Důkaz: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Je-li $G = \sup M$, pak G je horní závora M.

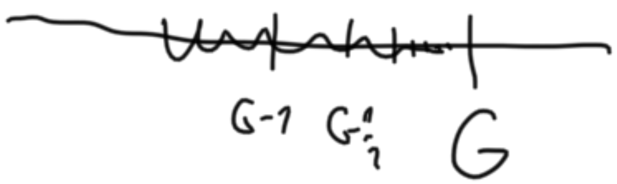
Pokud $G = +\infty$, pak M není shora omezená, tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in M : \underset{b_n}{\underset{\shortparallel}{x_n}} > \underset{a_n}{\underset{\shortparallel}{n}}$$

Dle věty o 1 policajtovi (V14') je $\lim x_n = +\infty$.

Pokud $G \in \mathbb{R}$. Dle def. suprema $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in M : x_n > G - \frac{1}{n}$.

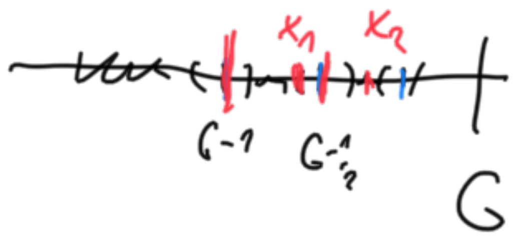
G je horní závora M $\Rightarrow$



$$\forall n \in \mathbb{N} : \underset{a_n}{\overset{}{\shortparallel}}\ G - \tfrac{1}{n} < \overset{c_n}{x_n} \le \overset{b_n}{G}$$

$$G \leftarrow G - \tfrac{1}{n} \qquad G \rightarrow G$$

$\left\{ G - \frac{1}{n} \right\}$



Dle věty o 2 policajtech (V14) je

$\lim x_n = G$.

$\lim \frac{1}{n} = 0$

$\lim G - \frac{1}{n} = G$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$\lim a_n = A$

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} A$

$a_n \to A$

Protože G je horní závora neprázdné množiny, je $G \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (tj. $G \neq -\infty$).

Pokud $G = +\infty$, pak $\{x_n\}$ není omez. shora. Tedy ani M není shora omezená $\Rightarrow \sup M = +\infty = G$.

Pokud $G \in \mathbb{R}$, pak první vl. sup plyne přímo z předp. ve (ii).

Druhá vl. sup: Nechť $\varepsilon > 0$ libovolné.

Z def. limity $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - G| < \varepsilon$

$G - \varepsilon < x_n < G + \varepsilon$

Tedy $\underset{M}{\underset{\cap}{x_{n_0}}} > G - \varepsilon$. Tedy $G = \sup M$. $\square$

$\inf\{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\}$

$\lim \frac{1}{n} = 0 \overset{L16}{\Longrightarrow} \inf = 0$

Důkaz: Předpokládejme, že $\{a_n\}$ je neklesající.

Označme $S = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

1) $S = +\infty$. Nechť $K \in \mathbb{R}$ libovolné.

$\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ není shora omez. $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ a_{n_0} > K$.

Protože $\{a_n\}$ je neklesající, dostáváme, že

$$\forall n \geq n_0: \quad a_n \geq a_{n_0} > K.$$

Tedy $\lim a_n = +\infty = S$.

2) $S \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ libovolné.

Z def. sup $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq S \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ a_{n_0} > S - \varepsilon \end{cases}$

Protože $\{a_n\}$ je neklesající, platí, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$:

$$S - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq S$$

Tedy $\lim a_n = S$.

