$$\lim a_n, \quad a_n = \frac{\overbrace{\left[\sqrt[3]{n^3+1}\right]}^{+\infty} - \overbrace{\left[\sqrt[3]{n^3-1}\right]}^{+\infty}}{\underbrace{\sqrt[n]{1+2^n+\ldots+n^n}}_{c_n \to +\infty}}$$

Již víme, že jmenovatel má lim $+\infty$.

Čitatel je typu $(+\infty)-(+\infty)$, musíme tedy odhadnout jeho chování přesněji. Zajímá nás celá část „v nekonečnu", použijeme tedy základní odhad

$$x-1 < [x] \leq x.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sqrt[3]{n^3+1} - 1 < \left[\sqrt[3]{n^3+1}\right] \leq \sqrt[3]{n^3+1}$$

$$\sqrt[3]{n^3-1} - 1 < \left[\sqrt[3]{n^3-1}\right] \leq \sqrt[3]{n^3-1}$$

Dohromady (pozor na nerovnosti):

$$\sqrt[3]{n^3+1} - 1 - \sqrt[3]{n^3-1} \leq \underbrace{\left[\sqrt[3]{n^3+1}\right] - \left[\sqrt[3]{n^3-1}\right]}_{b_n} \leq \overbrace{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3-1}}^{\text{pořád } (+\infty)-(+\infty)} + 1$$

použijeme vzorec a^3-b^3

$$\frac{2}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3+1}\sqrt[3]{n^3-1} + \left(\sqrt[3]{n^3-1}\right)^2} - 1 \qquad \frac{\overbrace{n^3+1-(n^3-1)}^{2}}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3+1}\sqrt[3]{n^3-1} + \left(\sqrt[3]{n^3-1}\right)^2} + 1$$

⋮

Nyní lze příklad dokončit více způsoby.

Nejrychlejší (ale nejnáročnější na „nápad") nejrychlejší (ale nejnáročnější) ...

je všimnout si následujících odhadů:

$$-1 \le \quad \Longleftrightarrow \quad \le \frac{2}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2} + 1 \le \frac{2}{\sqrt[3]{4}} + 1$$

Posloupnost $\{b_n\}$ je tedy omezená.

Tudíž $\lim a_n = \lim b_n \cdot \frac{1}{c_n} = 0.$

„omezená × nulová"

---

jiný způsob: využijeme odhadu $n \le c_n \le n \cdot \sqrt[n]{n}$

Tedy $\forall n \in \mathbb{N}$:

Tento odhad nás může napadnout až po spočtení limity

$$0 \le a_n \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \left(\frac{2}{\left(\underbrace{\sqrt[3]{n^3+1}}_{\to +\infty}\right)^2 + \underbrace{\sqrt[3]{n^3+1}}_{\to +\infty}\,\underbrace{\sqrt[3]{n^3-1}}_{\to +\infty} + \left(\underbrace{\sqrt[3]{n^3-1}}_{\to +\infty}\right)^2} + 1 \right)$$

$\sqrt[3]{a_n}$

$$\downarrow \text{AL}$$

$$0 \cdot \left(\frac{2}{+\infty} + 1 \right) = 0$$

Pokud by nás nenapadl, musíme dát VELKÝ POZOR, neboť dolní odhad pro b_n je pro $n \ge 2$ ZÁPORNÝ! Dostali bychom tak

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{(\sqrt[3]{})^2 + \ldots +} - 1 \right) \le a_n \; !$$

je-li $u \le b \le v$, $\underline{u < 0}$, $0 \le p \le c \le q$,

Tedy $\lim a_n = 0$ dle věty o 2 policajtech.

pak NENÍ $np \le bc$, ale $nq \le bc$ ↓

$n \le b \;/\cdot c^{>0} \Rightarrow nc \le bc$

$c \le q \;/\cdot n_{<0} \Rightarrow nq \le nc$

$$\lim \Big[\underbrace{\sqrt[4]{n^4+4n^3} - n}_{a_n} \Big]$$

Nejprve spočteme $\lim a_n$.
Pokud vyjde $+\infty$, pak využijeme odhad $x-1 < [x]$, jinak nám tento odhad nepomůže.

