takové, že*

$$y(n) = z(n) + c_1 y^1(n) + \cdots + c_k y^k(n)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Věta 4

Nechť posloupnosti $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}, \{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *tvoří fundamentální systém řešení rovnice* (3)*. Nechť posloupnost* $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *je řešením rovnice* (1)*. Potom posloupnost* $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *řeší rovnici* (1)*, právě když existují konstanty* $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ *takové, že*

$$y(n) = z(n) + c_1 y^1(n) + \cdots + c_k y^k(n)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$*.*

Řešení $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ z předchozí věty se tradičně nazývá *partikulární řešení*.

Věta 5 (rovnice se speciální pravou stranou)

Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *v rovnici* (1) *splňuje*

$$a_n = \alpha^n \big(P(n)\cos(\nu n) + Q(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde $\alpha, \nu \in \mathbb{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (1) *ve tvaru*

$$z(n) = n^m \alpha^n \big(R(n)\cos(\nu n) + S(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde R a S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$ *a* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\alpha(\cos\nu + i\sin\nu)$ *jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice* (3).

Věta 5 (rovnice se speciální pravou stranou)

Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *v rovnici* (1) *splňuje*

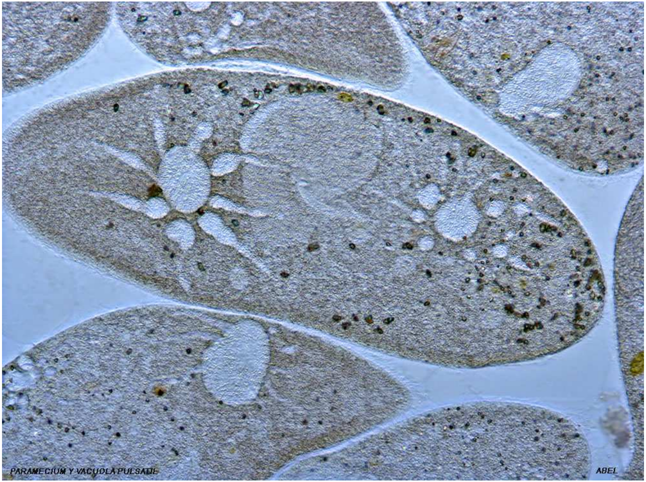
$$a_n = \alpha^n \big(P(n)\cos(\nu n) + Q(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde $\alpha, \nu \in \mathbb{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (1) *ve tvaru*

$$z(n) = n^m \alpha^n \big(R(n)\cos(\nu n) + S(n)\sin(\nu n)\big),$$

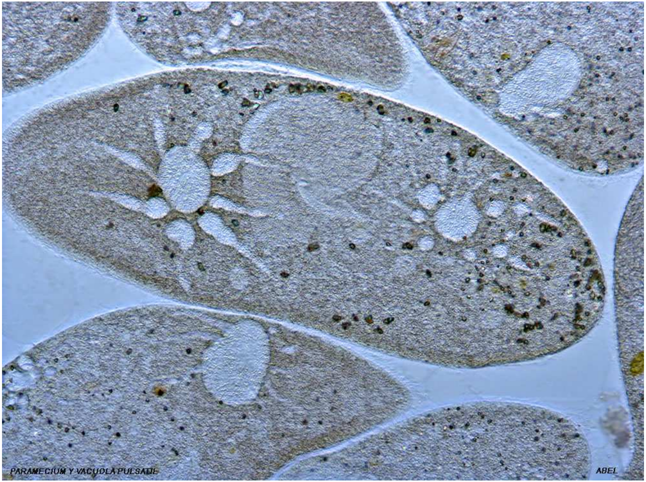
kde R *a* S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$ *a* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\alpha(\cos\nu + i\sin\nu)$ *jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice* (3).

