$x \mapsto c \in \mathbb{R}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ (pro $\forall x \in \mathbb{R}$)

$x \mapsto x$ je spojitá na $\mathbb{R}$

---

aritmetika spoj. fcí: $x \mapsto x^2 = x \cdot x$ je spojitá na $\mathbb{R}$

$x \mapsto x^3$

$x \mapsto x^4$

$\vdots$

Polynomy jsou spojité fce na $\mathbb{R}$.

Př.: $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = x^n \underbrace{\left(\boxed{\frac{a_0}{x^n}} + \boxed{\frac{a_1}{x^{n-1}}} + \dots + \boxed{\frac{a_{n-1}}{x}} + a_n \right)}_{\downarrow AL \;\; a_n} \overset{AL}{=} +\infty \cdot a_n \begin{cases} +\infty & \dots \; a_n > 0 \\ -\infty & \dots \; a_n < 0 \end{cases}$$

$\frac{a_0}{x^n} \xrightarrow{AL} 0$, $\frac{a_1}{x^{n-1}} \to 0$, $\frac{a_{n-1}}{x} \to 0$; $x^n \to +\infty$, $x^{n-1} \xrightarrow{AL} +\infty$, $x \to +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}: P(x) = Q(x)$

$P - Q$ polynom: $c_0 + c_1 x + \dots + c_\ell x^\ell$

$$\lim_{x\to+\infty}(P(x)-Q(x)) = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0 \quad \Rightarrow k=0,\ c_0=0$$

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 - b_0 \\ c_1 &= a_1 - b_1 \\ &\ \vdots \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_0 &= b_0 \\ a_1 &= b_1 \\ &\ \vdots \\ n &= m \end{aligned}$$

$f = \frac{P}{Q}$, P, Q polynomy,
Q není nulový (není konst. nulová fce)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R};\ Q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{\text{kořeny pol. } Q\}}$$

je-li st $Q = m$, pak je to nejvýše m-prvková množina

Dle podílu spoj. fcí je f spojitá na D_f. $(\forall x \in D_f)$

Nazývá se racionální funkce.

Důk. (iii) pro $A \in \mathbb{R}$.

víme: $\exists \eta > 0\ \forall x \in P(c,\eta)$: $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

Nechť $\varepsilon > 0$.

$\exists \delta_1 > 0\ \forall x \in P(c,\delta_1)$: $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$

$\exists \delta_2 > 0\ \forall x \in P(c,\delta_2)$: $A-\varepsilon < g(x) < A+\varepsilon$

Položím $\delta = \min\{\eta, \delta_1, \delta_2\}$.

Pak pro $x \in P(c,\delta)$: $\quad A - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < A + \varepsilon$.

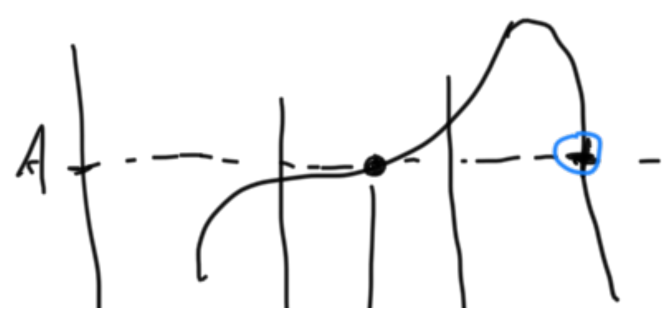
Tedy $\lim\limits_{x \to c} h(x) = A$.

Pozn.: Pro nevlastní limity platí analogie s 1 policajtem.