vzorec $a^4 - b^4$

$$a_n = \frac{\overbrace{n^4+4n^3-n^4}^{4n^3}}{\left(\sqrt[4]{n^4+4n^3}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{n^4+4n^3}\right)^2 n + \sqrt[4]{n^4+4n^3}\cdot n^2 + n^3} =$$

vytkneme dominantní členy

$$= \frac{4\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}\left(\left(\sqrt[4]{1+\frac{4}{n}}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{1+\frac{4}{n}}\right)^2 + \sqrt[4]{1+\frac{4}{n}} + 1\right)}$$

$\frac{4}{n} \to 0$, $1+\frac{4}{n} \to 1$, $\sqrt[4]{a_n} \to \sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{1+\frac{4}{n}} \to 1$

Tedy $\lim a_n = \frac{4}{1+1+1+1} = 1$.

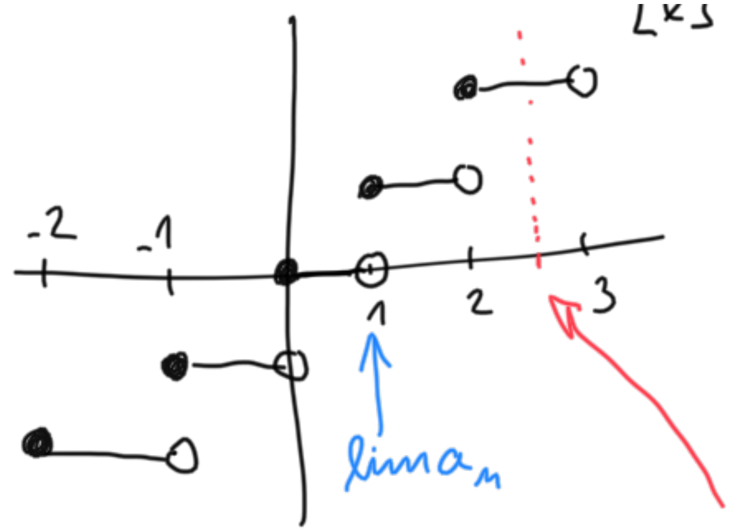
To nám moc nepomůže.

graf celé části:

Pro velká n je tedy a_n „blízko" 1.

Je třeba zjistit, jestli je $a_n \geq 1$ nebo $a_n < 1$.

Viz graf $\rightarrow$



Kdyby vyšlo např. $\lim a_n = 2{,}5$, věděli bychom, že pro velká n je $2 < a_n < 3$, a tedy $[a_n] = 2$, takže $\lim [a_n] = 2$.

Zkusme zjistit, pro jaká $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < 1$. Řešme tedy nerovnici

$$\sqrt[4]{n^4+4n^3} - n < 1 \quad \Downarrow$$

$$\sqrt[4]{n^4+4n^3} < n+1 \quad /^4$$

$$n^4+4n^3 < n^4+4n^3+6n^2+4n+1$$

$$0 < 6n^2+4n+1$$

Tedy $\forall n \in \mathbb{N}: a_n < 1$. Na druhou stranu zjevně $a_n \geq 0$.

Tedy ještě jednou: $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq a_n < 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: [a_n] = 0$,

neboli $\lim [a_n] = 0$.

Všimněme si, že nám vyšlo, že $\lim a_n = 1$, ale

$\lim [a_n] = 0 \neq [1] \; \overset{\vee}{0}$

(To je způsobeno nespojitostí funkce $x \mapsto [x]$ v bodě 1.)