XIII. Základní pojmy teorie diferenciálních rovnic



trepka velká

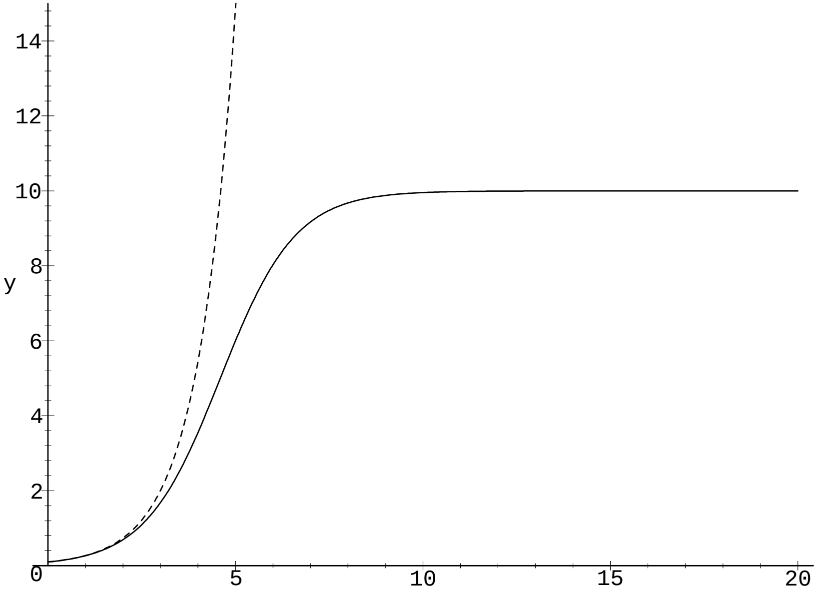
prvoci — nálevníci — chudoblanní



trepka velká

prvoci — nálevníci — chudoblanní

$a = 2.309$, $b = a/375$



y
14
12
10
8
6
4
2
0
5
10
15
20

Definice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných.

Definice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných.

Řešením diferenciální rovnice (4) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (4) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F\Big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\Big) = 0.$$

Definice

Je-li funkce y řešením rovnice (4) na intervalu I a funkce $\tilde{y}$ řešením rovnice (4) na intervalu $\tilde{I}$, kde $I \subset \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro všechna $x \in I$, pak říkáme, že řešení $\tilde{y}$ je prodloužením řešení y na interval $\tilde{I}$.

Definice

Je-li funkce y řešením rovnice (4) na intervalu I a funkce $\tilde{y}$ řešením rovnice (4) na intervalu $\tilde{I}$, kde $I \subset \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro všechna $x \in I$, pak říkáme, že řešení $\tilde{y}$ je prodloužením řešení y na interval $\tilde{I}$.

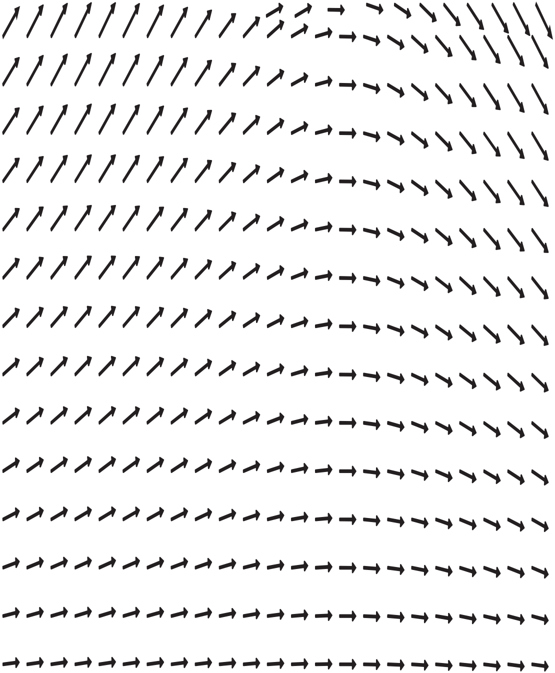
Řešení rovnice (4), které nemá prodloužení, nazýváme maximálním řešením rovnice (4).

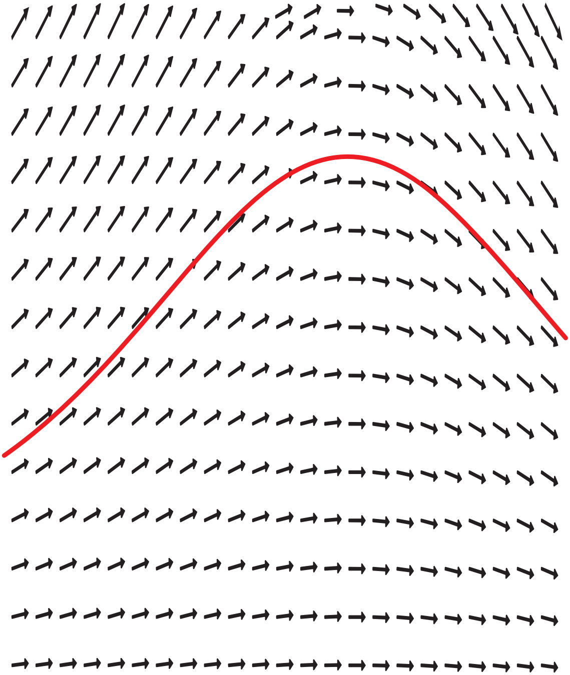
Definice

Rovnice tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

kde f je reálná funkce $n + 1$ proměnných, se nazývá diferenciální rovnice (n-tého řádu) vyřešená vzhledem k nejvyšší derivaci.





