$$\lim (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \underset{0}{\cancel{=}} \underbrace{\lim (-1)^n}_{\text{neexistuje}} \cdot \lim \frac{1}{n}$$

$$\underset{V12}{=} 0 \quad \left(\lim \frac{1}{n} = 0 \text{ a } \{(-1)^n\} \text{ je omezená} \right)$$

„nulová × omezená"

<u>Důkaz</u>: $\exists K>0 : \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \le K$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. Z def. $\lim a_n = 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 : |a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$

Tedy $\forall n \ge n_0 : |a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < K \cdot \varepsilon$ □

<u>Důkaz</u>: (i) plyne z (ii):

Sporem. Kdyby $A < B$, pak z (ii) plyne, že $\exists n_1 \in \mathbb{N}$:

$\forall n \ge n_1 : a_n < b_n$.

To je spor s předp., že $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 : a_n \ge b_n$.

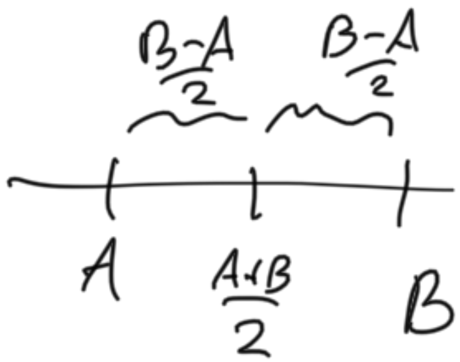
(ii) Položme $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$. Z def. limity $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_2 : |b_n - B| < \varepsilon$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2: |b_n - B| < \varepsilon.$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí, že

$$a_n < A + \varepsilon = A + \frac{B-A}{2} = B - \frac{B-A}{2} = B - \varepsilon < b_n. \quad \square$$

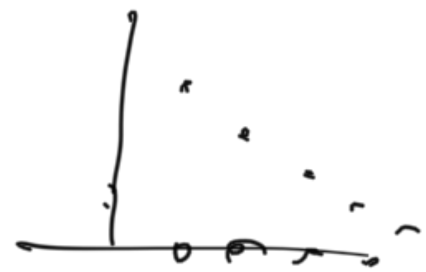


Varování: neplatí, že kdyby

$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > b_n \Rightarrow A > B$!

$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 0$

$\lim a_n = \lim b_n = 0$

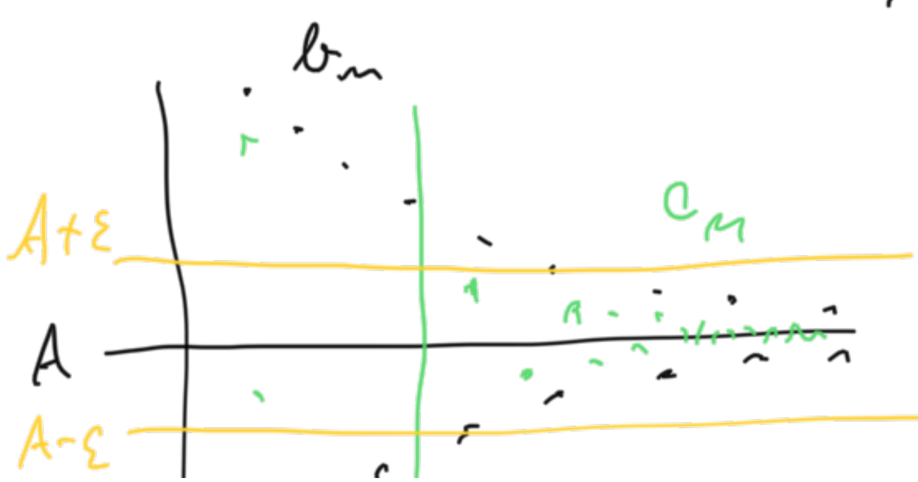


neplatí, že $A \leq B \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ a_n \leq b_n$.

Pozn.: Typické použití je pro $\{b_n\}$ konstantní.

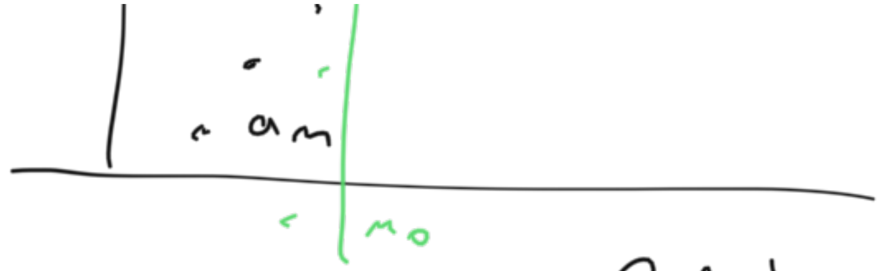
Tj.: $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$

$A < B \Rightarrow$ „$a_n < B$“ | „$a_n \leq B$“ $\Rightarrow A \leq B$



Důkaz: Označme $A = \lim a_n$ $(= \lim b_n)$.

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné.



