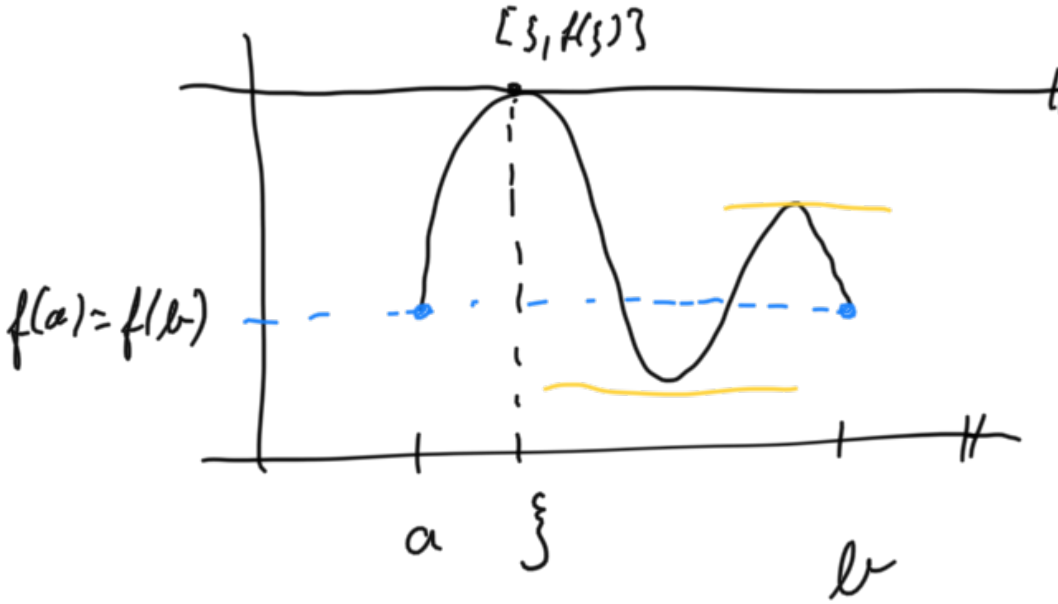
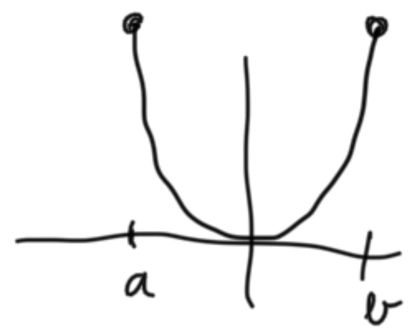


$T: \; y = f(\xi) + 0(x-\xi) = f(\xi)$



<u>Důkaz</u>: • Je-li f konstantní na $\langle a,b\rangle$, pak $\xi \in (a,b)$ lze vzít libovolně.

• Nechť f není konstantní.

- $\exists x \in (a,b): f(x) > f(a) = f(b)$

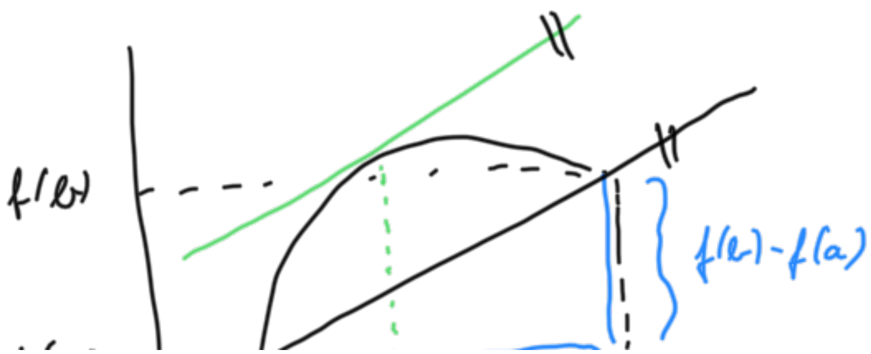
  V31 f nabývá na $\langle a,b\rangle$ maxima v nějakém bodě $\xi \in \langle a,b\rangle$.

  Protože $\max_{\langle a,b\rangle} f > f(a) = f(b) \Rightarrow \xi \in (a,b)$, dle V40 je $f'(\xi) = 0$.

  ($f'(\xi)$ ex. dle předp.)

