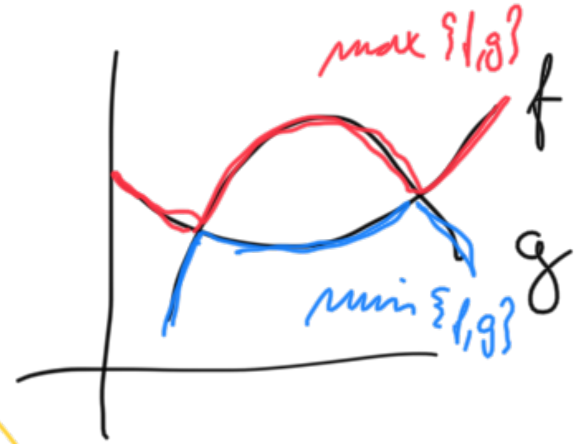
f, g spojité v $a \in \mathbb{R}$

$\underbrace{\max\{f,g\}}_{h}$, $\min\{f,g\}$ také spojité v a

$x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$

$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

$\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$



Zvolme $\varepsilon > 0$.

$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in B(a, \delta_1) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in B(a, \delta_2) : |g(x) - g(a)| < \varepsilon$

Předpokládejme, že $f(a) \geq g(a)$.

Pak $h(a) = f(a) \geq g(a)$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak pro $x \in B(a, \delta)$

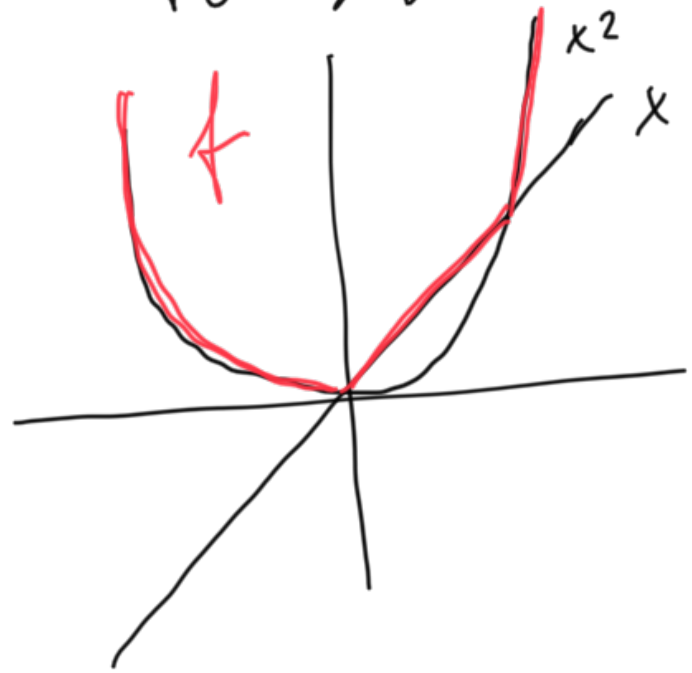
$$-\varepsilon < f(x) - f(a) \leq h(x) - f(a) = h(x) - h(a) = \begin{cases} f(x) - h(a) = f(x) - f(a) < \varepsilon \\ g(x) - h(a) \leq g(x) - g(a) < \varepsilon \end{cases}$$

Dohromady $|h(x) - h(a)| < \varepsilon \Rightarrow h$ je spojitá v a.

$f(x) = \max\{x, x^2\}$, vyšetříme spojitost

$x \mapsto x$ je spojitá na $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$ — " —

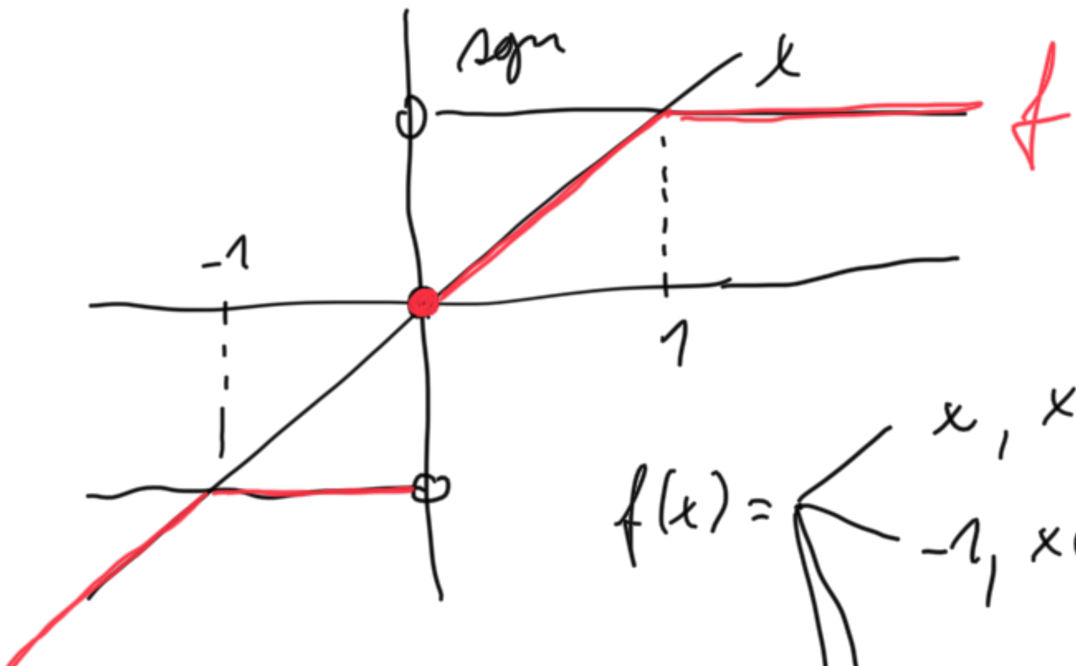
$\Big\} \Rightarrow$ dle tvrzení $\uparrow$ f je spojitá na $\mathbb{R}$



