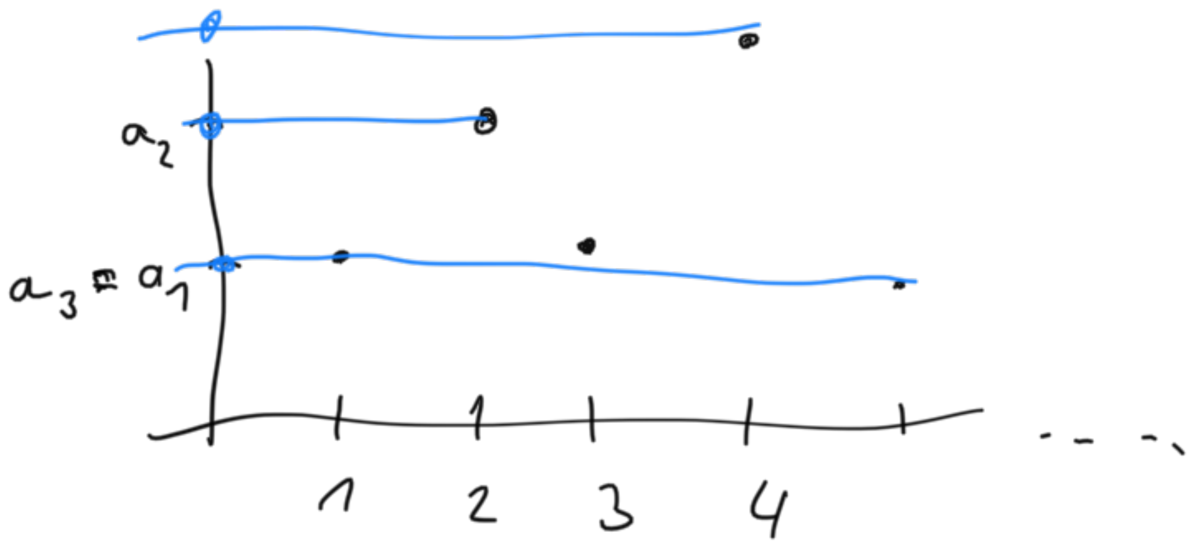


$\{n\}_{n=1}^{\infty}$, tj. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = n$

$\vdots$

$\{n^2\}$ množina všech členů je $\mathbb{N}$

$\{\frac{1}{n}\}$

$\{(-1)^n\}$ ...... množina všech členů $\{-1,1\}$

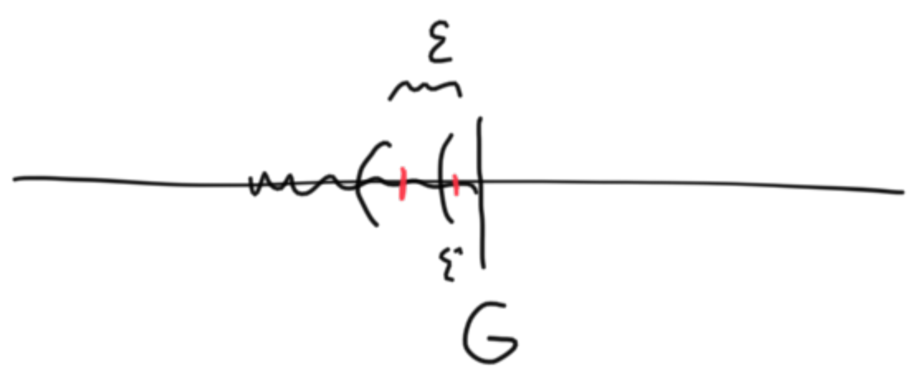
rekurentním způsobem:

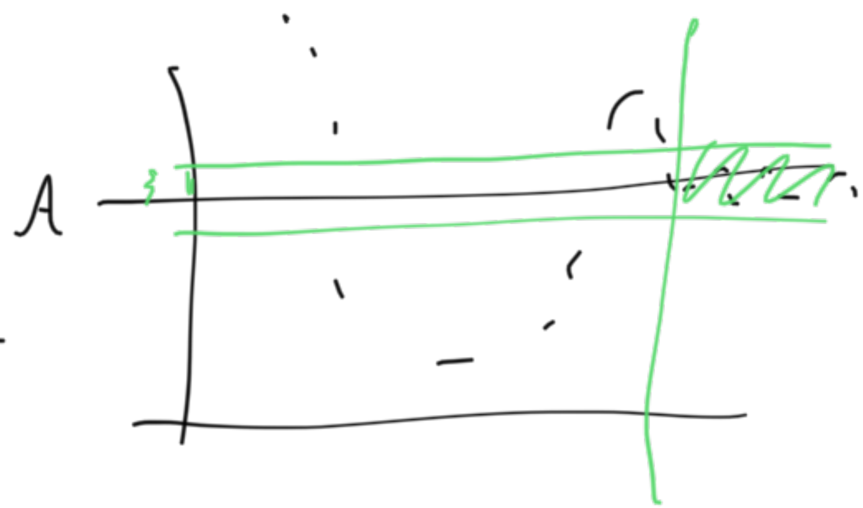
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1)\cdot a_n \end{array}\right\} a_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n! \quad \text{... } n \text{ faktoriál}$$

