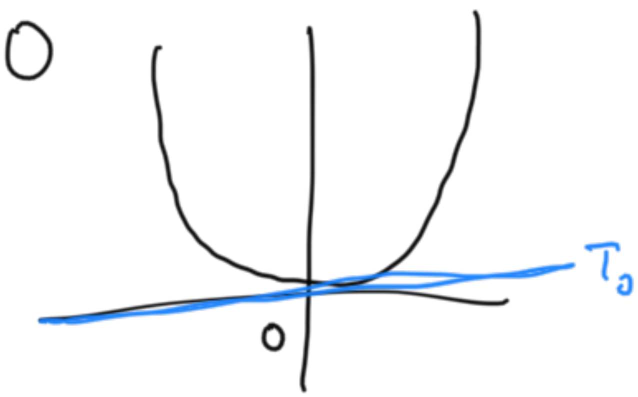
$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$

$f'(0) = 0$

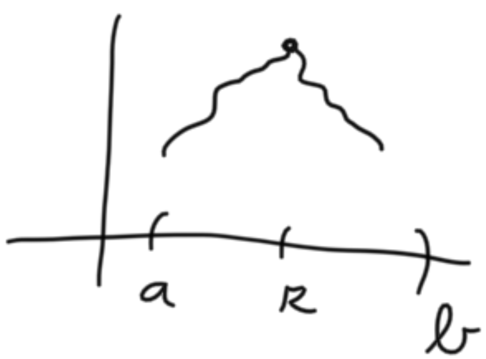


0 není inflexní bod

Pozn.: V49 platí i v případě, že obě nerovnosti jsou opačné.

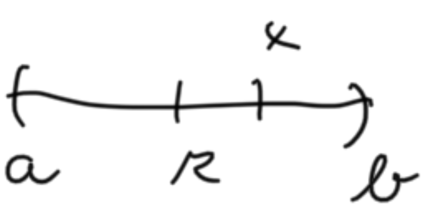
Důkaz: Dle předp. je f' na (a,b) vlastní $\overset{V36}{\Longrightarrow}$ f je na (a,b) spojitá

V43 na fci f' $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f' \text{ je rostoucí na } (a,r\rangle \\ \text{klesající na } \langle r,b) \end{array}\right\} \Rightarrow f'$ má na (a,b) ostré max v bodě r,



tj. $\forall x \in (a,b) \setminus \{r\}: \; f'(x) < f'(r)$

Vezměme $x \in (r,b)$. Na int. $\langle r,x\rangle$ je f spojitá a v (r,x) má f derivaci. Jsou tedy splněny předp. Lagrangeovy věty, tedy



graf leží nad tečnou

graf leží pod tečnou

$$\exists\, \xi \in (r, x): \quad f'(\xi) = \frac{f(x) - f(r)}{x - r}$$

$$\xi \neq r \Rightarrow f'(\xi) < f'(r)$$

$$f'(r)(x - r) > f(x) - f(r)$$

$$f(x) < \underbrace{f(r) + f'(r)(x - r)}_{T_r}$$

$\Rightarrow [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_r.

Dále vezměme $x \in (a, r)$. Na int. $\langle x, r \rangle$ je f spojitá a v (x, r) má f derivaci.

Lagr. věta $\Rightarrow \exists\, \eta \in (x, r)$:

