Matematika I

Program

Program

- Úvod

Program

- Úvod
- Limita posloupnosti

Program

- Úvod
- Limita posloupnosti
- Zobrazení

Program

- Úvod
- Limita posloupnosti
- Zobrazení
- Funkce jedné reálné proměnné

Literatura

Literatura

- Hájková, Johanis, John, Kalenda, Zelený: Matematika

Literatura

- Hájková, Johanis, John, Kalenda, Zelený: Matematika
- Kopáček: Příklady z matematiky pro fyziky I

Literatura

- Hájková, Johanis, John, Kalenda, Zelený: Matematika
- Kopáček: Příklady z matematiky pro fyziky I
- Zajíček: Vybrané úlohy z matematické analýzy

Literatura

- Hájková, Johanis, John, Kalenda, Zelený: Matematika
- Kopáček: Příklady z matematiky pro fyziky I
- Zajíček: Vybrané úlohy z matematické analýzy
- Vanžura: Řešené příklady z matematické analýzy

I. Úvod

I.1. Množiny

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A \ldots x$ je prvkem množiny A

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A \dots x$ je prvkem množiny A
- $x \notin A \dots x$ není prvkem množiny A

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A \dots x$ je prvkem množiny A
- $x \notin A \dots x$ není prvkem množiny A
- $A \subset B \dots$ množina A je podmnožinou množiny B (inkluze)

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A \dots x$ je prvkem množiny A
- $x \notin A \dots x$ není prvkem množiny A
- $A \subset B \dots$ množina A je podmnožinou množiny B (inkluze)
- $A = B \dots$ množiny A a B mají stejné prvky; platí, že $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A \dots x$ je prvkem množiny A
- $x \notin A \dots x$ není prvkem množiny A
- $A \subset B \dots$ množina A je podmnožinou množiny B (inkluze)
- $A = B \dots$ množiny A a B mají stejné prvky; platí, že $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$
- $\emptyset \dots$ prázdná množina

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A \dots x$ je prvkem množiny A
- $x \notin A \dots x$ není prvkem množiny A
- $A \subset B \dots$ množina A je podmnožinou množiny B (inkluze)
- $A = B \dots$ množiny A a B mají stejné prvky; platí, že $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$
- $\emptyset \dots$ prázdná množina
- $A \cup B \dots$ sjednocení množin A a B

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A \ldots x$ je prvkem množiny A
- $x \notin A \ldots x$ není prvkem množiny A
- $A \subset B \ldots$ množina A je podmnožinou množiny B (inkluze)
- $A = B \ldots$ množiny A a B mají stejné prvky; platí, že $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$
- $\emptyset \ldots$ prázdná množina
- $A \cup B \ldots$ sjednocení množin A a B
- $A \cap B \ldots$ průnik množin A a B

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A \ldots x$ je prvkem množiny A
- $x \notin A \ldots x$ není prvkem množiny A
- $A \subset B \ldots$ množina A je podmnožinou množiny B (inkluze)
- $A = B \ldots$ množiny A a B mají stejné prvky; platí, že $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$
- $\emptyset \ldots$ prázdná množina
- $A \cup B \ldots$ sjednocení množin A a B
- $A \cap B \ldots$ průnik množin A a B
- disjunktní množiny $\ldots A$ a B jsou disjunktní, pokud $A \cap B = \emptyset$

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A \ldots x$ je prvkem množiny A
- $x \notin A \ldots x$ není prvkem množiny A
- $A \subset B \ldots$ množina A je podmnožinou množiny B (inkluze)
- $A = B \ldots$ množiny A a B mají stejné prvky; platí, že $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$
- $\emptyset \ldots$ prázdná množina
- $A \cup B \ldots$ sjednocení množin A a B
- $A \cap B \ldots$ průnik množin A a B
- disjunktní množiny $\ldots$ A a B jsou disjunktní, pokud $A \cap B = \emptyset$
- $A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\} \ldots$ rozdíl množin A a B

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A \ldots x$ je prvkem množiny A
- $x \notin A \ldots x$ není prvkem množiny A
- $A \subset B \ldots$ množina A je podmnožinou množiny B (inkluze)
- $A = B \ldots$ množiny A a B mají stejné prvky; platí, že $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$
- $\emptyset \ldots$ prázdná množina
- $A \cup B \ldots$ sjednocení množin A a B
- $A \cap B \ldots$ průnik množin A a B
- disjunktní množiny $\ldots$ A a B jsou disjunktní, pokud $A \cap B = \emptyset$
- $A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\} \ldots$ rozdíl množin A a B
- $A_1 \times \cdots \times A_m = \{[a_1, \ldots, a_m];\ a_1 \in A_1, \ldots, a_m \in A_m\}$ $\ldots$ kartézský součin

Nechť I je nějaká neprázdná množina indexů a mějme systém množin A_α, kde indexy α probíhají I.

Nechť I je nějaká neprázdná množina indexů a mějme systém množin A_α, kde indexy α probíhají I.

- $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ . . . množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A_α

Nechť I je nějaká neprázdná množina indexů a mějme systém množin A_α, kde indexy α probíhají I.

- $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ …množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A_α
- $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ …množina prvků, které náleží do každé z množin A_α

I.2. Výroková logika, metody důkazů

Výroková logika

Výroková logika

Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé či nepravdivé.

Výroková logika

Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé či nepravdivé.

- $\neg$, též non . . . negace

Výroková logika

Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé či nepravdivé.

- $\neg$, též non . . . negace
- & (někdy též $\wedge$) . . . konjunkce, logické „a“

Výroková logika

Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé či nepravdivé.

- $\neg$, též non ... negace
- & (někdy též $\wedge$) ... konjunkce, logické „a“
- $\vee$ ... disjunkce (alternativa), logické „nebo“

Výroková logika

Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé či nepravdivé.

- $\neg$, též non . . . negace
- & (někdy též $\wedge$) . . . konjunkce, logické „a“
- $\vee$ . . . disjunkce (alternativa), logické „nebo“
- $\Rightarrow$ . . . implikace

Výroková logika

Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé či nepravdivé.

- $\neg$, též non . . . negace
- & (někdy též $\wedge$) . . . konjunkce, logické „a“
- $\vee$ . . . disjunkce (alternativa), logické „nebo“
- $\Rightarrow$ . . . implikace
- $\Leftrightarrow$ . . . ekvivalence

Tautologie je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.

Tautologie je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.
Příklady tautologií:

- $A \vee \neg A$

Tautologie je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.
Příklady tautologií:

- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \;\&\; \neg A)$

Tautologie je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.
Příklady tautologií:

- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \ \& \ \neg A)$
- $\big((A \ \& \ B) \ \& \ C\big) \Leftrightarrow \big(A \ \& \ (B \ \& \ C)\big)$

Tautologie je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.
Příklady tautologií:

- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \ \& \ \neg A)$
- $\big((A \ \& \ B) \ \& \ C\big) \Leftrightarrow \big(A \ \& \ (B \ \& \ C)\big)$
- $\neg(A \ \& \ B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Tautologie je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.
Příklady tautologií:

- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \ \& \ \neg A)$
- $\big((A \ \& \ B) \ \& \ C\big) \Leftrightarrow \big(A \ \& \ (B \ \& \ C)\big)$
- $\neg(A \ \& \ B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \ \& \ \neg B)$

Tautologie je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.
Příklady tautologií:

- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \;\&\; \neg A)$
- $\big((A \;\&\; B) \;\&\; C\big) \Leftrightarrow \big(A \;\&\; (B \;\&\; C)\big)$
- $\neg(A \;\&\; B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \;\&\; \neg B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Tautologie je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.
Příklady tautologií:

- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \;\&\; \neg A)$
- $\big((A \;\&\; B) \;\&\; C\big) \Leftrightarrow \big(A \;\&\; (B \;\&\; C)\big)$
- $\neg(A \;\&\; B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \;\&\; \neg B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \;\&\; \neg B)$

Tautologie je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.
Příklady tautologií:

- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \ \& \ \neg A)$
- $\big((A \ \& \ B) \ \& \ C\big) \Leftrightarrow \big(A \ \& \ (B \ \& \ C)\big)$
- $\neg(A \ \& \ B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \ \& \ \neg B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \ \& \ \neg B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \ \& \ (B \Rightarrow A)\big)$

Tautologie je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.
Příklady tautologií:

- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \ \& \ \neg A)$
- $\big((A \ \& \ B) \ \& \ C\big) \Leftrightarrow \big(A \ \& \ (B \ \& \ C)\big)$
- $\neg(A \ \& \ B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \ \& \ \neg B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \ \& \ \neg B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \ \& \ (B \Rightarrow A)\big)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Výrokovou formou rozumíme výraz, z něhož vznikne výrok dosazením prvku (prvků) dané množiny za proměnnou (proměnné).

Výrokovou formou rozumíme výraz, z něhož vznikne výrok dosazením prvku (prvků) dané množiny za proměnnou (proměnné).

Obecný zápis:

$$V(x),\, x \in M$$

Výrokovou formou rozumíme výraz, z něhož vznikne výrok dosazením prvku (prvků) dané množiny za proměnnou (proměnné).
Obecný zápis:

$$V(x), x \in M$$

$$V(x_1, \ldots, x_n), x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n$$

Je-li $A(x)$, $x \in M$ výroková forma, pak výrok „Pro všechna x z M platí $A(x)$.“ zapisujeme takto:

$$\forall x \in M\colon A(x).$$

Je-li $A(x)$, $x \in M$ výroková forma, pak výrok „Pro všechna x z M platí $A(x)$.“ zapisujeme takto:

$$\forall x \in M\colon A(x).$$

Výrok „Existuje x z M, pro které platí $A(x)$.“ zapisujeme takto:

$$\exists x \in M\colon A(x).$$

Je-li $A(x)$, $x \in M$ výroková forma, pak výrok „Pro všechna x z M platí $A(x)$." zapisujeme takto:

$$\forall x \in M\colon A(x).$$

Výrok „Existuje x z M, pro které platí $A(x)$." zapisujeme takto:

$$\exists x \in M\colon A(x).$$

Výrok „Existuje jediné x z M, pro které platí $A(x)$." zapisujeme takto:

$$\exists! x \in M\colon A(x).$$

Je-li $A(x)$, $x \in M$ výroková forma, pak výrok „Pro všechna x z M platí $A(x)$." zapisujeme takto:

$$\forall x \in M\colon A(x).$$

Výrok „Existuje x z M, pro které platí $A(x)$." zapisujeme takto:

$$\exists x \in M\colon A(x).$$

Výrok „Existuje jediné x z M, pro které platí $A(x)$." zapisujeme takto:

$$\exists! x \in M\colon A(x).$$

Jsou-li $A(x)$, $x \in M$ a $B(x)$, $x \in M$ výrokové formy, pak

$\forall x \in M, B(x)\colon A(x)$ znamená $\forall x \in M\colon (B(x) \Rightarrow A(x))$,

Je-li $A(x)$, $x \in M$ výroková forma, pak výrok „Pro všechna x z M platí $A(x)$." zapisujeme takto:

$$\forall x \in M\colon A(x).$$

Výrok „Existuje x z M, pro které platí $A(x)$." zapisujeme takto:

$$\exists x \in M\colon A(x).$$

Výrok „Existuje jediné x z M, pro které platí $A(x)$." zapisujeme takto:

$$\exists! x \in M\colon A(x).$$

Jsou-li $A(x)$, $x \in M$ a $B(x)$, $x \in M$ výrokové formy, pak

$\forall x \in M, B(x)\colon A(x)$ znamená $\forall x \in M\colon (B(x) \Rightarrow A(x))$,

$\exists x \in M, B(x)\colon A(x)$ znamená $\exists x \in M\colon (A(x)\ \&\ B(x))$.

Negace výroků s kvantifikátory:

$$\neg(\forall x \in M\colon A(x)) \quad \text{je totéž co} \quad \exists x \in M\colon \neg A(x),$$

Negace výroků s kvantifikátory:

$$\neg(\forall x \in M\colon A(x)) \quad \text{je totéž co} \quad \exists x \in M\colon \neg A(x),$$

$$\neg(\exists x \in M\colon A(x)) \quad \text{je totéž co} \quad \forall x \in M\colon \neg A(x).$$

Metody důkazů

Metody důkazů

- přímý důkaz

Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz

Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem

Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem
- matematická indukce

Věta 1 (de Morganova pravidla)

Mějme množiny S, A_α, $\alpha \in I$, kde $I \neq \emptyset$. Pak platí

$$S \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha) \qquad a \qquad S \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha).$$

Příklad (iracionalita $\sqrt{2}$)

Jestliže reálné číslo x řeší rovnici $x^2 = 2$, pak x není racionální.

I.3. Číselné množiny

Racionální čísla

Racionální čísla

- Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Racionální čísla

- Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Racionální čísla

- Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- Množina racionálních čísel

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\},$$

přičemž $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$, právě když $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$.

Reálná čísla

Množinou reálných čísel $\mathbb{R}$ budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace sčítání a násobení (značíme je $+$ a $\cdot$), a relace uspořádání (značíme ji $\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.
II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.
III. Axiom infima.

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení),

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení),
- v $\mathbb{R}$ existuje nenulový prvek (tzv. jednotkový prvek, značíme ho 1), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $1 \cdot x = x$,

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}: x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení),
- v $\mathbb{R}$ existuje nenulový prvek (tzv. jednotkový prvek, značíme ho 1), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $1 \cdot x = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}: x \cdot y = 1$ (takové y je jen jedno, značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (komutativita sčítání),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu nulový prvek), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. opačné číslo k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobení),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita násobení),
- v $\mathbb{R}$ existuje nenulový prvek (tzv. jednotkový prvek, značíme ho 1), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $1 \cdot x = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$ (takové y je jen jedno, značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributivita).

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \ \& \ \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita),

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y \;\;\&\;\; y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \leq y \;\;\&\;\; y \leq x) \Rightarrow x = y$ (slabá antisymetrie),

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \& \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \& \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (slabá antisymetrie),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \vee y \leq x$,

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \ \& \ \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \ \& \ \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (slabá antisymetrie),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \colon (x \leq y \ \ \& \ \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita),
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon (x \leq y \ \ \& \ \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (slabá antisymetrie),
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \colon x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon (0 \leq x \ \ \& \ \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená zdola, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí, že $x \geq a$.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená zdola, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí, že $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá dolní závorou množiny M.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená zdola, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí, že $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá dolní závorou množiny M. Analogicky definujeme pojmy množina omezená shora a horní závora.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená zdola, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí, že $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá dolní závorou množiny M. Analogicky definujeme pojmy množina omezená shora a horní závora. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, je-li omezená shora i zdola.

Axiom infima:
Budiž $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

Axiom infima:
Budiž $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

(ii) $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > g\ \exists x \in M\colon x < g'$.

Axiom infima:
Budiž $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

(ii) $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > g \; \exists x \in M\colon x < g'$.

Číslo g značíme symbolem $\inf M$ a čteme infimum M.

Poznámka

- Axiom infima říká, že každá neprázdná zdola omezená množina má infimum.

Poznámka

- Axiom infima říká, že každá neprázdná zdola omezená množina má infimum.
- Infimum množiny M je její největší dolní závora.

Poznámka

- Axiom infima říká, že každá neprázdná zdola omezená množina má infimum.
- Infimum množiny M je její největší dolní závora.
- Reálná čísla existují a jsou vlastnostmi I–III určena jednoznačně.

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R} \colon x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon -x = (-1) \cdot x$,

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon -x = (-1) \cdot x$,

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon -x = (-1) \cdot x$,

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon x^{-n} = (x^{-1})^n$,

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon -x = (-1) \cdot x$,

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon x^{-n} = (x^{-1})^n$,

(v) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$,

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R} \colon x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \colon -x = (-1) \cdot x$,

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \colon x^{-n} = (x^{-1})^n$,

(v) $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$,

(vi) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N} \colon$
$x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Značíme:

- Otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$,
- uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$,
- polouzavřený interval $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$,
- polouzavřený interval $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Značíme:

- Otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$,
- uzavřený interval $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$,
- polouzavřený interval $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$,
- polouzavřený interval $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

Bod a se nazývá levý krajní bod intervalu, bod b se nazývá pravý krajní bod intervalu. Bod, který je prvkem intervalu, ale není jeho krajním bodem, je tzv. vnitřním bodem intervalu.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Značíme:

- Otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$,
- uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$,
- polouzavřený interval $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$,
- polouzavřený interval $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

Bod a se nazývá levý krajní bod intervalu, bod b se nazývá pravý krajní bod intervalu. Bod, který je prvkem intervalu, ale není jeho krajním bodem, je tzv. vnitřním bodem intervalu.

Neomezené intervaly:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\},$$

analogicky definujeme $(-\infty, a\rangle$, $\langle a, +\infty)$ a $(-\infty, +\infty)$.

Platí, že $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Přeneseme-li sčítání a násobení z $\mathbb{R}$ na uvedené množiny, dostaneme operace, na něž jsme na těchto užších číselných množinách zvyklí.

Platí, že $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Přeneseme-li sčítání a násobení z $\mathbb{R}$ na uvedené množiny, dostaneme operace, na něž jsme na těchto užších číselných množinách zvyklí. Reálné číslo, které není číslem racionálním, nazveme číslem iracionálním. Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se nazývá množinou čísel iracionálních.

Komplexní čísla

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu všech výrazů tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$. Na $\mathbb{C}$ jsou definovány operace sčítání a násobení splňující vlastnosti skupiny I a navíc platí $i \cdot i = -1$.

Komplexní čísla

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu všech výrazů tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$. Na $\mathbb{C}$ jsou definovány operace sčítání a násobení splňující vlastnosti skupiny I a navíc platí $i \cdot i = -1$.

Věta („základní věta algebry“)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Pak rovnice

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

má alespoň jedno řešení $z \in \mathbb{C}$.

Důsledky axiomu infima

Definice

Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M\colon x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G\ \exists x \in M\colon x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M.

Důsledky axiomu infima

Definice

Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M\colon x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \ \exists x \in M\colon x > G'$,

nazýváme supremem množiny M.

Věta 2 (o supremu)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M.

Důsledky axiomu infima

Definice

Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M\colon x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \; \exists x \in M\colon x > G'$,

nazýváme supremem množiny M.

Věta 2 (o supremu)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M.

Supremum množiny M značíme $\sup M$.

Důsledky axiomu infima

Definice

Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M\colon x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \; \exists x \in M\colon x > G'$,

nazýváme supremem množiny M.

Věta 2 (o supremu)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M.

Supremum množiny M značíme $\sup M$.
Platí $\sup M = -\inf(-M)$.

Definice

Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že a je největší prvek (maximum) množiny M (značíme $\max M$), jestliže a je horní závorou množiny M a $a \in M$. Analogicky definujeme nejmenší prvek (minimum) M, který značíme $\min M$.

Lemma 3

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ *a platí*

$$\forall x, y \in M \; \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y \colon z \in M.$$

Pak M *je interval.*

Věta 4 (Archimédova vlastnost)

Ke každému $x \in \mathbb{R}$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *splňující* $x < n$.

Věta 4 (Archimédova vlastnost)

Ke každému $x \in \mathbb{R}$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *splňující* $x < n$.

Věta 5 (existence celé části)

Pro každé $r \in \mathbb{R}$ *existuje celá část čísla* r*, tj. číslo* $k \in \mathbb{Z}$ *takové, že* $k \leq r < k + 1$*. Celá část čísla* r *je určena jednoznačně a značíme ji* $[r]$*.*

Věta 6 (o n-té odmocnině)

Ke každému $x \in \langle 0, +\infty)$ *a ke každému* $n \in \mathbb{N}$ *existuje jediné* $y \in \langle 0, +\infty)$ *splňující* $y^n = x$.

Věta 7 (o hustotě $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $r \in \mathbb{Q}$ splňující $a < r < b$ a $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ splňující $a < s < b$.

II. Limita posloupnosti

II.1. Úvod

Definice

Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.

Definice

Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo a_n nazveme n-tým členem této posloupnosti.

Definice

Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo a_n nazveme n-tým členem této posloupnosti.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Definice

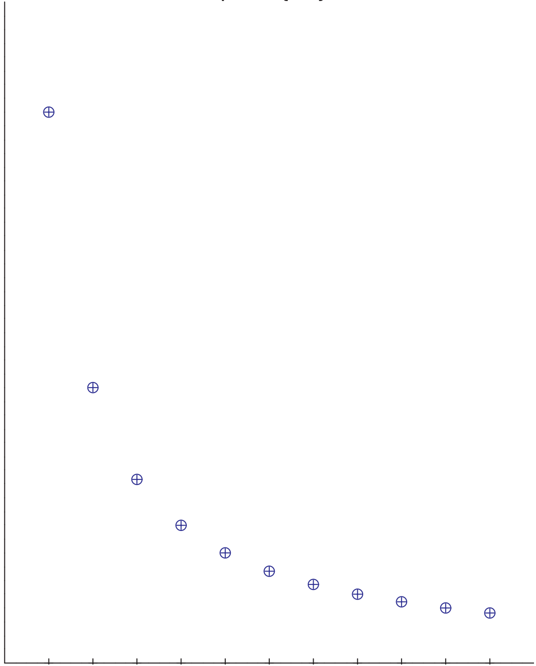
Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo a_n nazveme n-tým členem této posloupnosti.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

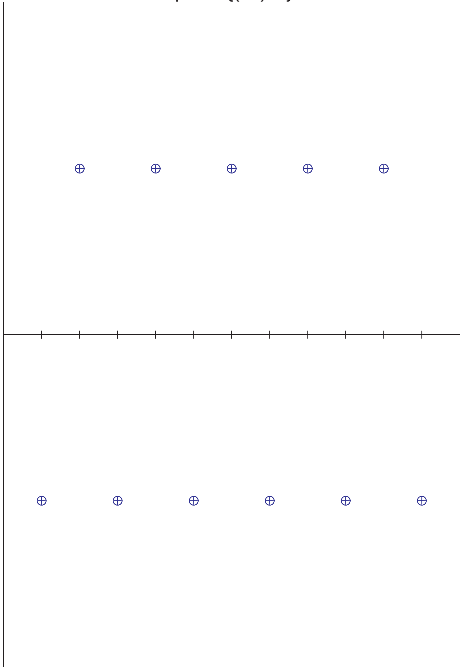
Množinou členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme množinu

$$\{x \in \mathbb{R};\ \exists n \in \mathbb{N} : a_n = x\}.$$

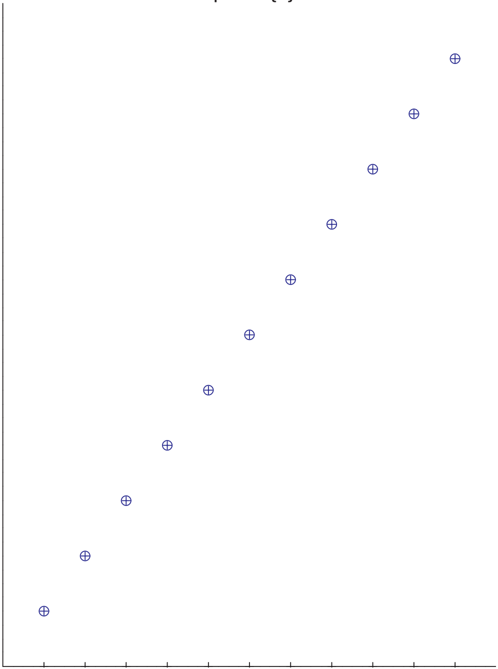
Posloupnost {1/n}



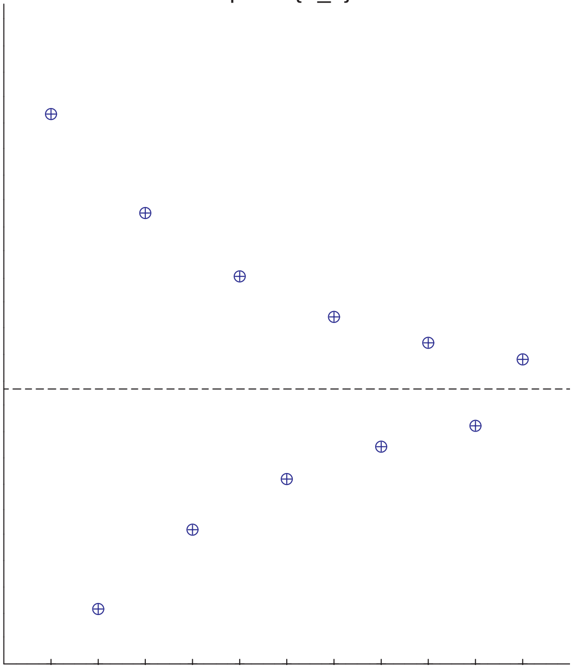
Posloupnost {(–1)^n}



Posloupnost {n}



Posloupnost {P_n}



Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- shora omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- shora omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- zdola omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- shora omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- zdola omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- omezená, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- klesající, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- klesající, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- nerostoucí, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- klesající, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- nerostoucí, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- neklesající, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- klesající, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- nerostoucí, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- neklesající, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- rostoucí, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- klesající, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- nerostoucí, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- neklesající, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je ryze monotónní, pokud je rostoucí či klesající.

Definice

Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- Součtem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.

Definice

Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- Součtem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme rozdíl a součin posloupností.

Definice

Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- Součtem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme rozdíl a součin posloupností.
- Nechť všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nenulové. Pak podílem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$.

Definice

Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- Součtem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme rozdíl a součin posloupností.
- Nechť všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nenulové. Pak podílem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$.
- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$, pak λ-násobkem posloupnosti $\{a_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\lambda a_n\}$.

II.2. Konvergence posloupnosti

II.2. Konvergence posloupnosti

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí, že $|a_n - A| < \varepsilon$, tj.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; |a_n - A| < \varepsilon.$$

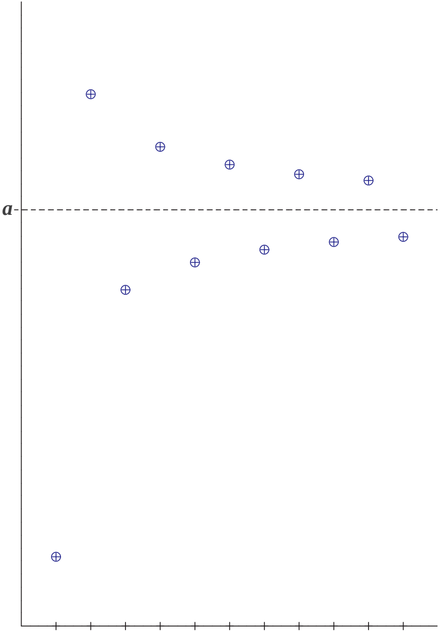
II.2. Konvergence posloupnosti

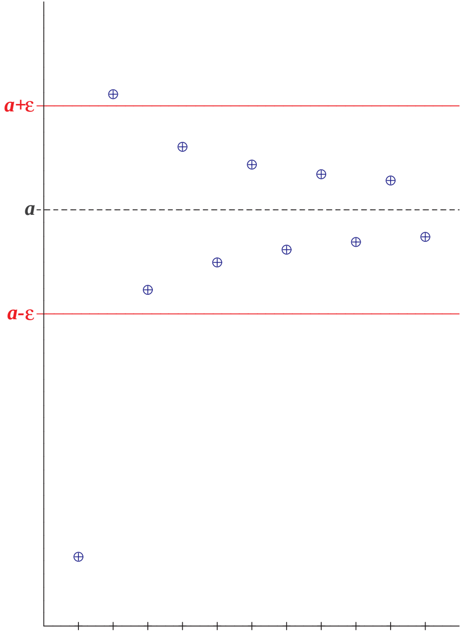
Definice

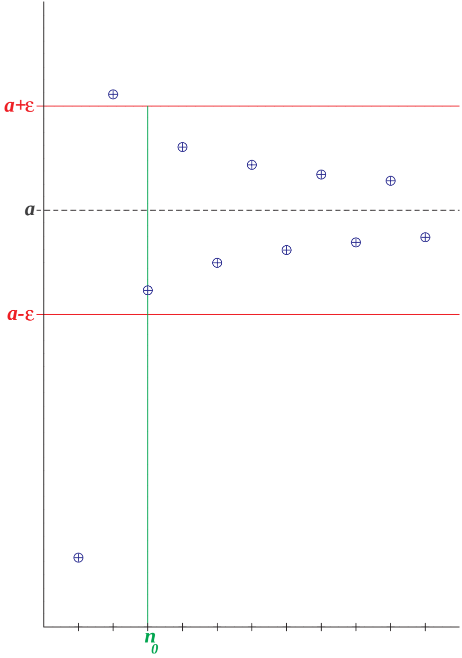
Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí, že $|a_n - A| < \varepsilon$, tj.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; |a_n - A| < \varepsilon.$$

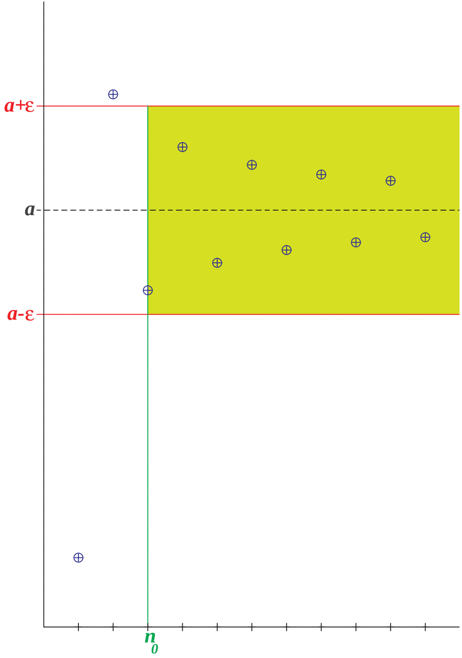
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$, které je limitou $\{a_n\}$.