XIV. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

XIV. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \tag{5}$$

XIV.1. Základní metoda řešení

Metoda řešení pro g a h spojité na svých definičních oborech

XIV.1. Základní metoda řešení

Metoda řešení pro g a h spojité na svých definičních oborech

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h. (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)

XIV.1. Základní metoda řešení

Metoda řešení pro g a h spojité na svých definičních oborech

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h. (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ tzv. singulárním (též stacionárním) řešením rovnice (5).

XIV.1. Základní metoda řešení

Metoda řešení pro g a h spojité na svých definičních oborech

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h. (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ tzv. singulárním (též stacionárním) řešením rovnice (5).

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J ze 3. kroku.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J ze 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J ze 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (5), jejichž definiční obor je obsažen v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J ze 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (5), jejichž definiční obor je obsažen v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li y takové řešení, pak pro každé $x \in D_y$ platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J ze 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (5), jejichž definiční obor je obsažen v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li y takové řešení, pak pro každé $x \in D_y$ platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k funkci h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J ze 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (5), jejichž definiční obor je obsažen v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li y takové řešení, pak pro každé $x \in D_y$ platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k funkci h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + C$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme C a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + C \in G(J)\}.$$

5. Nyní zafixujeme C a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + C \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + C),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (5).

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (5). Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (5), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (5). Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (5), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g.$$

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (5). Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (5), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g.$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (5) na intervalu (a, c).

XIV.2. Autonomní diferenciální rovnice

XIV.2. Autonomní diferenciální rovnice

Autonomní diferenciální rovnice jsou diferenciální rovnice nezávisející explicitně na proměnné x (na „čase“).
Autonomní diferenciální rovnice prvního řádu vyřešená vzhledem k nejvyšší derivaci je tedy rovnice tvaru

$$y' = g(y). \tag{6}$$

XIV.2. Autonomní diferenciální rovnice

Autonomní diferenciální rovnice jsou diferenciální rovnice nezávisející explicitně na proměnné x (na „čase“). Autonomní diferenciální rovnice prvního řádu vyřešená vzhledem k nejvyšší derivaci je tedy rovnice tvaru

$$y' = g(y). \tag{6}$$

Poznámka

Je-li funkce y řešením rovnice (6) na intervalu (a, b), pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto y(x + c)$, $x \in (a - c, b - c)$, rovněž jejím řešením.

XIV.2. Autonomní diferenciální rovnice

Autonomní diferenciální rovnice jsou diferenciální rovnice nezávisející explicitně na proměnné x (na „čase“). Autonomní diferenciální rovnice prvního řádu vyřešená vzhledem k nejvyšší derivaci je tedy rovnice tvaru

$$y' = g(y). \tag{6}$$

Poznámka

Je-li funkce y řešením rovnice (6) na intervalu (a, b), pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto y(x + c)$, $x \in (a - c, b - c)$, rovněž jejím řešením.

Věta 6

Každé řešení rovnice (6)*, kde g je libovolná funkce, je monotónní.*

Lemma 7

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *funkce* g *je spojitá a kladná na* $\langle a, b)$ *a má v bodě* b *zleva kladnou limitu. Pak* $\int_a^b \frac{1}{g}$ *konverguje.*

Lemma 7

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *funkce* g *je spojitá a kladná na* $\langle a, b)$ *a má v bodě* b *zleva kladnou limitu. Pak* $\int_a^b \frac{1}{g}$ *konverguje.*

Lemma 8

Nechť funkce g *je spojitá na* $\langle a, b\rangle$, *kladná na* $\langle a, b)$, $g(b) = 0$ *a* $g'_-(b)$ *existuje vlastní. Pak* $\int_a^b \frac{1}{g}$ *diverguje.*

XV. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

XV. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{7}$$

kde p, q jsou funkce na daném intervalu (a, b).

XV. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{7}$$

kde p, q jsou funkce na daném intervalu (a, b).
V dalším budeme předpokládat, že p, q jsou spojité funkce.

XV. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{7}$$

kde p, q jsou funkce na daném intervalu (a, b).
V dalším budeme předpokládat, že p, q jsou spojité funkce. Pak každé řešení rovnice (7) je třídy $\mathcal{C}^1$.