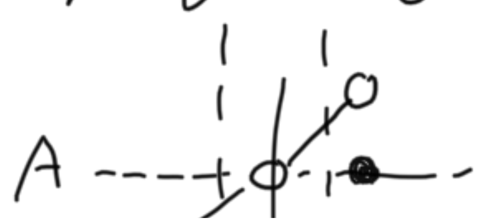
$\exists K > 0$

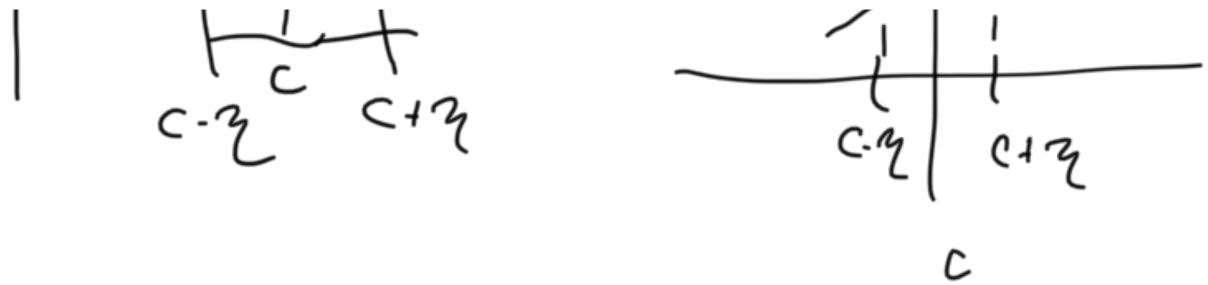
$\forall x \in P(c,\eta): \ |g(x)| \le K$

$$\underbrace{0}_{\to 0} \le \underbrace{|f(x)\cdot g(x)|}_{\substack{\to 0,\ x\to c \\ \text{2 POLIC.}}} = |f(x)|\cdot|g(x)| \le \overbrace{K\cdot \underbrace{|f(x)|}_{\to 0,\ x \to c}}^{\text{AL},\ \to 0,\ x\to c}$$



např. je-li g prostá, pak to funguje



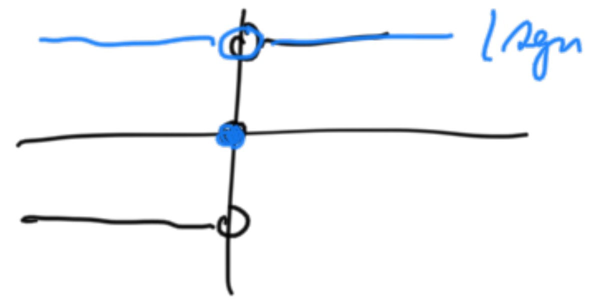


Pozor bez předpokladu (P) nebo (S) věta o limitě sl. fce

neplatí: $f(y) = |\operatorname{sgn} y|$

$g(x) = 0$

$c = 0$



$f(y)$

$y = g(x)$

$f(g(x))$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = A, \quad \lim_{y\to A} f(y) = \lim_{y\to 0} |\operatorname{sgn} y| = 1$$

$$f\circ g(x) = |\operatorname{sgn} 0| = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f\circ g = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Důk.: Předp., že platí (S), tj. $B = f(A)$:

Zvolme $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : \forall y \in B(A, \delta) : f(y) \in B(f(A), \varepsilon)$

$$f(y) \in B(f(A), \varepsilon) = B(B, \varepsilon)$$

$$\lim_{x\to c} g(x)=A \Rightarrow \quad \exists\, \xi\in\mathbb{R},\ \xi>0 : \forall x\in P(c,\xi) : g(x)\in B(A,\delta)$$

Tedy pro $\forall x\in P(c,\xi) : f(\overbrace{g(x)}^{y})\in \mathcal{B}(B,\varepsilon)$, tj.:

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = B.$$

Předp., že platí (P), tj.: $\exists\, \eta>0 : \forall x\in P(c,\eta)\ g(x)\neq A.$

Zvolme $\varepsilon>0$. $\exists\, \delta>0 : \forall y\in P(A,\delta) : f(y)\in \mathcal{B}(B,\varepsilon)$

$$\exists\, \xi\in\mathbb{R}\ \xi>0 : \forall x\in P(c,\xi) : g(x)\in \mathcal{B}(A,\delta)$$

Položme $\psi=\min\{\eta,\xi\}$.

Pak $\forall x\in P(c,\psi)$: $\left.\begin{array}{c} g(x)\in \mathcal{B}(A,\delta) \\ \& \\ g(x)\neq A \end{array}\right\} g(x)\in P(A,\delta)$

Tedy pro $\forall x\in P(c,\psi)$:

$f(\overbrace{g(x)}^{y})\in \mathcal{B}(B,\varepsilon)$, tedy $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$.