a

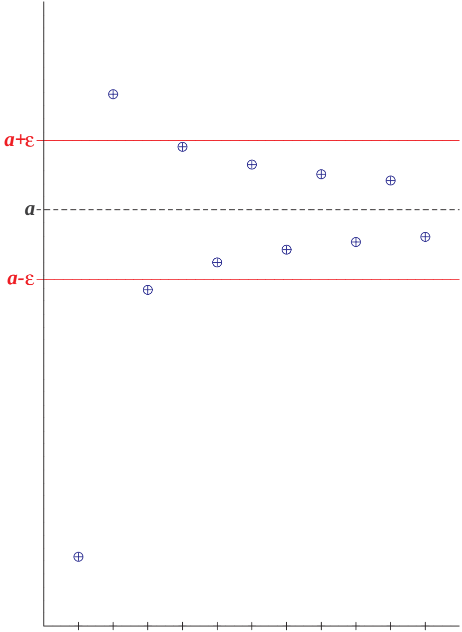

$a+\varepsilon$
a
$a-\varepsilon$



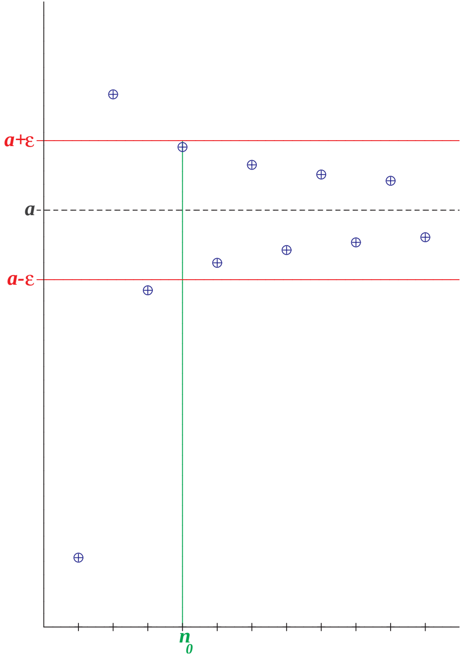
a+ε
a
a-ε
n0



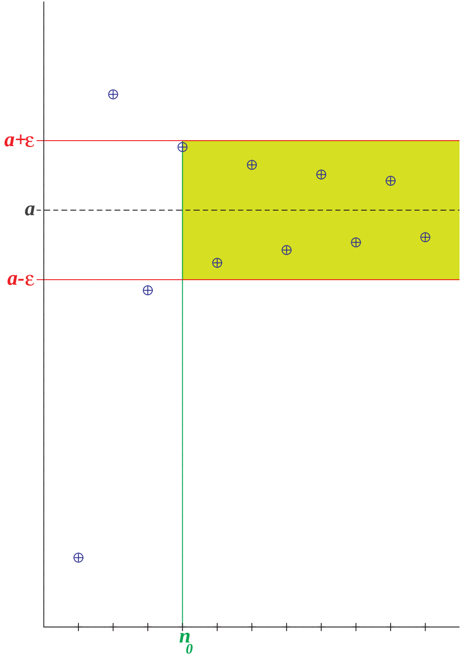
a+ε
a
a-ε
n0



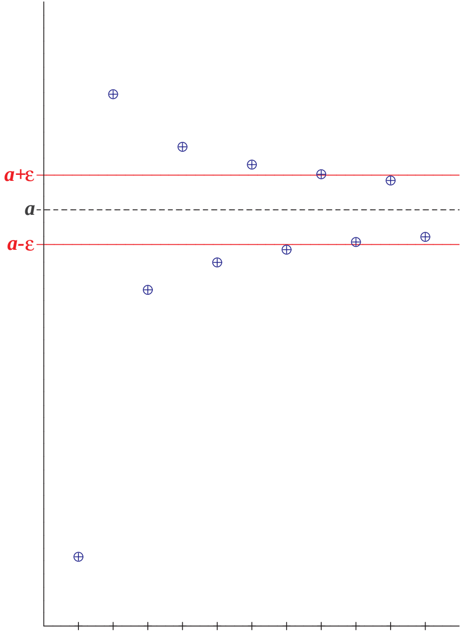
$a+\varepsilon$
a
$a-\varepsilon$



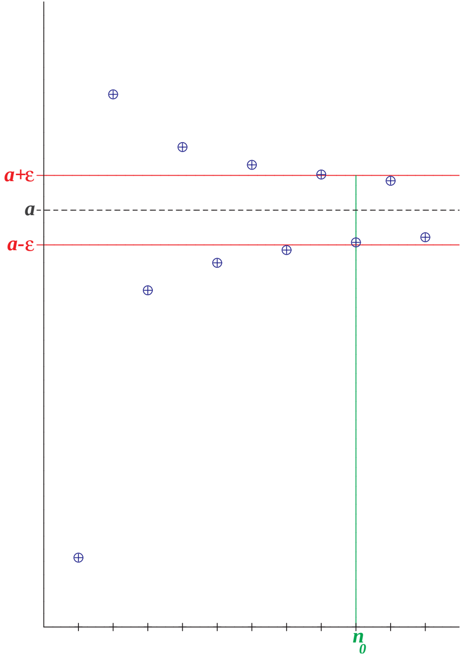
a+ε
a
a-ε
n0



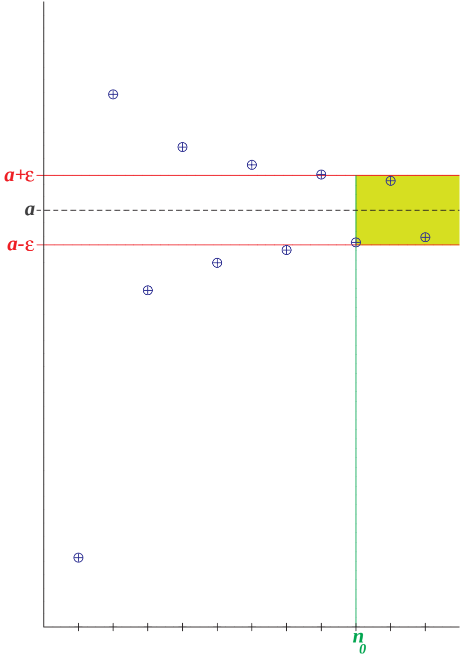
a+ε
a
a-ε
n0



a+ε
a
a-ε



a+ε
a
a-ε
n0



a+ε
a
a-ε
n
0

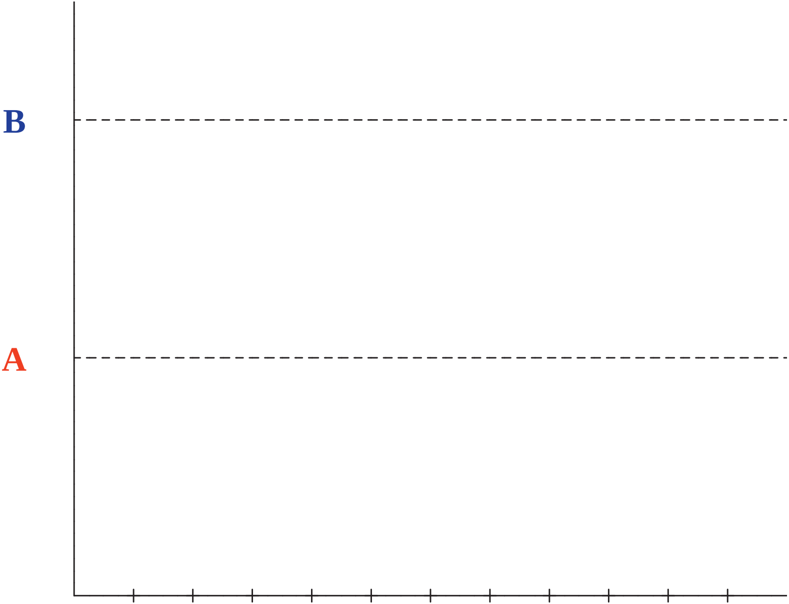
Věta 8 (jednoznačnost limity)

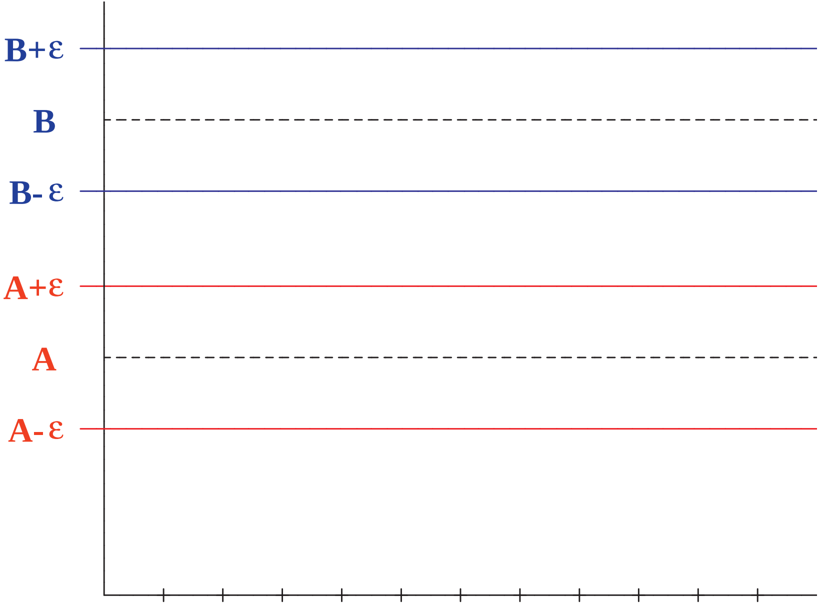
Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

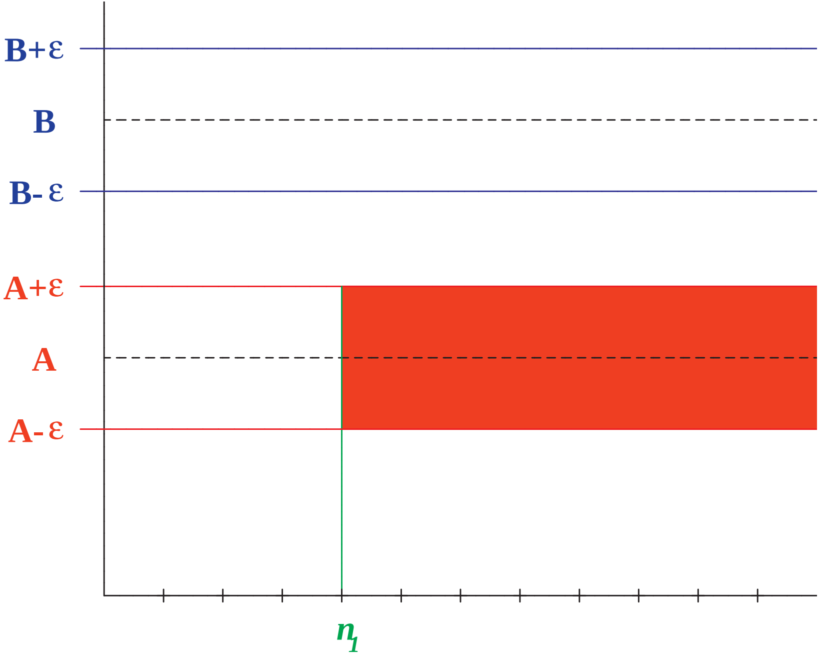
Věta 8 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

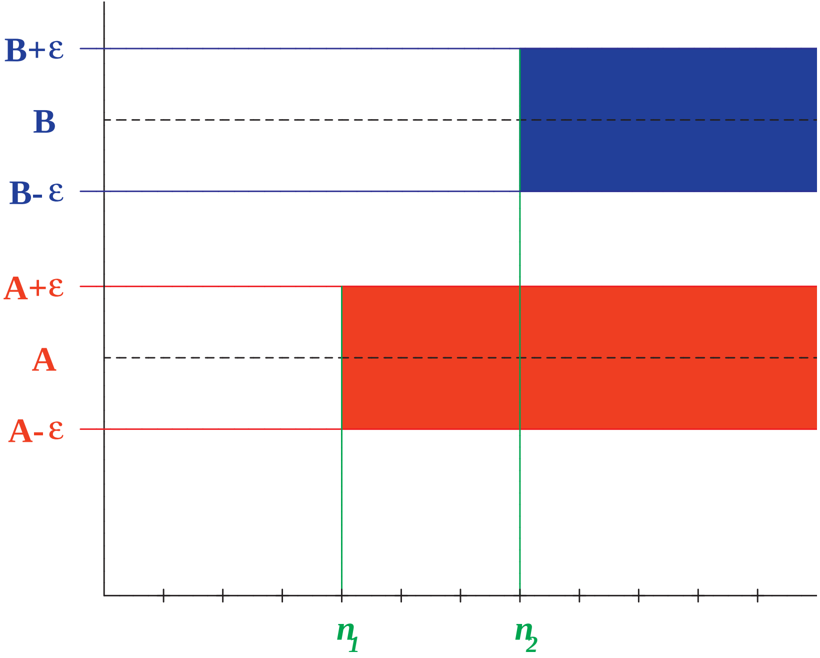
Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.


B
A


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε



B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
n1


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
n_1
n_2

Poznámka

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim a_n = A \Leftrightarrow \lim(a_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n - A| = 0.$$

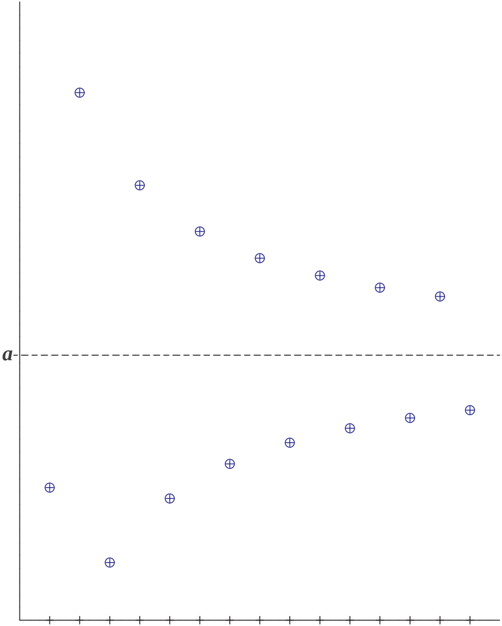
Poznámka

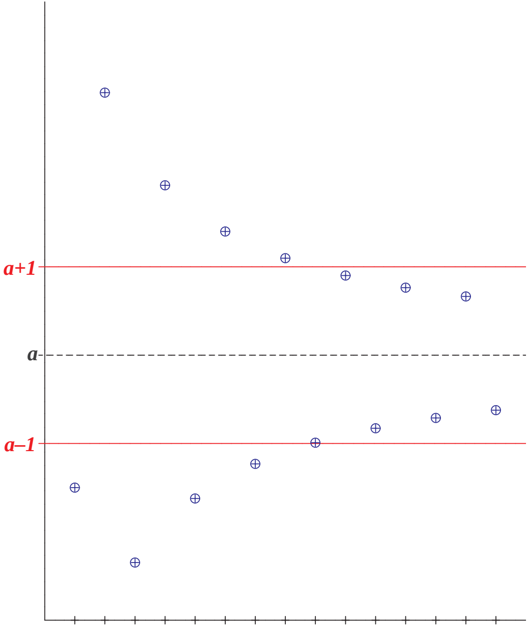
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim a_n = A \Leftrightarrow \lim(a_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n - A| = 0.$$

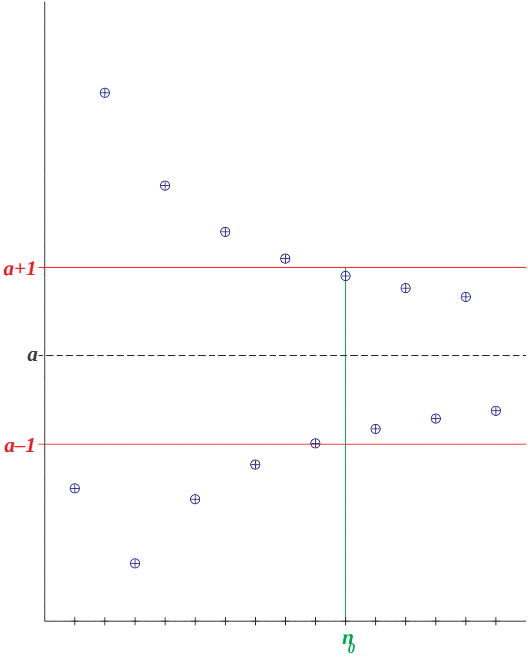
Věta 9

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

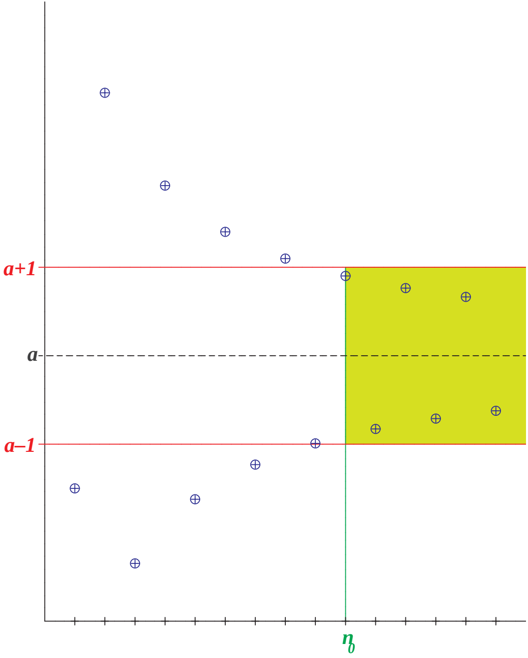

a

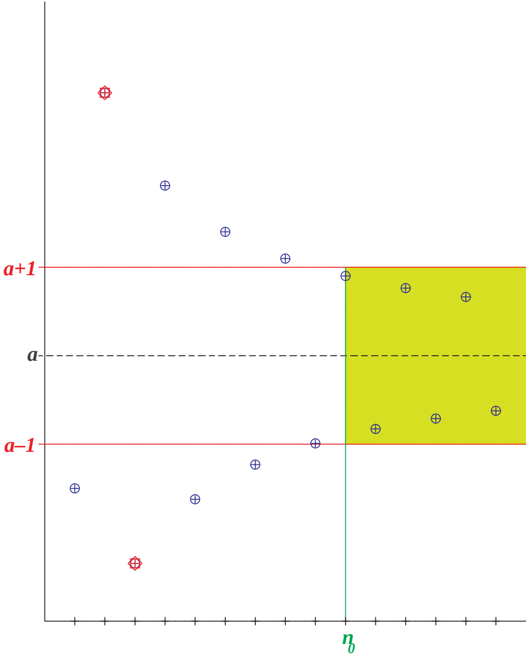


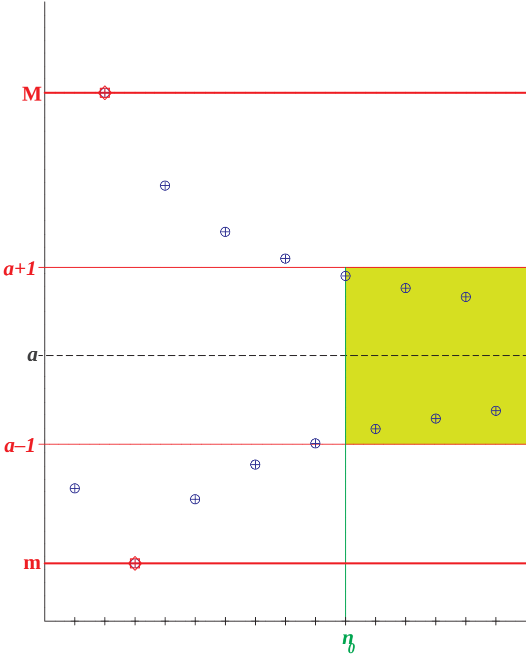
a+1
a
a–1



a+1
a
a–1
η_0


a+1
a
a–1
η0


a+1
a
a–1
η0


M
a+1
a
a–1
m
η0

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je vybranou posloupností z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (nebo též podposloupností posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je vybranou posloupností z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (nebo též podposloupností posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Věta 10 (limita vybrané posloupnosti)

Nechť $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže platí $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, pak také $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Poznámka

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$. Jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 :\ |a_n - A| < K\varepsilon,$$

potom $\lim a_n = A$.

Věta 11 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,

Věta 11 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

Věta 11 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, *je* $\lim(a_n / b_n) = A/B$.

Věta 11 (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, *je* $\lim(a_n / b_n) = A/B$.

Věta 12

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 13 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

Věta 13 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 13 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$.

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) *Nechť* $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

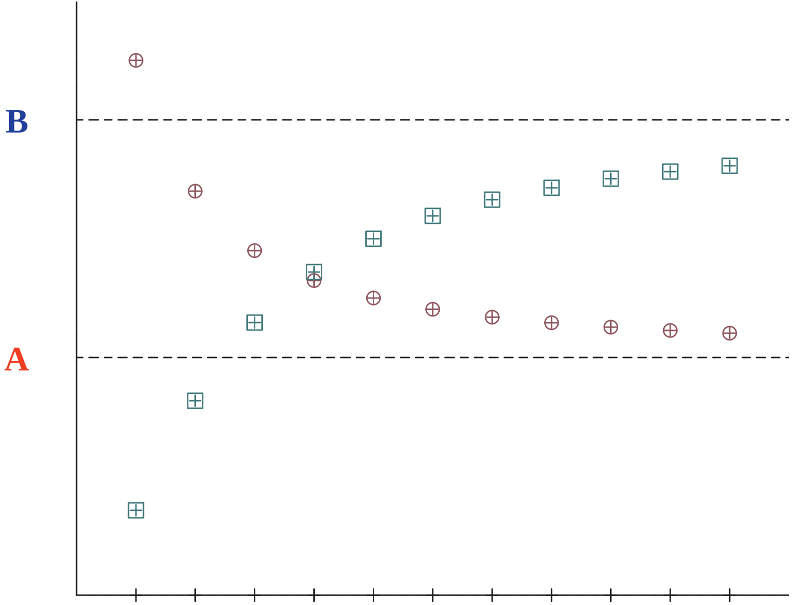
Věta 14 (o dvou policajtech)

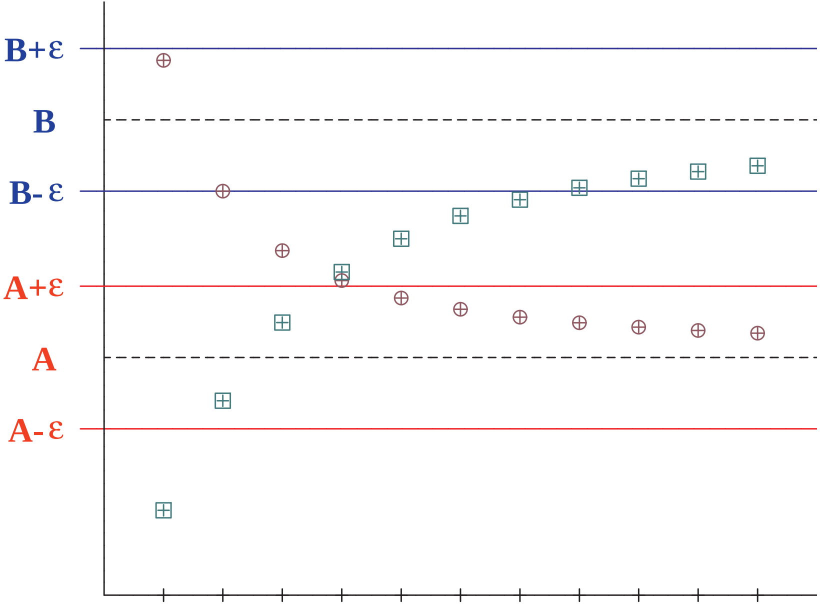
Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *taková posloupnost, že platí:*

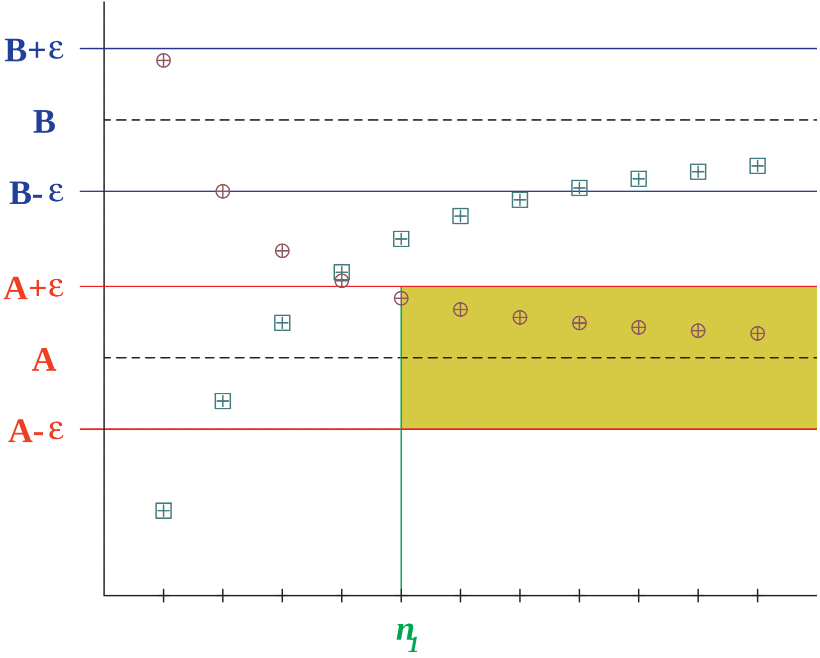
(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \leq c_n \leq b_n$,

(ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

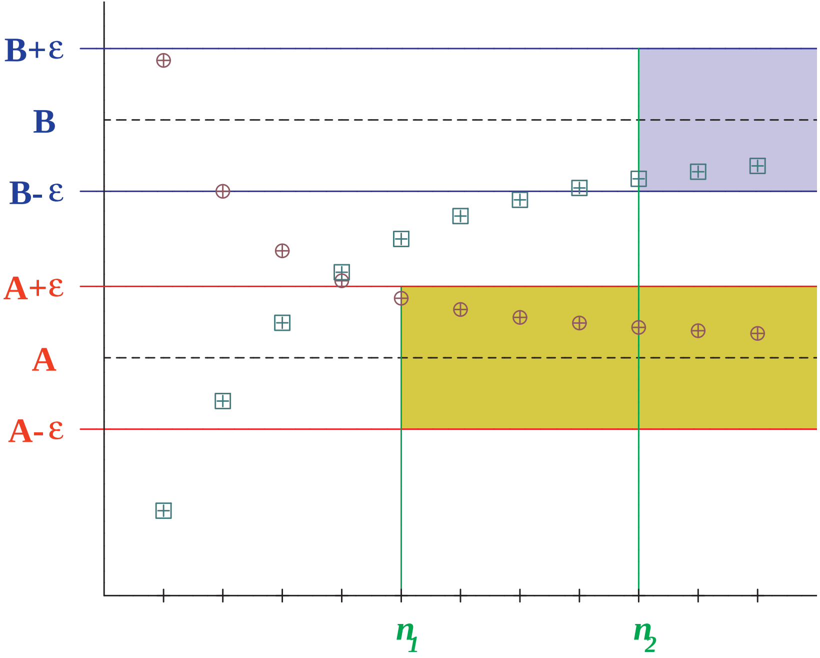
Potom existuje $\lim c_n$ *a platí, že* $\lim c_n = \lim a_n$.

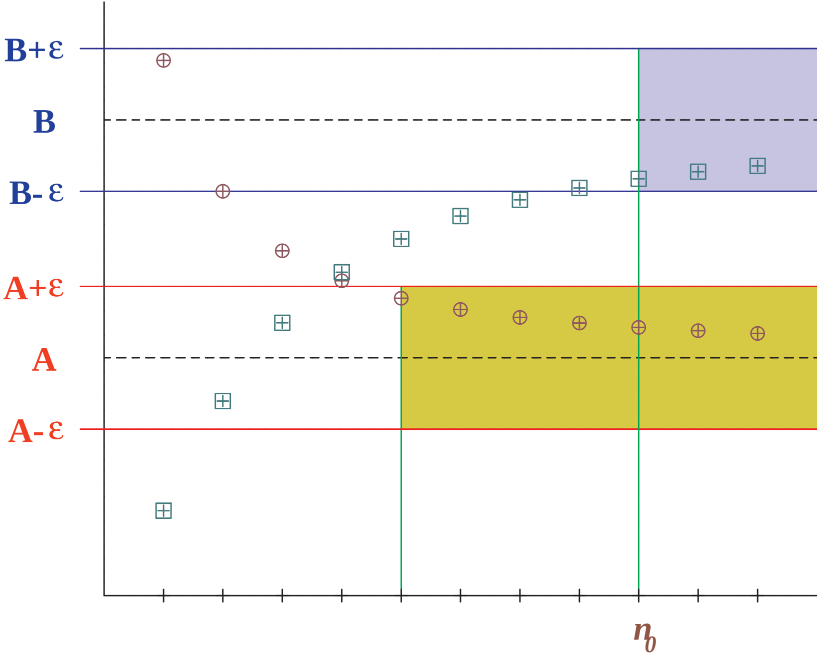

B
A


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε

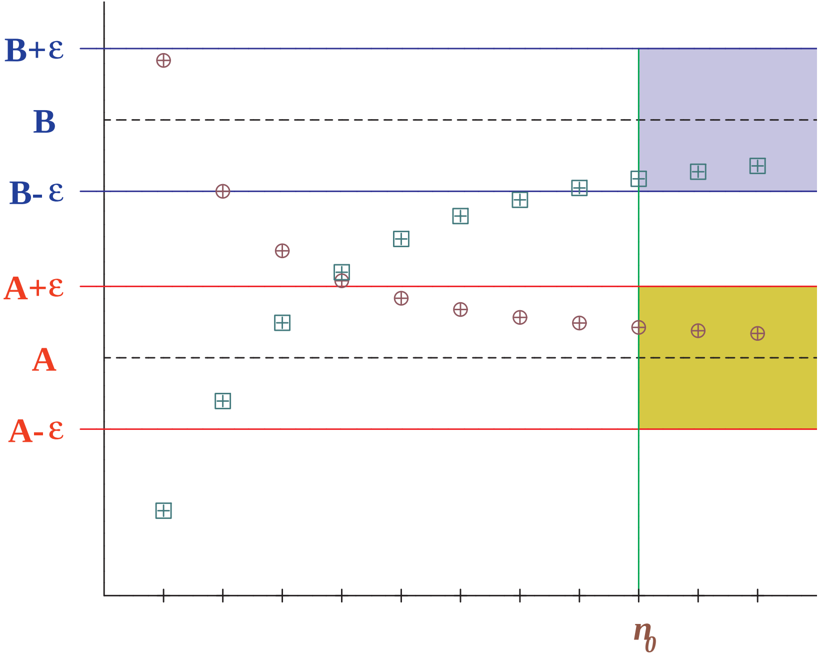


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
n_1


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
n_1
n_2



B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
η_0


B+ε
B
B- ε
A+ε
A
A- ε
η0

II.3. Nevlastní limita posloupnosti

II.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (plus nekonečno), jestliže

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > L.$$

II.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (plus nekonečno), jestliže

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (minus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

II.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (plus nekonečno), jestliže

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (minus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

Věta 8 o jednoznačnosti limity platí i pro limity $+\infty$ a $-\infty$. Je-li $\lim a_n = +\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ diverguje k $+\infty$, podobně pro $-\infty$.

II.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice

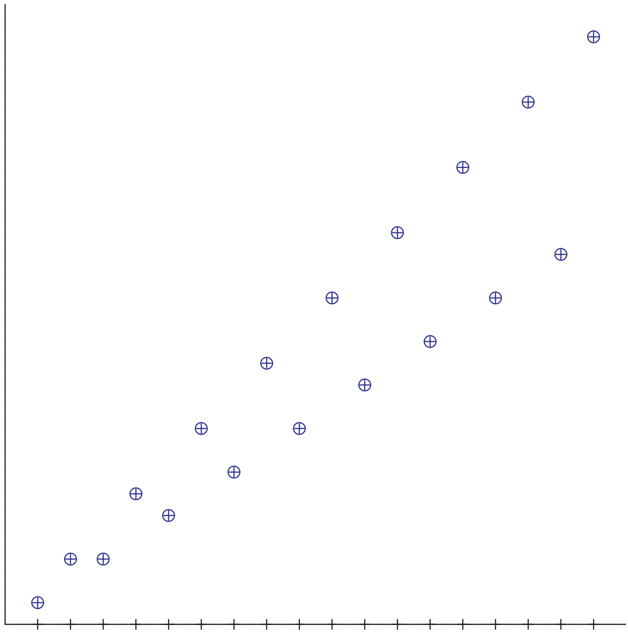
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (plus nekonečno), jestliže

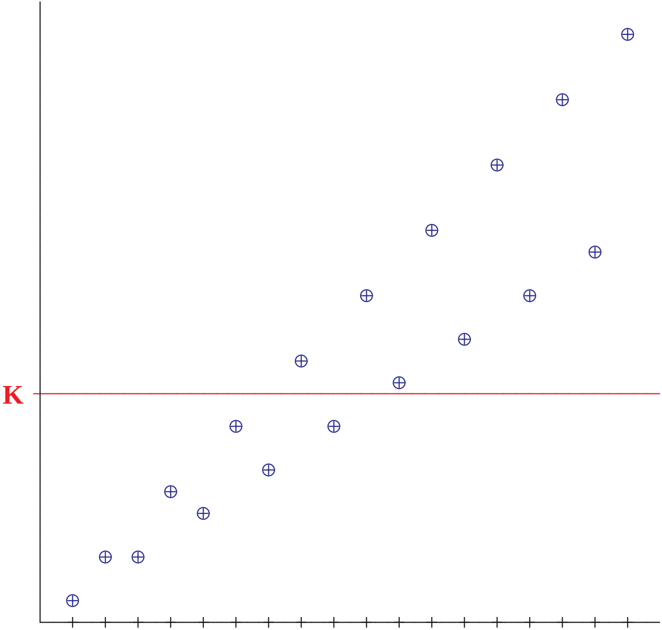
$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > L.$$

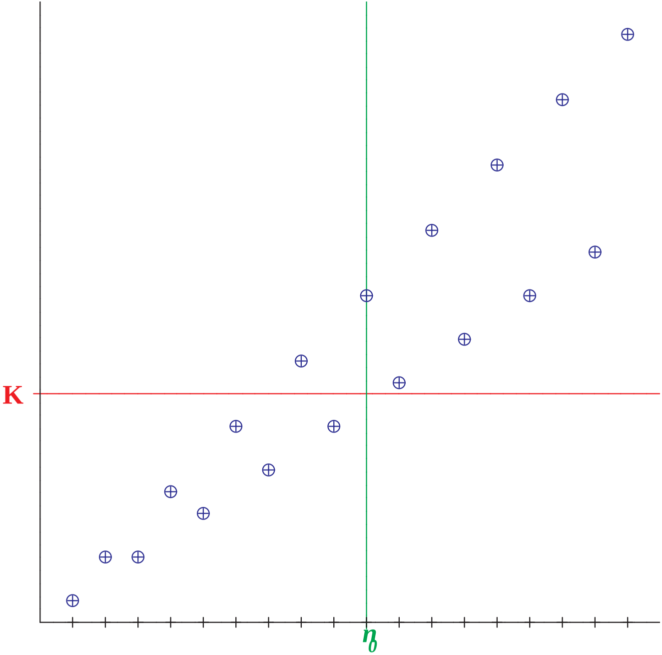
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (minus nekonečno), jestliže

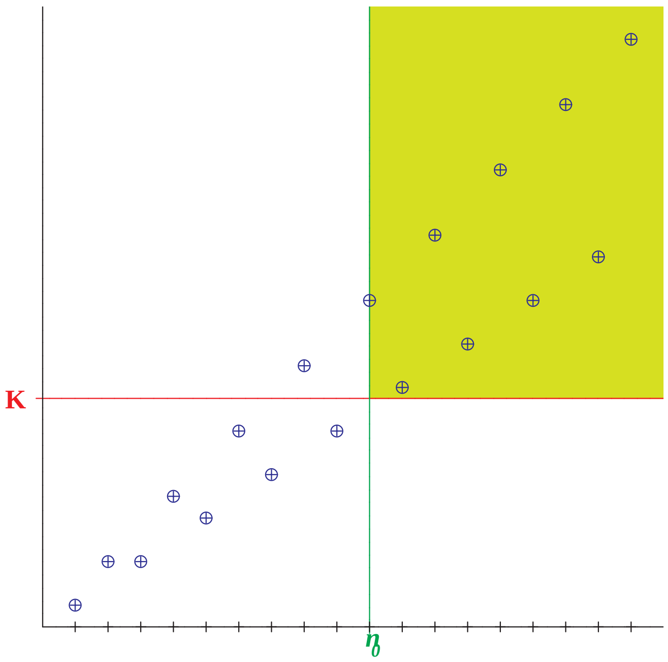
$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

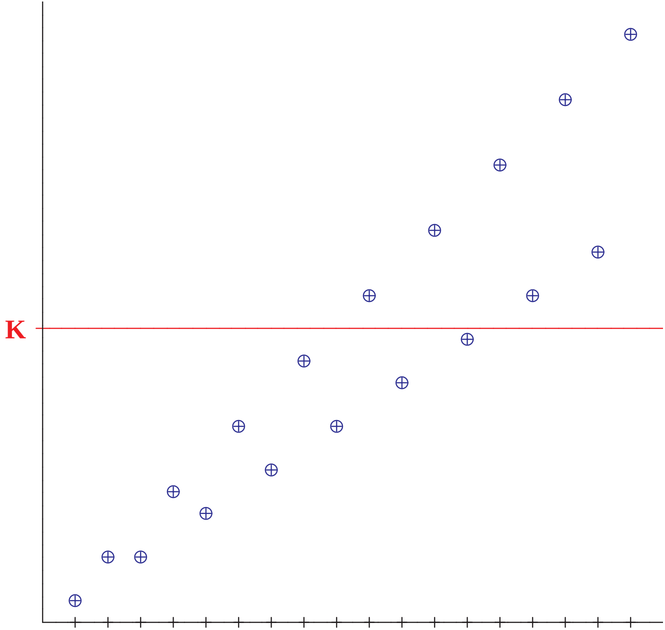
Věta 8 o jednoznačnosti limity platí i pro limity $+\infty$ a $-\infty$. Je-li $\lim a_n = +\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ diverguje k $+\infty$, podobně pro $-\infty$. Je-li $\lim a_n \in \mathbb{R}$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu, je-li $\lim a_n = +\infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu.