XV. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{7}$$

kde p, q jsou funkce na daném intervalu (a, b).
V dalším budeme předpokládat, že p, q jsou spojité funkce. Pak každé řešení rovnice (7) je třídy $\mathscr{C}^1$.
Zobrazení $L\colon C^1(a, b) \to C(a, b)$,

$$L(y) = y' + py$$

je lineární.

XV.1. Homogenní rovnice

XV.1. Homogenní rovnice

Homogenní lineární diferenciální rovnicí prvního řádu budeme rozumět rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = 0.$$

XV.1. Homogenní rovnice

Homogenní lineární diferenciální rovnicí prvního řádu budeme rozumět rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = 0.$$

Maximální řešení homogenní rovnice:

$$y(x) = Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),\ K \in \mathbb{R},$$

kde P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b).

XV.1. Homogenní rovnice

Homogenní lineární diferenciální rovnicí prvního řádu budeme rozumět rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = 0.$$

Maximální řešení homogenní rovnice:

$$y(x) = Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), \; K \in \mathbb{R},$$

kde P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b).

Všechna řešení homogenní rovnice tvoří vektorový podprostor prostoru $C^1(a, b)$ dimenze 1 ($\dim \operatorname{Ker} L = 1$).

XV.2. Nehomogenní rovnice

XV.2. Nehomogenní rovnice

Maximální řešení rovnice (7):

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \right) e^{-P(x)} + K e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), \ K \in \mathbb{R},$$

kde $x_0 \in (a, b)$ a P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b).

XV.2. Nehomogenní rovnice

Maximální řešení rovnice (7):

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \right) e^{-P(x)} + K e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), \; K \in \mathbb{R},$$

kde $x_0 \in (a, b)$ a P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b).
Maximální řešení rovnice (7) splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$:

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde $P(x_0) = 0$, tj. $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t) \, \mathrm{d}t$.

Pro každé $x_0 \in (a, b)$ a každé $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (7), které splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je navíc definováno na celém (a, b).

XVI. Lineární diferenciální rovnice

XVI. Lineární diferenciální rovnice

Definice

Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t), \tag{8}$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1}$ a f jsou funkce spojité na daném intervalu (a, b).

XVI. Lineární diferenciální rovnice

Definice

Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t), \tag{8}$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1}$ a f jsou funkce spojité na daném intervalu (a, b).

Homogenní rovnicí příslušnou k rovnici (8) rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0. \tag{9}$$

Každé řešení rovnice (8) je třídy $\mathscr{C}^n$.

Každé řešení rovnice (8) je třídy $\mathcal{C}^n$.
Zobrazení $L\colon C^n(a,b) \to C(a,b)$,

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

je lineární.

XVI.1. Struktura prostoru řešení

XVI.1. Struktura prostoru řešení

Věta 9

Nechť $t_0 \in (a, b)$ *a* $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$*. Pak existuje právě jedno maximální řešení* y *rovnice* (8)*, které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b)*.*

Věta 10

(i) *Množina všech maximálních řešení rovnice* (9) *tvoří vektorový podprostor prostoru* $C^n((a,b))$ *dimenze* n*.*

Věta 10

(i) *Množina všech maximálních řešení rovnice* (9) *tvoří vektorový podprostor prostoru* $C^n((a,b))$ *dimenze* n.

(ii) *Nechť* y_p *je nějaké maximální řešení rovnice* (8). *Pak množina všech maximálních řešení rovnice* (8) *má tvar*

$$\left\{y_p + y_h;\ y_h \text{ je řešením rovnice (9) na intervalu } (a,b)\right\}.$$

Poznámka

- Báze prostoru maximálních řešení rovnice (9) se nazývá fundamentální systém řešení rovnice (9).

Poznámka

- Báze prostoru maximálních řešení rovnice (9) se nazývá fundamentální systém řešení rovnice (9).
- Jsou-li funkce $y_1, \ldots, y_n$ lineárně nezávislá maximální řešení rovnice (9), pak již tvoří fundamentální systém.