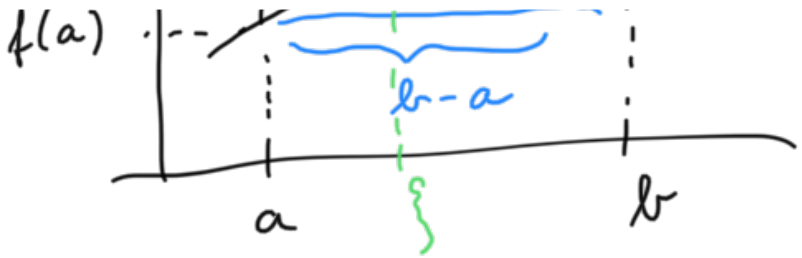
- $\exists x \in (a,b): f(x) < f(a) = f(b)$

  $\exists \xi \in (a,b)$, f nabývá v ξ minima, V40 $\Rightarrow f'(\xi) = 0$. $\square$



$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ... směrnice sečny procházející body

$[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$



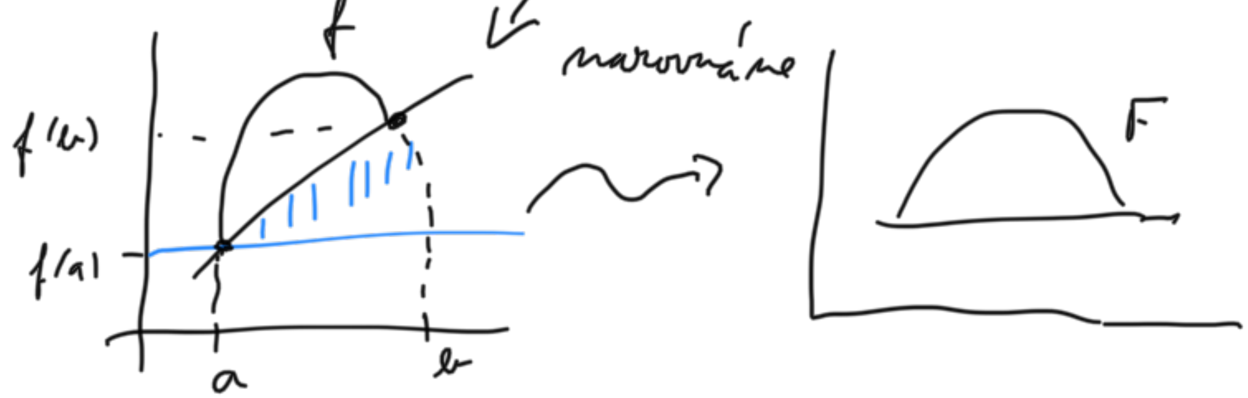
„věta o přírůstku funkce": $f(b)-f(a) = f'(\xi)\cdot\underbrace{(b-a)}_{\text{vzdálenost } b \text{ a } a}$

„věta o střední hodnotě": $s(t)$ ..... pozice hmotného bodu v čase t

$\frac{s(b)-s(a)}{b-a}$ ..... průměrná rychlost mezi okamžiky a, b

$\exists\, \xi \in (a,b)$: "$s'(\xi) = v(\xi)$", tj. existuje okamžik, kdy se okamžitá rychlost rovná průměrné

<u>Důkaz</u>:



TRIK: od f odečteme <u>afinní fci</u>

Definujeme pomocnou fci $F(x) = f(x) - \underbrace{f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$, $x \in \langle a,b\rangle$

F splňuje předp. Rolleovy věty: (i) F je spojitá na $\langle a,b\rangle$, neboť je to rozdíl spojitých fcí

(ii) $\forall x \in (a,b)$:

$$F'(x) = \underset{\in \mathbb{R}^*}{f'(x)} - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1}_{\in \mathbb{R}}$$

Pozor: používáme poznámku za V 37.

(iii) $$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a}) = 0$$

Dle Rolleovy věty $\exists \xi \in (a,b): F'(\xi) = 0$

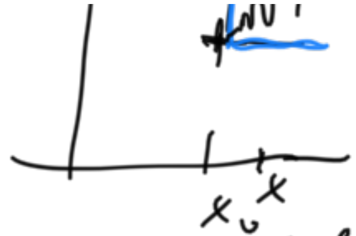
$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\square$

Opačně: $0 < f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x \in P(x_0,\delta): \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$

$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$



(i) **Důkaz**: Vezměme $x, y \in J$, $x < y$ libovolné. CHCI: $f(x) < f(y)$.

f splňuje na $\langle x, y \rangle$ předp. Lagrangeovy věty (V42).