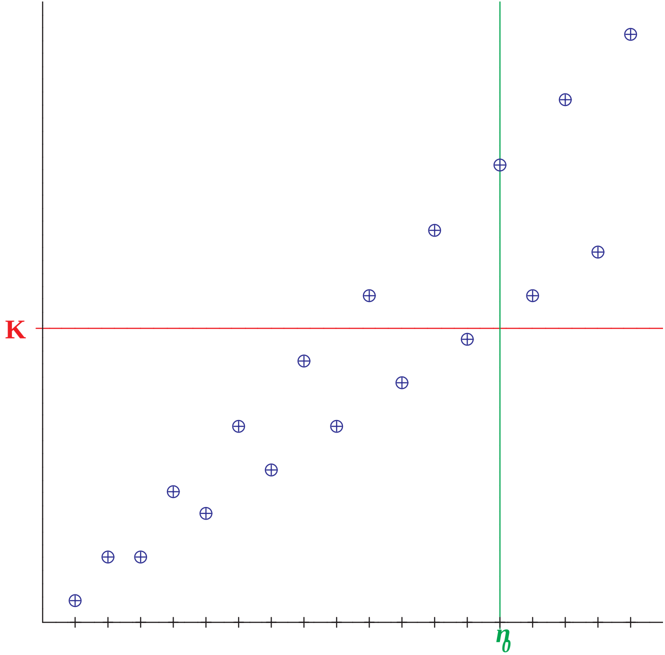


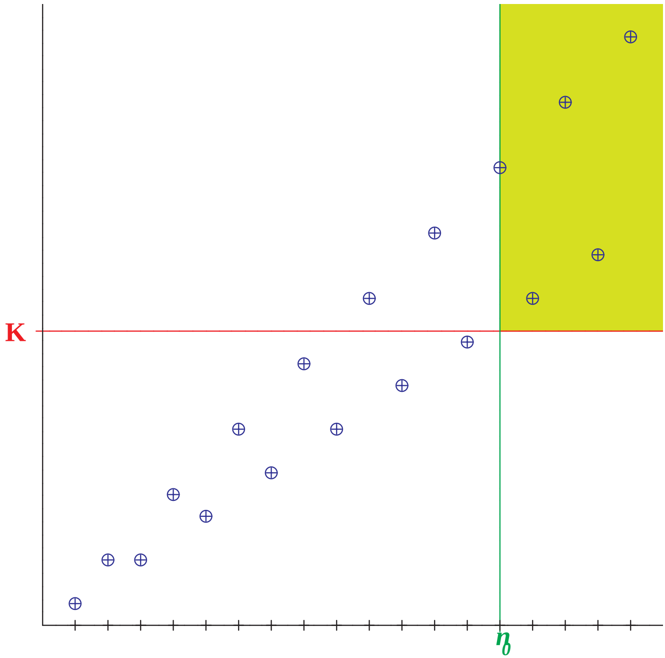

K

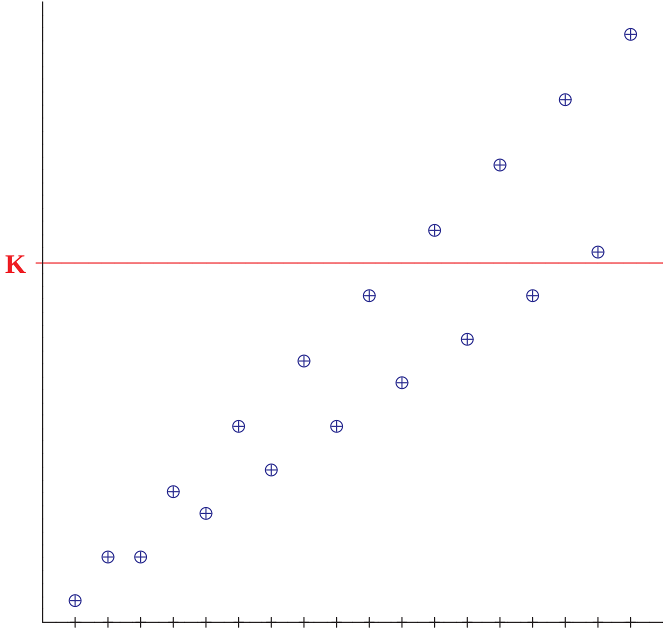

K
η0

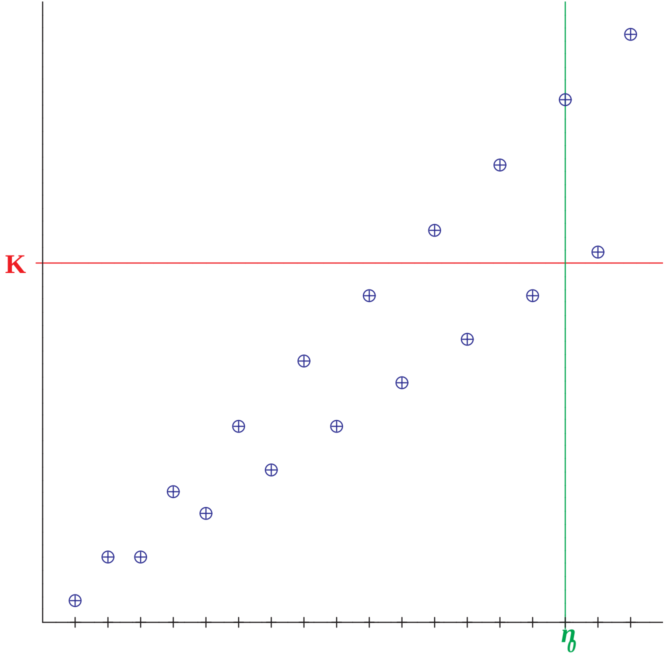

K
η

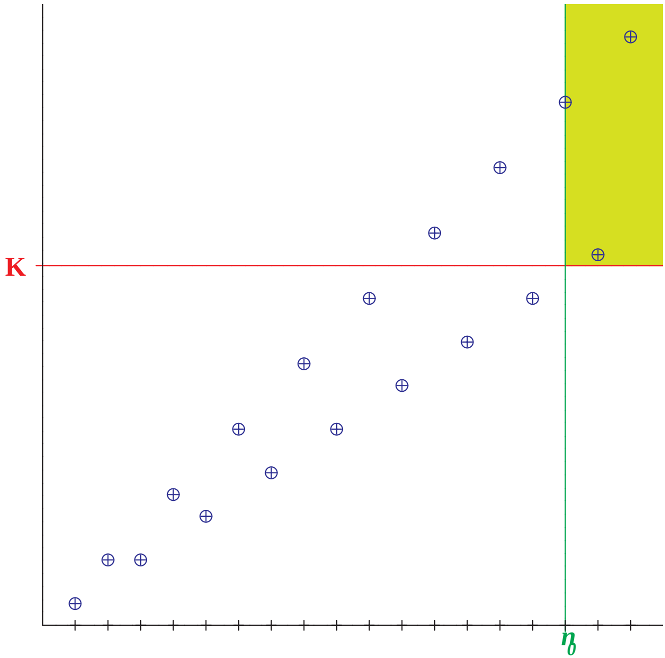

K


K
η_0

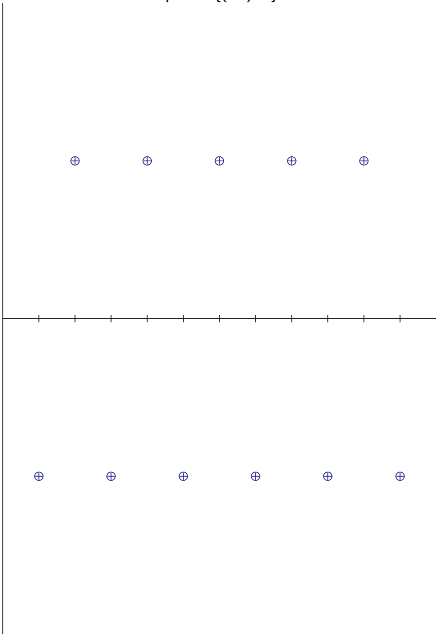

K
η_0

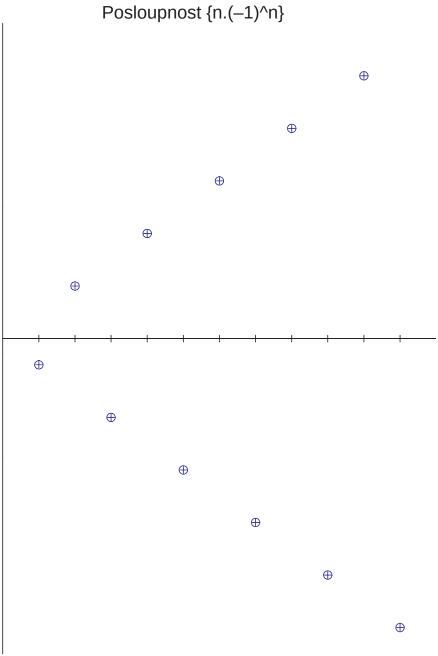

K

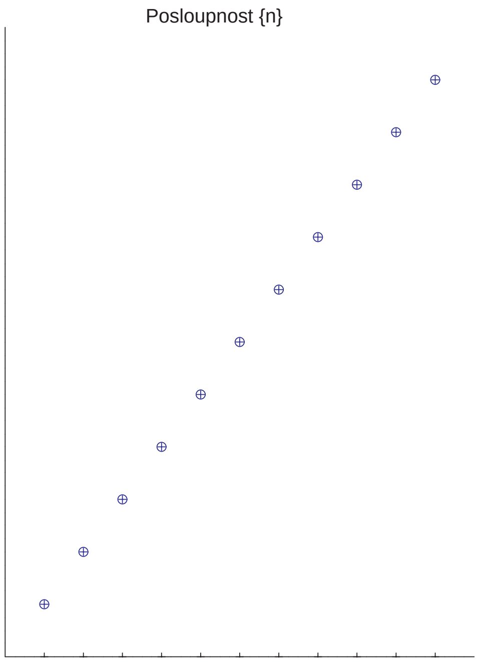

K
η0


K
η_0

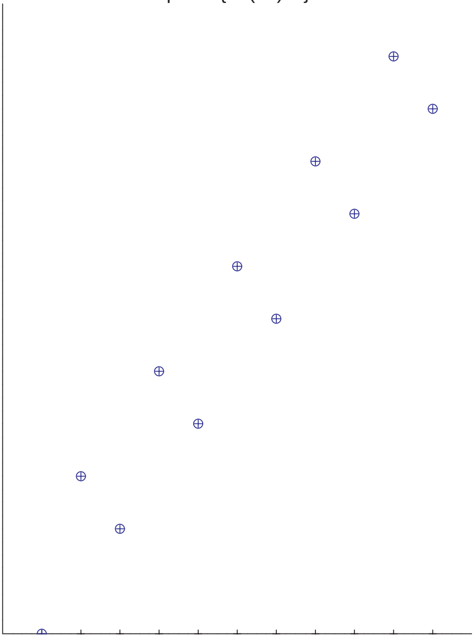
Posloupnost {(–1)^n}

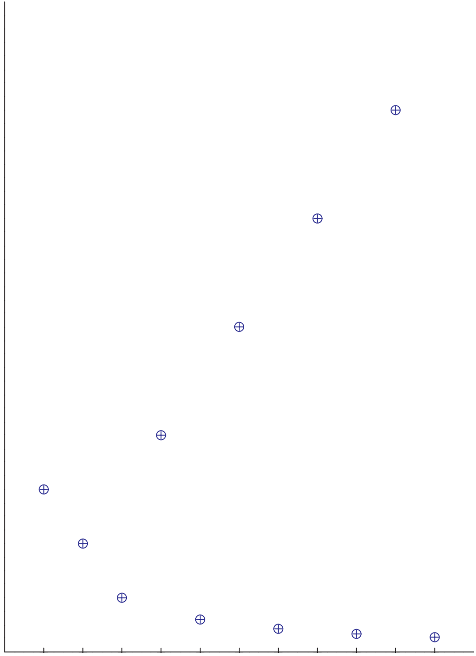



Posloupnost {n.(–1)^n}


Posloupnost {n}

Posloupnost {n+(–1)^n}





Věta 9 pro nevlastní limity neplatí. Platí však

Věta 9'

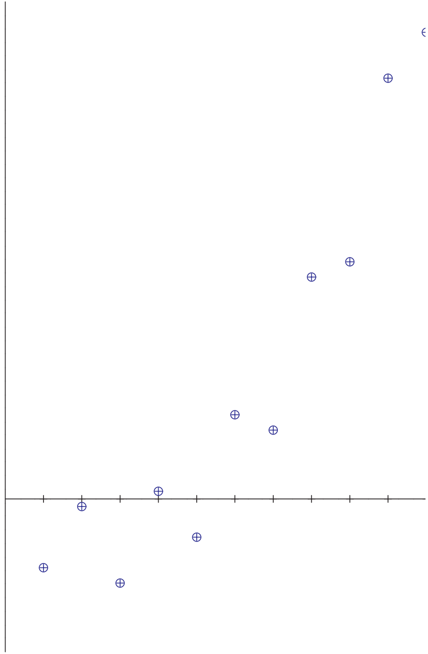
- *Nechť* $\lim a_n = +\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není shora omezená, je však zdola omezená.*
- *Nechť* $\lim a_n = -\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není zdola omezená, je však shora omezená.*

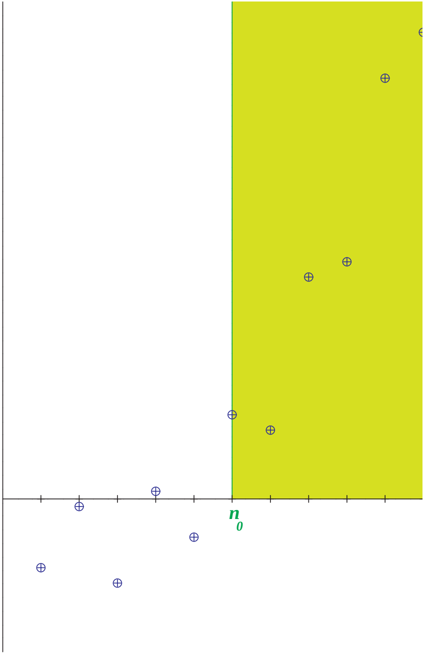
Věta 9 pro nevlastní limity neplatí. Platí však

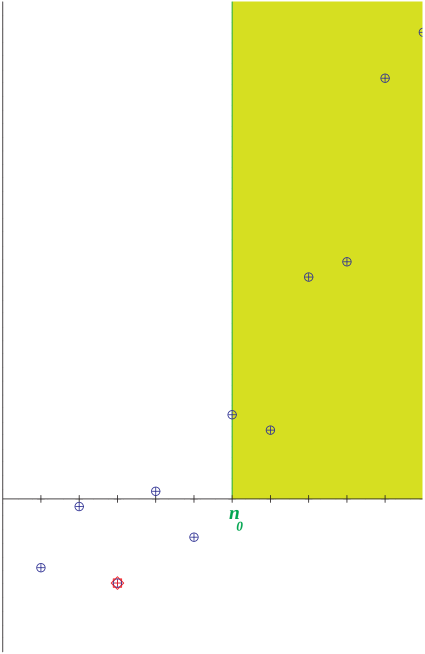
Věta 9'

- *Nechť* $\lim a_n = +\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není shora omezená, je však zdola omezená.*
- *Nechť* $\lim a_n = -\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není zdola omezená, je však shora omezená.*

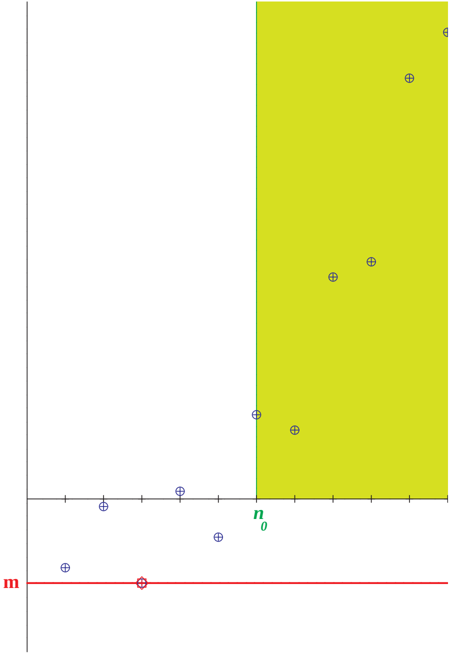
Věta 10 (limita vybrané posloupnosti) platí i pro nevlastní limity.




n_0



n_0



m
n_0

Definice

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,

Definice

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,

Definice

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,

Definice

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$,

Definice

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a < 0$,

Definice

Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a < 0$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$.

Některé operace nejsou definovány. Jsou to:

- $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$,

Některé operace nejsou definovány. Jsou to:

- $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$,
- $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (+\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$,

Některé operace nejsou definovány. Jsou to:

- $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$,
- $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (+\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$,
- $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{a}{0}$ pro $a \in \mathbb{R}^*$.

Věta 11' (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. *Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*

Věta 11' (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. *Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

Věta 11' (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. *Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n / b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 11' (aritmetika limit)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$*. Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$*, pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$*, pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n/b_n = A/B$*, pokud je pravá strana definována.*

Věta 15

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$*, platí* $b_n > 0$*. Pak* $\lim a_n/b_n = +\infty$*.*

Věta 13 (limita a uspořádání) a Věta 14 (o dvou policajtech) platí i pro nevlastní limity. Dokonce platí

Věta 14' (o jednom policajtovi)

Buďte $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *dvě posloupnosti.*

- *Jestliže* $\lim a_n = +\infty$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $b_n \geq a_n$, *pak* $\lim b_n = +\infty$.
- *Jestliže* $\lim a_n = -\infty$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $b_n \leq a_n$, *pak* $\lim b_n = -\infty$.

Definice

Budiž $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná. Není-li A shora omezená, pak definujeme $\sup A = +\infty$. Není-li A zdola omezená, pak definujeme $\inf A = -\infty$.

Definice

Budiž $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná. Není-li A shora omezená, pak definujeme $\sup A = +\infty$. Není-li A zdola omezená, pak definujeme $\inf A = -\infty$.

Lemma 16

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $G \in \mathbb{R}^*$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $G = \sup M$.

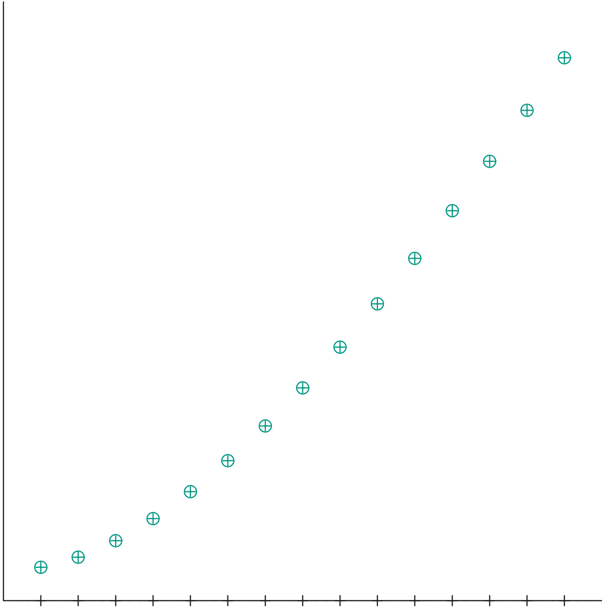
(ii) *Číslo G je horní závorou M a existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z M, pro kterou* $\lim x_n = G$.

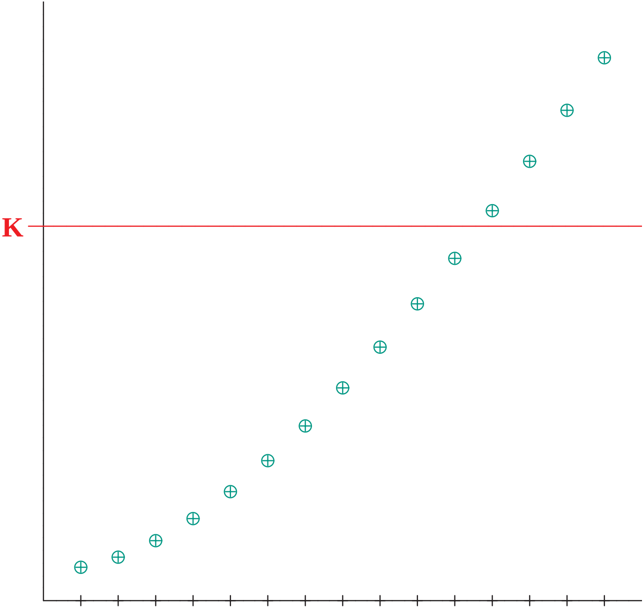
II.4. Hlubší věty o limitě posloupnosti

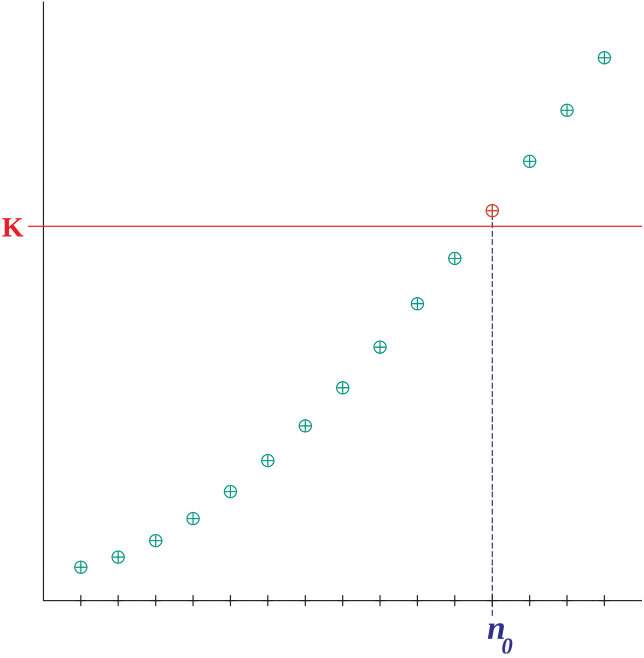
II.4. Hlubší věty o limitě posloupnosti

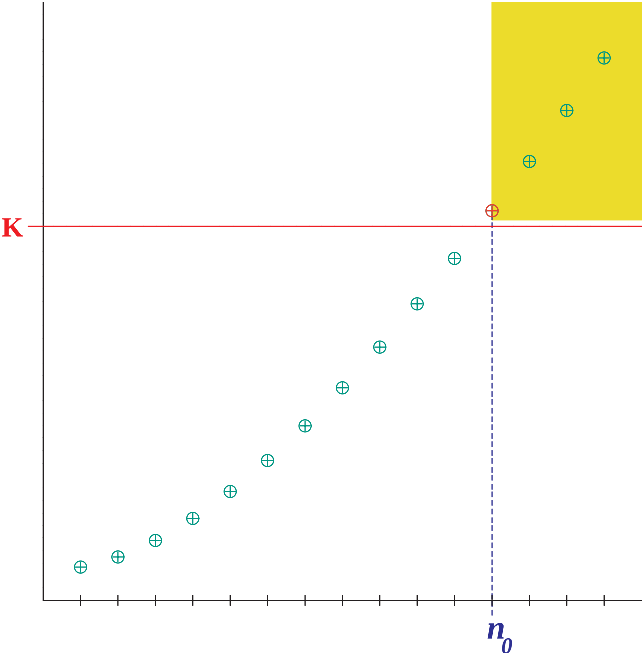
Věta 17 (o limitě monotónní posloupnosti)

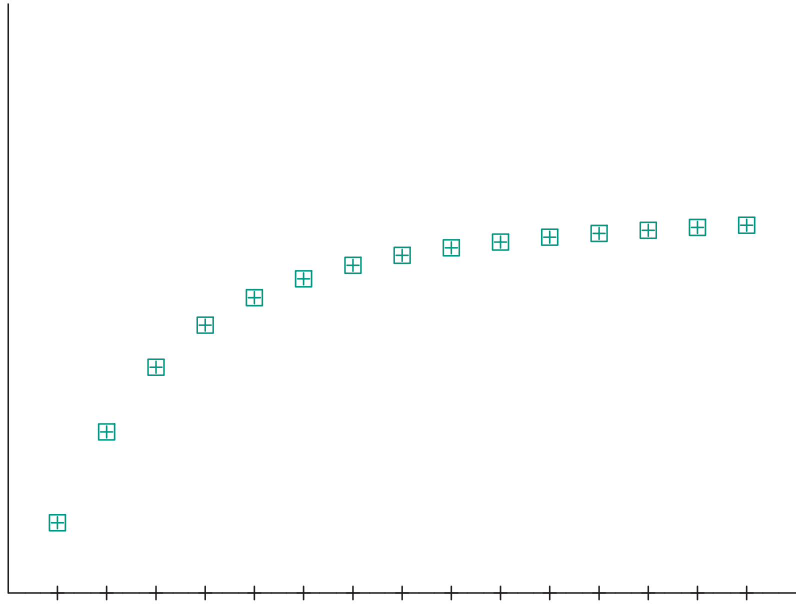
Každá monotónní posloupnost má limitu. Je-li $\{a_n\}$ *neklesající, pak* $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$*. Je-li* $\{a_n\}$ *nerostoucí, pak* $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$*.*