a_n je n-té prvočíslo

je vhodné definovat $0! = 1$

$$p_n = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$





<u>Důkaz</u>: Předpokládejme, že $A, B \in \mathbb{R}$, $A < B$ takové, že A i B jsou limitou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Položme $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$.

A je limita $\{a_n\}$ $\Rightarrow$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}: \underbrace{\forall n \geq n_1}^{n \in \mathbb{N}} : |a_n - A| < \varepsilon$

B je limita $\{a_n\}$ $\Rightarrow$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : |a_n - B| < \varepsilon$

Vezmeme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Pak $|a_{n_0} - A| < \varepsilon$ & $|a_{n_0} - B| < \varepsilon$

Tedy $a_{n_0} < A + \varepsilon = A + \frac{B-A}{2} = B - \frac{B-A}{2} = B - \varepsilon < a_{n_0}$

spor $\square$

Př.: $\cdot$ $a_n = c$, $c \in \mathbb{R}$

$\lim a_n = c$ ... protože $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n - c| = |c - c| = 0$

$\cdot$ $a_n = \frac{1}{n}$

$\lim \frac{1}{n} = 0$ Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

CHCI: $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$\shortparallel$

1

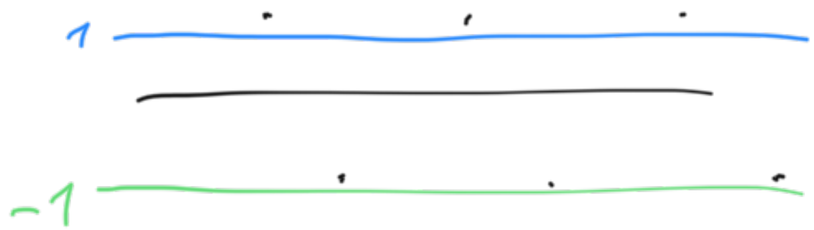
$\frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, tj. $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

stačí

Takové $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje podle V4.

- $a_n = (-1)^n$

$\lim (-1)^n$ neexistuje



Sporem: Předpokládejme, že $\lim (-1)^n = A \in \mathbb{R}$.

Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0:$ $|(-1)^n - A| < \frac{1}{2}$

Tedy $|1 - A| < \frac{1}{2}$ & $|-1 - A| < \frac{1}{2}$

$A \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ & $A \in (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ spor