Poznámka

- Báze prostoru maximálních řešení rovnice (9) se nazývá fundamentální systém řešení rovnice (9).
- Jsou-li funkce $y_1, \dots, y_n$ lineárně nezávislá maximální řešení rovnice (9), pak již tvoří fundamentální systém.
- Abychom vyřešili nehomogenní rovnici (8), najdeme fundamentální systém $y_1, \dots, y_n$ pro rovnici (9) a jedno („partikulární“) řešení y_p rovnice (8). Všechna řešení rovnice (8) pak budou mít tvar $y = y_p + c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$, kde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

XVI.2. Metoda variace konstant

Věta 11 (variace konstant)

Nechť funkce $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (9)*. Existují-li funkce $c_1, \dots, c_n$ mající na (a, b) vlastní derivaci a splňující soustavu rovnic*

$$
\begin{aligned}
c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n &= 0 \\
&\vdots \\
c_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\
c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f
\end{aligned}
$$

na intervalu (a, b), pak funkce $y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t)$, $t \in (a, b)$, je řešením rovnice (8)*.*

Definice

Nechť funkce $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (9). Pak matici (či přesněji maticovou funkci)

$$\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, t \in (a, b)$$

nazýváme fundamentální maticí rovnice (9).

Definice

Nechť funkce $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (9). Pak matici (či přesněji maticovou funkci)

$$\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, t \in (a, b)$$

nazýváme fundamentální maticí rovnice (9).

Věta 12

Nechť $\boldsymbol{U}(t)$ je fundamentální maticí rovnice (9). *Pak matice $\boldsymbol{U}(t)$ je regulární pro každé $t \in (a, b)$.*

XVI.3. Rovnice s konstantními koeficienty

XVI.3. Rovnice s konstantními koeficienty

Definice

Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu s konstantními koeficenty rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t), \quad (10)$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b).

XVI.3. Rovnice s konstantními koeficienty

Definice

Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu s konstantními koeficenty rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t), \quad (10)$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b).
Homogenní rovnicí příslušnou k rovnici (10) rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0. \quad (11)$$

Poznámka

Maximální řešení rovnice (11) jsou definována na celém $\mathbb{R}$.

Poznámka

Maximální řešení rovnice (11) jsou definována na celém $\mathbb{R}$.

Definice

Charakteristickým polynomem rovnice (11) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 13 (tvar fundamentálního systému)

Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu χ s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$. Nechť $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \dots, q_l$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$. Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (11)*:*

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t
\end{array}
$$

Věta 14 (speciální pravá strana)

Nechť

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t) \,, \quad t \in \mathbb{R},$$

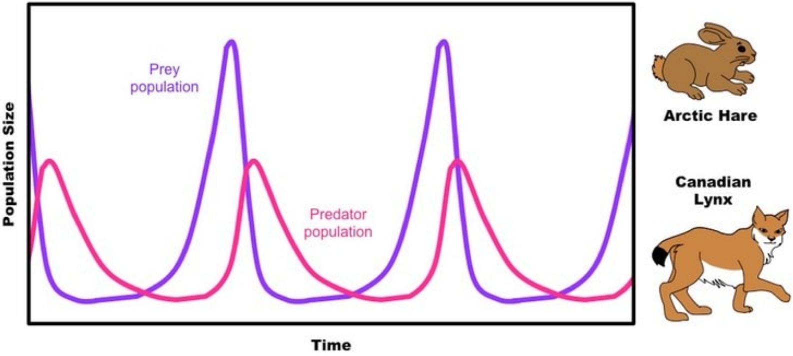
kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (10) *ve tvaru*

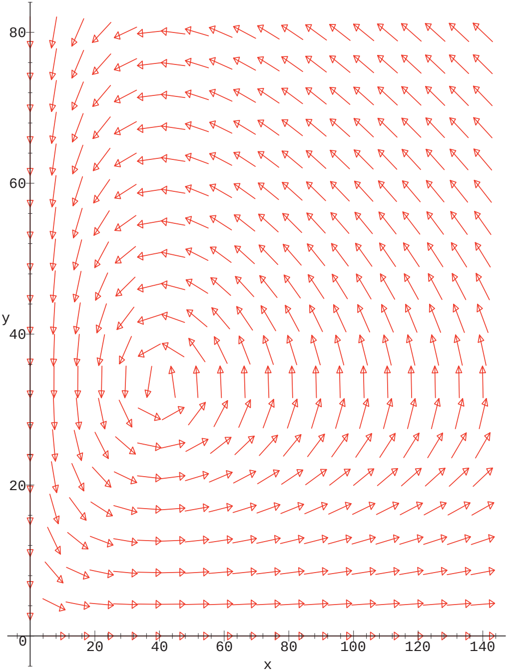
$$y_p(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t) \,, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde R, S *jsou polynomy stupně ne většího než* $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$ *a* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\mu + i\nu$ *jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.*