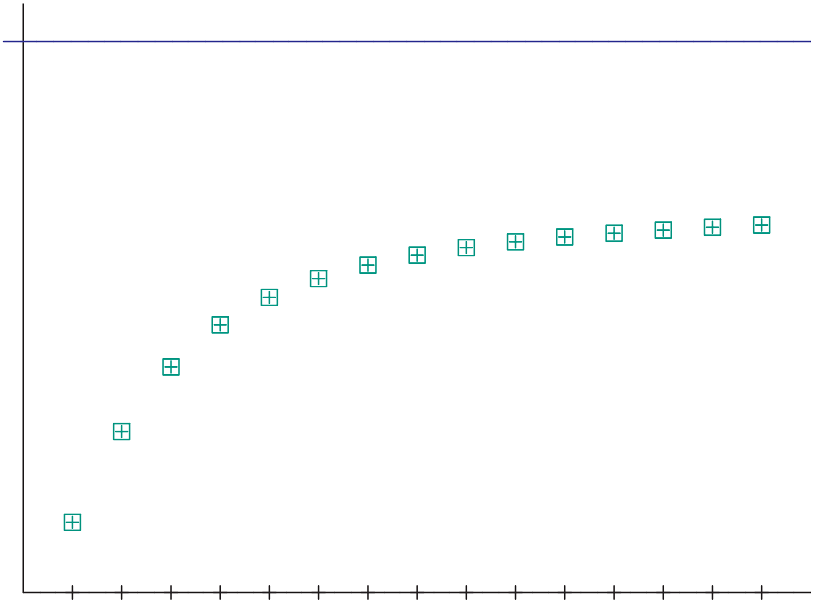


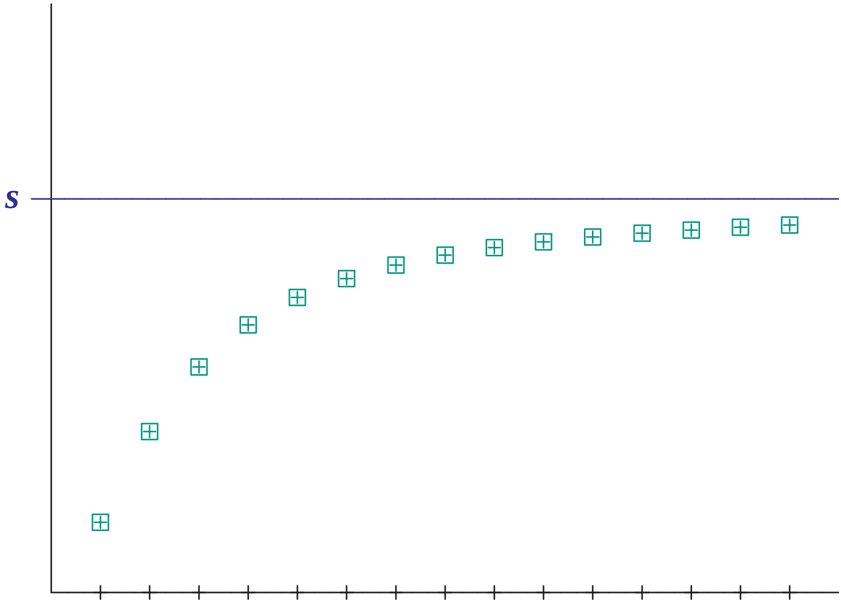

K

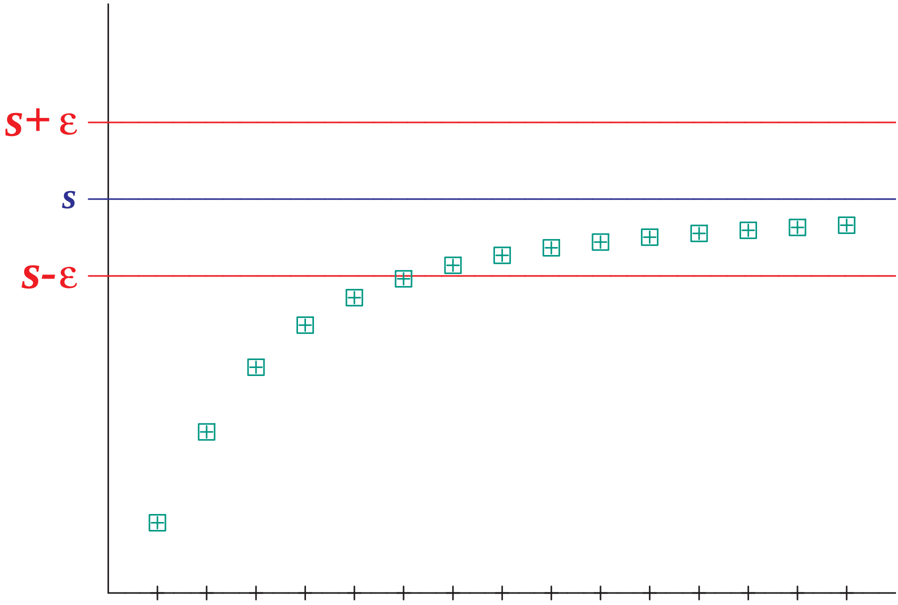

K
n_0


K
n_0

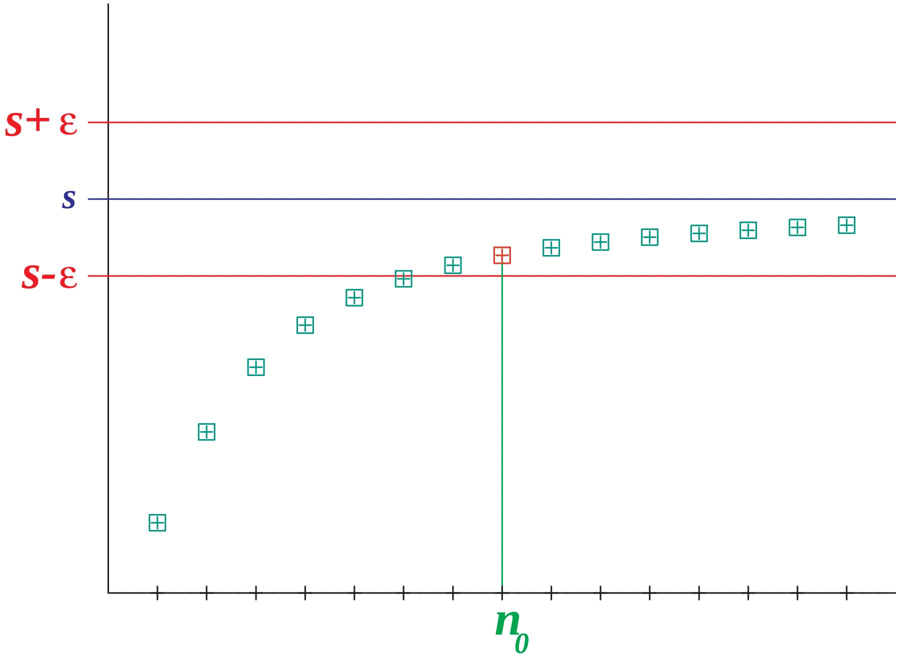


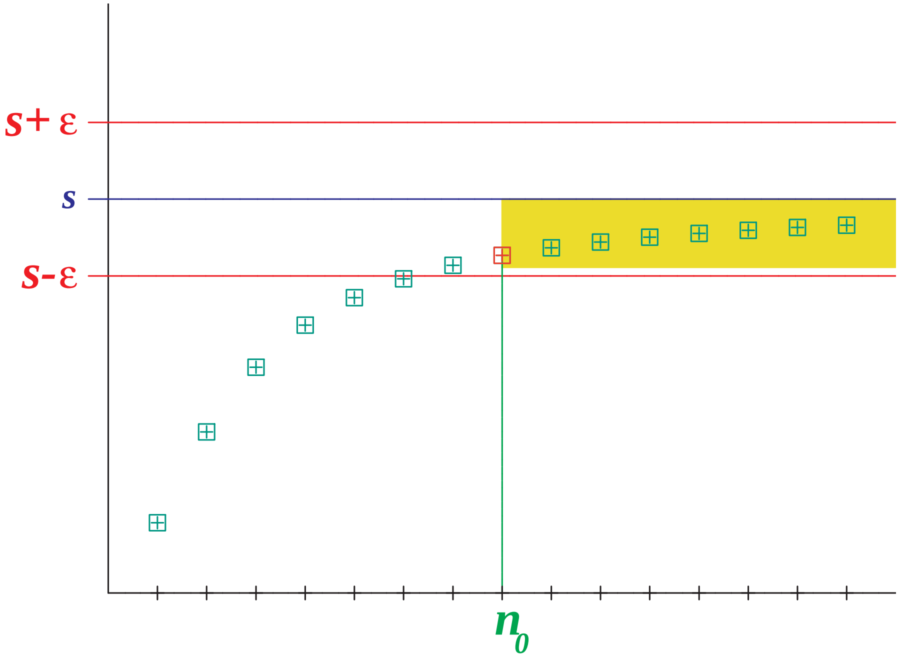



S



s+ ε
s
s-ε

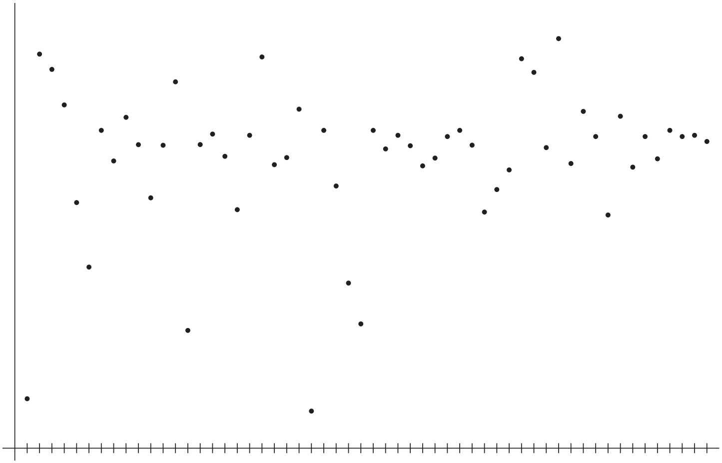

s+ ε
s
s- ε
n0

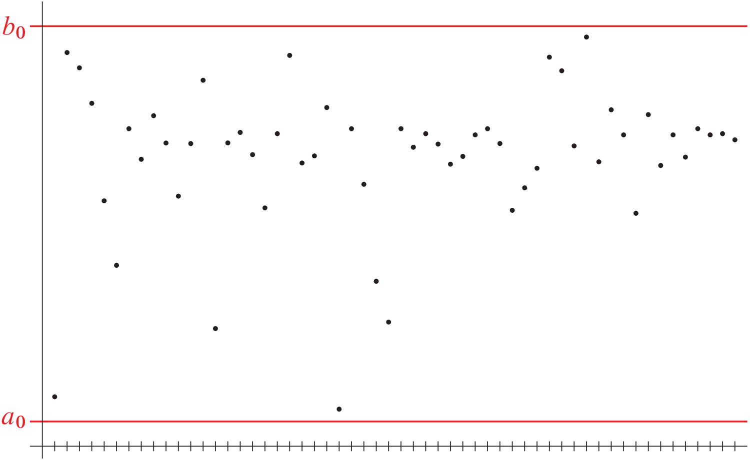


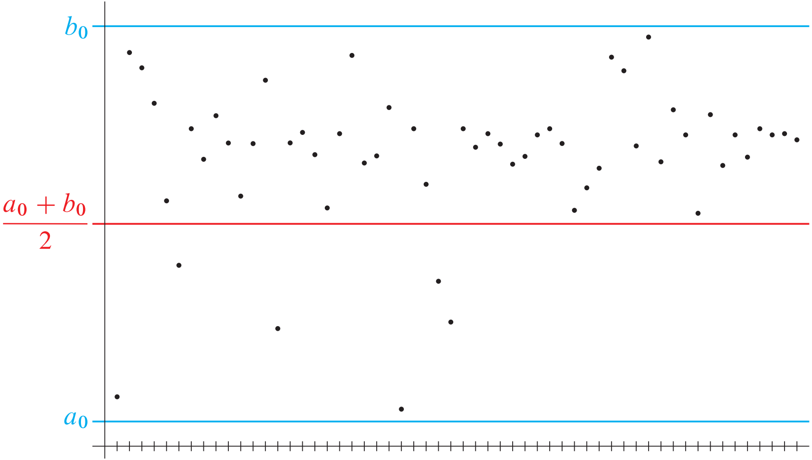
s+ ε
s
s-ε
n0

Věta 18 (Bolzano-Weierstraß)

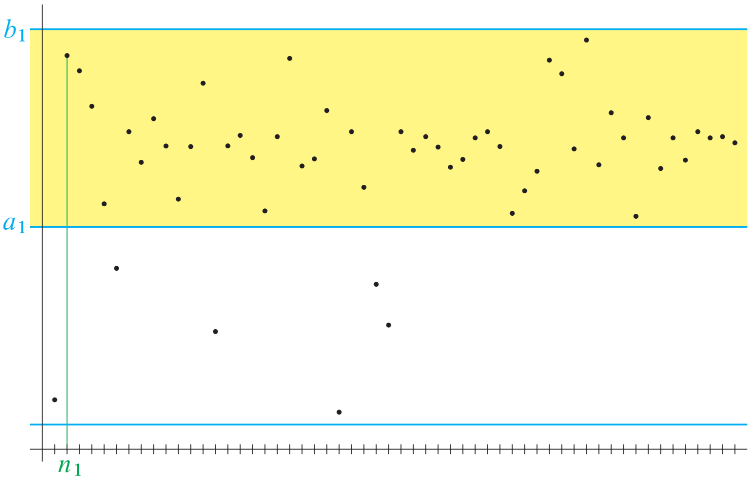
Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

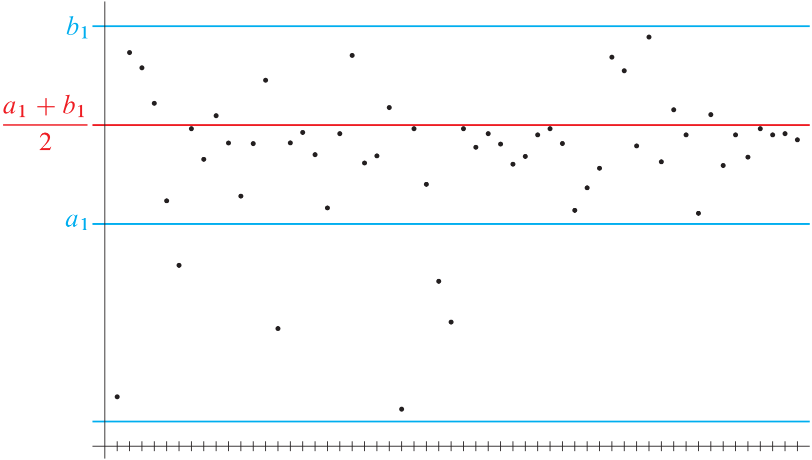



b_0
a_0

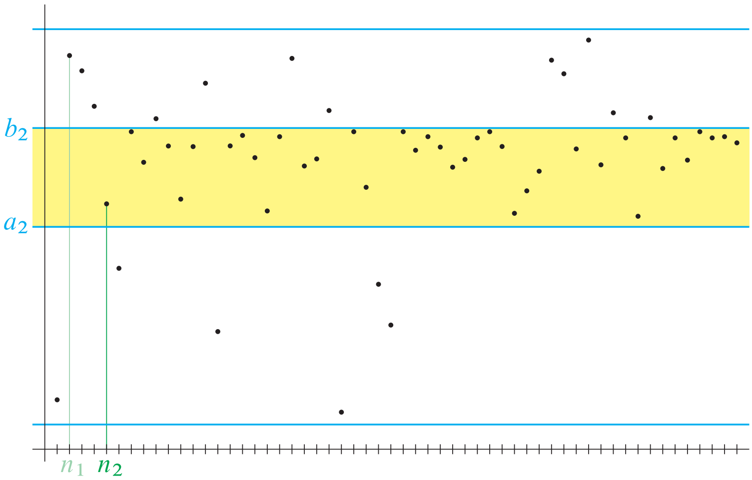


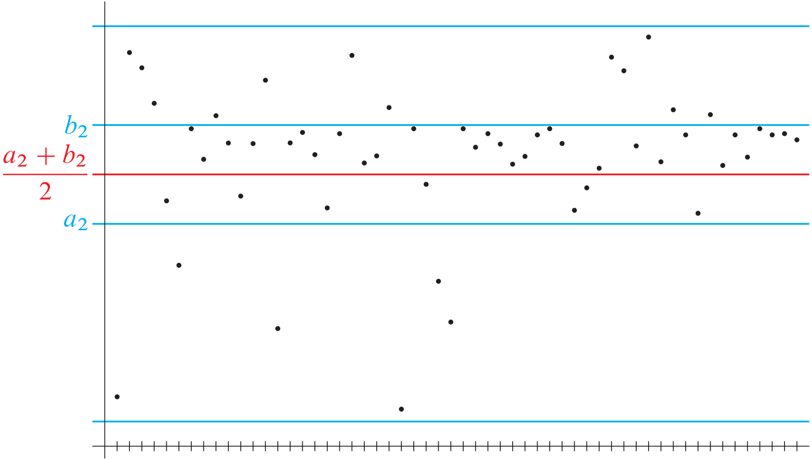
b_0
$\frac{a_0 + b_0}{2}$
a_0


b_1
a_1
n_1

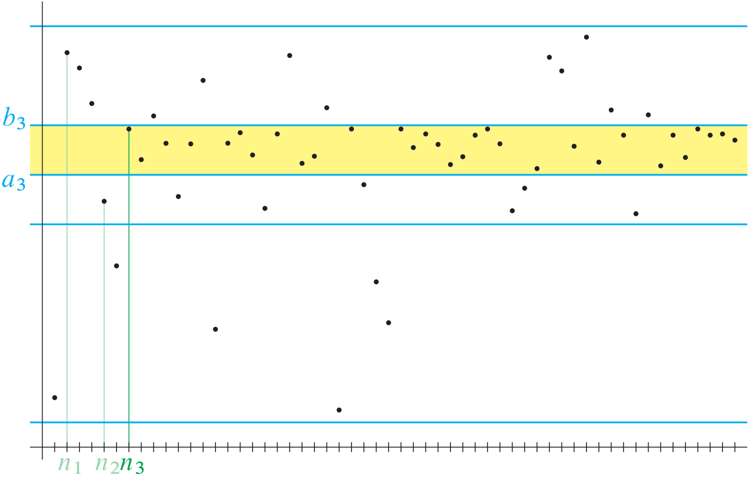


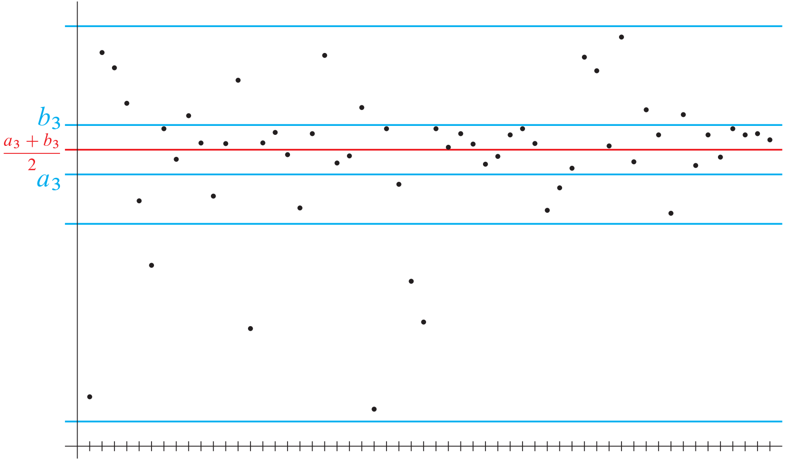
b_1
$\frac{a_1 + b_1}{2}$
a_1

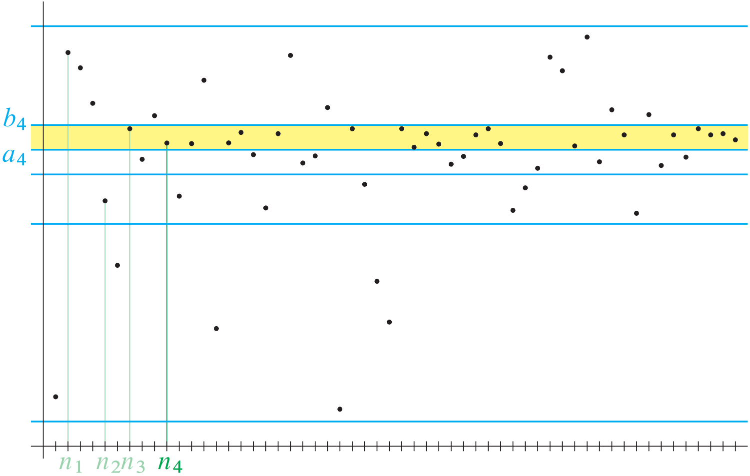

b_2
a_2
n_1
n_2



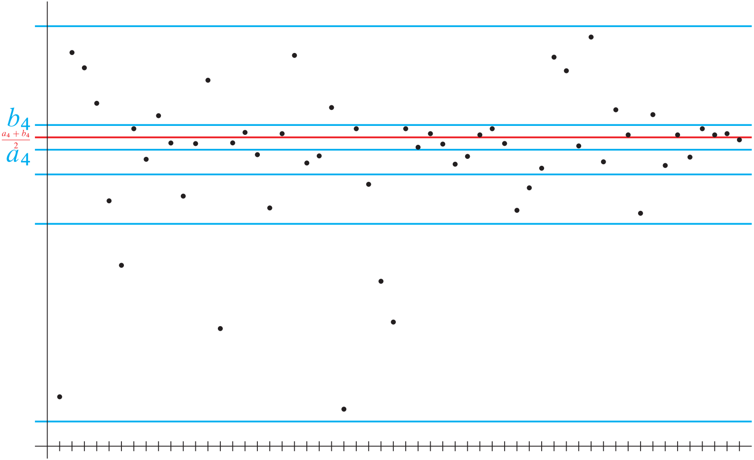
b_2
$\frac{a_2 + b_2}{2}$
a_2

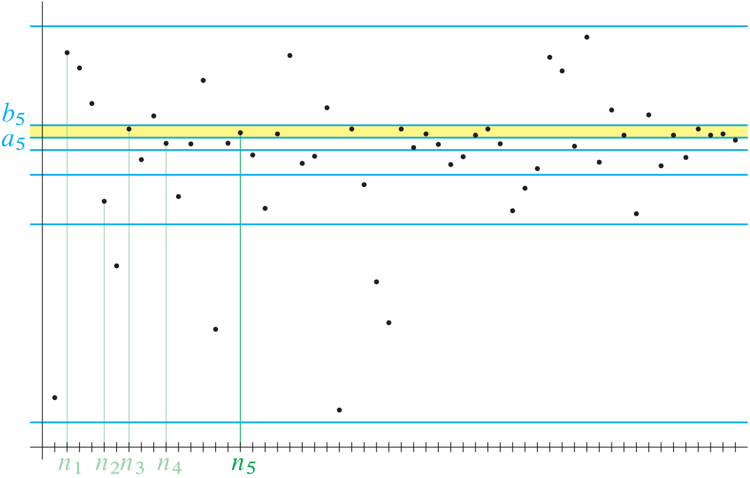

b_3
a_3
n_1
n_2
n_3

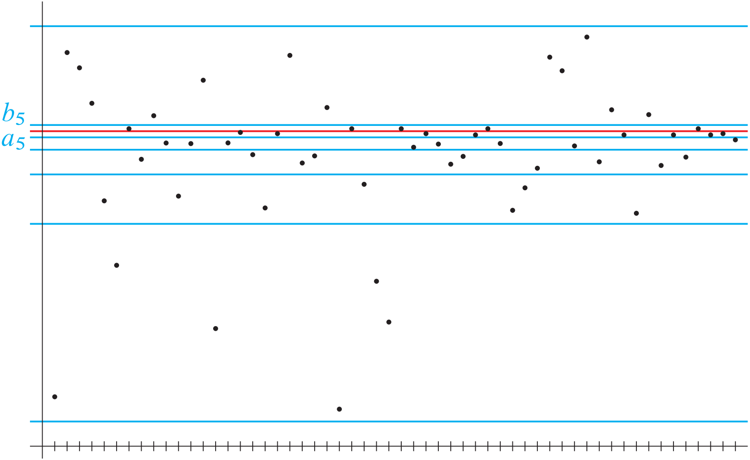

b_3
$\frac{a_3+b_3}{2}$
a_3

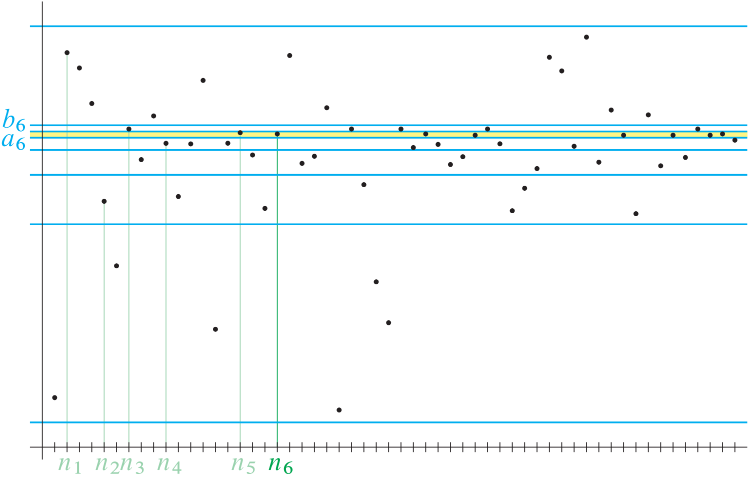


b_4
a_4
n_1
n_2
n_3
n_4


b_4
$\frac{a_4+b_4}{2}$
a_4


b_5
a_5
n_1
n_2
n_3
n_4
n_5


b_5
a_5



b_6
a_6
n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6

III. Zobrazení

III. Zobrazení

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$.

III. Zobrazení

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$. Prvek y se pak nazývá obrazem prvku x, prvek x se nazývá vzorem prvku y.

III. Zobrazení

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$. Prvek y se pak nazývá obrazem prvku x, prvek x se nazývá vzorem prvku y.

- Symbolem $f\colon A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.

III. Zobrazení

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$. Prvek y se pak nazývá obrazem prvku x, prvek x se nazývá vzorem prvku y.

- Symbolem $f\colon A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.
- Symbolem $f\colon x \mapsto f(x)$ značíme, že zobrazení f přiřazuje prvku x prvek $f(x)$.

III. Zobrazení

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$. Prvek y se pak nazývá obrazem prvku x, prvek x se nazývá vzorem prvku y.

- Symbolem $f\colon A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.
- Symbolem $f\colon x \mapsto f(x)$ značíme, že zobrazení f přiřazuje prvku x prvek $f(x)$.
- Množinu A z definice zobrazení nazýváme definičním oborem zobrazení f a značíme ji symbolem D_f.

Definice

Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení.

- Podmnožina $G_f = \{[x, y] \in A \times B;\ x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá grafem zobrazení f.

Definice

Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení.

- Podmnožina $G_f = \{[x, y] \in A \times B;\ x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá grafem zobrazení f.
- Obrazem množiny $M \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

$$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M\colon f(x) = y\} \quad (= \{f(x);\ x \in M\}).$$

Definice

Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení.

- Podmnožina $G_f = \{[x, y] \in A \times B;\ x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá grafem zobrazení f.
- Obrazem množiny $M \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

  $$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M\colon f(x) = y\} \quad (= \{f(x);\ x \in M\}).$$

- Množina $f(A)$ se nazývá obor hodnot zobrazení f. (Značíme R_f nebo H_f.)

Definice

Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení.

- Podmnožina $G_f = \{[x,y] \in A \times B;\ x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá grafem zobrazení f.
- Obrazem množiny $M \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina
$$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M\colon f(x) = y\} \quad (= \{f(x);\ x \in M\}).$$
- Množina $f(A)$ se nazývá obor hodnot zobrazení f. (Značíme R_f nebo H_f.)
- Vzorem množiny $W \subset B$ při zobrazení f nazveme množinu
$$f_{-1}(W) = \{x \in A;\ f(x) \in W\}.$$

Poznámka

Nechť $f\colon A \to B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,

Poznámka

Nechť $f\colon A \to B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,
- $f_{-1}(U \cap V) = f_{-1}(U) \cap f_{-1}(V)$,

Poznámka

Nechť $f \colon A \to B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,
- $f_{-1}(U \cap V) = f_{-1}(U) \cap f_{-1}(V)$,
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,

Poznámka

Nechť $f\colon A \to B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,
- $f_{-1}(U \cap V) = f_{-1}(U) \cap f_{-1}(V)$,
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,
- $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

Definice

Nechť A, B, C jsou množiny, $C \subset A$ a $f\colon A \to B$. Zúžením (restrikcí) zobrazení f na množinu C rozumíme zobrazení $\tilde{f}\colon C \to B$ definované předpisem $\tilde{f}(x) = f(x)$ pro každé $x \in C$. Značíme $f|_C$.

Definice

Nechť $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ jsou dvě zobrazení. Symbolem $g \circ f$ označíme zobrazení množiny A do množiny C definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Takto definované zobrazení se nazývá složeným zobrazením.

Definice

Řekneme, že zobrazení $f\colon A \to B$

- zobrazuje množinu A na množinu B, jestliže $f(A) = B$, tj. ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$,

Definice

Řekneme, že zobrazení $f\colon A \to B$

- zobrazuje množinu A na množinu B, jestliže $f(A) = B$, tj. ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$,
- je prosté, jestliže rozdílným prvkům přiřazuje rozdílné hodnoty, tj.

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

Definice

Řekneme, že zobrazení $f\colon A \to B$

- zobrazuje množinu A na množinu B, jestliže $f(A) = B$, tj. ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$,
- je prosté, jestliže rozdílným prvkům přiřazuje rozdílné hodnoty, tj.

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

- je bijekce A na B (nebo též vzájemně jednoznačné zobrazení), jestliže je zároveň prosté a zobrazuje A na B.

Definice

Nechť $f\colon A \to B$ je bijekce (tj. f je prosté a na). Inverzním zobrazením $f^{-1}\colon B \to A$ rozumíme zobrazení, které každému prvku $y \in B$ přiřadí (jednoznačně určený) prvek $x \in A$ splňující $f(x) = y$.

IV. Funkce jedné reálné proměnné

IV.1. Základní pojmy

Definice

Funkce f jedné reálné proměnné (dále jen funkce) je zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce f jedné reálné proměnné (dále jen funkce) je zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je rostoucí na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci klesající (neklesající, nerostoucí) na intervalu J.

Definice

Funkce f jedné reálné proměnné (dále jen funkce) je zobrazení $f \colon M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice

Funkce $f \colon J \to \mathbb{R}$ je rostoucí na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci klesající (neklesající, nerostoucí) na intervalu J.

Definice

Monotónní funkcí (resp. ryze monotónní funkcí) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- zdola omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- zdola omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,

Definice

Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- zdola omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- lichá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,

Definice

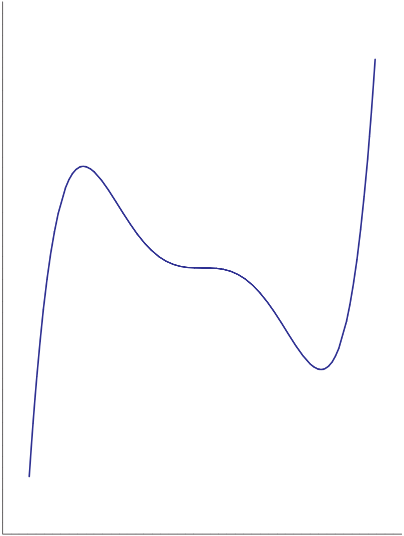
Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

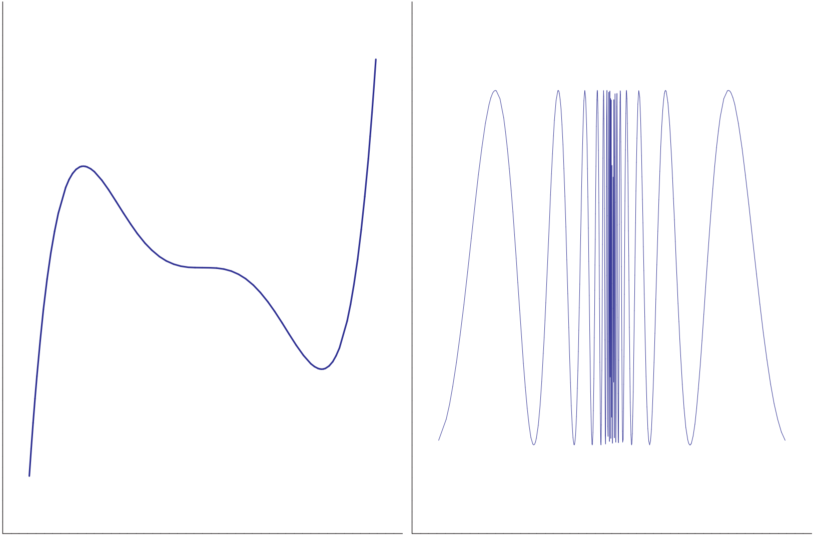
- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- zdola omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- lichá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- sudá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,

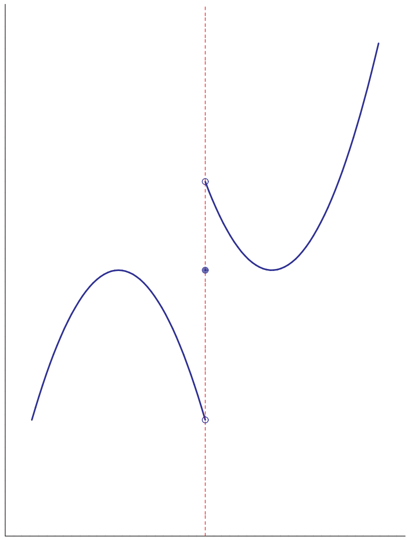
Definice

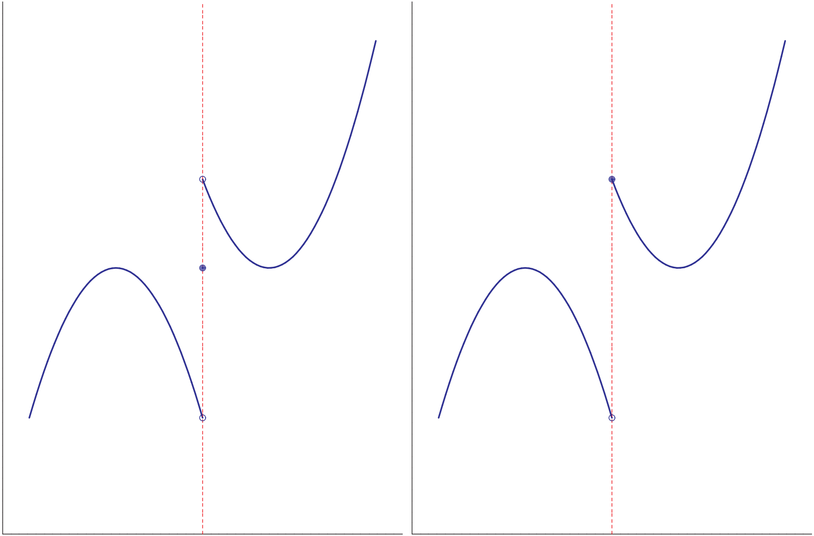
Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

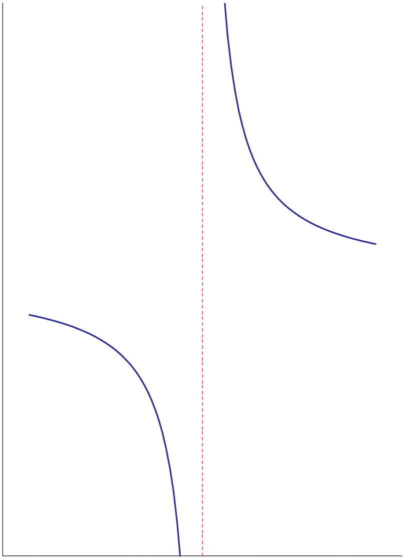
- shora omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- zdola omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- omezená na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- lichá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- sudá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- periodická s periodou a, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f$, $x - a \in D_f$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$.

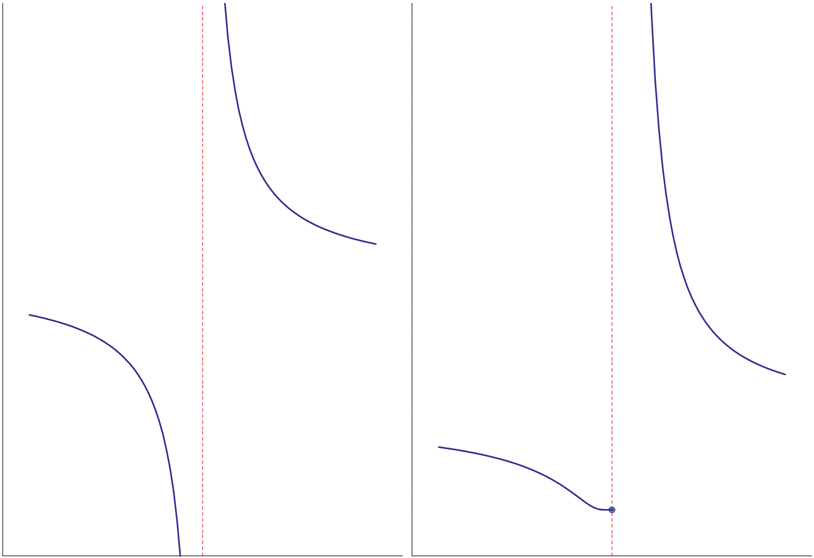












IV.2. Limita funkce

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- okolí bodu c o poloměru ε jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- okolí bodu c o poloměru ε jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- prstencové okolí bodu c o poloměru ε jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$.

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 19 (jednoznačnost limity)

Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu $A \in \mathbb{R}$.