$$f'(r) > f'(\eta) = \frac{f(r) - f(x)}{r - x}$$

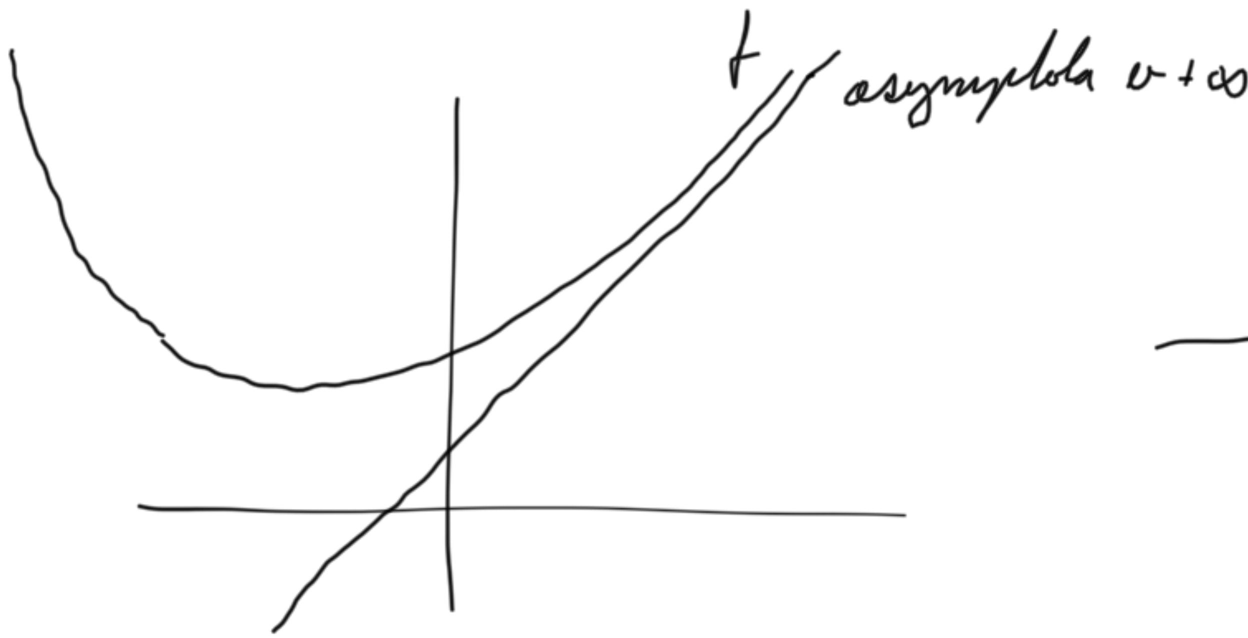
$$\eta \neq r$$

$$f'(r)(r - x) > f(r) - f(x)$$

$$f(x) > \underbrace{f(r) + f'(r)(x - r)}_{T_r}$$

$\Rightarrow [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_r.

Tedy r je inflexním bodem fce f. $\square$



__Důkaz__: „$\Leftarrow$"

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-q) \overset{AL}{\underset{\cancel{?}}{=}} \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) - \lim_{x\to+\infty} q = \overset{\in\mathbb{R}}{q} - q = 0$$

„$\Rightarrow$"

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-kx-q+kx+q}{x} \overset{AL}{\underset{\cancel{?}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-kx-q}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{kx+q}{x} =$$

$$\overset{AL}{\underset{\cancel{?}}{=}} \frac{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-q)}{\lim_{x\to+\infty} x} + k + \lim_{x\to+\infty}\frac{q}{x} = \frac{0}{+\infty} + \overset{\in\mathbb{R}}{k} + \frac{\overset{\in\mathbb{R}}{q}}{+\infty} = k$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-q+q) \overset{AL}{=} 0+q = q$$

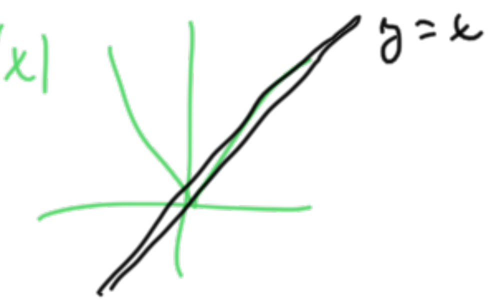
□

Pozn.:
- Analogické tvrzení platí i pro asymptotu v $-\infty$.
- Pokud $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, pak zřejmě asymptotou f v $+\infty$ je přímka rovnoběžná s osou x daná fcí $y = A$.

(Tedy zajímavý případ (k hledání asymptoty je případ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.)

Př.:
- $f(x) = \sqrt{x^2+x}$

$\sqrt{x^2} = |x|$



asymptota v $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$$

AL

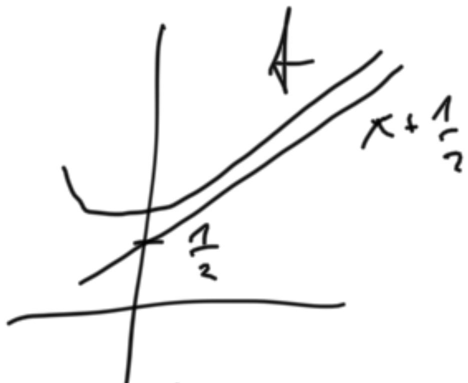
VOLSF

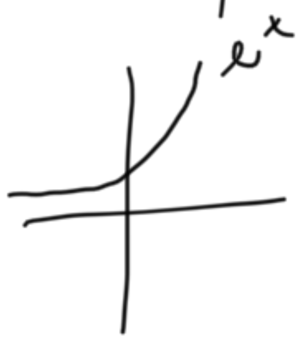
(S) (Vnější)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}}_{\to 1}+1}\overset{AL}{=}\frac{1}{2}$$

asymptota v $+\infty$: $\quad y=x+\frac{1}{2}$



- 

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\underset{\text{R.S.}}{\overset{\uparrow}{=}}+\infty\overset{TSO}{\Rightarrow}$$ exp nemá asymptotu v $+\infty$

- 

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}\underset{\text{R.S.}}{\overset{\uparrow}{=}}0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\log x - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

TSO

$\Rightarrow$ log nemá asymptotu v $+\infty$