Též si uvědomme, že výpočet $\lim a_n$ byl vlastně „zbytečný“. (Ale navedl nás správným směrem.)

$$\lim \frac{\sqrt{n+\sin^2 n} - \sqrt{n-\cos^2 n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} \overset{\substack{\text{vzorec} \\ a^2-b^2}}{=} \lim \frac{\cancel{n} + \sin^2 n - \cancel{n} + \cos^2 n}{\cancel{n}+1-\cancel{n}+1} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+\sin^2 n}+\sqrt{n-\cos^2 n}} =$$

$$\underset{\substack{\text{vykrácení} \\ \text{dominantních členů}}}{=} \lim \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{\sin^2 n}{n}}_{\to 0}} + \sqrt{1-\underbrace{\frac{\cos^2 n}{n}}_{\to 0}}} \overset{AL}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1+1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$1 \leftarrow$, $\to 1$ AL + $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$

$\to 1$ (AL + $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$)

„omezená × nulová“

$$\lim \underbrace{\frac{(n+7)^{50} - (n^2+1)^{25}}{\sqrt{n^{100}+n^{99}-1} - \sqrt{n^{100}+2n^{99}+1}}}_{a_n}$$

polynom v n

jeho chování v ∞ závisí na členu s nejvyšší mocninou.

stejné dominantní členy,
je třeba použít vzorec a^2-b^2

$$(n+7)^{50} = n^{50} + 50\cdot n^{49}\cdot 7 + \dots + 7^{50}$$

$$(n^2+1)^{25} = n^{50} + 25\, n^{2\cdot 24} + \dots + 1^{25}$$

Tedy $(n+7)^{50} - (n^2+1)^{25} = 50\cdot 7\cdot n^{49} + P(n)$, kde P je polynom a st $P \leq 48$.

$$\lim a_n = \lim \frac{\left(50\cdot 7\cdot n^{49} + P(n)\right)\cdot\left(\sqrt{n^{100}+n^{99}-1} + \sqrt{n^{100}+2n^{99}+1}\right)}{\cancel{n^{100}} + n^{99} - 1 - \cancel{n^{100}} - 2n^{99} - 1} =$$

$$= \lim \frac{\cancel{n^{49}}\left(350 + \overbrace{\frac{P(n)}{n^{49}}}^{\to 0 \text{ st } P \leq 48,\ AL}\right)\cdot \cancel{n^{50}}\left(\overbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^{100}}}}^{\to 1} + \overbrace{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^{100}}}}^{\to 1\ AL + \sqrt{a_n}\to\sqrt{a}}\right)}{\cancel{n^{99}}\left(-1-\underbrace{\frac{2}{n^{99}}}_{\to 0}\right)} =$$

vytkneme dominantní členy

$$= \frac{350\cdot(1+1)}{-1} = -700$$

AL $\quad \to 1$

---

dominantní členy stejné, tedy lim asi 0

$$\lim a_n,\quad a_n = \Big(\underbrace{\sqrt[3]{n^4+\sqrt[3]{n}} - \sqrt[3]{n^4}}_{b_n}\Big)\Big(\underbrace{\big[\sqrt[3]{n+1}\big] + \big[2\sqrt[3]{n-1}\big] + \dots + \big[n\cdot\sqrt[3]{n+(-1)^{n+1}}\big]}_{c_n}\Big)$$

$\nearrow +\infty$

Limita je typu $0\cdot(+\infty)$, je tedy třeba přesnější odhady na b_n, c_n.

a^3-b^3 $\qquad$ vytkneme dom. člen

$$b_n = \frac{n^4+\sqrt[3]{n}-n^4}{\left(\sqrt[3]{n^4+\sqrt[3]{n}}\right)^2+\sqrt[3]{n^4+\sqrt[3]{n}}\cdot\sqrt[3]{n^4}+\left(\sqrt[3]{n^4}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{n}}{n^{8/3}\cdot\Big(\underbrace{\Big(\sqrt[3]{1+\underbrace{\tfrac{1}{n^{11/3}}}_{\to 0}}\Big)^2+\sqrt[3]{1+\underbrace{\tfrac{1}{n^{11/3}}}_{\to 0}}+1}_{d_n}\Big)} = \frac{1}{n^{7/3}\cdot d_n},\ \text{kde } \lim d_n \overset{\text{AL}}{=} 3$$