Definice

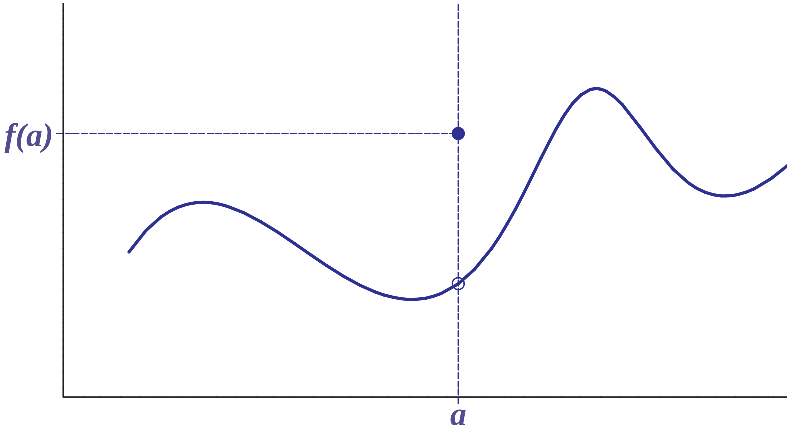
Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

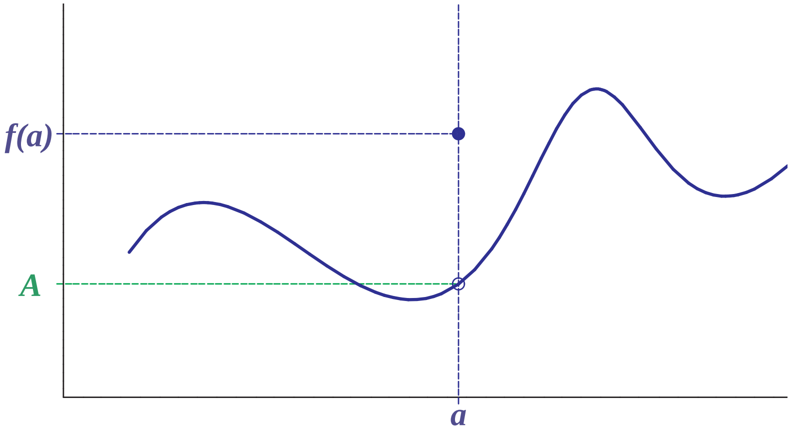
Věta 19 (jednoznačnost limity)

Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu $A \in \mathbb{R}$.

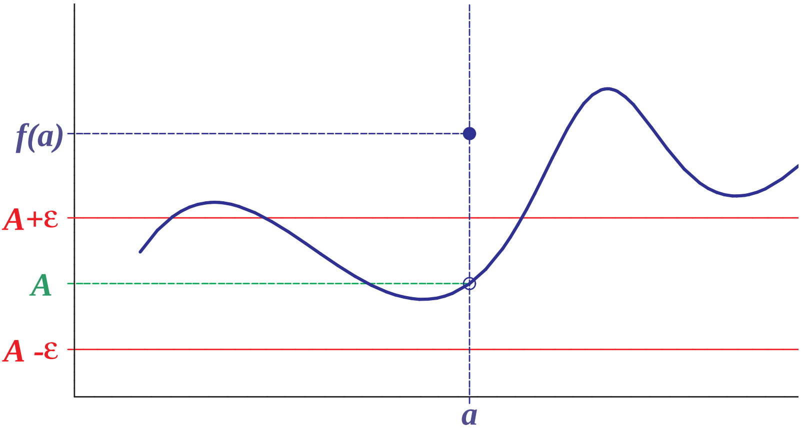
Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.



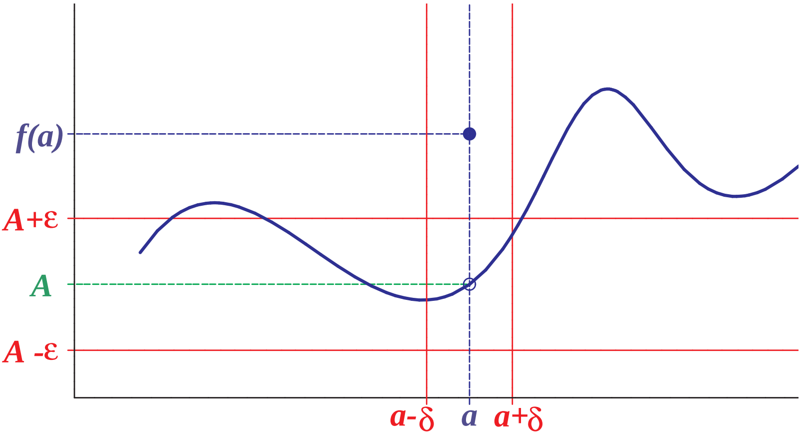
f(a)
a

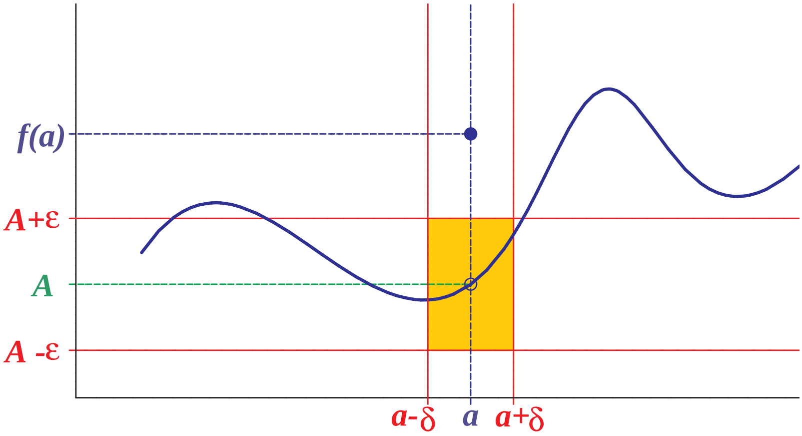


f(a)
A
a

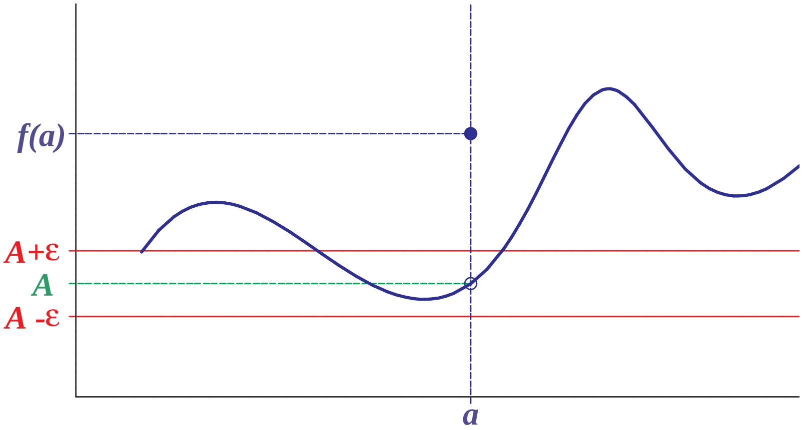


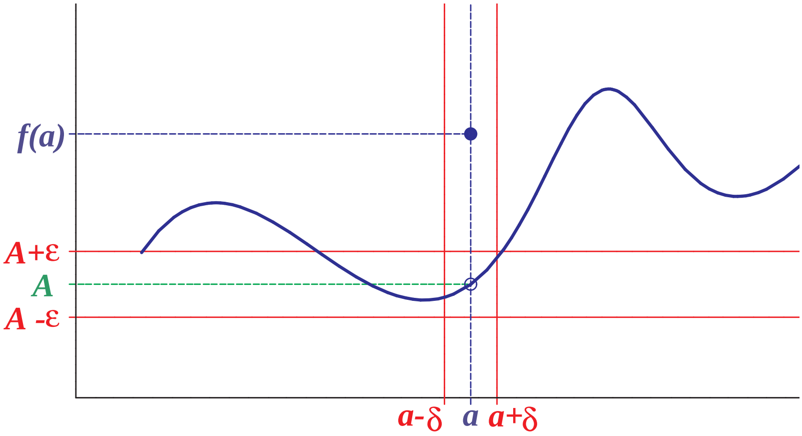
f(a)
A+ε
A
A -ε
a

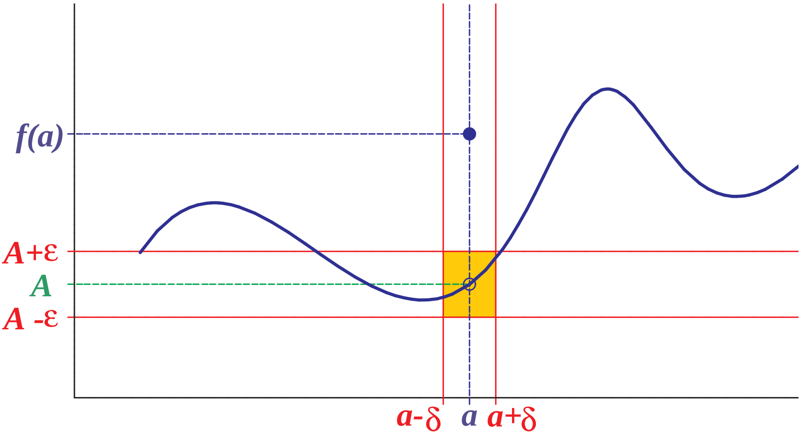

f(a)
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ



f(a)
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ


f(a)
A+ε
A
A -ε
a


f(a)
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ



f(a)
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ

Definice

Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Definice

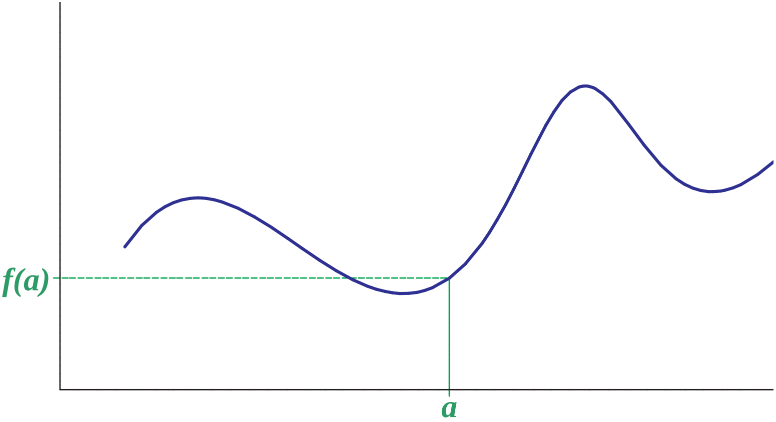
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$, jestliže

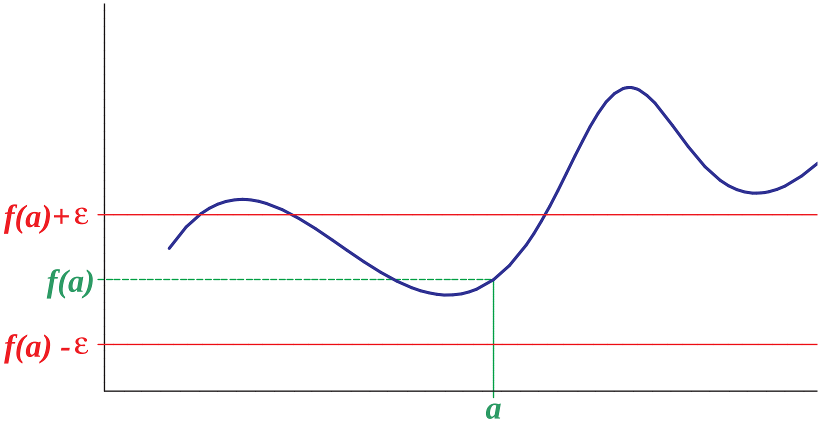
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Poznámka

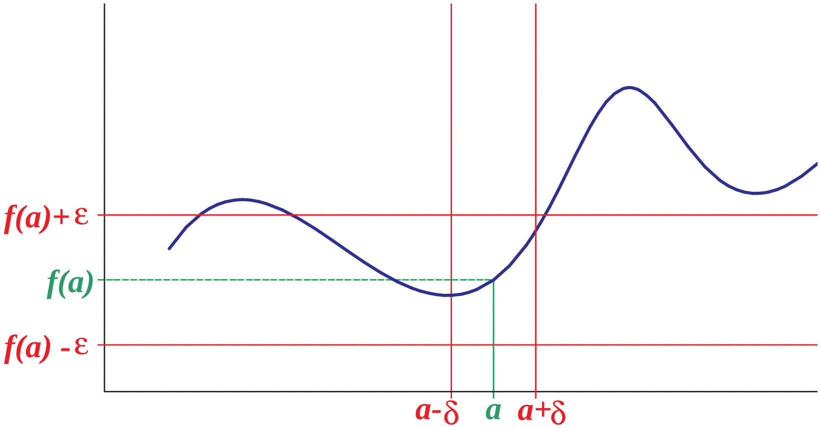
Funkce f je spojitá v bodě c, právě když

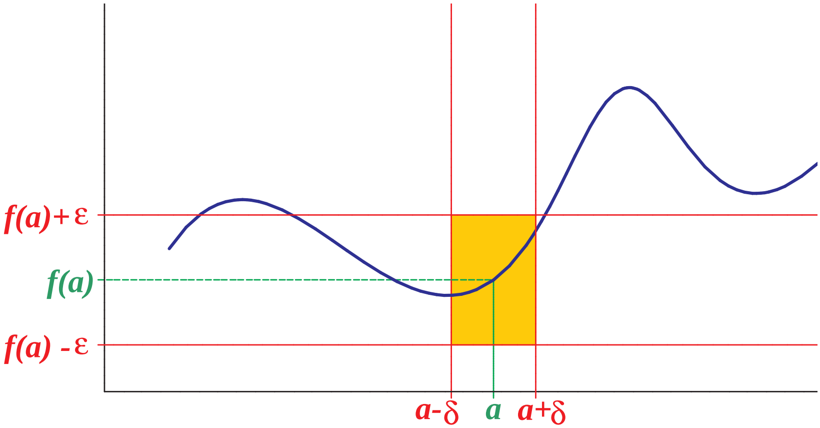
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in B(c, \delta) \colon f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

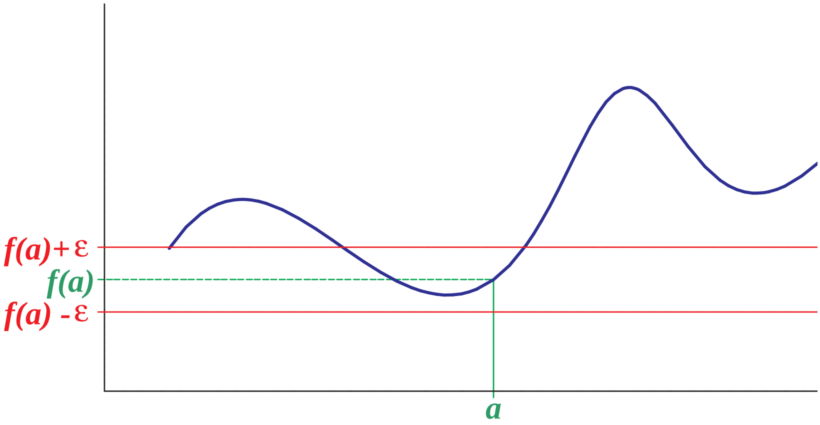

f(a)
a

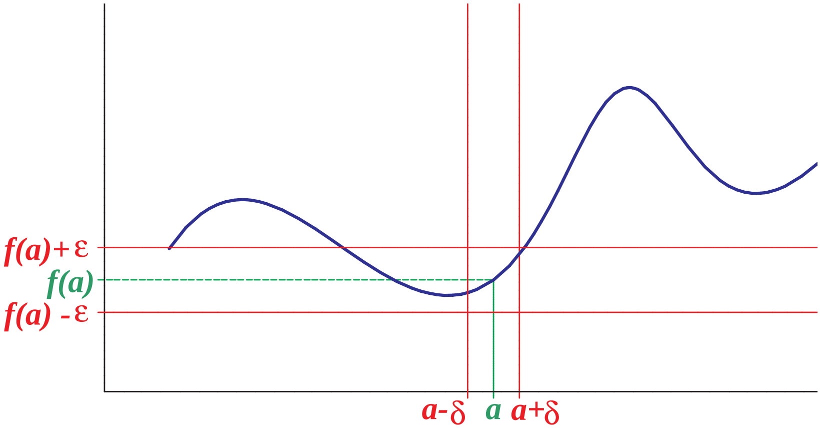


f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a

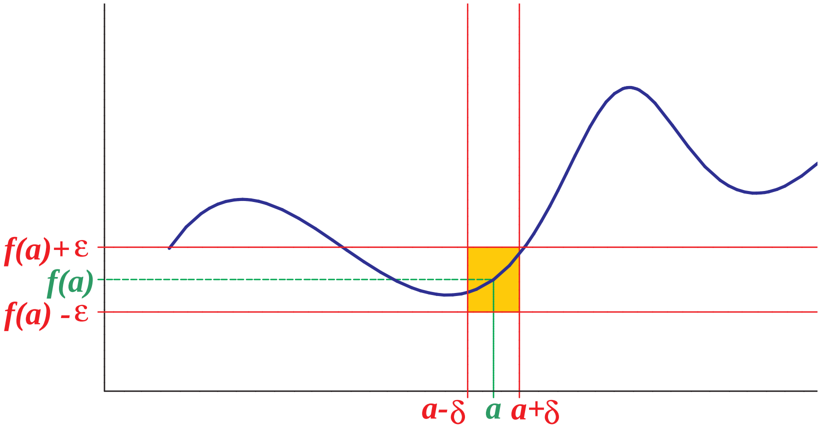

f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a-δ
a
a+δ


f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a-δ
a
a+δ

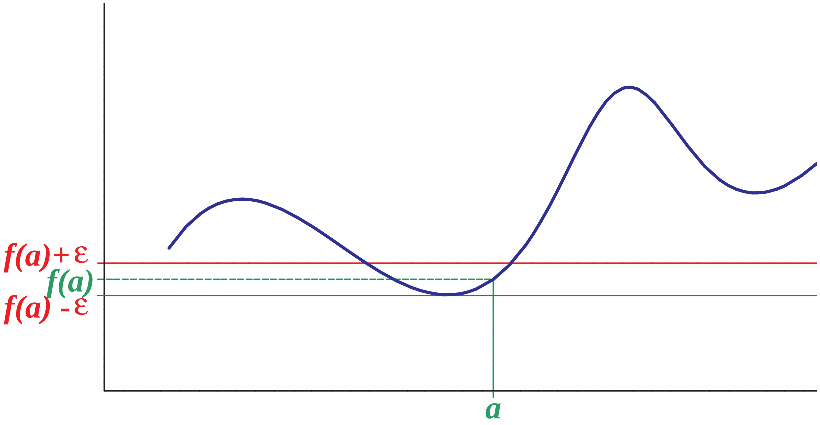

f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a

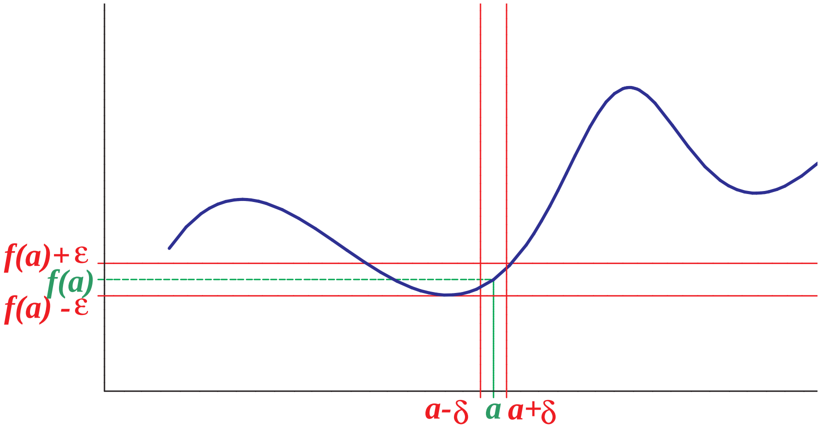


f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a-δ
a
a+δ

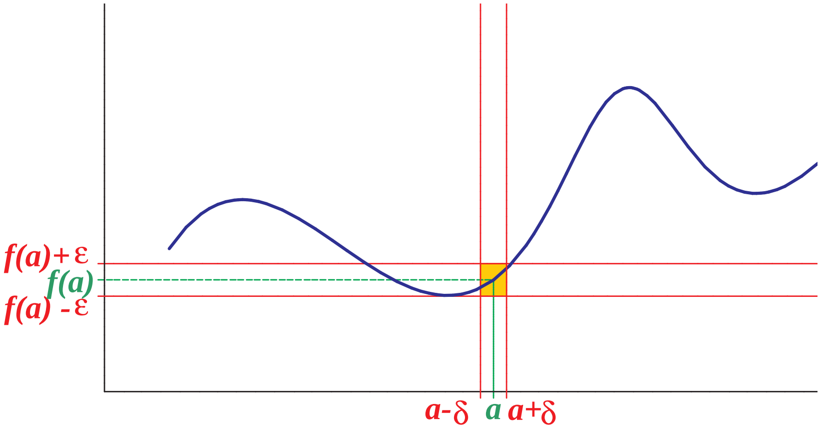


f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a-δ
a
a+δ


f(a)+ ε
f(a)
f(a) - ε
a



f(a)+ε
f(a)
f(a) -ε
a-δ
a
a+δ


$f(a)+\varepsilon$
$f(a)$
$f(a)-\varepsilon$
$a-\delta$
a
$a+\delta$

Definice

Nechť $\varepsilon > 0$. Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice

Nechť $\varepsilon > 0$. Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Definice

Nechť $\varepsilon > 0$. Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

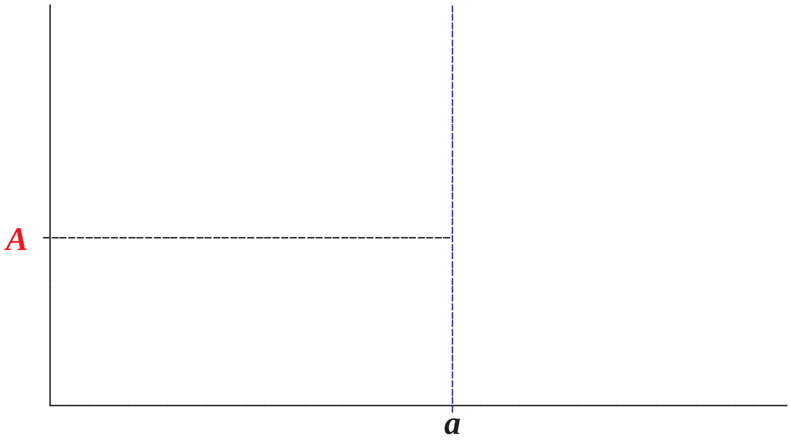
$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

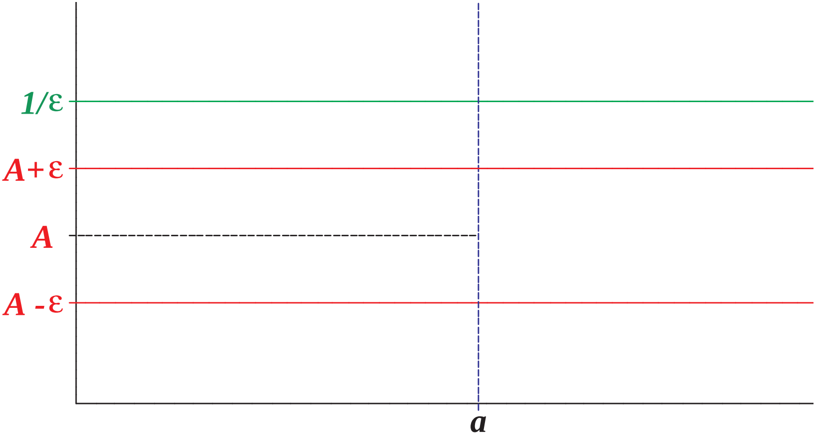
Definice

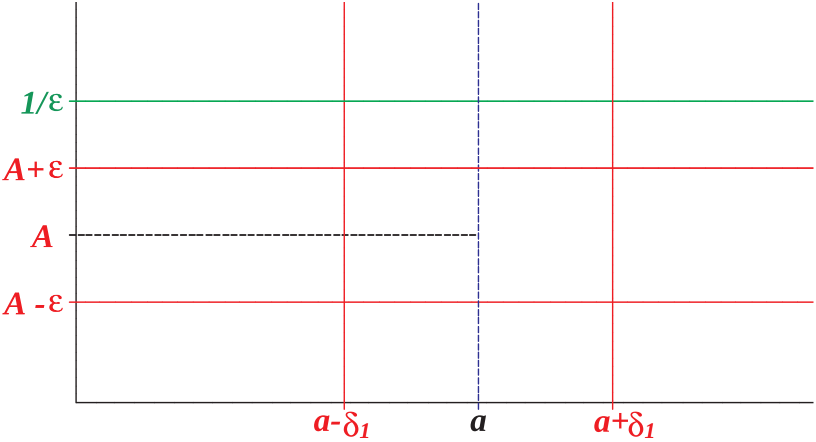
Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

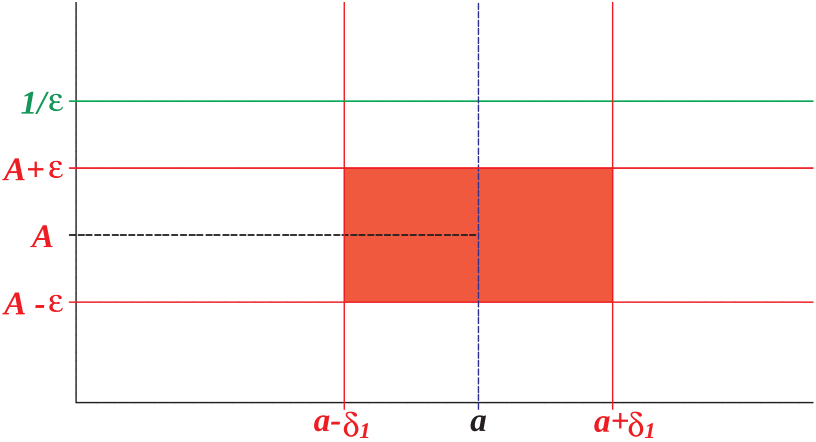
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

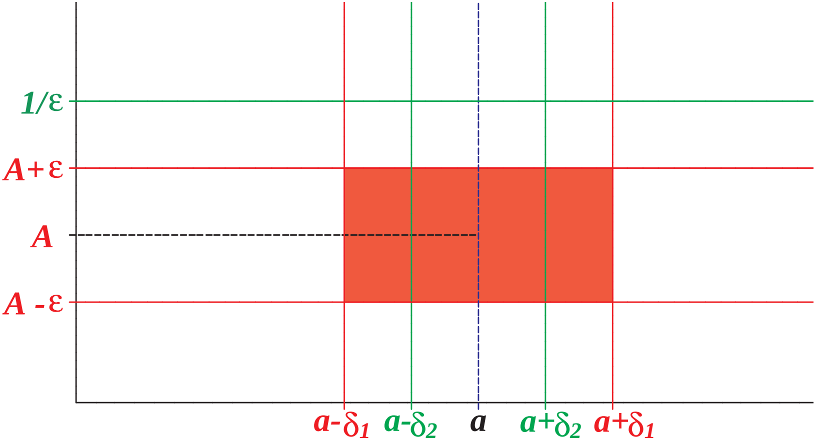
Věta 19 platí i pro $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$, tedy lze použít označení $\lim_{x \to c} f(x) = A$.


A
a

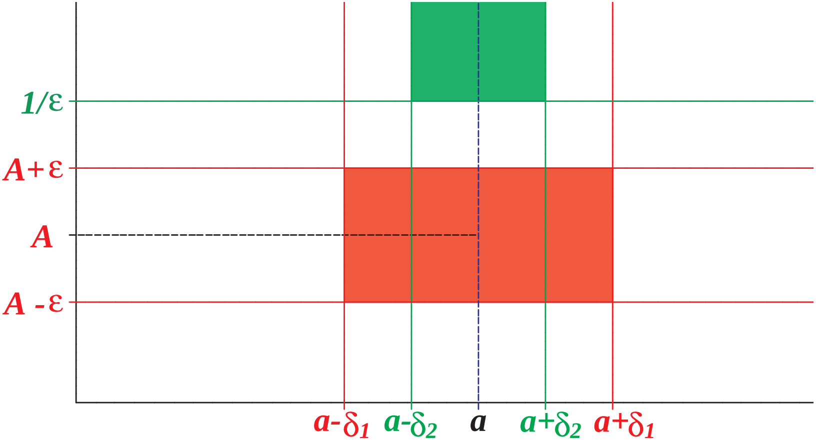

1/ε
A+ε
A
A -ε
a


1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ1
a
a+δ1

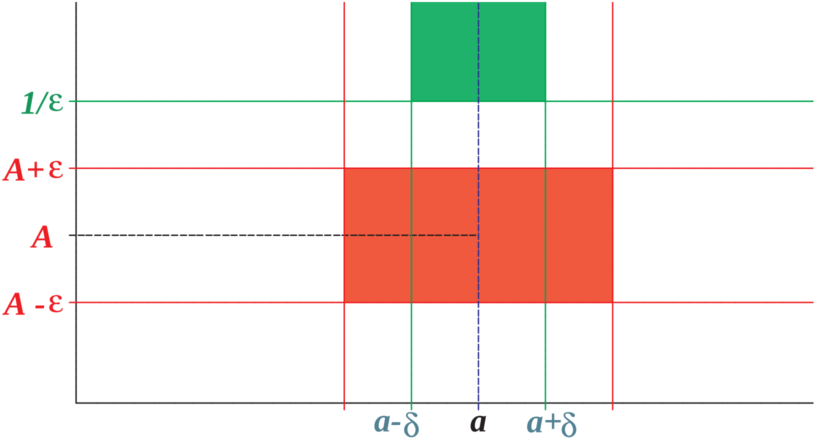

1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ1
a
a+δ1



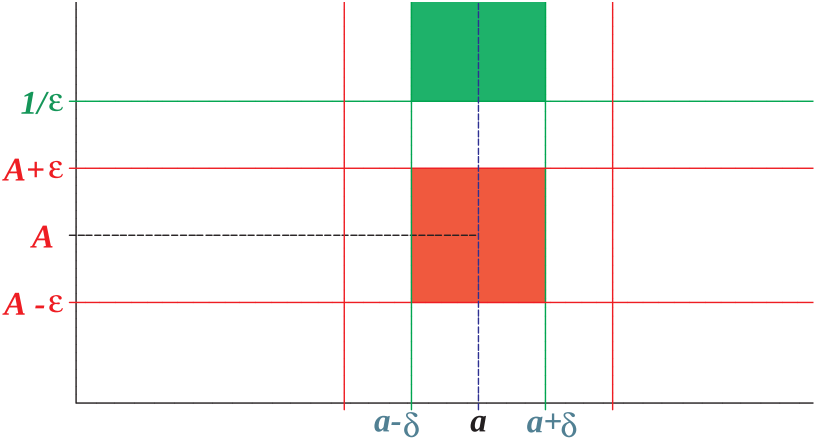
1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ1
a-δ2
a
a+δ2
a+δ1



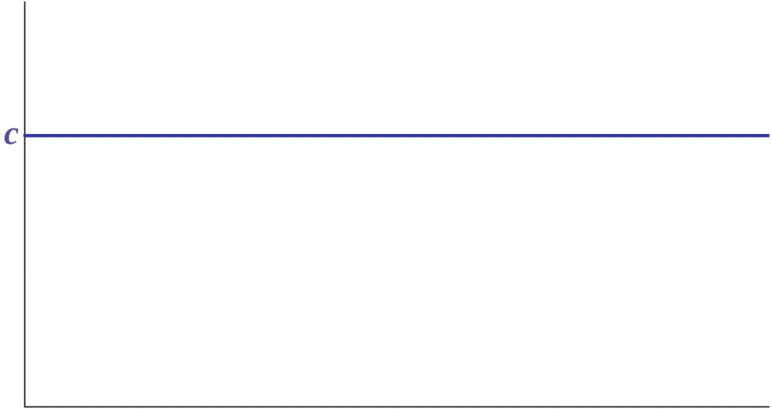
1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ1
a-δ2
a
a+δ2
a+δ1

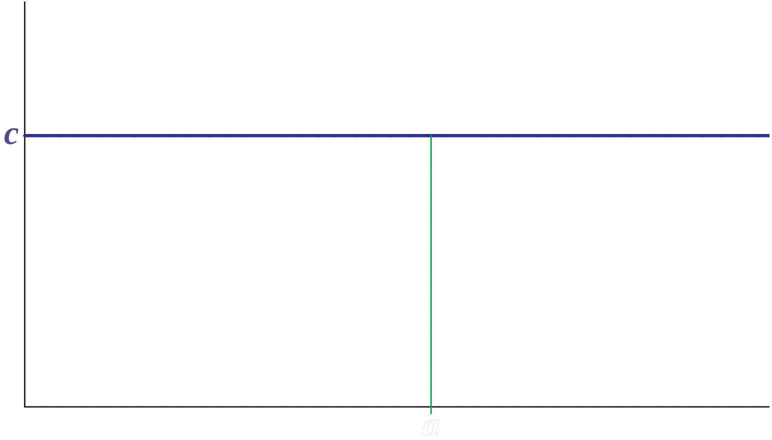


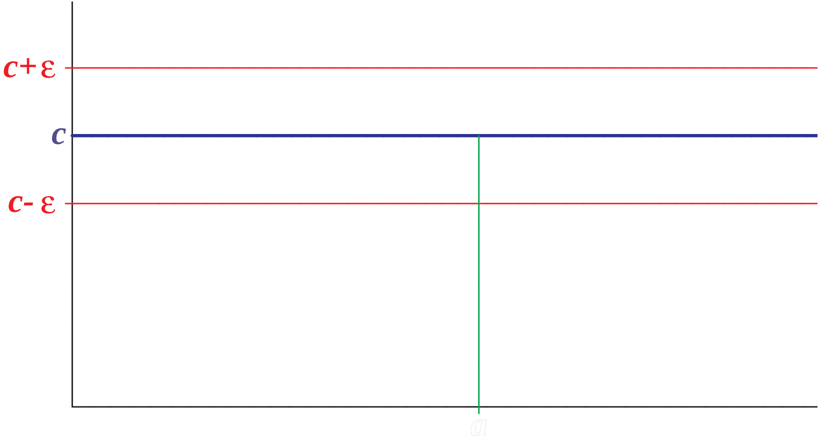
1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ



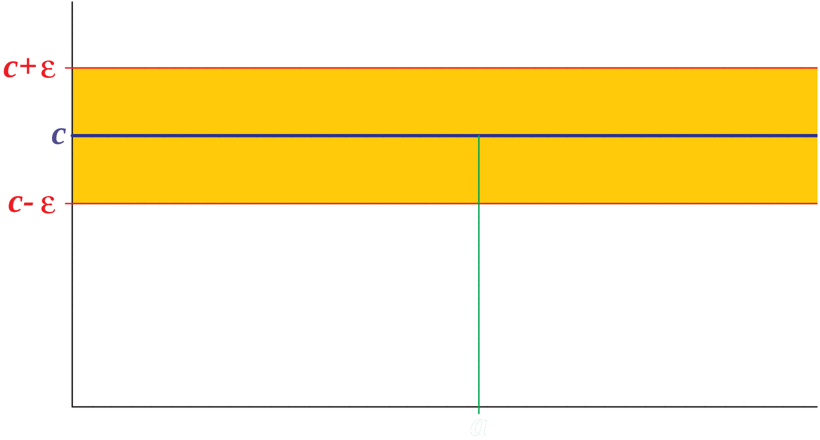
1/ε
A+ε
A
A -ε
a-δ
a
a+δ


c

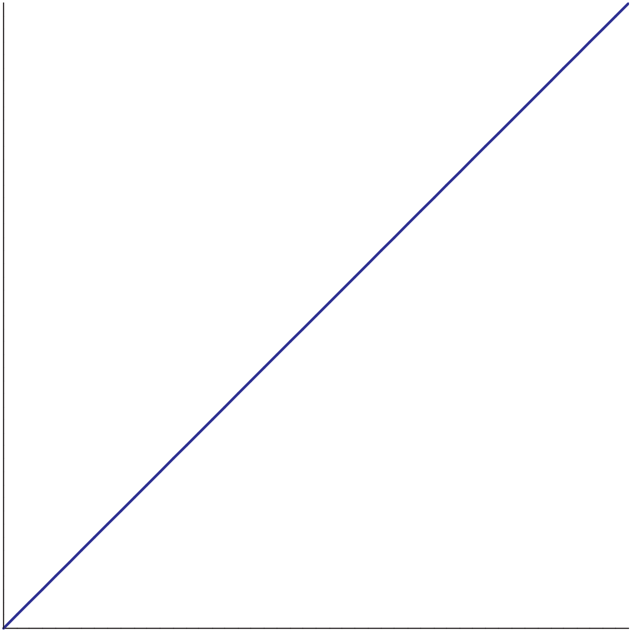

c
a

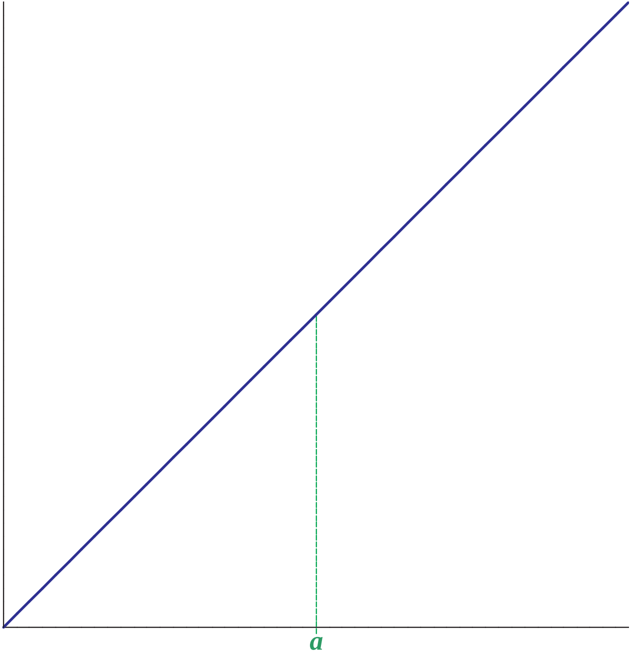


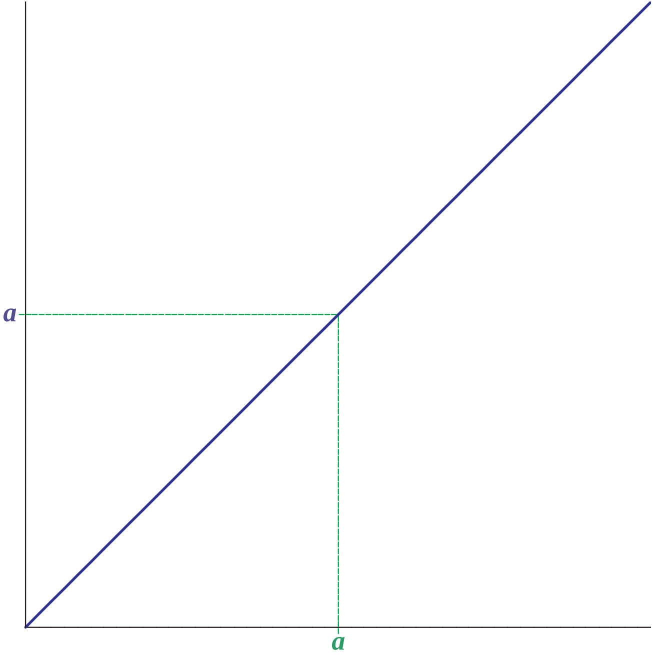
c+ε
c
c- ε
a

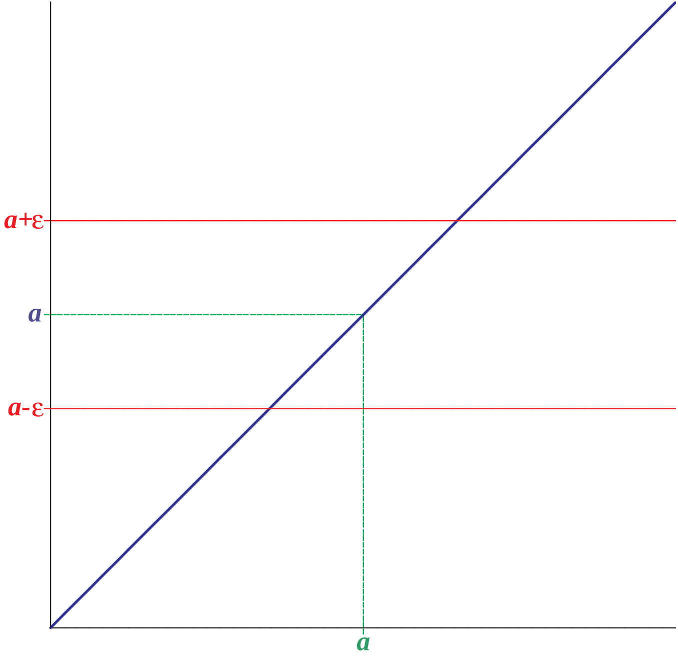


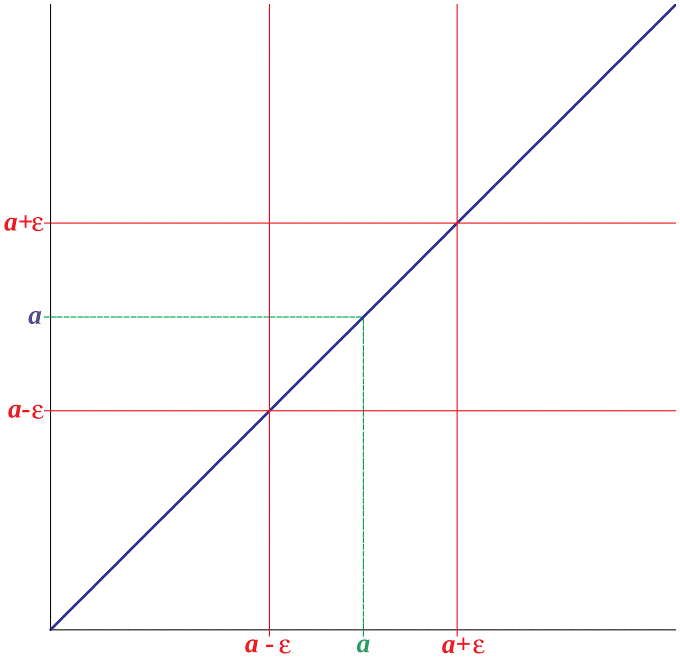
$c+\varepsilon$
c
$c-\varepsilon$
a

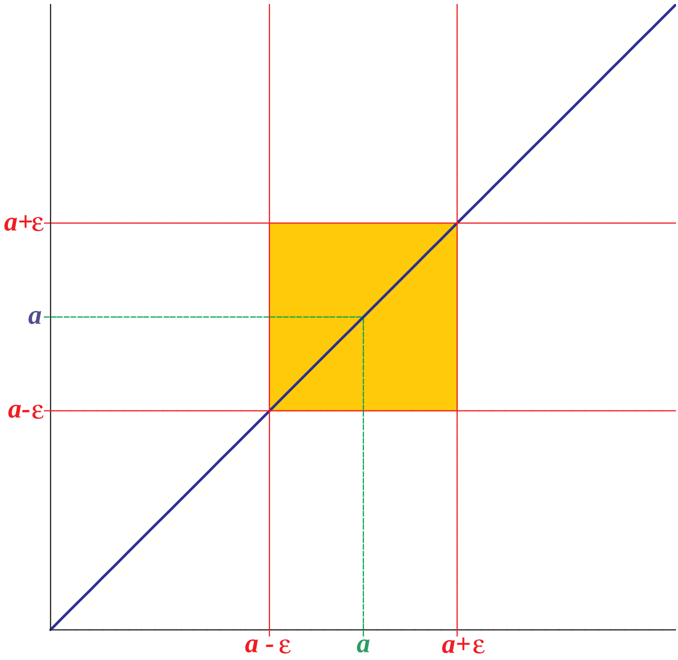



a


a
a


a+ε
a
a-ε
a


a+ε
a
a-ε
a - ε
a
a+ε



a+ε
a
a-ε
a - ε
a
a+ε

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,
- levé okolí bodu $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,
- levé okolí bodu $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- pravé okolí bodu $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,
- levé okolí bodu $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- pravé okolí bodu $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu $+\infty$ jako $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$,

Definice

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- pravé okolí bodu c jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- levé okolí bodu c jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- pravé prstencové okolí bodu c jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu c jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,
- levé okolí bodu $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- pravé okolí bodu $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- levé prstencové okolí bodu $+\infty$ jako $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$,
- pravé prstencové okolí bodu $-\infty$ jako $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$.

Definice

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c limitu zprava rovnou A (značíme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P^+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem limity zleva v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$.

Definice

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c limitu zprava rovnou A (značíme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P^+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem limity zleva v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$.

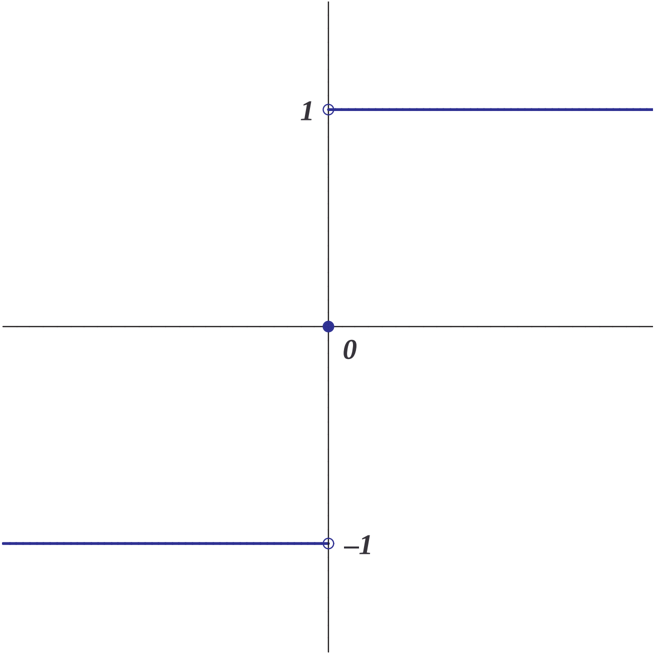
Poznámka

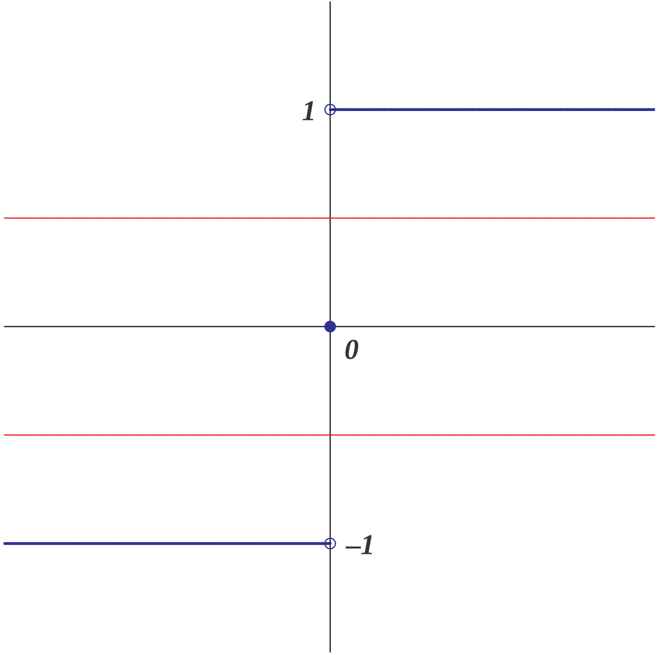
Nechť $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak

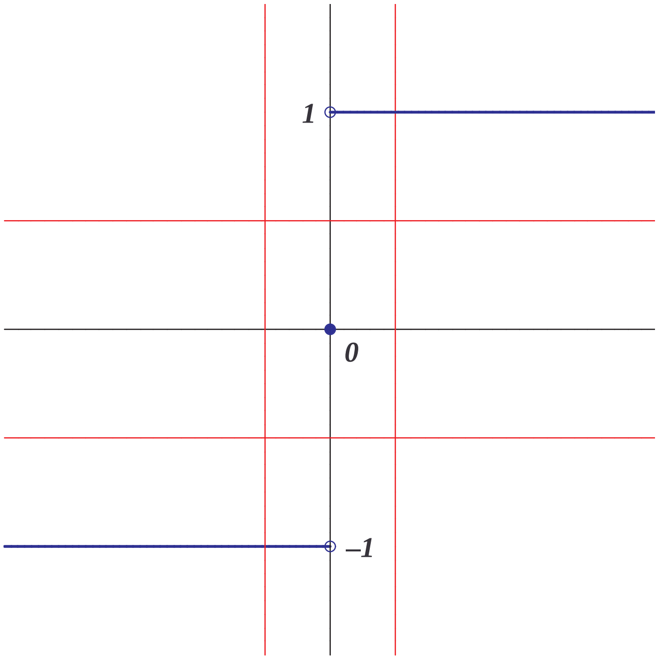
$$\lim_{x \to c} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to c+} f(x) = A \ \& \ \lim_{x \to c-} f(x) = A \right).$$

Definice

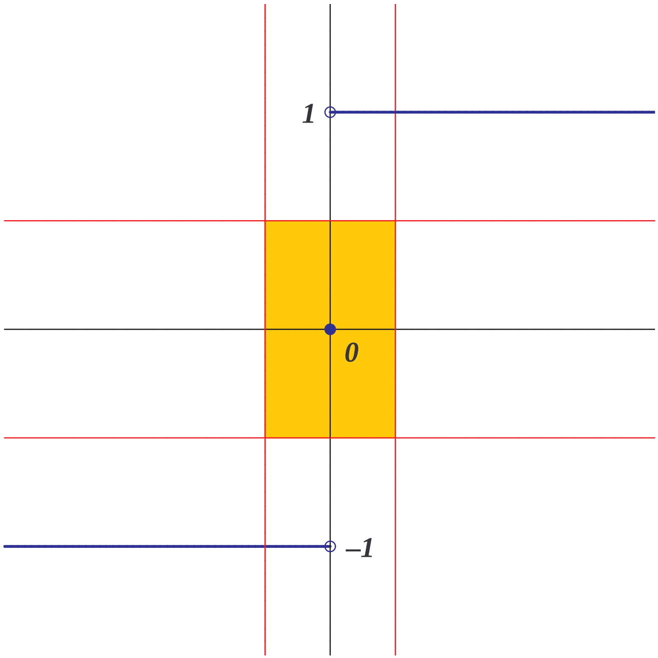
Nechť $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c spojitá zprava (resp. zleva), jestliže $\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$).

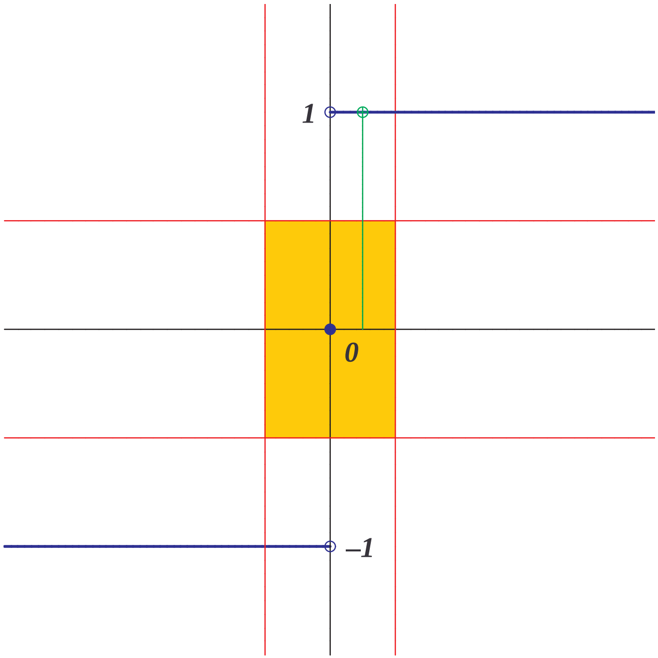

1
0
–1


1
0
–1



1
0
–1


1
0
–1



1
0
–1

Věta 20

Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje takové $\delta > 0$, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Věta 21 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Věta 21 (aritmetika limit)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. *Nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. *Potom platí:*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován,*

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz* AB *definován,*

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz* A/B *definován.*

Důsledek

Nechť funkce f *a* g *jsou spojité v bodě* $c \in \mathbb{R}$. *Pak také funkce* $f + g$ *a* fg *jsou spojité v bodě* c. *Pokud navíc* $g(c) \neq 0$, *pak také funkce* f/g *je spojitá v bodě* c.

Věta 22

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. *Nechť* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $A > 0$. *Jestliže existuje* $\eta > 0$ *takové, že funkce* g *je kladná na* $P(c, \eta)$, *pak* $\lim_{x\to c}\big(f(x)/g(x)\big) = +\infty$.

Definice

Polynomem budeme rozumět každou funkci P tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ se nazývají koeficienty polynomu P.

Definice

Polynomem budeme rozumět každou funkci P tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ se nazývají koeficienty polynomu P.

Poznámka

Nechť $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, $b_m \neq 0$. Jestliže se polynomy P a Q rovnají (tj. $P(x) = Q(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$), pak $n = m$ a $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$.

Definice

Nechť P je polynom tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řekneme, že P je polynom stupně n, jestliže $a_n \neq 0$.
Stupeň nulového polynomu (tj. konstantní nulové funkce definované na $\mathbb{R}$) definujeme jako -1.

Věta 23 (limita a uspořádání)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ *a existuje* $\lim_{x\to c} f(x)$ *a* $\lim_{x\to c} g(x)$.
(i) Jestliže $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$, *pak existuje* $\delta > 0$ *takové, že*

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) > g(x).$$

Věta 23 (limita a uspořádání)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ *a existuje* $\lim_{x\to c} f(x)$ *a* $\lim_{x\to c} g(x)$*.*
(i) Jestliže $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$, *pak existuje* $\delta > 0$ *takové, že*

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) > g(x).$$

(ii) Jestliže existuje $\delta > 0$ *takové, že* $\forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) \le g(x)$, *potom*

$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x).$$

Věta 23 (limita a uspořádání)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ *a existuje* $\lim_{x\to c} f(x)$ *a* $\lim_{x\to c} g(x)$*.*
(i) Jestliže $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$*, pak existuje* $\delta > 0$ *takové, že*

$$\forall x \in P(c,\delta): f(x) > g(x).$$

(ii) Jestliže existuje $\delta > 0$ *takové, že* $\forall x \in P(c,\delta): f(x) \le g(x)$*, potom*

$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x).$$

(iii) (o dvou policajtech) Nechť existuje $\eta > 0$ *takové, že*

$$\forall x \in P(c,\eta): f(x) \le h(x) \le g(x).$$

Je-li navíc $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$*, potom existuje rovněž* $\lim_{x\to c} h(x)$ *a rovná se A.*

Důsledek

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ *a nechť existuje* $\eta > 0$ *takové, že* g *je omezená na* $P(c, \eta)$. *Potom* $\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = 0$.

Věta 24 (limita složené funkce)

Nechť $c, A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \to c} g(x) = A$, $\lim_{y \to A} f(y) = B$ *a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in P(c, \eta)\colon g(x) \neq A$,

(S) *funkce* f *je spojitá v bodě* A.

Potom

$$\lim_{x \to c} f\big(g(x)\big) = B.$$

Věta 24 (limita složené funkce)

Nechť $c, A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} g(x) = A$, $\lim_{y\to A} f(y) = B$ *a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in P(c, \eta): g(x) \neq A$,

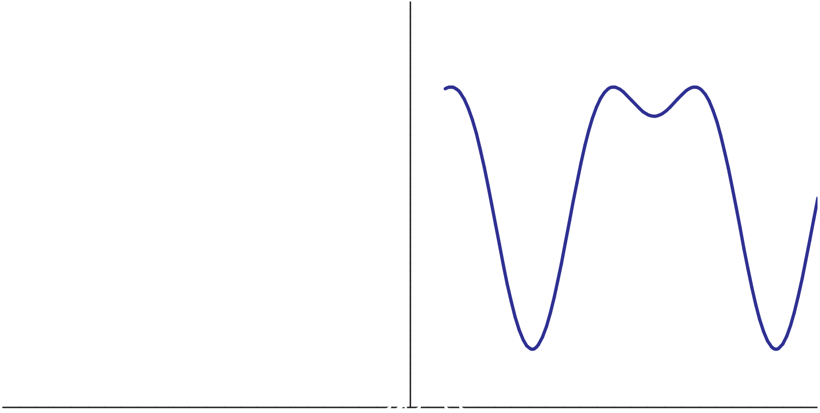
(S) *funkce* f *je spojitá v bodě* A.

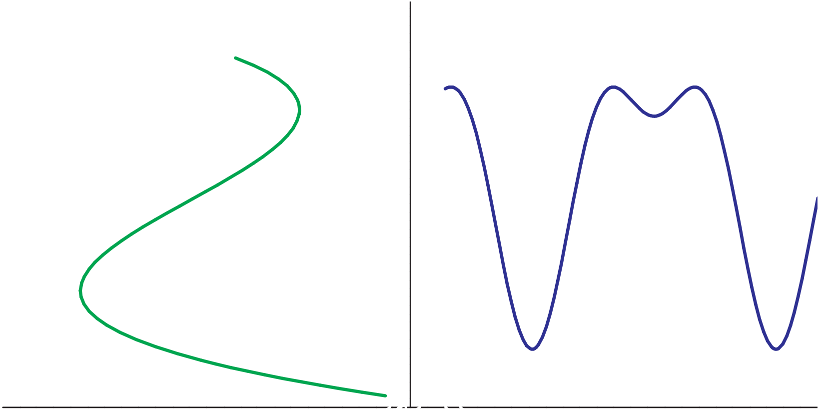
Potom

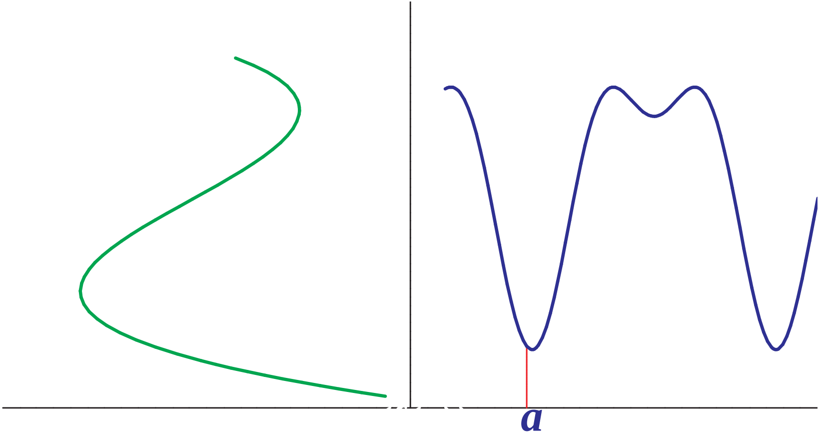
$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = B.$$

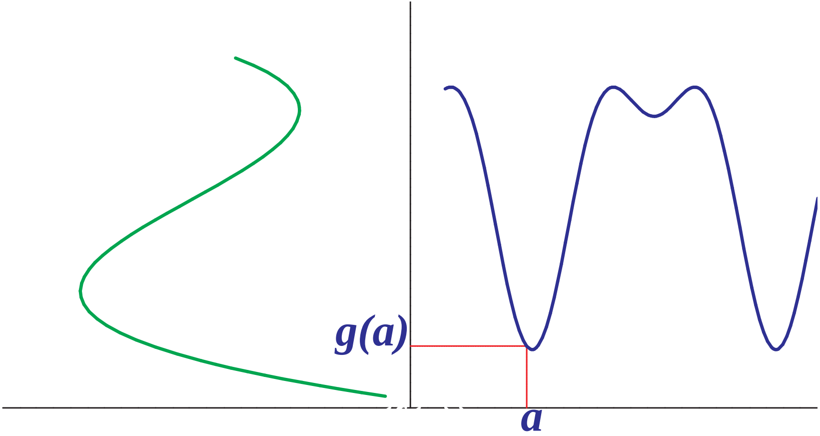
Důsledek

Nechť funkce g *je spojitá v bodě* $c \in \mathbb{R}$ *a funkce* f *je spojitá v bodě* $g(c)$. *Potom je funkce* $f \circ g$ *spojitá v bodě* c.