Tedy $\exists\, \xi \in (x, y)$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \overset{(i)}{>} 0$$

$$y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$$

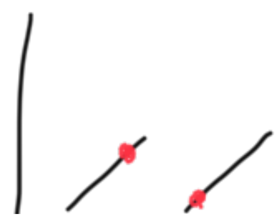
(ii)–(iv) se dokážou stejně. $\square$

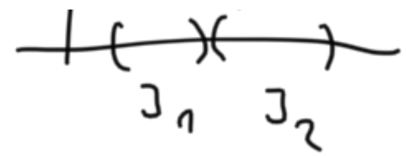
Pozn.: 1) J může být otevřený, uzavřený i polouzavřený.

2) v (iii) a (iv) platí i obrácená implikace
v (i) a (ii) obrácená implikace neplatí! ($f(x) = x^3$)

3) Jsou-li J_1, J_2 intervaly a $f' > 0$ na $J_1 \cup J_2$

$\not\Rightarrow$ f je rostoucí na $J_1 \cup J_2$



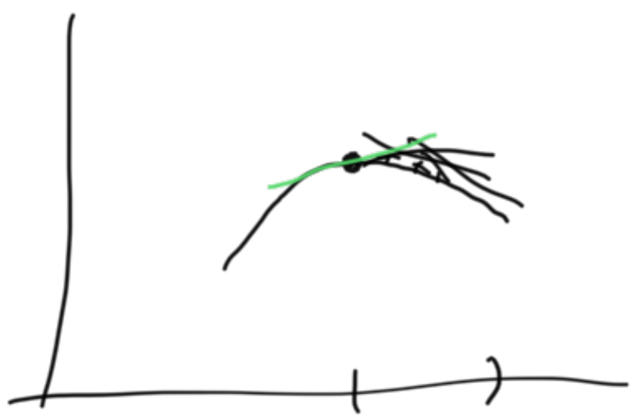


4) (L2) ve větě 34 (zavedení log) plyne z V43:

$$(\log x)' = \frac{1}{x} > 0$$

<u>Důsledek</u>: Je-li $f'(x)=0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak je f na (a,b) konstantní.

↳ Dle V43 (iii) je f neklesající &
(iv) je nerostoucí

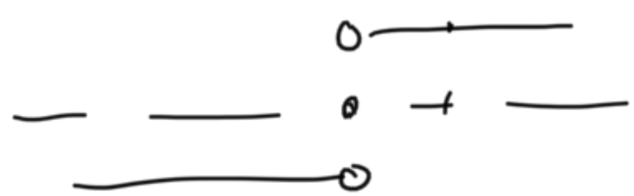


<u>Pozn.</u>: Analogická tvrzení platí pro $f'_-(a)$ a $f'(a)$.

<u>Pozor</u>: předp. spojitosti ve V44 nelze vypustit!

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

$$f'(x) = 0, \quad x \neq 0,$$



$$f'(0) = +\infty \neq \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\lim_{x \to 0} f'(x)}}$$

Důkaz: Označme $A = \lim f'(x) \in \mathbb{R}^*$

Důkaz: Označme $A = \lim\limits_{x \to a+} f'(x) \in \mathbb{R}$

CHCI: $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$

$$\underbrace{\lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{= f'_+(a)}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. $\exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) : f'(x) \in B(A, \varepsilon)$

... speciálně $f'(x)$ je vlastní pro $x \in (a, a+\delta)$

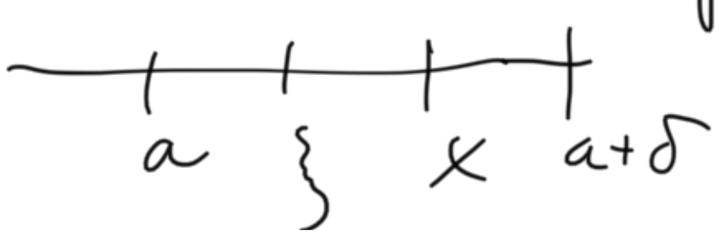
Vezměme libovolné $x \in (a, a+\delta)$.

f je spojitá na $\langle a, x \rangle$ — v bodech intervalu $(a, x\rangle$ to plyne z V36; v bodě a to plyne z předpokladu.

a má derivaci v (a, x)

Lagr. věta $\Rightarrow \exists \xi \in (a, x) : f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

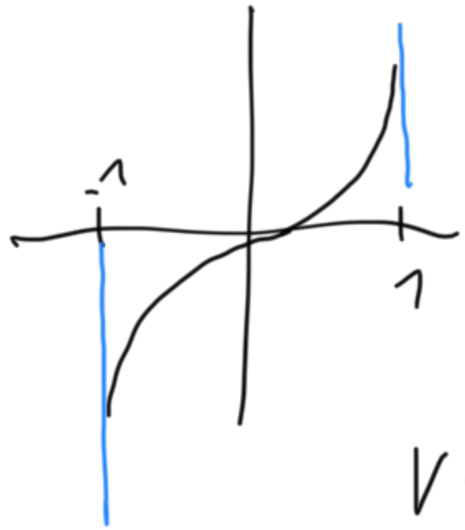
Protože $\xi \in (a, a+\delta) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) \in B(A, \varepsilon)$