$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$

$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 : |b_n - A| < \varepsilon$

Položme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$.

Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_3$ platí, že

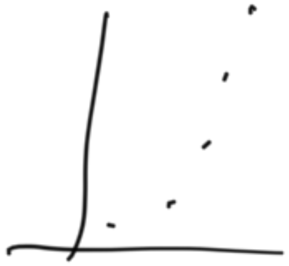
$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon$$

Tedy $\lim c_n = A$. $\square$

limita
- neexistuje
- existuje
  - vlastní, tj. $\in \mathbb{R}$ .... konvergentní
  - nevlastní $\left.\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}\right\}$ ... divergentní (k $\pm\infty$)

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } n \text{ liché} \\ n & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$

Př.: $\lim n^2 = +\infty$: nechť $L \in \mathbb{R}$ libovolné.

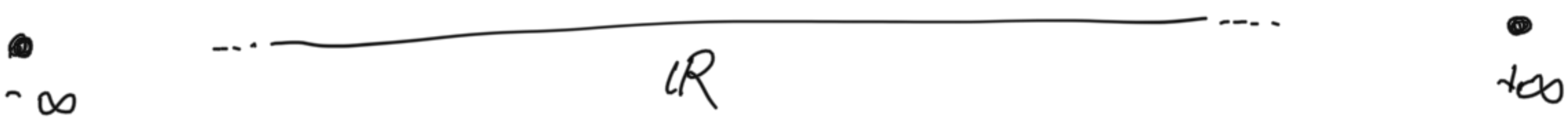


Dle Archimédovy vl. $\exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 > L$.

Pak $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ je $n^2 \geq n \geq n_0 > L$

K důkazu VO pro nevl. limity: Je třeba ukázat, že neplatí:

- $\lim a_n = +\infty$ & $\lim a_n \in \mathbb{R}$
- $\lim a_n = -\infty$ & $\lim a_n \in \mathbb{R}$
- $\lim a_n = +\infty$ & $\lim a_n = -\infty$



Proč není def. $+\infty + (-\infty)$:

$$a_n = n \qquad \lim a_n = +\infty \qquad \lim (a_n + b_n) = \lim 0 = 0$$
$$b_n = -n \qquad \lim b_n = -\infty$$

$c \in \mathbb{R}$

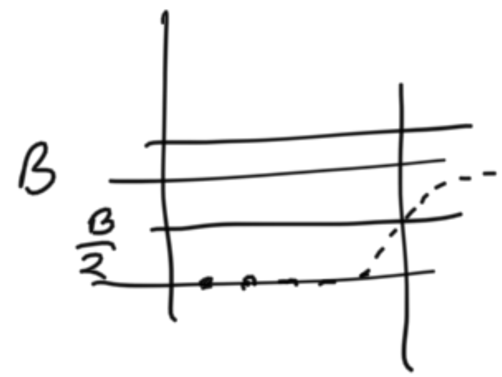
$$a_n = n + c \qquad \lim a_n = +\infty \qquad \lim (a_n + b_n) = \lim c = c$$
$$b_n = -n \qquad \lim b_n = -\infty$$

$a_n = 2n$ — || — $\lim (a_n + b_n) = \lim n = +\infty$
$b_n = -n$

$a_n = n$ — || — $\lim (a_n + b_n) = \lim (-n) = -\infty$
$b_n = -2n$

Pozn.: ve větě 11' (iii) je třeba, aby $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : b_n \neq 0$

$\frac{A}{B}$ je def. $\Rightarrow B \neq 0$



$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0:$
$b_n > \frac{B}{2} > 0$

Důkaz V15: Rozlišíme 2 případy.

1) $A \in \mathbb{R}$ Nechť $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$ libovolné.

$A > 0$ (předp.)

$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \frac{A}{2}$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2 : |b_n - 0| < \frac{A}{2L}$ > 0

Položme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$

Pro $n \ge n_3$: $\quad a_n > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$

$$0 < b_n < \frac{A}{2L} \Rightarrow \frac{1}{b_n} > \frac{2L}{A}$$

tj. $\quad \frac{a_n}{b_n} > \frac{A}{2} \cdot \frac{2L}{A} = L$

Tedy $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

2) $\underline{A = +\infty}$ nechť $L \in \mathbb{R}, L > 0$.

$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_1 : a_n > 1$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_2 : |b_n - 0| < \frac{1}{L}$

Položme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$

Pro $n \ge n_3$: $\quad a_n > 1$

$$\left.\begin{array}{l} a_n > 1 \\ \underline{0 < b_n} < \frac{1}{L} \end{array}\right\} \quad \frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{\frac{1}{L}} = L \qquad \square$$

Pozn.: $\quad A \subset \mathbb{R}$

Def. sup / inf neomezených je v souladu s tím,

že sup A je nejmenší horní závora.

Chápeme-li A jako podmnožinu $\mathbb{R}^*$, pak $+\infty$ je horní závora A.

Jelikož A není shora omezená, pak žádné $\mathbb{R}$ číslo není horní závora A, tj. $+\infty$ je nejmenší horní (je jediná) závora A.