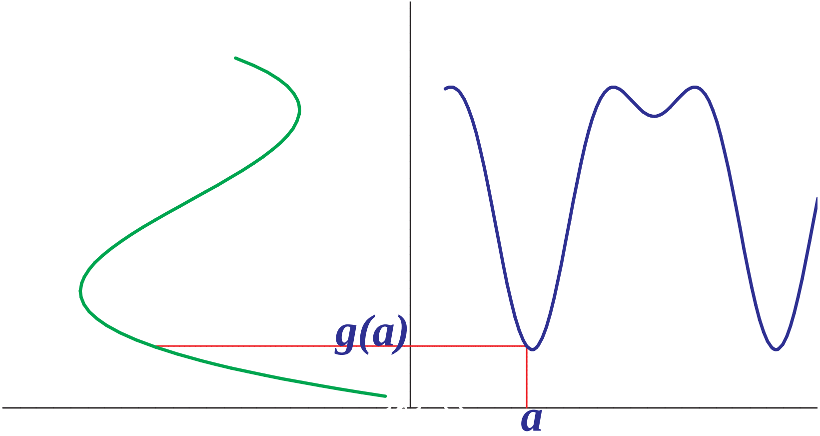


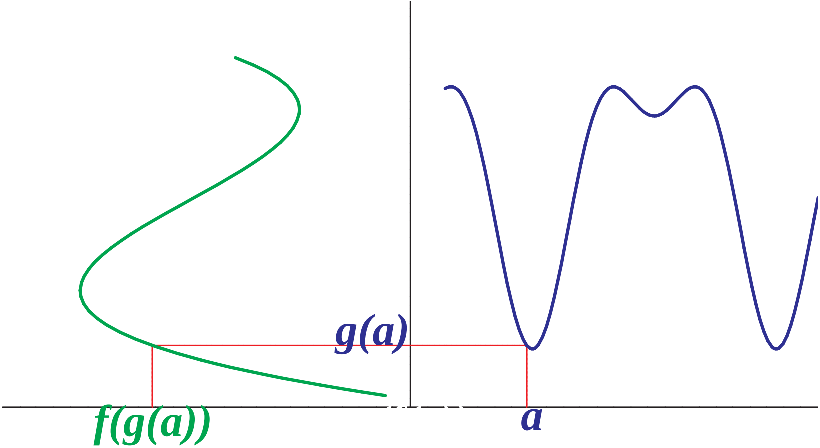



a

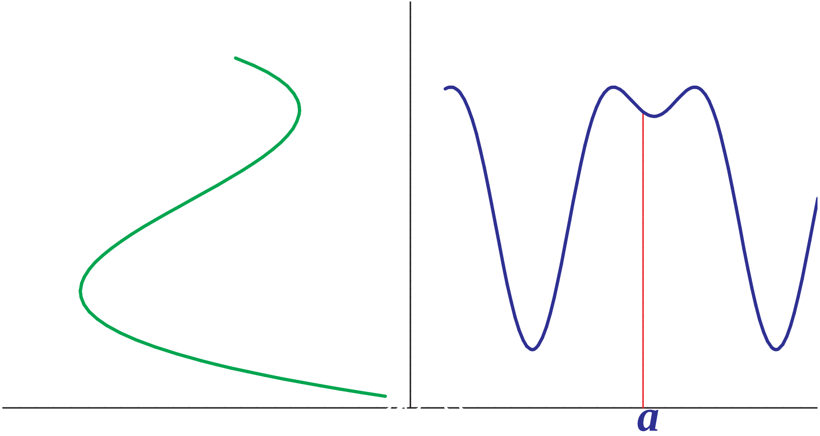


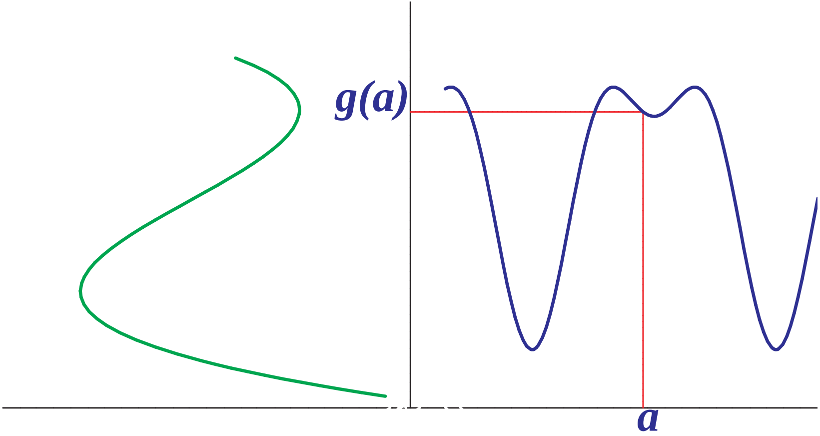
g(a)
a

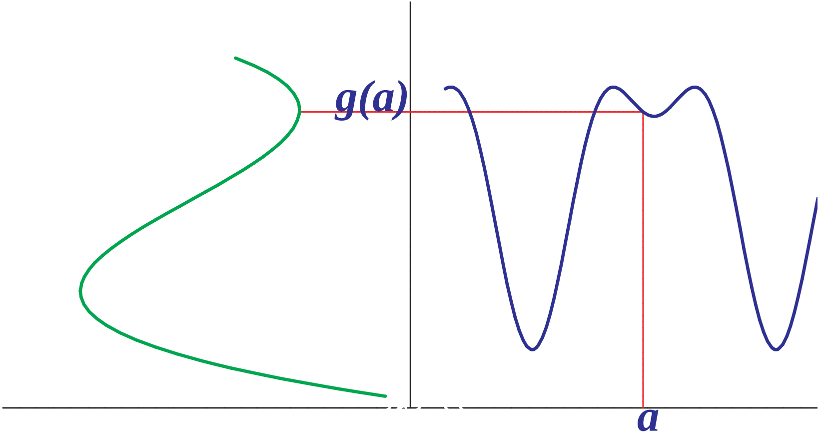

g(a)
a

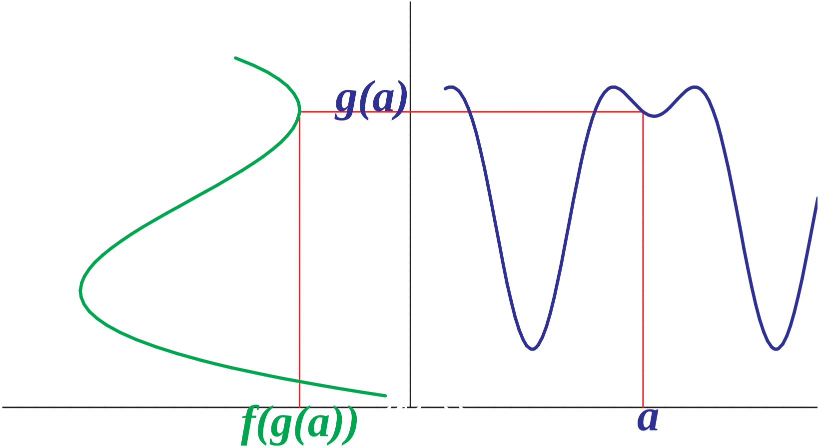


g(a)
f(g(a))
a

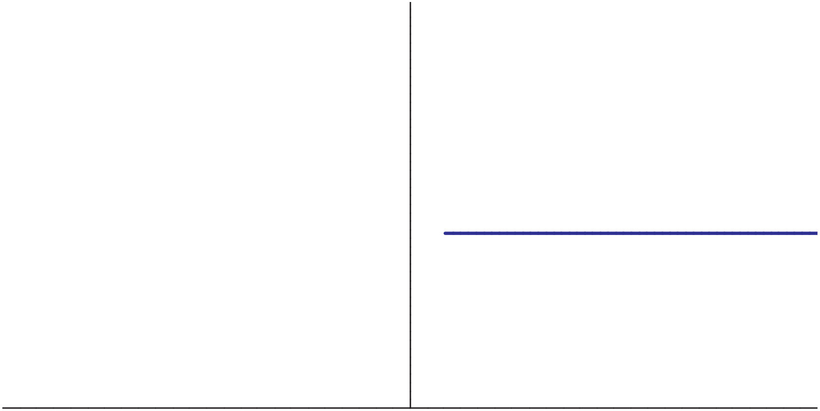

a

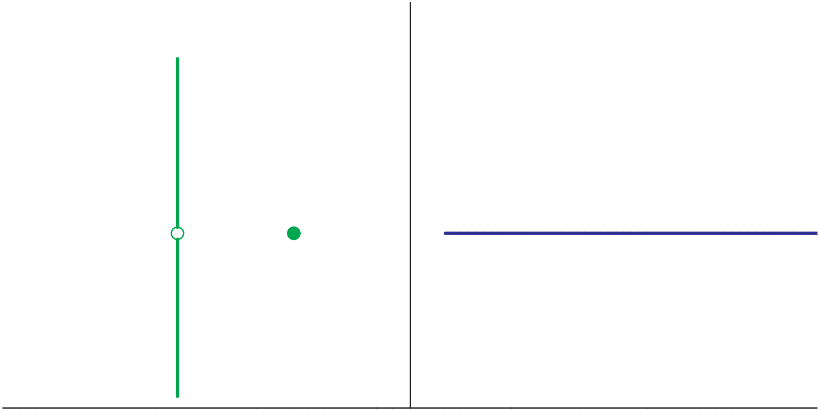

g(a)
a

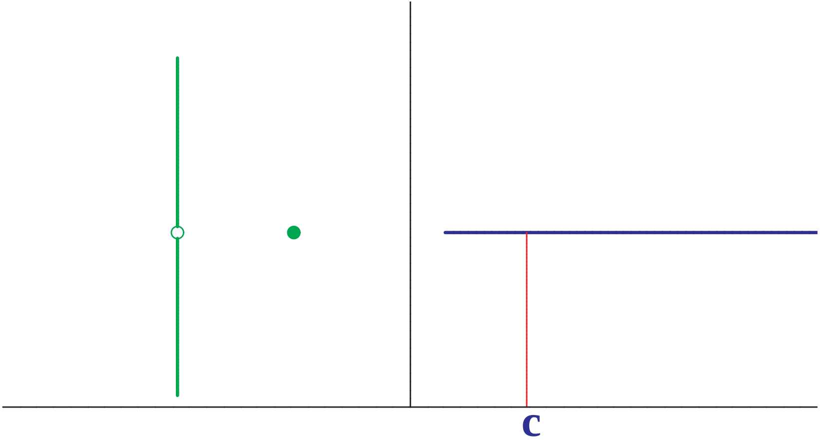

g(a)
a

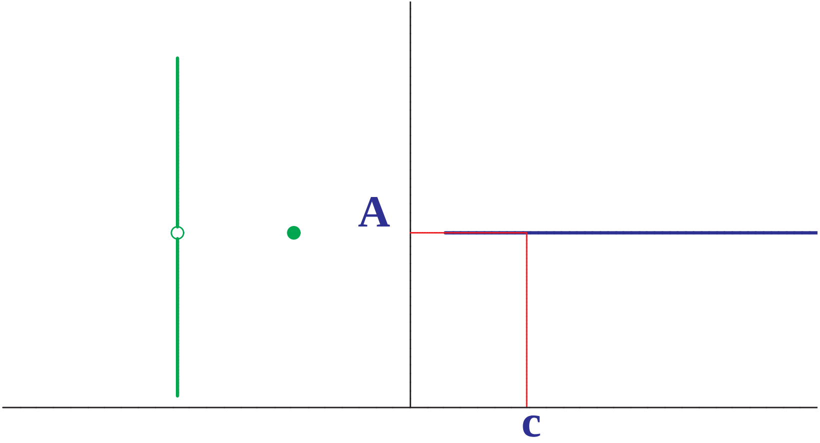


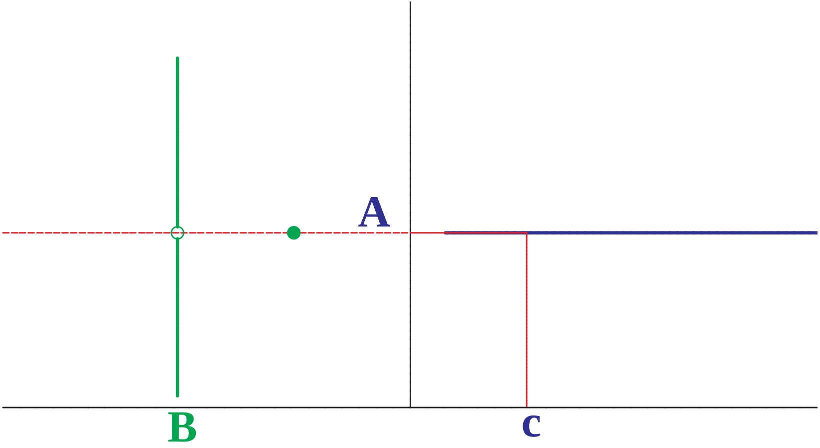
g(a)
f(g(a))
a

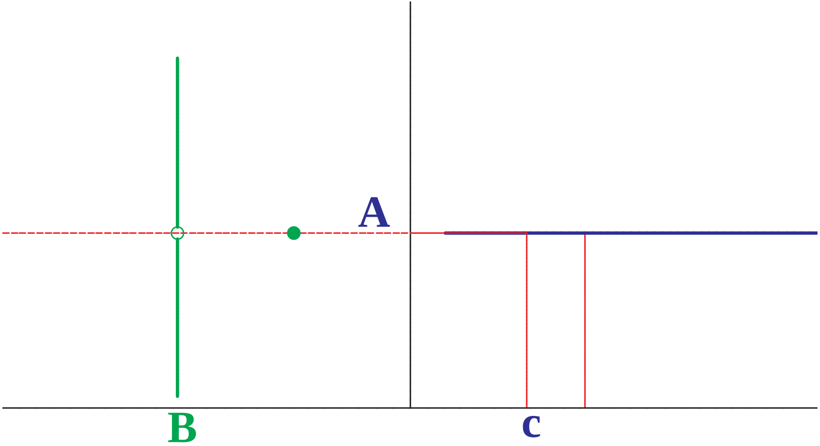


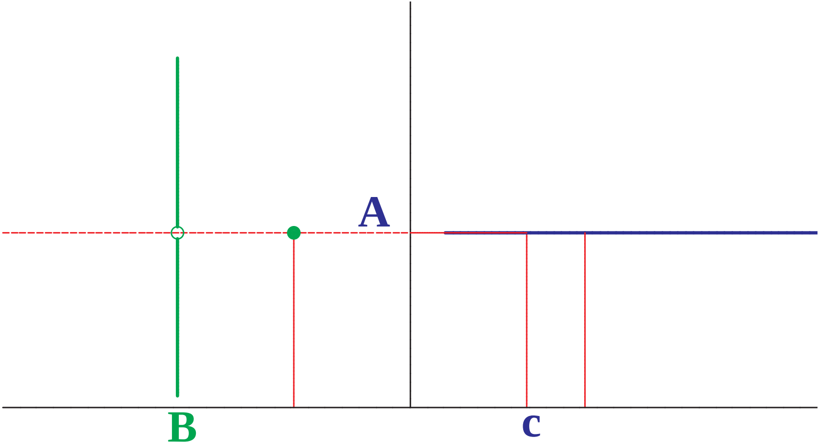


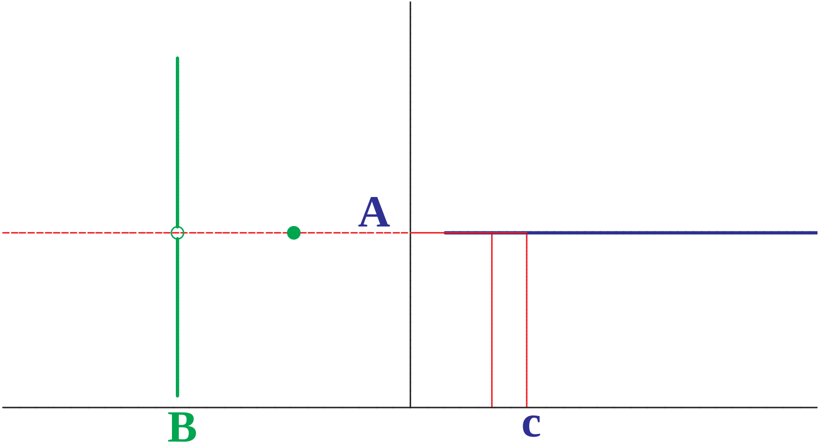

c

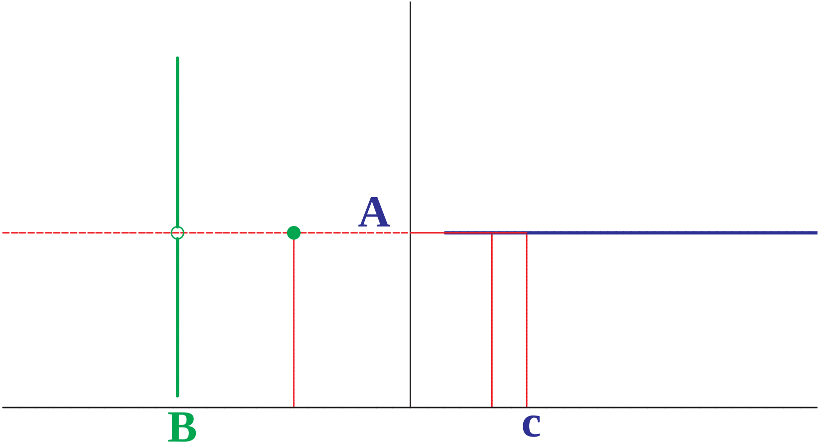

A
C

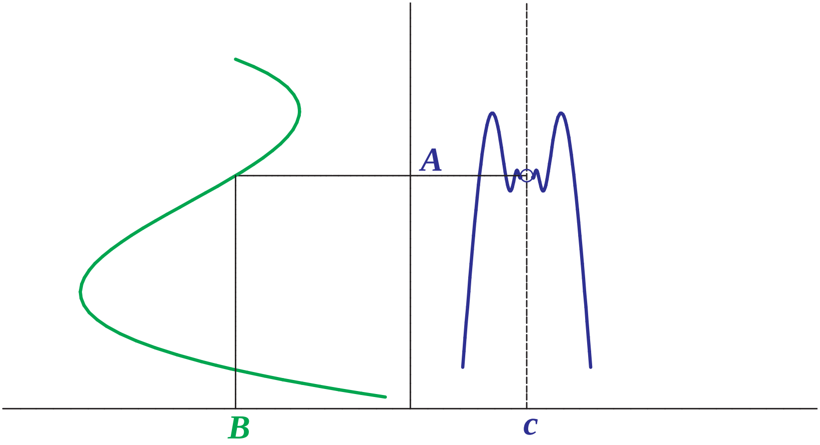

A
B
c

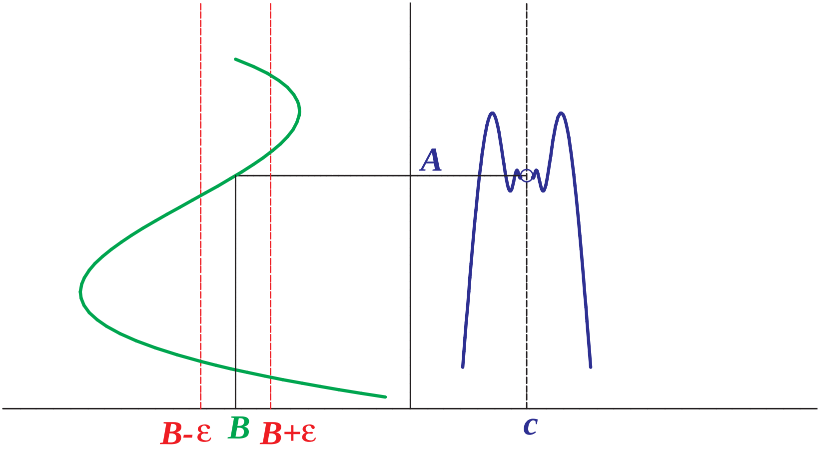

A
B
c

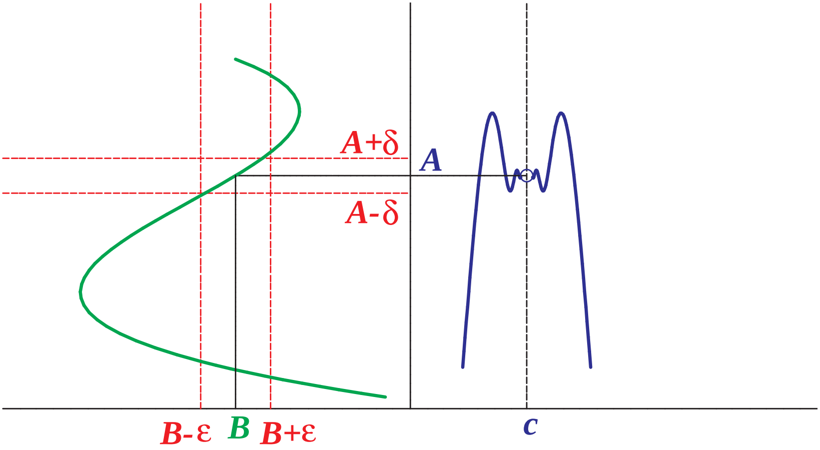

A
B
c

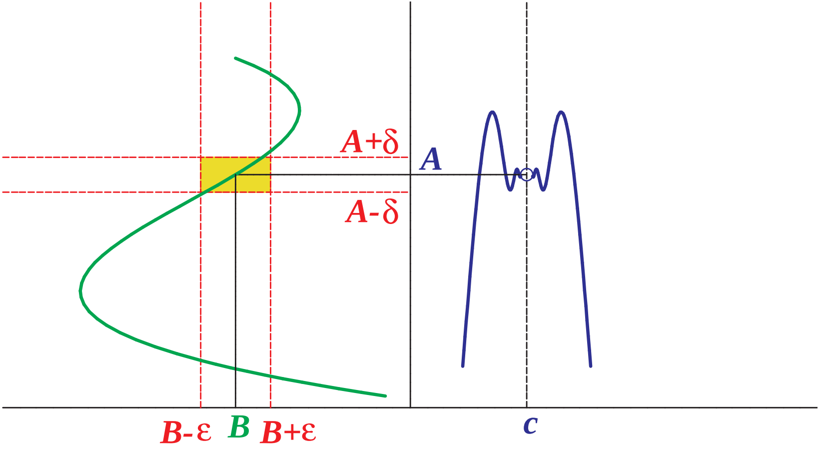

A
B
c


A
B
C

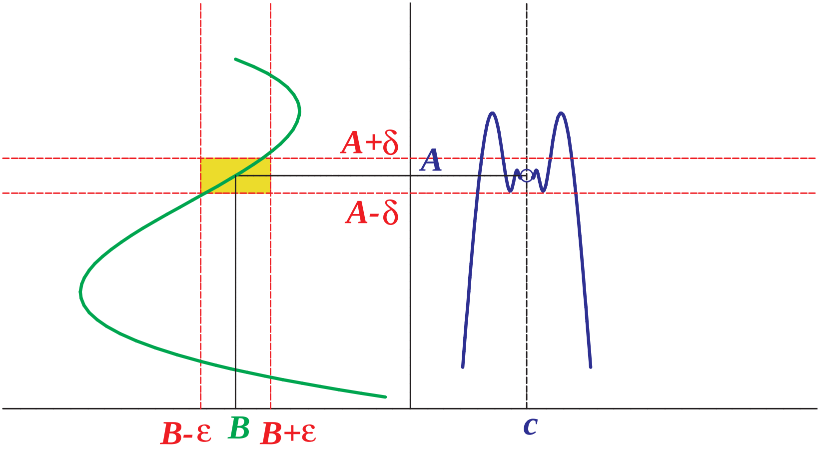

A
B
c

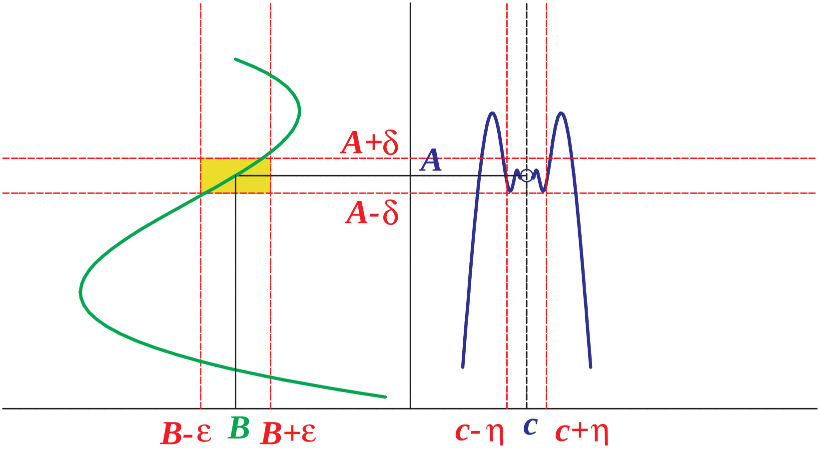

A
B-ε
B
B+ε
c


A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c

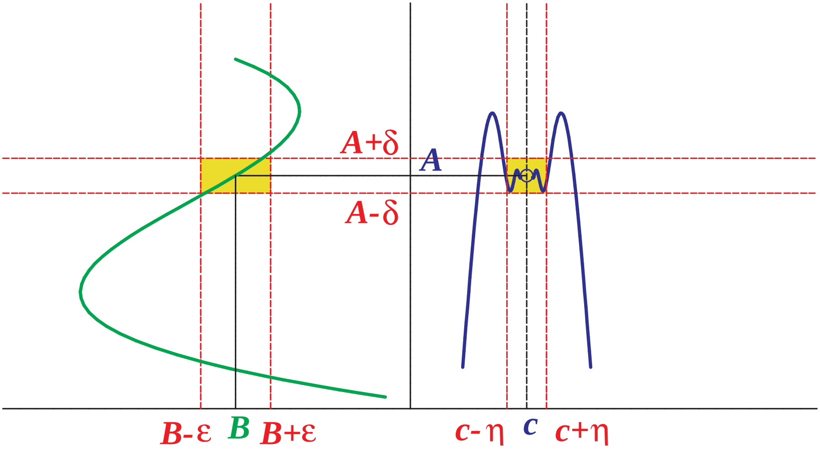


A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c

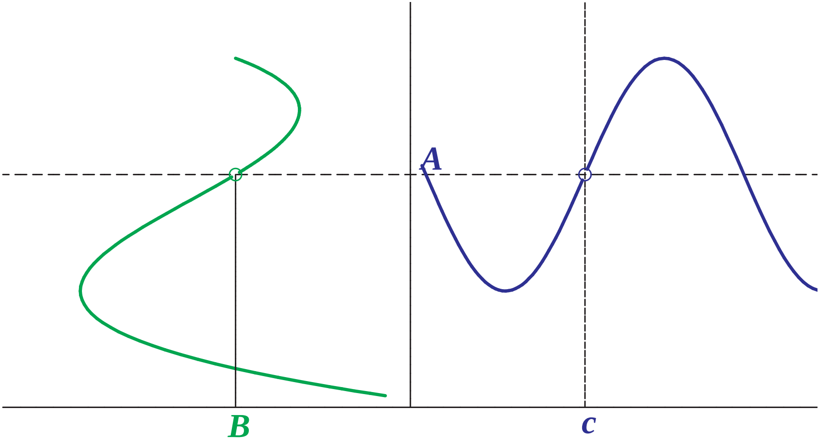

A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c

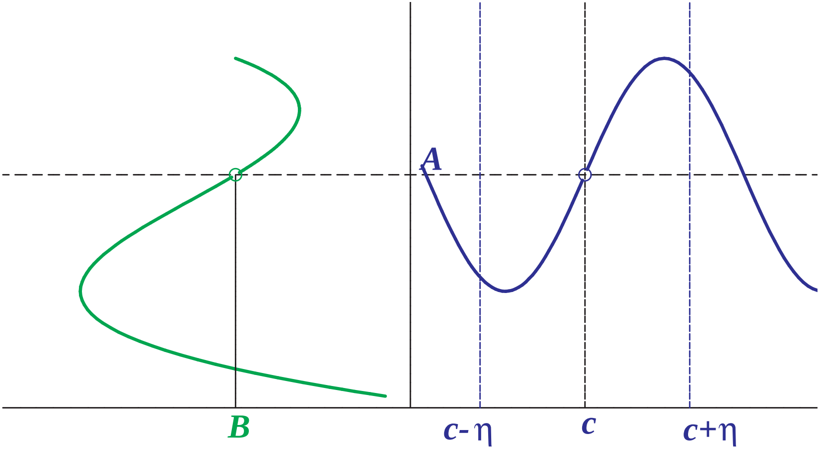


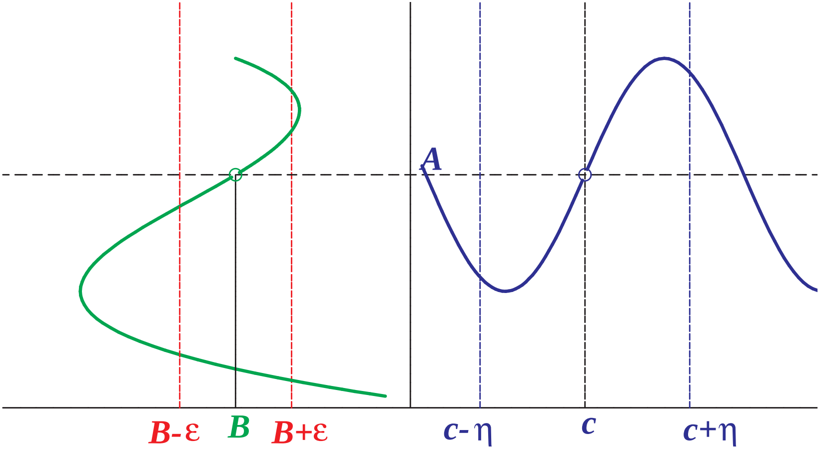
A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c
c+η



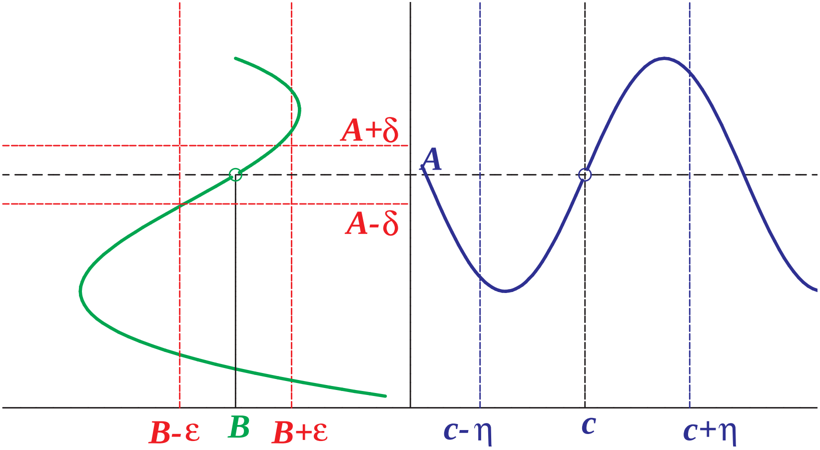
A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c
c+η


A
B
c

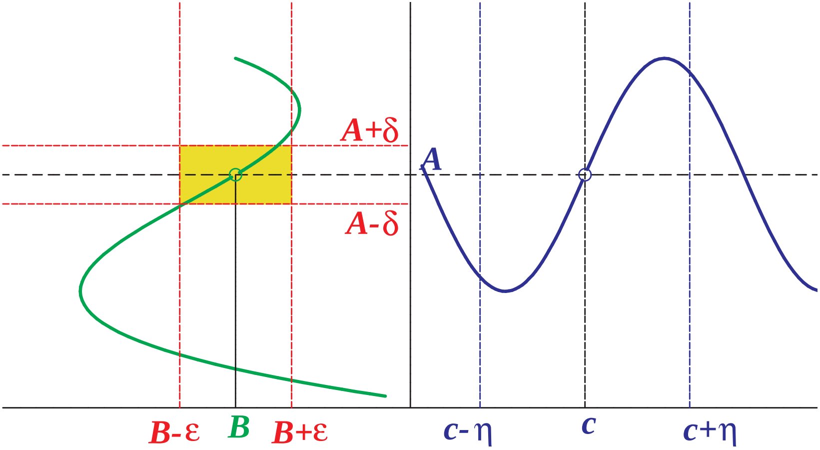

A
B
c- η
c
c+η



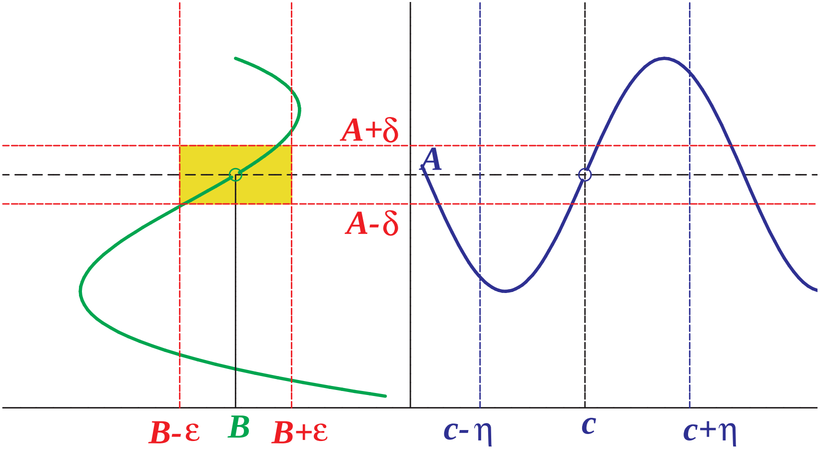
A
B-ε
B
B+ε
c- η
c
c+η



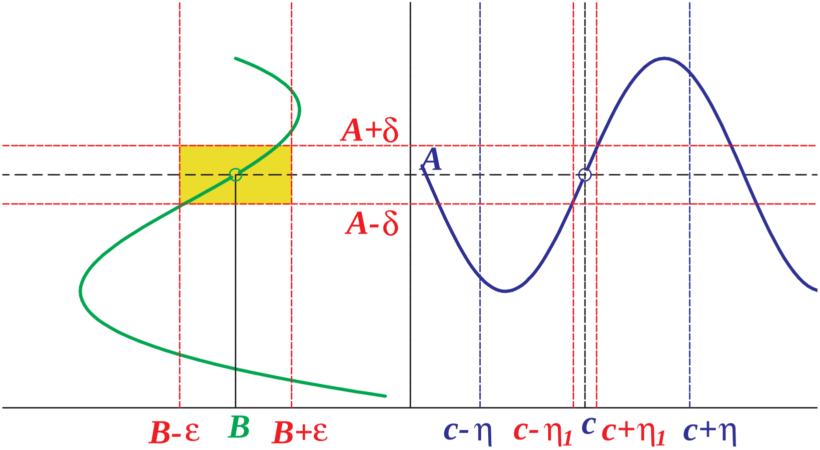
A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c
c+η



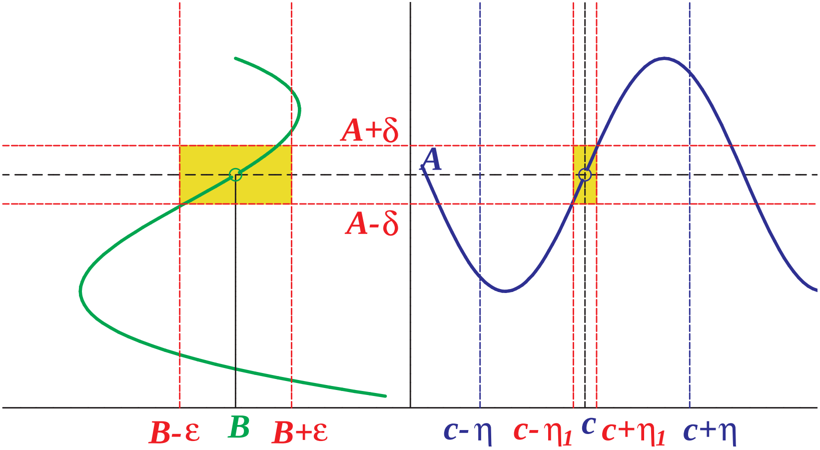
A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c
c+η

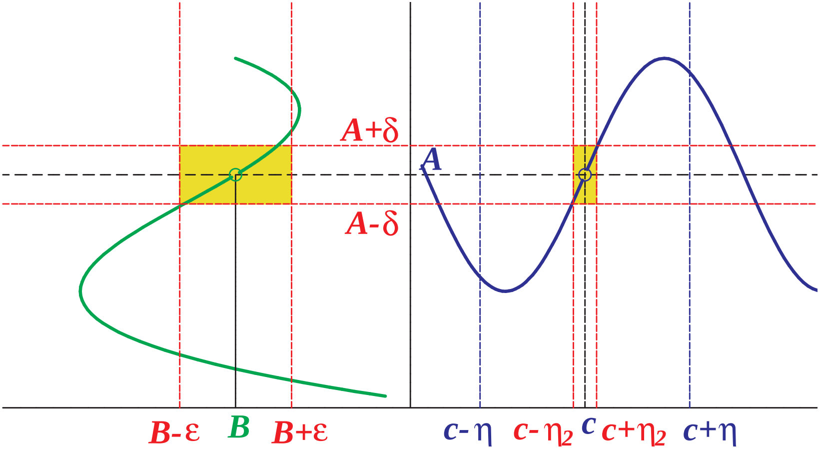


A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c
c+η



A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c- η1
c
c+η1
c+η


A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c- η1
c
c+η1
c+η



A+δ
A
A-δ
B-ε
B
B+ε
c- η
c- η2
c
c+η2
c+η

Věta 25 (Heine)

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ *a pro funkci* f *platí* $\lim_{x \to c} f(x) = A$. *Jestliže posloupnost* $\{x_n\}$ *splňuje* $x_n \in D_f$, $x_n \neq c$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\lim_{n \to \infty} x_n = c$, *pak* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Věta 26 (limita monotónní funkce)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. *Budiž funkce* f *monotónní na intervalu* (a, b). *Potom existují* $\lim_{x\to a+} f(x)$ *a* $\lim_{x\to b-} f(x)$, *přičemž platí:*

- *Je-li* f *na* (a, b) *neklesající, pak* $\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f\big((a, b)\big)$ *a* $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup f\big((a, b)\big)$.
- *Je-li* f *na* (a, b) *nerostoucí, pak* $\lim_{x\to a+} f(x) = \sup f\big((a, b)\big)$ *a* $\lim_{x\to b-} f(x) = \inf f\big((a, b)\big)$.

IV.3. Funkce spojité na intervalu

IV.3. Funkce spojité na intervalu

Definice

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu J, jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J.

Věta 27 (spojitost složené funkce na intervalu)

Nechť I a J jsou intervaly, $g\colon I \to J$, $f\colon J \to \mathbb{R}$, g je spojitá na I a f je spojitá na J. Potom funkce $f \circ g$ je spojitá na I.