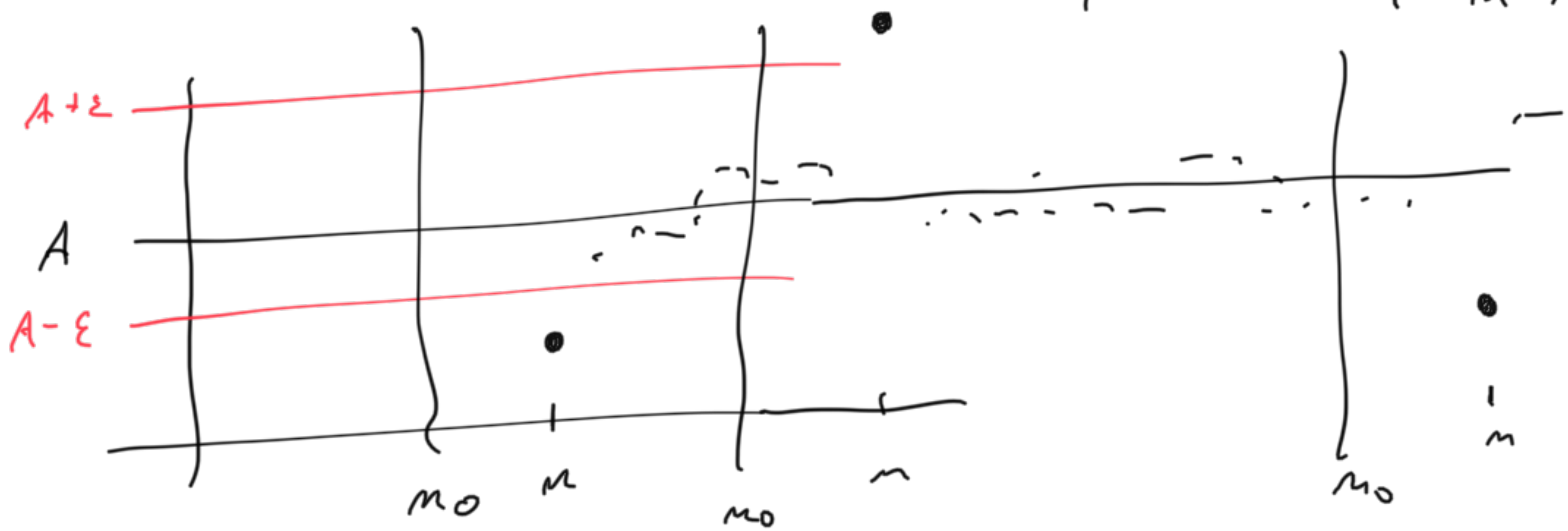
$A > \frac{1}{2}$ & $A < -\frac{1}{2}$

Tedy $\{(-1)^n\}$ není konvergentní.

Pozn.: Pokud posl. $\{a_n\}$ nemá limitu A, pak
- lim neexistuje
- lim existuje, ale

je různý od A

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| \geq \varepsilon$$



tj: <u>nekonečně</u> členů posl. $\{a_n\}$ je „daleko" od A

(ne všechny)

$\lim a_n = A$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$

$\lim (a_n - A) = 0$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |(a_n - A) - 0| < \varepsilon$

$\lim |a_n - A| = 0$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \big||a_n - A| - 0\big| < \varepsilon$

$$\boxed{|a_n - A| < \varepsilon \;=\; |(a_n - A) - 0| < \varepsilon \;=\; \big||a_n - A| - 0\big| < \varepsilon}$$

POZOR: Věta opačná neplatí: $a_n = (-1)^n$ je omezená, ale není konvergentní. $A-1 < a_n < A+1$

nechť $\lim a_n = A$.

Důkaz: ...

Důkaz: $\propto$ def. limity $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ |a_n - A| < 1$

nyní vezmeme $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, A-1\}$

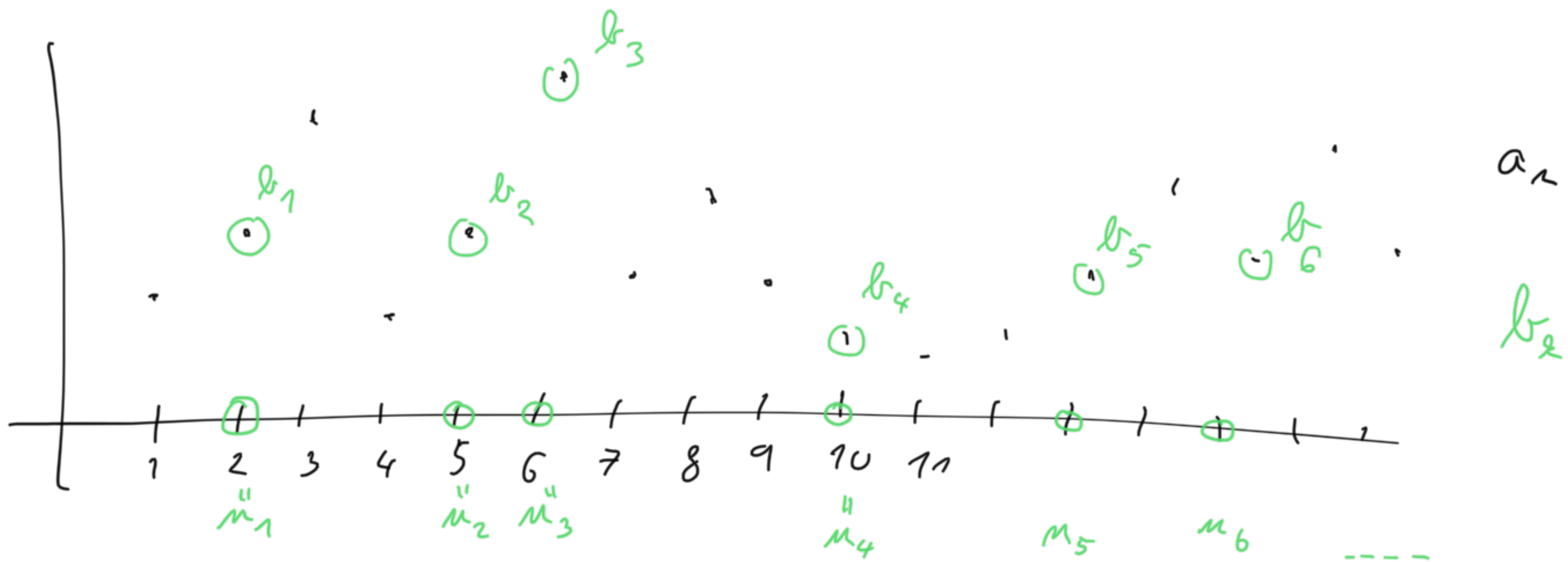
$M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, A+1\}$

