

# I. Úvod

## I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A$  ...  $x$  je prvkem množiny  $A$
- $x \notin A$  ...  $x$  není prvkem množiny  $A$
- $A \subset B$  ... množina  $A$  je podmnožinou množiny  $B$  (inkluze)
- $A = B$  ... množiny  $A$  a  $B$  mají stejné prvky; platí, že  $A \subset B$  a zároveň  $B \subset A$
- $\emptyset$  ... prázdná množina
- $A \cup B$  ... sjednocení množin  $A$  a  $B$
- $A \cap B$  ... průnik množin  $A$  a  $B$
- disjunktí množiny ...  $A$  a  $B$  jsou disjunktí, pokud  $A \cap B = \emptyset$
- $A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$  ... rozdíl množin  $A$  a  $B$
- $A_1 \times \dots \times A_m = \{[a_1, \dots, a_m]; a_1 \in A_1, \dots, a_m \in A_m\}$  ... kartézský součin

Nechť  $I$  je nějaká neprázdná množina indexů a mějme systém množin  $A_\alpha$ , kde indexy  $\alpha$  probíhají  $I$ .

- $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  ... množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin  $A_\alpha$
- $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  ... množina prvků, které náležejí do každé z množin  $A_\alpha$

## I.2. Výroková logika, metody důkazů

Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé či nepravdivé.

- $\neg$ , též non ... *negace*
- $\&$  (někdy též  $\wedge$ ) ... *konjunkce*, logické „a“
- $\vee$  ... *disjunkce* (alternativa), logické „nebo“
- $\Rightarrow$  ... *implikace*
- $\Leftrightarrow$  ... *ekvivalence*

*Tautologie* je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.

Příklady tautologií:

- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \& \neg A)$
- $((A \& B) \& C) \Leftrightarrow (A \& (B \& C))$
- $\neg(A \& B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \& \neg B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \& \neg B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A))$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Výrokovou formou rozumíme výraz, z něhož vznikne výrok dosazením prvku (prvků) dané množiny za proměnnou (proměnné).

Obecný zápis:

$$V(x), x \in M$$

$$V(x_1, \dots, x_n), x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n$$

Je-li  $A(x), x \in M$  výroková forma, pak výrok „Pro všechna  $x$  z  $M$  platí  $A(x)$ .“ zapisujeme takto:

$$\forall x \in M : A(x).$$

Výrok „Existuje  $x$  z  $M$ , pro které platí  $A(x)$ .“ zapisujeme takto:

$$\exists x \in M : A(x).$$

Výrok „Existuje jediné  $x$  z  $M$ , pro které platí  $A(x)$ .“ zapisujeme takto:

$$\exists! x \in M : A(x).$$

Jsou-li  $A(x), x \in M$  a  $B(x), x \in M$  výrokové formy, pak

$$\forall x \in M, B(x) : A(x) \text{ znamená } \forall x \in M : (B(x) \Rightarrow A(x)),$$

$$\exists x \in M, B(x) : A(x) \text{ znamená } \exists x \in M : (A(x) \& B(x)).$$

Negace výroků s kvantifikátory:

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) \text{ je totéž co } \exists x \in M : \neg A(x),$$

$$\neg(\exists x \in M : A(x)) \text{ je totéž co } \forall x \in M : \neg A(x).$$

**Věta 1** (de Morganova pravidla). *Mějme množiny  $S, A_\alpha, \alpha \in I$ , kde  $I \neq \emptyset$ . Pak platí*

$$S \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha) \quad a \quad S \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha).$$

*Příklad* (iracionalita  $\sqrt{2}$ ). Jestliže reálné číslo  $x$  řeší rovnici  $x^2 = 2$ , pak  $x$  není racionální.

### I.3. Číselné množiny

- Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n; n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- Množina racionálních čísel

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\},$$

přičemž  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$ , právě když  $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$ .

#### Reálná čísla

Množinou reálných čísel  $\mathbb{R}$  budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace sčítání a násobení (značíme je  $+$  a  $\cdot$ ), a relace uspořádání (značíme ji  $\leq$ ), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.