$\sqrt[3]{a_n}\to\sqrt[3]{a}$

Pro c_n použijeme odhad pro celou část „v ∞“: $x-1<[x]\le x$

$\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\sqrt[3]{n+1}-1+2\sqrt[3]{n-1}-1+\dots+n\cdot\sqrt[3]{n+(-1)^{n+1}}-1 \le c_n \le \sqrt[3]{n+1}+2\sqrt[3]{n-1}+\dots+n\cdot\sqrt[3]{n+(-1)^{n+1}} \le$$

$$\le \sqrt[3]{n+1}+2\cdot\sqrt[3]{n+1}+3\cdot\sqrt[3]{n+1}+\dots+n\cdot\sqrt[3]{n+1}=$$

$$=\sqrt[3]{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Podobně

$$\ge \sqrt[3]{n-1}+2\cdot\sqrt[3]{n-1}+\dots+n\cdot\sqrt[3]{n-1}-n=$$

$$=\sqrt[3]{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n.$$

Zapomeneme-li na chvíli na „nepodstatné" členy $(-1)^k$, dostaneme

$$\sqrt[3]{n}+2\cdot\sqrt[3]{n}+\dots+n\cdot\sqrt[3]{n}=\sqrt[3]{n}\cdot(1+\dots+n)=$$

$$=\sqrt[3]{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(n^{7/3}+n^{4/3}\right),$$

kde dom. člen je $n^{7/3}$, což je stejná mocnina, jako pro b_n. Je tedy podstatné využít vzorce $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Abychom to mohli provést, musíme dostat všechny odmocniny stejné.

Tedy $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\sqrt[3]{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n \le c_n \le \sqrt[3]{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

Dohromady

$$\frac{1}{d_n\cdot n^{7/3}}\left(\sqrt[3]{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right)\le a_n \le \frac{1}{d_n\cdot n^{7/3}}\cdot\sqrt[3]{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{1}{d_n}\cdot\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n^{4/3}}\right) \qquad \frac{1}{d_n}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\downarrow \text{AL}, \sqrt[3]{a_n}\to\sqrt[3]{a} \qquad\qquad \downarrow \text{AL}, \sqrt[3]{a_n}\to\sqrt[3]{a}$$

$$\frac{1}{6} \qquad\qquad \frac{1}{6}$$

Tedy $\lim a_n = \frac{1}{6}$ dle věty o 2 policajtech.

$$\lim a_n,\quad a_n = \frac{\overbrace{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}^{c_n}}{\underbrace{[\sqrt{n}]+[2\sqrt{n}]+\ldots+[n\sqrt{n}]}_{b_n}}$$

K řešení tohoto příkladu jsou třeba jisté dodatečné znalosti.

Např. $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 3:\ (n+1)^n \leq n^{n+1}$ (1) – lze dokázat indukcí

nebo $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e < 3$ (2) – lze ukázat metodami limit funkcí

Jmenovatel odhadneme podobně, jako v předchozím příkladu:

$\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\sqrt[n]{n-1} + 2\sqrt[n]{n-1} + \dots + n\sqrt[n]{n-1} \leq b_n \leq \sqrt[n]{n} + 2\sqrt[n]{n} + \dots + n\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sqrt[n]{n-1} + 2\sqrt[n]{n-1} + \dots + n\sqrt[n]{n-1} = \sqrt{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n$$

Čitatel odhadneme pomocí (1):

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:
$$n \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt[n]{(n+1)^n} \leq c_n \leq n \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt[n]{2n^{n+1}} = n^2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}$$
$$n \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt[n]{(n+1)^n} = n \cdot \sqrt{n} \cdot (n+1)$$

Tedy dohromady $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:
$$2 = \frac{n\sqrt{n}\,(n+1)}{\sqrt{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}} \leq a_n \leq \frac{n^2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}}{\sqrt{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n} =$$
$$= \frac{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n\sqrt{n}}} \xrightarrow{AL} 2$$

Dle věty o 2 policajtech tak
$$\lim a_n = 2.$$

Jiná možnost: v c_n vytkneme n^n:

$$c_n = n \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt[n]{n^n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + n\right)} = n^2 \cdot \sqrt{n}\, \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + n}.$$

Dále dle (2) $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, tedy $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$

Odtud

$$\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + n}}_{\xrightarrow{\text{2 POL.}} 1} \leq \sqrt[n]{3+n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2n}}_{\xrightarrow{\text{AL}} 1}$$

Zbytek je stejný jako výše.