Pak $\forall n \in \mathbb{N}$: $m \leq a_n \leq M$.

↳ je-li $n \leq n_0$, pak to platí z def. max/min

• je-li $n \geq n_0$, pak to platí z

$$m \leq A-1 < a_n < A+1 \leq M \qquad \square$$



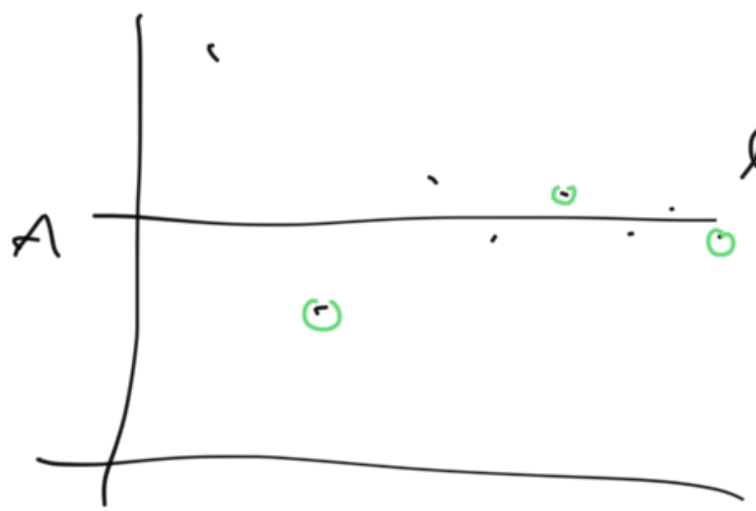
$b_k = a_{n_k}$ $\qquad$ $b_1 = a_2$

$b_2 = a_5$

$b_3 = a_6$

$\vdots$

<u>Pozn.</u>: Všimněme si, že $\forall k \in \mathbb{N}$: $n_k \geq k$ (snadno indukcí).



<u>Důkaz</u>: Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné.

$\lim a_n = A$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon$

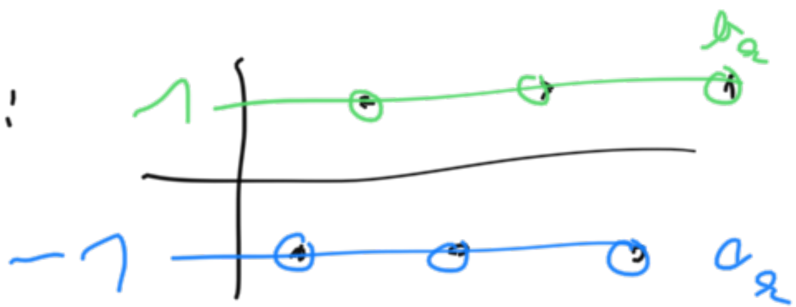
Pak $\forall k \geq n_0$: $n_k \geq k \geq n_0$

$$|b_k - A| = |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \lim b_k = A$ $\qquad \square$

Jiný důkaz toho, že $\lim (-1)^n$ neexistuje:
Předp., že $\{a_n\}$ má lim. vl.

$a_n = (-1)^n$



$n_k = 2k$, tj. $b_k = a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1$ ... vybraná posl. z $\{a_n\}$

$\lim b_k = 1$

$n_k = 2k+1$ $\quad c_k = a_{n_k} = (-1)^{2k+1} = -1$ ...

$\ldots_k \ldots, \quad c_k = a_{m_k} = (-1) \ldots = -1 \ldots$

$$\lim c_k = -1$$

To je ve sporu s V10! Pokud $\lim a_n = A$, pak

$$1 = \lim b_n = \lim a_n = A \quad \&$$

$$-1 = \lim c_k = \lim a_n = A$$