III. Axiom infima.

#### Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$  (komutativita sčítání),

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x + (y + z) = (x + y) + z$  (asociativita sčítání),
- v  $\mathbb{R}$  existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu *nulový prvek*), že pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  platí  $x + 0 = x$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: x + y = 0$  ( $y$  je tzv. *opačné číslo* k číslu  $x$ , takové  $y$  je jen jedno, značíme ho  $-x$ ),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y = y \cdot x$  (komutativita násobení),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$  (asociativita násobení),
- v  $\mathbb{R}$  existuje nenulový prvek (tzv. *jednotkový prvek*, značíme ho 1), že pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  je  $1 \cdot x = x$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R}: x \cdot y = 1$  (takové  $y$  je jen jedno, značíme ho  $x^{-1}$  nebo  $\frac{1}{x}$ ),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$  (distributivita).

#### Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \& \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$  (tranzitivita),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \& \ y \leq x) \Rightarrow x = y$  (slabá antisymetrie),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \vee y \leq x$ ,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ ,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: (0 \leq x \ \& \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ .

**Definice.** Řekneme, že množina  $M \subset \mathbb{R}$  je *omezená zdola*, jestliže existuje číslo  $a \in \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $x \in M$  platí, že  $x \geq a$ . Takové číslo  $a$  se nazývá *dolní závorou* množiny  $M$ . Analogicky definujeme pojmy *množina omezená shora* a *horní závora*. Řekneme, že množina  $M \subset \mathbb{R}$  je *omezená*, je-li omezená shora i zdola.

#### Axiom infima:

Budiž  $M \subset \mathbb{R}$  neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo  $g \in \mathbb{R}$ , které má následující vlastnosti:

- $\forall x \in M: x \geq g$ ,
- $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > g \exists x \in M: x < g'$ .

Číslo  $g$  značíme symbolem  $\inf M$  a čteme *infimum*  $M$ .

*Poznámka.*

- Axiom infima říká, že každá neprázdná zdola omezená množina má infimum.
- Infimum množiny  $M$  je její největší dolní závora.
- Reálná čísla existují a jsou vlastnostmi I–III určena jednoznačně.

Platí:

- $\forall x \in \mathbb{R}: x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R}: -x = (-1) \cdot x$ ,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: x^{-n} = (x^{-1})^n$ ,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}: x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$ .

Nechť  $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ . Značíme:

- *Otevřený interval*  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ ,
- *uzavřený interval*  $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ ,
- *polouzavřený interval*  $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ ,
- *polouzavřený interval*  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ .

Bod  $a$  se nazývá *levý krajní bod intervalu*, bod  $b$  se nazývá *pravý krajní bod intervalu*. Bod, který je prvkem intervalu, ale není jeho krajním bodem, je tzv. *vnitřním bodem intervalu*.

*Neomezené intervaly:*

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\},$$

analogicky definujeme  $(-\infty, a)$ ,  $(a, +\infty)$  a  $(-\infty, +\infty)$ . Platí, že  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Přeneseme-li sčítání a násobení z  $\mathbb{R}$  na uvedené množiny, dostaneme operace, na něž jsme na těchto užších číselných množinách zvyklí.

Reálné číslo, které není číslem racionálním, nazveme číslem *iracionálním*. Množina  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  se nazývá *množinou čísel iracionálních*.

### Komplexní čísla

Množinou *komplexních čísel* rozumíme množinu všech výrazů tvaru  $a + bi$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Množinu komplexních čísel značíme  $\mathbb{C}$ . Na  $\mathbb{C}$  jsou definovány operace sčítání a násobení splňující vlastnosti skupiny I a navíc platí  $i \cdot i = -1$ .

**Věta** („základní věta algebry“). *Necht'  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$ . Pak rovnice*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

*má alespoň jedno řešení  $z \in \mathbb{C}$ .*

### Důsledky axiomu infima

**Definice.** Budiž  $M \subset \mathbb{R}$ . Číslo  $G \in \mathbb{R}$  splňující

$$(i) \quad \forall x \in M: x \leq G,$$

$$(ii) \quad \forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \exists x \in M: x > G',$$

nazýváme *supremem* množiny  $M$ .