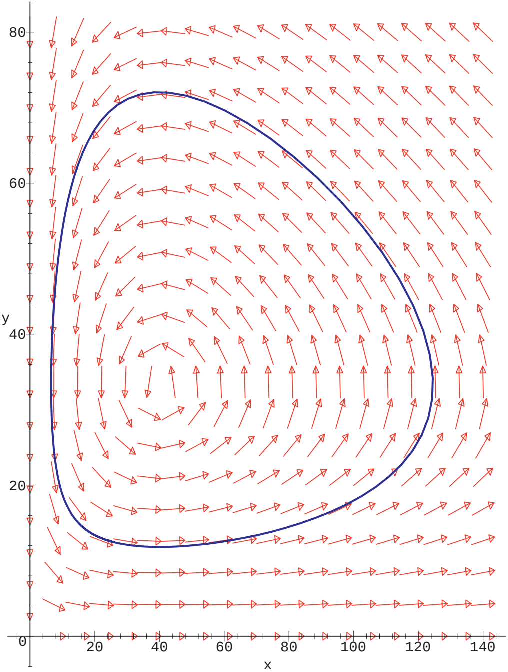
XVII. Soustavy diferenciálních rovnic

XVII. Soustavy diferenciálních rovnic

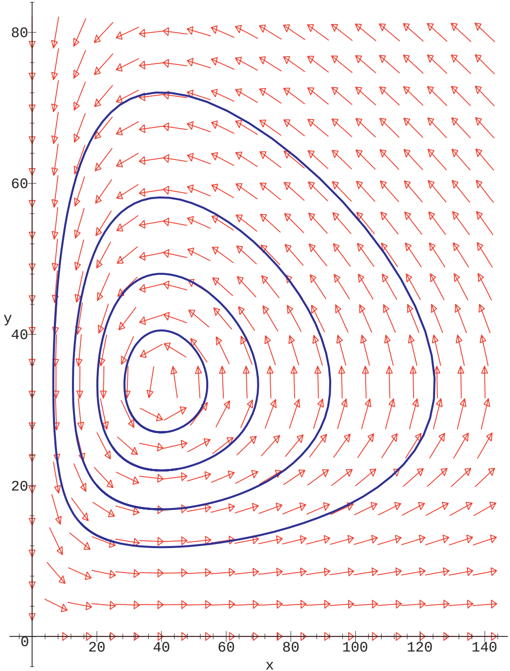




80
60
40
20
0
y
20
40
60
80
100
120
140
x



80
60
y
40
20
0
20
40
60
80
100
120
140
x



80
60
40
20
0
y
20
40
60
80
100
120
140
x

Soustavou diferenciálních rovnic (prvního řádu) rozumíme soustavu

$$
\begin{aligned}
x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\\
x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\\
&\vdots\\
x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

kde f_i, $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a hledaným objektem jsou funkce $x_1, \dots, x_n$ definované na jistém otevřeném intervalu.

XVII.1. Základní pojmy, věta o existenci a jednoznačnosti

XVII.1. Základní pojmy, věta o existenci a jednoznačnosti

Vektorový tvar soustavy:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \tag{13}$$

kde $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\boldsymbol{x}' = [x_1', x_2', \ldots, x_n']$ a $\boldsymbol{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_n]$.

Definice

- Řešením soustavy (12) rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in I$ existují vlastní derivace $x_1'(t), \ldots, x_n'(t)$, a platí $\boldsymbol{x}'(t) = f\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)$.

Definice

- Řešením soustavy (12) rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in I$ existují vlastní derivace $x_1'(t), \dots, x_n'(t)$, a platí $\boldsymbol{x}'(t) = f\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)$.
- Maximální řešení soustavy (12) je takové řešení $\boldsymbol{x}$ definované na intervalu I, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\boldsymbol{y}$ řešení definované na intervalu J, $I \subset J$ a $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ pro každé $t \in I$, pak $J = I$.

Definice

- Řešením soustavy (12) rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in I$ existují vlastní derivace $x_1'(t), \dots, x_n'(t)$, a platí $\boldsymbol{x}'(t) = f\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)$.
- Maximální řešení soustavy (12) je takové řešení $\boldsymbol{x}$ definované na intervalu I, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\boldsymbol{y}$ řešení definované na intervalu J, $I \subset J$ a $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ pro každé $t \in I$, pak $J = I$.
- Počáteční úlohou pro (12) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy (12) splňující navíc předem zadanou podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, kde $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ (tzv. počáteční podmínka).