Věta 28 (Heineova věta pro spojitost na intervalu)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a $c \in J$. Potom pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů intervalu J splňující $\lim x_n = c$ platí, že $\lim f(x_n) = f(c)$.

Věta 29 (Bolzano, o nabývání mezihodnot)

Budiž funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f(\xi) = C$.

Věta 30 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)

Nechť J je interval a funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá na J. Potom je $f(J)$ interval.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x maxima (resp. minima) na M, jestliže

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad \text{(resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)\text{)}.$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x maxima (resp. minima) na M, jestliže

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme bodem maxima (resp. minima) funkce f na množině M.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x maxima (resp. minima) na M, jestliže

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme bodem maxima (resp. minima) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje).

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x maxima (resp. minima) na M, jestliže

$$\forall y \in M \colon f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M \colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme bodem maxima (resp. minima) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje). Body maxima či minima souhrnně označujeme jako body extrému.

Definice

Nechť f je reálná funkce a $x \in D_f$. Řekneme, že funkce f má v bodě x

- lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta)\colon f(y) \leq f(x)$;

Definice

Nechť f je reálná funkce a $x \in D_f$. Řekneme, že funkce f má v bodě x

- lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x,\delta)\colon f(y) \leq f(x)$;
- lokální minimum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x,\delta)\colon f(y) \geq f(x)$;

Definice

Nechť f je reálná funkce a $x \in D_f$. Řekneme, že funkce f má v bodě x

- lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta)\colon f(y) \leq f(x)$;
- lokální minimum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta)\colon f(y) \geq f(x)$;
- ostré lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta)\colon f(y) < f(x)$;

Definice

Nechť f je reálná funkce a $x \in D_f$. Řekneme, že funkce f má v bodě x

- lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x,\delta)\colon f(y) \leq f(x)$;
- lokální minimum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x,\delta)\colon f(y) \geq f(x)$;
- ostré lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x,\delta)\colon f(y) < f(x)$;
- ostré lokální minimum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x,\delta)\colon f(y) > f(x)$.

Definice

Nechť f je reálná funkce a $x \in D_f$. Řekneme, že funkce f má v bodě x

- lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta)\colon f(y) \leq f(x)$;
- lokální minimum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta)\colon f(y) \geq f(x)$;
- ostré lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta)\colon f(y) < f(x)$;
- ostré lokální minimum, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta)\colon f(y) > f(x)$.

Bodem lokálního extrému rozumíme bod lokálního maxima či lokálního minima.

Věta 31 (o nabývání extrémů)

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Věta 31 (o nabývání extrémů)

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

Důsledek 32 (omezenost spojité funkce)

Budiž f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom je f na $\langle a, b\rangle$ omezená.

Věta 33 (spojitost inverzní funkce)

Budiž f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

IV.4. Zavedení elementárních funkcí

IV.4. Zavedení elementárních funkcí

Věta 34 (zavedení logaritmu)

Existuje jediná funkce (značíme ji log *a nazýváme ji* *přirozeným logaritmem), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D_{\log} = (0, +\infty)$,

(L2) *funkce* log *je na* $(0, +\infty)$ *rostoucí,*

(L3) $\forall x, y \in (0, +\infty)\colon \ \log xy = \log x + \log y$,

(L4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Vlastnosti funkce logaritmus

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon\ \log(1/x) = -\log x$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon\ \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon\ \log x^n = n \log x$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon \ \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon \ \log x^n = n \log x$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \log x = -\infty$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon \log x^n = n \log x$,
- $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$, $\lim_{x \to 0+} \log x = -\infty$,
- funkce log je spojitá na $(0, +\infty)$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon \ \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon \ \log x^n = n \log x$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \log x = -\infty$,
- funkce log je spojitá na $(0, +\infty)$,
- $H_{\log} = \mathbb{R}$,

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon \log x^n = n \log x$,
- $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$, $\lim_{x \to 0+} \log x = -\infty$,
- funkce log je spojitá na $(0, +\infty)$,
- $H_{\log} = \mathbb{R}$,
- existuje právě jedno číslo $e \in (0, +\infty)$ takové, že $\log e = 1$.

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\text{exp}} = \mathbb{R}$, $H_{\text{exp}} = (0, +\infty)$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(nx) = (\exp x)^n$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$,
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$,

Definice

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci inverzní k funkci log. Budeme ji značit symbolem exp.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$,
- $\forall r \in \mathbb{Q}\colon\ \exp r = e^r$.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Obecnou mocninu a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Obecnou mocninu a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Definice

Nechť $a, b \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Obecný logaritmus $\log_a b$ definujeme jako

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}.$$

Věta 35 (zavedení funkce sinus a čísla π)

Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce sinus (budeme ji značit $\sin$*), které mají následující vlastnosti:*

(S1) $D_{\sin} = \mathbb{R}$,

(S2) $\sin$ *je rostoucí na* $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,

(S3) $\sin 0 = 0$,

(S4) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \sin(x + y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$,

(S5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Věta 35 (zavedení funkce sinus a čísla π)

Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce sinus (budeme ji značit sin*), které mají následující vlastnosti:*

(S1) $D_{\sin} = \mathbb{R}$,

(S2) $\sin$ *je rostoucí na* $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,

(S3) $\sin 0 = 0$,

(S4) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$,

(S5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice

Funkcí kosinus rozumíme funkci $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$,
  $\cos\pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$,
  $\cos\pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin(x + \pi) = -\sin x$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$,
  $\cos\pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$,
  $\cos\pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$,
  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$,
  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$,
  $\cos\pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$,
  $\cos\pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$,
  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$.
- $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle$

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$,
  $\cos\pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+\pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$.
- $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle$
- Funkce sin je rovna nule právě v bodech množiny $\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, funkce cos je rovna nule právě v bodech množiny $\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Definice

Funkci tangens značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\mathrm{tg}} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definice

Funkci tangens značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Symbolem cotg budeme značit funkci kotangens, která je definována na množině $D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.
- Funkce tg i cotg jsou π-periodické.

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.
- Funkce tg i cotg jsou π-periodické.
- Funkce tg je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$, funkce cotg je klesající na $(0, \pi)$.

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.
- Funkce tg i cotg jsou π-periodické.
- Funkce tg je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$, funkce cotg je klesající na $(0, \pi)$.
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty,$
  $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to \pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.
- Funkce tg i cotg jsou π-periodické.
- Funkce tg je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$, funkce cotg je klesající na $(0, \pi)$.
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$,
  $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$
- $H_{\mathrm{tg}} = H_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{R}$

Definice

- Funkcí arkussinus (značíme arcsin) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$.

Definice

- Funkcí arkussinus (značíme arcsin) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$.
- Funkcí arkuskosinus (značíme arccos) rozumíme funkci inverzní k funkci $\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}$.

Definice

- Funkcí arkussinus (značíme arcsin) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$.
- Funkcí arkuskosinus (značíme arccos) rozumíme funkci inverzní k funkci $\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}$.
- Funkcí arkustangens (značíme arctg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$.

Definice

- Funkcí arkussinus (značíme arcsin) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$.
- Funkcí arkuskosinus (značíme arccos) rozumíme funkci inverzní k funkci $\cos|_{\langle 0,\pi\rangle}$.
- Funkcí arkustangens (značíme arctg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$.
- Funkcí arkuskotangens (značíme arccotg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\mathrm{cotg}|_{(0,\pi)}$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- $\forall x \in \langle -1, 1 \rangle : \ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,
  $\forall x \in \mathbb{R} : \ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\text{arcsin}} = D_{\text{arccos}} = \langle -1, 1 \rangle$, $D_{\text{arctg}} = D_{\text{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- $\forall x \in \langle -1, 1 \rangle :\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,
  $\forall x \in \mathbb{R} :\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$

IV.5. Derivace funkce

IV.5. Derivace funkce

Definice

Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak

- derivací funkce f v bodě a budeme rozumět číslo
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$
- derivací funkce f v bodě a zprava budeme rozumět číslo
$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$
- derivací funkce f v bodě a zleva budeme rozumět číslo
$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

pokud příslušné limity existují.

Definice

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Tečnou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ nazveme přímku

$$T_a = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\right\}.$$

Věta 36

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 37 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí, že

(i) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

Věta 37 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí, že

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$,

Věta 37 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí, že

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$,

(iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

Věta 37 (aritmetika derivací)

Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí, že

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$,

(iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iv) *je-li* $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 38 (derivace složené funkce)

Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 39 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f *je na intervalu* (a, b) *spojitá a ryze monotónní a má v bodě* $x_0 \in (a, b)$ *derivaci* $f'(x_0)$ *vlastní a různou od nuly. Potom má funkce* f^{-1} *derivaci v bodě* $y_0 = f(x_0)$ *a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Derivace elementárních funkcí

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{tg}}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{cotg}}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\text{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\text{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$,

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\mathrm{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\mathrm{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Věta 40 (nutná podmínka lokálního extrému)

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém. Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom je $f'(x_0) = 0$.

IV.6. Hlubší věty o derivaci funkce

V31, V40

IV.6. Hlubší věty o derivaci funkce

Věta 41 (Rolle)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a funkce f má následující vlastnosti:

(i) *je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,*

(ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*

(iii) *platí, že $f(a) = f(b)$.*

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.

Věta 42 (Lagrange, o střední hodnotě)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *funkce* f *je spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu* (a, b). *Potom existuje* $\xi \in (a, b)$ *takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 43 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{Int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.*

Věta 43 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ *je nedegenerovaný interval. Nechť* f *je spojitá na* J *a v každém vnitřním bodě* J *(množinu vnitřních bodů intervalu* J *označme jako* $\operatorname{Int} J$*) má derivaci.*

(i) *Je-li* $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{Int} J$*, pak* f *je rostoucí na* J*.*

(ii) *Je-li* $f'(x) < 0$ *pro všechna* $x \in \operatorname{Int} J$*, pak* f *je klesající na* J*.*

Věta 43 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{Int} J$) má derivaci.

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.*

(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je klesající na J.*

(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je neklesající na J.*

Věta 43 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako Int J*) má derivaci.*

(i) *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.*
(ii) *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je klesající na J.*
(iii) *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je neklesající na J.*
(iv) *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je nerostoucí na J.*

Věta 44 (výpočet jednostranné derivace)

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Věta 45 (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z následujících podmínek:

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,

Věta 45 (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z následujících podmínek:

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,

(ii) $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = +\infty$.

Věta 45 (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z následujících podmínek:

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$,

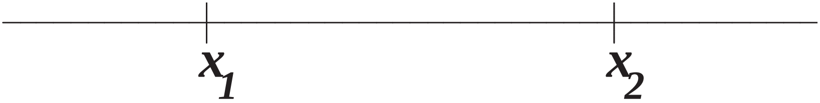
(ii) $\lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty$.

Potom existuje i $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí, že

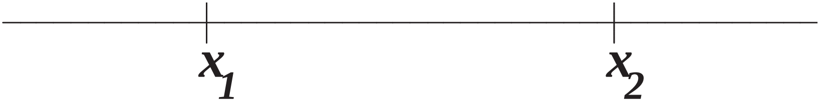
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

IV.7. Konvexní a konkávní funkce

Konvexní kombinace



Konvexní kombinace

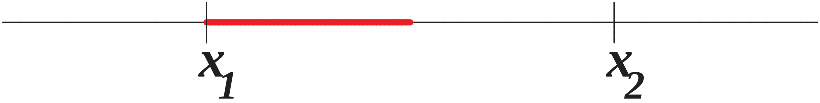


$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = x_1 + 0 \cdot (x_2 - x_1) = x_1$$

Konvexní kombinace

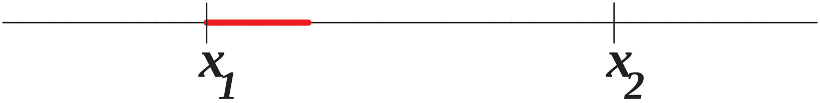
$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = x_1 + 1 \cdot (x_2 - x_1) = x_2$$

Konvexní kombinace



$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

Konvexní kombinace



$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = x_1 + \frac{1}{4}(x_2 - x_1)$$

Konvexní kombinace

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = x_1 + \frac{3}{4}(x_2 - x_1)$$

Konvexní kombinace

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_1 + (1-\lambda)(x_2 - x_1), \quad \lambda \in \langle 0, 1\rangle$$

Definice

Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- konvexní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

Definice

Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- konvexní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$
- konkávní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

Definice

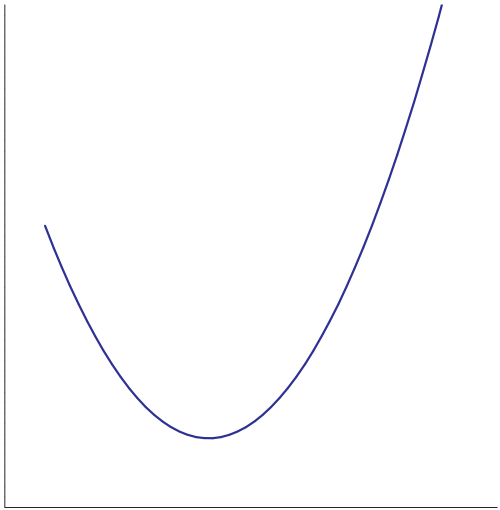
Řekneme, že funkce f je na intervalu I

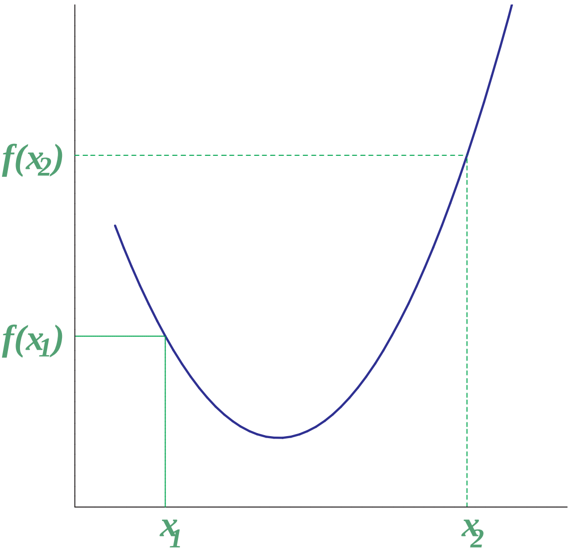
- konvexní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$
- konkávní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$
- ryze konvexní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

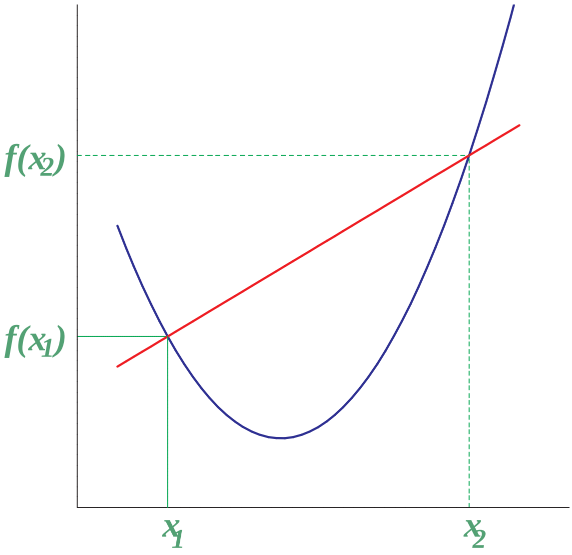
Definice

Řekneme, že funkce f je na intervalu I

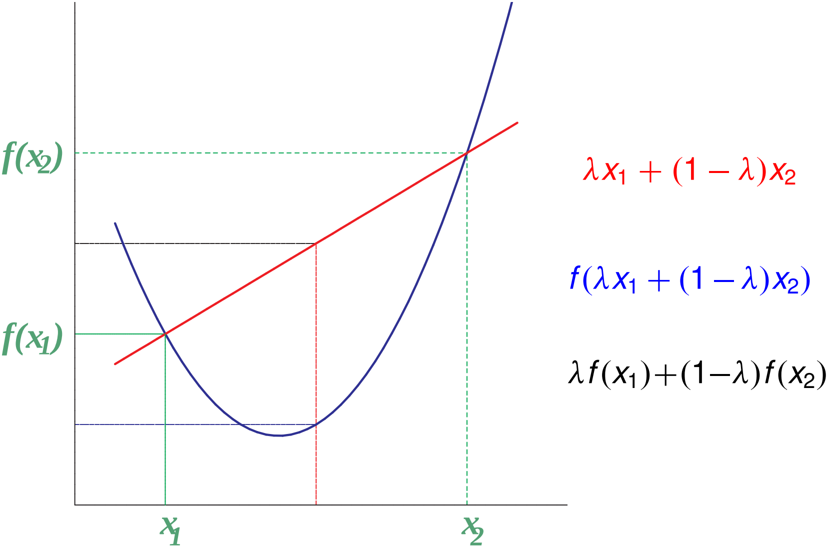
- konvexní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$
- konkávní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$
- ryze konvexní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$
- ryze konkávní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$



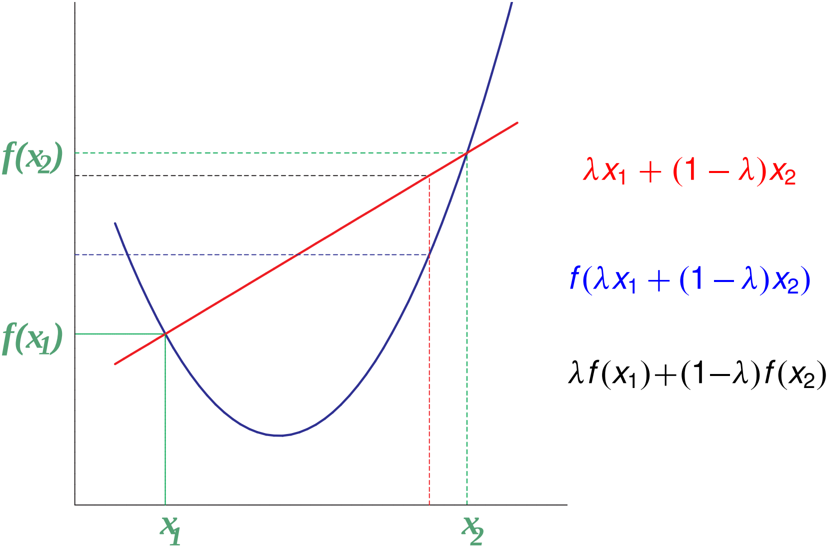

f(x2)
f(x1)
x1
x2



f(x2)
f(x1)
x1
x2



$f(x_2)$
$f(x_1)$
x_1
x_2
$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$
$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$


f(x2)
f(x1)
x1
x2
λx1 + (1 − λ)x2
f(λx1 + (1 − λ)x2)
λf(x1)+(1−λ)f(x2)

Lemma 46

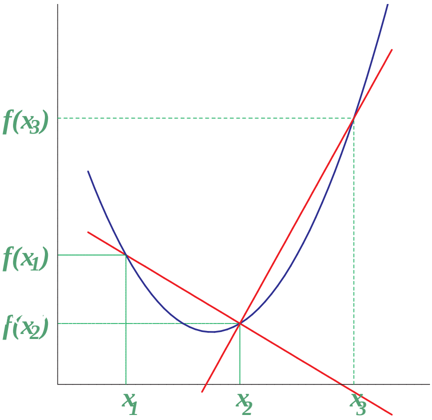
Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Lemma 46

Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$



Definice

Nechť funkce f má na jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Druhou derivací funkce f v bodě a budeme rozumět číslo

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Definice

Nechť funkce f má na jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Druhou derivací funkce f v bodě a budeme rozumět číslo

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ a funkce f má v jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní n-tou derivaci (značíme ji symbolem $f^{(n)}$). Pak $(n+1)$-ní derivací funkce f v bodě a budeme rozumět číslo

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Věta 47 (druhá derivace a konvexita)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ *a* f *má na intervalu* (a, b) *vlastní druhou derivaci.*

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a, b).

Věta 47 (druhá derivace a konvexita)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ *a* f *má na intervalu* (a, b) *vlastní druhou derivaci.*

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a, b).

(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konkávní na* (a, b).

Věta 47 (druhá derivace a konvexita)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$*,* $a < b$ *a* f *má na intervalu* (a, b) *vlastní druhou derivaci.*

(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$*, pak* f *je ryze konvexní na* (a, b)*.*

(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$*, pak* f *je ryze konkávní na* (a, b)*.*

(iii) *Jestliže* $f''(x) \geq 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$*, pak* f *je konvexní na* (a, b)*.*

Věta 47 (druhá derivace a konvexita)

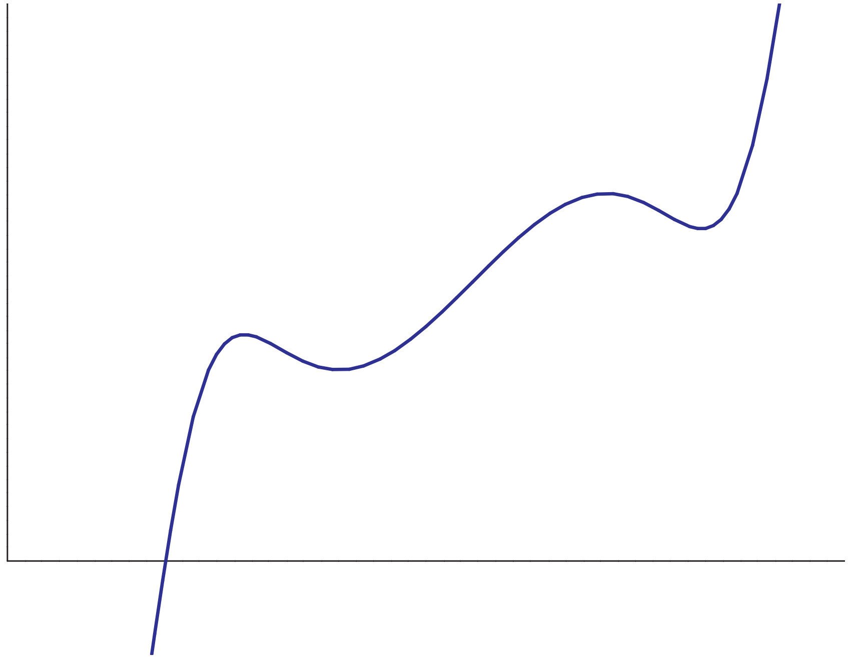
Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ *a* f *má na intervalu* (a, b) *vlastní druhou derivaci.*

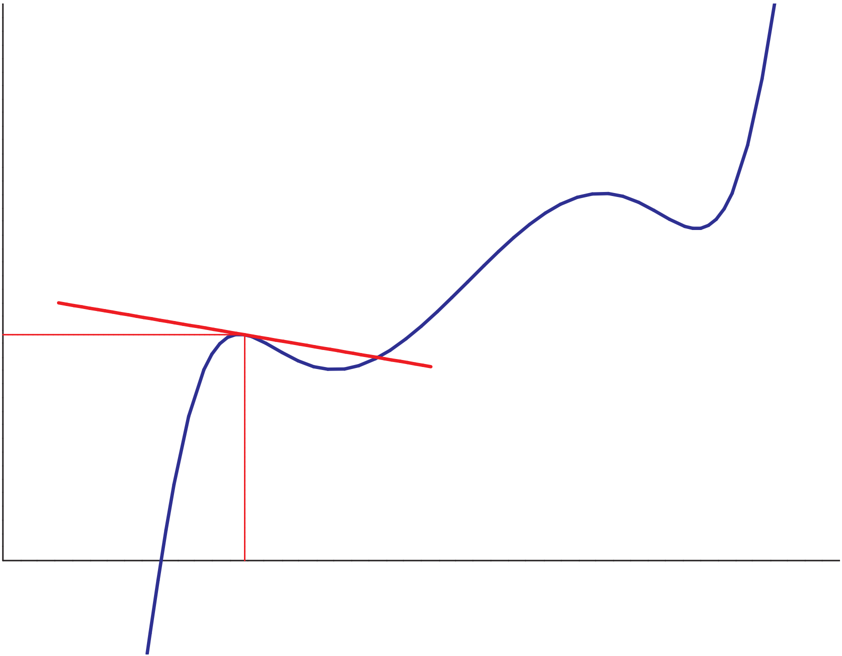
(i) *Jestliže* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konvexní na* (a, b).

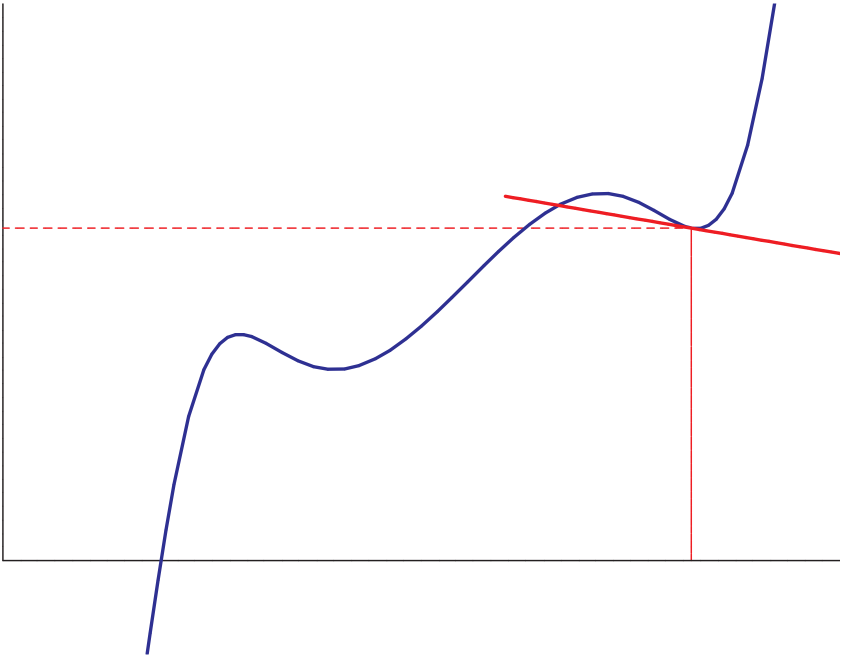
(ii) *Jestliže* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je ryze konkávní na* (a, b).

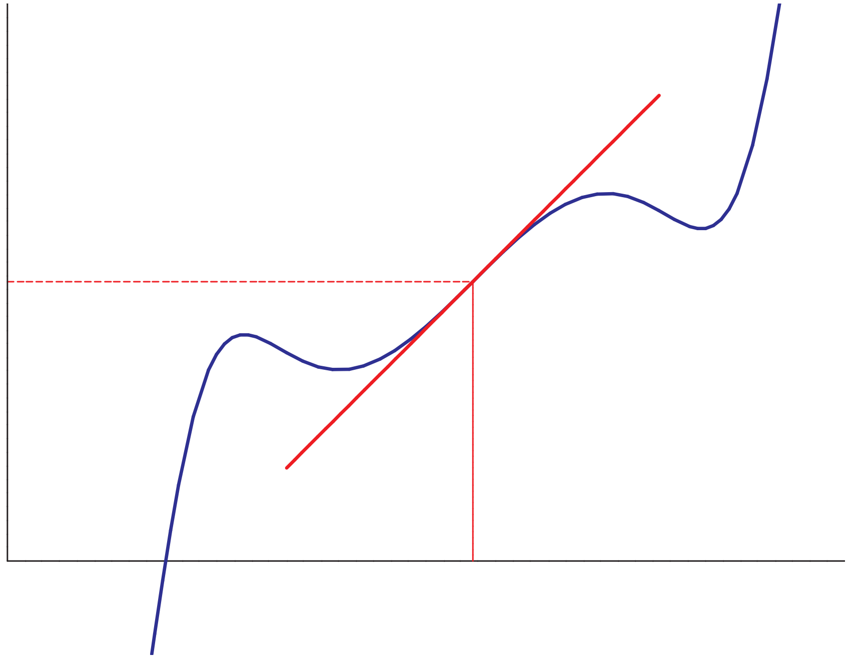
(iii) *Jestliže* $f''(x) \geq 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je konvexní na* (a, b).

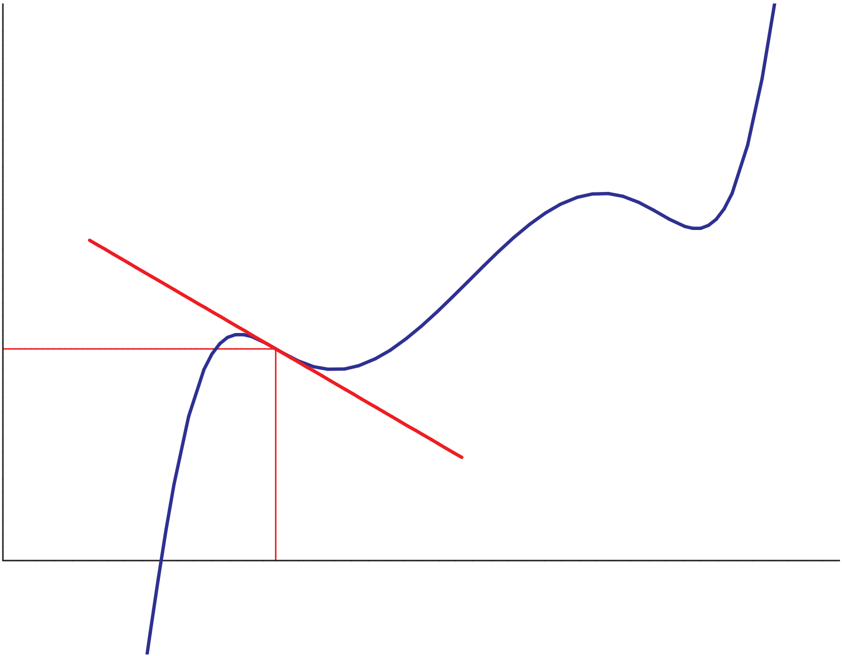
(iv) *Jestliže* $f''(x) \leq 0$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* f *je konkávní na* (a, b).

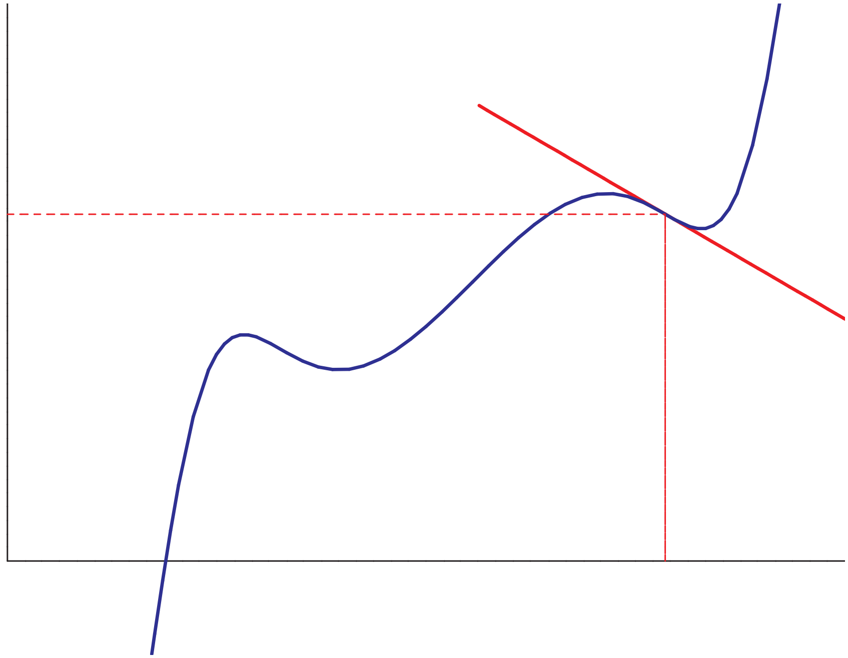












Definice

Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$ a T_a označuje tečnu ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$. Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a.

Definice

Nechť $f'(a) \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je inflexním bodem funkce f, jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a)\colon [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta)\colon [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

Definice

Nechť $f'(a) \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je inflexním bodem funkce f, jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a-\Delta, a)\colon [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a+\Delta)\colon [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

nebo

(i) $\forall x \in (a-\Delta, a)\colon [x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a+\Delta)\colon [x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Věta 48 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ *je inflexním bodem bod funkce* f. *Potom* $f''(a)$ *neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 48 (nutná podmínka pro inflexi)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ je inflexním bodem bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Věta 49 (postačující podmínka pro inflexi)

Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Nechť platí:

- $\forall x \in (a, z): f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z, b): f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f.

IV.8. Průběh funkce

Definice

Přímku, která je grafem afinní funkce $x \mapsto kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$, nazveme asymptotou funkce f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-q) = 0, \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx-q) = 0).$$

IV.8. Průběh funkce

Definice

Přímku, která je grafem afinní funkce $x \mapsto kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$, nazveme asymptotou funkce f v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-q) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx-q) = 0\text{)}.$$

Tvrzení 50

Funkce f má asymptotu v $+\infty$ popsanou afinní funkcí $x \mapsto kx + q$, právě tehdy, když

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \quad a \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Určíme asymptoty funkce.

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Určíme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.