$$\lim_{x\to c} f(g(x))$$

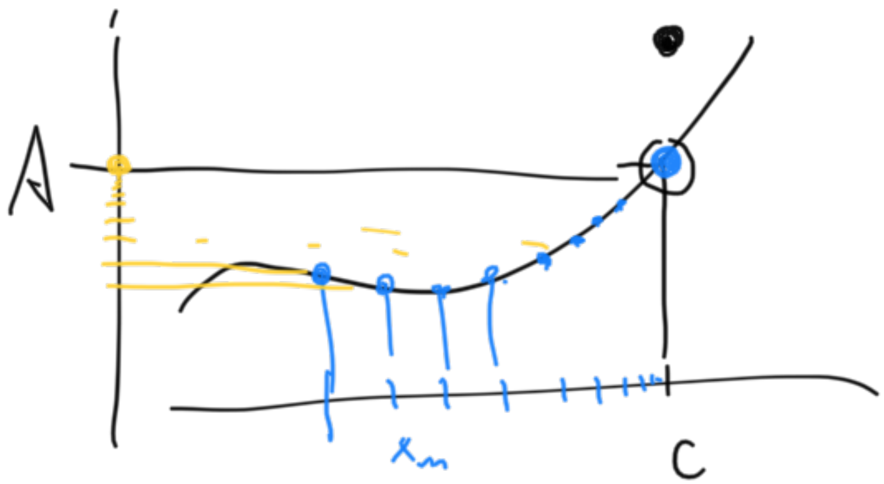
„složení spoj. fcí je spojité"

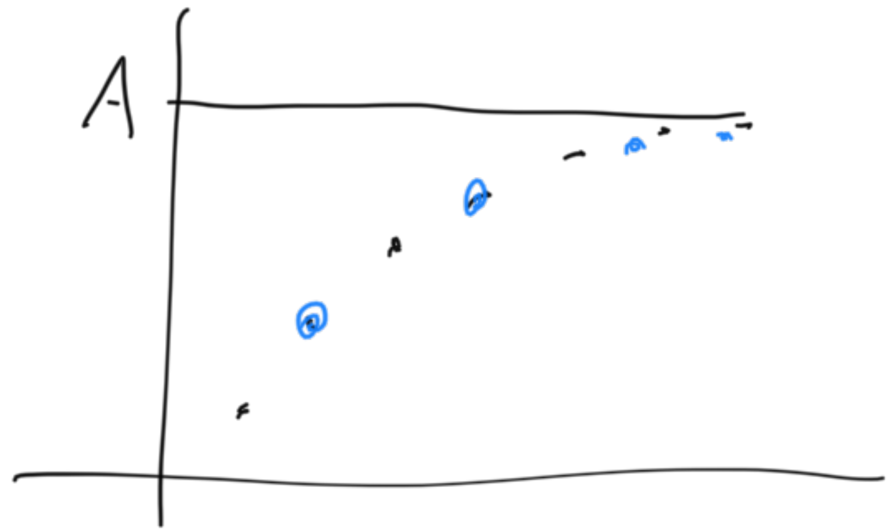
g spoj. v c $\Rightarrow \lim_{x\to c} g(x) = g(c)$

f je spoj. v $g(c) = \lim_{y\to g(c)} f(y) = f(g(c))$

je splněný předp. (S): VOLSF $\Rightarrow$

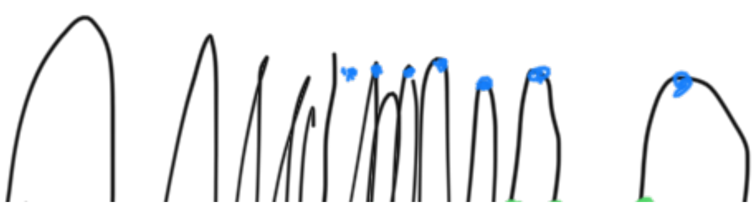
$\lim_{y\to g(c)} f(y) = f(g(c)) \Rightarrow f\circ g$ je spojitá v c



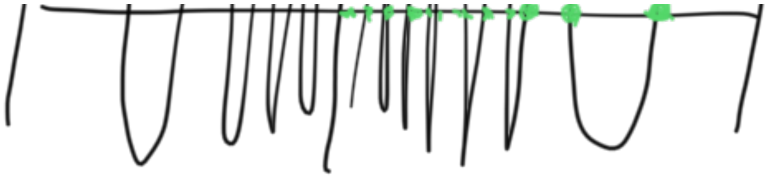


Př.: Neexistuje $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. $\qquad f(x) = \sin\frac{1}{x}$

Předpokládejme, že $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = A \in \mathbb{R}^*$.



Zvolme $x_n = \frac{1}{\ldots} \neq 0$



$n\pi$

Pak $x_n \in D_f$, $x_n \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Dle Heineovy věty je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Ale $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = \lim 0 = 0$

$\Rightarrow A = 0$.

Zvolme $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \neq 0$, $y_n \in D_f$, $y_n \neq 0$

$$\lim y_n = 0.$$

Dle Heineovy věty je $\lim f(y_n) = A$.

Ale $\lim f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = \lim 1 = 1$.

$\Rightarrow A = 1$ Spor.