Věta 15 (Peanova věta o existenci řešení)

Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina a $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na G. Pak pro každé $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ existuje maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (13) *splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.*

Věta 16 (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina a $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na G a navíc splňuje následující podmínku:

(D) *Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že parciální derivace f_i podle druhé, třetí, ..., $(n+1)$-ní proměnné (tj. $\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}$) jsou spojité na G.*

Jestliže $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (13) *splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.*

XVII.2. Vlastnosti maximálních řešení

XVII.2. Vlastnosti maximálních řešení

Věta 17 (opouštění kompaktu)

Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je neprázdná a otevřená množina, zobrazení $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojité, $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení rovnice (13) *definované na intervalu (α, β), $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $K \subset G$ je kompaktní a $[t_0, \boldsymbol{x}(t_0)] \in K$. Pak existují $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ a $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ taková, že $[\tau_1, \boldsymbol{x}(\tau_1)] \notin K$ a $[\tau_2, \boldsymbol{x}(\tau_2)] \notin K$.*

Lemma 18

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a funkce g je definovaná na intervalu (a, b). Funkce g má v bodě b zleva vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall s, t \in P^{-}(b, \delta) \colon\ |g(t) - g(s)| < \varepsilon.$$

Věta 19 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojité a splňuje na G podmínku (D) z Věty 16.

Věta 19 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojité a splňuje na G podmínku (D) z Věty 16. Nechť $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení soustavy (13) *definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$.*

Věta 19 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *je neprázdná otevřená množina,* $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbb{R}^n$ *je spojité a splňuje na G podmínku (D) z Věty 16. Nechť* $\boldsymbol{x}$ *je maximální řešení soustavy* (13) *definované na* (α, β) *a* $t_0 \in (\alpha, \beta)$*. Nechť dále* $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \subset (\alpha, \beta)$ *je uzavřený interval obsahující* t_0*.*

Věta 19 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojité a splňuje na G podmínku (D) z Věty 16. Nechť $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení soustavy (13) *definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Nechť dále $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \subset (\alpha, \beta)$ je uzavřený interval obsahující t_0. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$ splňující $\|\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{x}(t_0)\| < \delta$ platí:*

Věta 19 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojité a splňuje na G podmínku (D) z Věty 16. Nechť $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení soustavy (13) *definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Nechť dále $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \subset (\alpha, \beta)$ je uzavřený interval obsahující t_0. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$ splňující $\|\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{x}(t_0)\| < \delta$ platí: Každé maximální řešení $\boldsymbol{y}$ soustavy* (13) *splňující počáteční podmínku $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0$ je definované na intervalu obsahujícím $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ a platí $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\| < \varepsilon$ pro každé $t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$.*

Lemma 20 (ekvivalence diferenciální a integrální rovnice)

Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\boldsymbol{f} \colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$. Spojitá vektorová funkce $\boldsymbol{x} \colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ je řešením rovnice (13) *s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, právě když pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ splňuje rovnici*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

Lemma 21 (Gronwall)

Nechť funkce u je spojitá na intervalu $\langle t_0, t_1)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_1 \in \mathbb{R}^*$. Nechť existují čísla $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ taková, že

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} (\alpha u(s) + \beta) \, \mathrm{d}s, \qquad t \in \langle t_0, t_1).$$

Pak

$$u(t) \leq \left(a + \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\alpha (t - t_0)}, \qquad t \in \langle t_0, t_1).$$

Lemma 22

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\boldsymbol{x} \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá a* $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina. Nechť platí*

$$\left\{[t, \boldsymbol{x}(t)] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;\ t \in \langle a, b\rangle\right\} \subset G.$$

Potom existuje $\xi > 0$ *takové, že*

$$\left\{[t, \boldsymbol{z}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;\ t \in \langle a, b\rangle, \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{z}\| \leq \xi\right\} \subset G.$$

Lemma 23

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *a* $\boldsymbol{x} \colon \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b \boldsymbol{x}(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq n \int_a^b \|\boldsymbol{x}(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Lemma 24

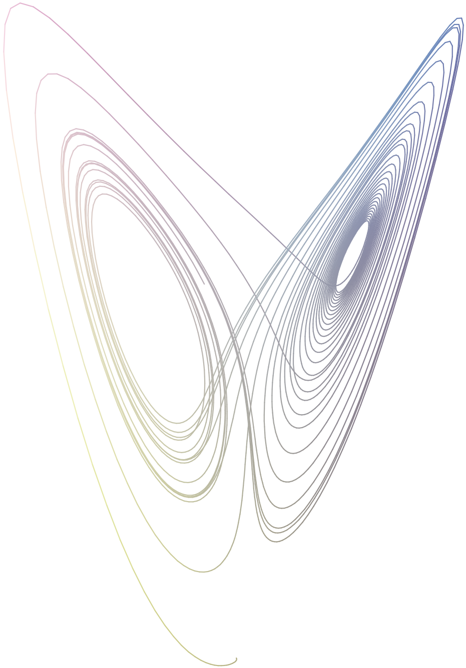
Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná a otevřená a $\boldsymbol{g} \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$. Nechť dále $C \subset G$ je konvexní a předpokládejme, že existuje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \; \forall j \in \{1, \dots, n\} \; \forall \boldsymbol{x} \in C\colon \; \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \right| \leq M.$$

Potom pro každé dva body $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in C$ platí

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})\| \leq L\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|,$$

kde $L = n\sqrt{m}M$.