$f(x) = \min\{x, \operatorname{sgn} x\}$

$x \mapsto x$ je spojitá na $\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{sgn} x$ je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Big\} \Rightarrow$ dle tvrzení $\uparrow$ f je spojitá v a pro $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, -1\rangle \\ -1, & x \in \langle -1, 0) \\ x, & x \in \langle 0, 1\rangle \end{cases}$$

spojitost v 0:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x = 0 = f(0)$$

$\Rightarrow f$ je spojitá v 0 zprava

$1, \; x \in \langle 1, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \dots \neq f(0)$

$\Rightarrow f$ není spojitá v 0 zleva

Závěr: f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, v 0 spoj. zprava,
v 0 není spoj. zleva

$$f(x) = (x^8 + x^6 - 1)^{157}$$

vyšetřete spojitost a derivaci

$D_f = \mathbb{R}$, f je polynom $\Rightarrow f$ je spoj. na $\mathbb{R}$ (aritmetika spoj. fcí)

$f(x) = h(g(x))$, $\quad g(x) = x^8 + x^6 - 1$, $\quad h(y) = y^{157}$

$g'(x) = 8x^7 + 6x^5, \; x \in \mathbb{R}$

$h'(y) = 157 y^{156}, \; y \in \mathbb{R}$

der. sl. fce

$$\Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 157 (g(x))^{156} \cdot (8x^7 + 6x^5) =$$

der. jsou vlastní

$$= 157 (x^8 + x^6 - 1)^{156} \cdot (8x^7 + 6x^5)$$

$x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \log \log \sin x$

$\sin x > 0$, $\; x \in (0, \pi) + 2k\pi$

$\log \sin x > 0$, $\; \sin x > 1$ [illegible]

$\log \sin x > 0$, $\sin x > 1$ nesplní

$$f'(x) = \frac{1}{\log(\sin x)} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x,$$

$$\mathcal{D}_f = \emptyset$$

$$x \in (0, \pi) \setminus \{\tfrac{\pi}{2}\} + 2k\pi$$

$$f(x) = \sin\left(x^3 \cos(\log x)\right)$$

$$\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$$

f je spojitá na $\mathcal{D}_f$ (součin a skládání spoj. fcí)

$$f'(x) = \cos\left(x^3 \cos(\log x)\right) \cdot \left(x^3 \cos(\log x)\right)' =$$

$$= \cos\left(x^3 \cos(\log x)\right) \cdot \left(3x^2 \cdot \cos(\log x) + x^3 (\cos \log x)'\right) =$$

$$= \cos\left(x^3 \cos(\log x)\right) \cdot \left(3x^2 \cos \log x - x^2 \sin \log x\right)$$

$$x \in (0, +\infty)$$

$$(\cos \log x)' = -\sin(\log x) \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

složený funkce:

$$f'(x) = \cos\left(x^3 \cos\log x\right) \cdot \left(3x^2 \cos\log x + x^3 \cdot (-\sin\log x) \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = \frac{e^{x^5}\cos(x+7)}{\log\left(\underbrace{x^4+1}_{0}\right)} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

f je spojitá na D_f

$$f'(x) = \frac{\left(e^{x^5}\cos(x+7)\right)' \cdot \log(x^4+1) - e^{x^5}\cos(x+7) \cdot \left(\log(x^4+1)\right)'}{\left(\log(x^4+1)\right)^2} =$$

$$\left(e^{x^5}\cos(x+7)\right)' = \left(e^{x^5}\right)'\cos(x+7) + e^{x^5} \cdot \left(\cos(x+7)\right)' =$$

$$= \left(e^{x^5} \cdot 5x^4\right) \cdot \cos(x+7) + e^{x^5}\left(-\sin(x+7)\right) \cdot \overbrace{(x+7)'}^{1+0} =$$

$$= e^{x^5}\left(5x^4\cos(x+7) - \sin(x+7)\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\log(x^4+1)\right)' = \frac{1}{x^4 \ldots} \cdot (x^4+1)' = \frac{1}{\ldots} \cdot 4x^3 \quad x \in \mathbb{R}$$

$x^4+1 \qquad x^4+1 \qquad \Big| \; x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{e^{x^5}\left(\left(5x^4\cos(x+7) - \sin(x+7)\right)\cdot\log(x^4+1) - \cos(x+7)\cdot\frac{4x^3}{x^4+1}\right)}{\left(\log(x^4+1)\right)^2} \;\Big|$$

$$\underline{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}$$