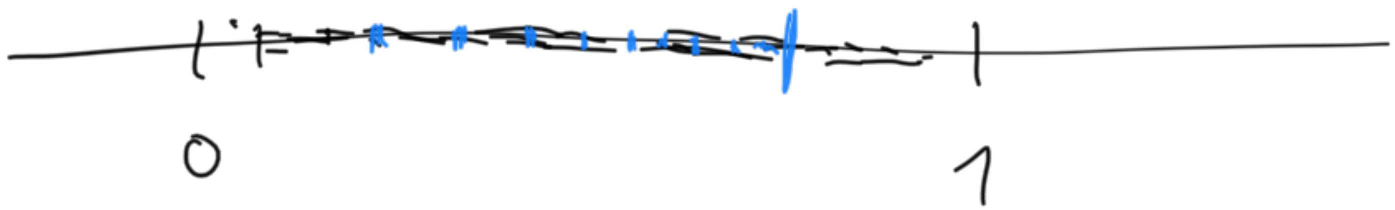
Pro $\{a_n\}$ nerostoucí analogicky.

Nebo $b_n = -a_n$, pak $\{b_n\}$ neklesající, tj. $\lim b_n = \sup\{b_n\}$

$$\lim a_n = \lim -b_n = -\lim b_n = -\sup\{b_n\} =$$

AL

$$= \inf\{-b_n\} = \inf\{a_n\}. \qquad \square$$



Důkaz: Nechť $\{x_n\}$ je omezená posloupnost.

$$\exists\, a_0, b_0 \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n \in \langle a_0, b_0 \rangle$$

Zkonstruujeme indukcí posl. intervalů $\{\langle a_k, b_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že

a) $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\langle a_{k+1}, b_{k+1} \rangle = \begin{cases} \langle a_k, \frac{a_k + b_k}{2} \rangle \\ \langle \frac{a_k + b_k}{2}, b_k \rangle \end{cases}$$

b) $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

množina $I_k = \{ j \in \mathbb{N},\ x_j \in \langle a_k, b_k \rangle \}$ je nekonečná.

$I_0 = \mathbb{N}$

Předp., že pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ už máme $\langle a_k, b_k \rangle$.

$$I_k = \overbrace{\{ j \in \mathbb{N};\ x_j \in \langle a_k, \tfrac{a_k+b_k}{2} \rangle \}}^{I_{k+1}} \cup \overbrace{\{ j \in \mathbb{N};\ x_j \in \langle \tfrac{a_k+b_k}{2}, b_k \rangle \}}^{I_{k+1}}$$

Dle ind. předp. je I_k nekonečná, a tedy alespoň 1 z množin je nekonečná!

Je-li nekonečná, položím $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$,

jinak položím $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$, $b_{k+1} = b_k$.

Pak a) i b) jsou splněny, neboť I_{k+1} je nekonečná.

Nyní opět indukcí zkonstruujeme rost. posl. $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ tak, že $x_{n_k} \in \langle a_k, b_k \rangle$.

Prvek n_k volíme libovolně z nekonečné (a tedy neprázdné) množiny $I_k \setminus \{1, 2, \dots, n_{k-1}\}$.

Dle a) je $\{a_k\}$ neklesající a $\{b_k\}$ je nerostoucí

Obě jsou omezené (mezi a_0, b_0).

Dle V17 jsou obě konvergentní!

Označme $\underset{\mathbb{R}}{\alpha} = \lim a_k$, $\underset{\mathbb{R}}{\beta} = \lim b_k$, i.e. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad b_k - a_k = \frac{1}{2^k}\cdot(b_0 - a_0)$$

$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$

$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{4}(b_0 - a_0)$

$\vdots$

$$\lim(b_k - a_k) \underset{AL}{=} (b_0 - a_0)\lim\frac{1}{2^k} = 0$$

$\lim(b_0 - a_0)\cdot\lim\frac{1}{2^k}$

$$\lim(b_k - a_k) \overset{AL}{=} \lim b_k - \lim a_k = \alpha - \beta$$

$\Rightarrow \alpha = \beta$

Pro $\forall k \in \mathbb{N}$: $a_k \le x_{n_k} \le b_k$

$a_k \to \alpha$, $b_k \to \beta = \alpha$

Dle Vo 2 policajtech (V14) je $\lim x_{n_k} = \alpha$