Odtud plyne, že $f'_+(a)$ existuje a je rovna

A. $\square$

Př.: $f(x) = \arcsin x$



$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$$

f je spojitá na $\langle -1, 1\rangle$, speciálně v -1 zprava a v 1 zleva.

$$\text{V44} \Rightarrow f'_+(-1) = \lim_{x\to -1+} f'(x) = \lim_{x \to -1+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

„1/kladná 0"

$$\text{analogicky} \quad f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} f'(x) = +\infty$$

Varování: 1)

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2x+1}^{f}}{\underbrace{3x+1}_{g}}}_{=1} \neq \lim_{x \to 0} \frac{\overset{f'}{2}}{\underset{g'}{3}} = \frac{2}{3}$$

není to typ „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\infty}{\infty}$"

2)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + \sin x} \overset{\text{l'H}}{\neq} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\cos x} \quad \ldots \text{ neexistuje}$$

„$\frac{\infty}{\infty}$"

To neznamená, že původní

derivace neexistují

lim neexistuje!

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}} \overset{AC}{=} 1$$

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

nulová x omezená

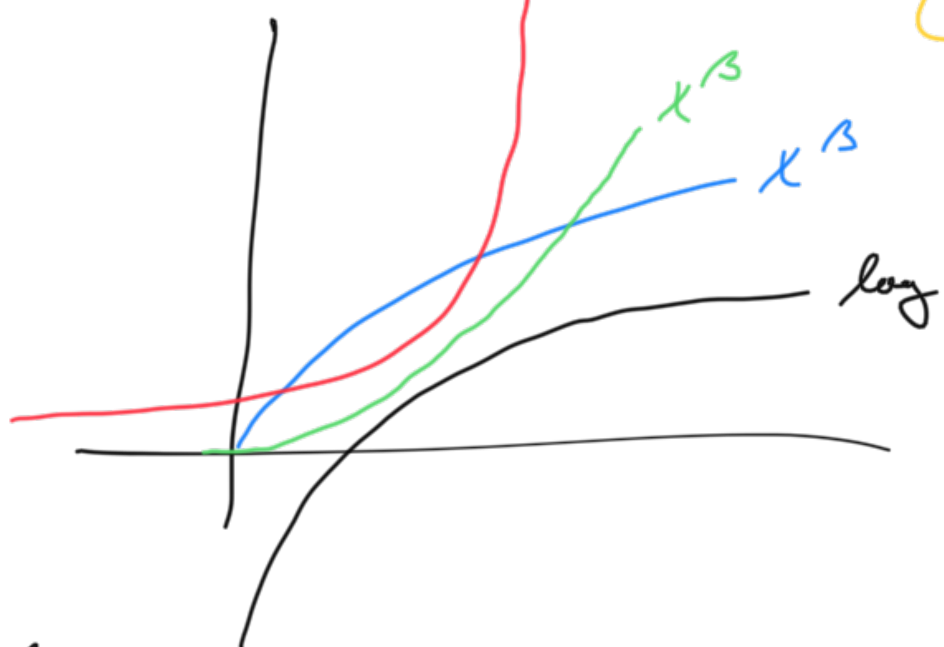
3) $$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Př.: růstová škála

$$\boxed{\text{"}\log^{\alpha} x << x^{\beta} << e^{\gamma x}\text{"} \quad \text{pro } x\to+\infty, \quad \text{kde } \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha,\beta,\gamma>0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^{\alpha} x}{x^{\beta}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\beta}}{e^{\gamma x}} = 0$$



$\beta=1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\gamma x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\gamma e^{\gamma x}} \overset{AC}{=} 0$$

$\frac{\infty}{\infty}$

$\beta > 0$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = \lim_{x\to+\infty} \Big(\underbrace{\frac{x}{e^{\gamma/\beta\, x}}}_{\to\, 0}\Big)^\beta = 0^\beta = 0$

VOLSF

$f(y) = y^\beta$ ... spojitá na $\langle 0, +\infty)$

$$\lim_{x\to0+} x\cdot\log x = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\log\frac{1}{y} = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\log y}{y} = 0,$$ viz ↑

„subst. $y = \frac{1}{x}$"

VOLSF (P)