XVII.3. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

XVII.3. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Soustavou lineárních diferenciálních rovnic rozumíme soustavu tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $b_i \colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar soustavy:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \tag{14}$$

kde

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 25 (existence a jednoznačnost řešení)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. *Nechť* $\boldsymbol{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $\boldsymbol{b}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení* $\boldsymbol{y}$ *soustavy* (14) *splňující* $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0$. *Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu* (α, β).

Definice

Homogenní soustavou k soustavě (14) rozumíme soustavu

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}. \tag{15}$$

Definice

Homogenní soustavou k soustavě (14) rozumíme soustavu

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}. \tag{15}$$

Zobrazení $L\colon C^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n) \to C((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$,

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

je lineární.

Věta 26

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, *a* $\boldsymbol{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ *je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení homogenní soustavy* (15) *tvoří vektorový podprostor prostoru* $C^1\big((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n\big)$*. Dimenze tohoto podprostoru je rovna* n*.*

Věta 26

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, *a* $\boldsymbol{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ *je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení homogenní soustavy* (15) *tvoří vektorový podprostor prostoru* $C^1\big((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n\big)$. *Dimenze tohoto podprostoru je rovna n.*

Věta 27

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, *a* $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. *Nechť* $\boldsymbol{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $\boldsymbol{b}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Nechť* $\boldsymbol{y}$ *je řešení soustavy* (14) *na intervalu* (α, β). *Potom každé řešení* $\boldsymbol{x}$ *soustavy* (14) *na intervalu* (α, β) *má tvar* $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, *kde* $\boldsymbol{z}$ *je jisté řešení soustavy* (15) *na intervalu* (α, β).

Definice

Bázi prostoru maximálních řešení soustavy (15) nazýváme fundamentální systém soustavy (15). Je-li $\boldsymbol{y}^1, \dots, \boldsymbol{y}^n$ fundamentální systém soustavy (15), pak matici

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \left(\boldsymbol{y}^1(t), \dots, \boldsymbol{y}^n(t)\right) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}$$

nazýváme fundamentální matice soustavy (15).

Věta 28

Nechť $\boldsymbol{\Phi}$ *je fundamentální matice soustavy* (15). *Pak matice* $\boldsymbol{\Phi}(t)$ *je regulární pro každé* $t \in (\alpha, \beta)$.

Věta 29 (variace konstant)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. *Nechť* $\boldsymbol{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ *a* $\boldsymbol{b}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Pak maximální řešení* $\boldsymbol{y}$ *rovnice* (14) *s počáteční podmínkou* $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0$ *má tvar*

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(t_0)^{-1}\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde $\boldsymbol{\Phi}$ *je fundamentální matice soustavy* (15).

XVII.4. Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty

XVII.4. Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty

Soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty je soustava

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t),$$

kde $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ a $\boldsymbol{b}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ je daná (spojitá) vektorová funkce. Příslušná homogenní soustava je soustava

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{16}$$

Tvrzení 30

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *a vektorová funkce* $\boldsymbol{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *je řešením soustavy* (16)*. Pak* $\boldsymbol{y} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *a pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *platí* $\boldsymbol{y}^{(k)}(t) = \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{y}(t)$ *pro* $t \in \mathbb{R}$*.*

Definice

- Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ-maticí.

Definice

- Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ-maticí.
- Řádkovými úpravami λ-matice rozumíme:

Definice

- Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ-maticí.
- Řádkovými úpravami λ-matice rozumíme:
    - záměnu dvou řádků,

Definice

- Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ-maticí.
- Řádkovými úpravami λ-matice rozumíme:
  - záměnu dvou řádků,
  - vynásobení řádku nenulovou konstantou,

Definice

- Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ-maticí.
- Řádkovými úpravami λ-matice rozumíme:
    - záměnu dvou řádků,
    - vynásobení řádku nenulovou konstantou,
    - přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Věta 31

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. *Pak lze* λ*-matici* $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ *převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou* λ*-matici. Výsledná* λ*-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n.*