**Věta 2** (o supremu). *Necht'  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny  $M$ .*

Supremum množiny  $M$  značíme  $\sup M$ .

Platí  $\sup M = -\inf(-M)$ .

**Definice.** Budiž  $M \subset \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $a$  je *největší prvek (maximum)* množiny  $M$  (značíme  $\max M$ ), jestliže  $a$  je horní závorou množiny  $M$  a  $a \in M$ . Analogicky definujeme *nejmenší prvek (minimum)*  $M$ , který značíme  $\min M$ .

**Lemma 3.** *Necht'  $M \subset \mathbb{R}$  a platí*

$$\forall x, y \in M \quad \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y: z \in M.$$

*Pak  $M$  je interval.*

**Věta 4** (Archimédova vlastnost). *Ke každému  $x \in \mathbb{R}$  existuje  $n \in \mathbb{N}$  splňující  $x < n$ .*

**Věta 5** (existence celé části). *Pro každé  $r \in \mathbb{R}$  existuje celá část čísla  $r$ , tj. číslo  $k \in \mathbb{Z}$  takové, že  $k \leq r < k + 1$ . Celá část čísla  $r$  je určena jednoznačně a značíme ji  $[r]$ .*

**Věta 6** (o  $n$ -té odmocnině). *Ke každému  $x \in (0, +\infty)$  a ke každému  $n \in \mathbb{N}$  existuje jediné  $y \in (0, +\infty)$  splňující  $y^n = x$ .*

**Věta 7** (o hustotě  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ). *Bud'te  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Potom existuje  $r \in \mathbb{Q}$  splňující  $a < r < b$  a  $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  splňující  $a < s < b$ .*

## II. Limita posloupnosti

### II.1. Úvod

**Definice.** Jestliže každému přirozenému číslu  $n$  je přiřazeno reálné číslo  $a_n$ , potom říkáme, že  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je *posloupnost* reálných čísel. Číslo  $a_n$  nazveme  *$n$ -tým členem* této posloupnosti.

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je rovna posloupnosti  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ , jestliže platí  $a_n = b_n$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ .  
Množinou členů posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  rozumíme množinu

$$\{x \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} : a_n = x\}.$$

**Definice.** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je

- *shora omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- *zdola omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- *omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

**Definice.** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je

- *rostoucí*, je-li  $a_n < a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ ,
- *klesající*, je-li  $a_n > a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ ,
- *nerostoucí*, je-li  $a_n \geq a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ ,
- *neklesající*, je-li  $a_n \leq a_{n+1}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ .

Posloupnost  $\{a_n\}$  je *monotónní*, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost  $\{a_n\}$  je *ryze monotónní*, pokud je rostoucí či klesající.

**Definice.** Buďte  $\{a_n\}$  a  $\{b_n\}$  dvě posloupnosti reálných čísel.

- *Součtem posloupností*  $\{a_n\}$  a  $\{b_n\}$  rozumíme posloupnost  $\{a_n + b_n\}$ .
- Analogicky definujeme *rozdíl* a *součin posloupností*.
- Necht' všechny členy posloupnosti  $\{b_n\}$  jsou nenulové. Pak *podílem posloupností*  $\{a_n\}$  a  $\{b_n\}$  rozumíme posloupnost  $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ .
- Je-li  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pak  $\lambda$ -násobkem posloupnosti  $\{a_n\}$  rozumíme posloupnost  $\{\lambda a_n\}$ .

### II.2. Konvergence posloupnosti

**Definice.** Řekneme, že číslo  $A \in \mathbb{R}$  je *limitou posloupnosti*  $\{a_n\}$ , jestliže ke každému kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje takové přirozené číslo  $n_0$ , že pro všechna přirozená čísla  $n \geq n_0$  platí, že  $|a_n - A| < \varepsilon$ , tj.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je *konvergentní*, pokud existuje  $A \in \mathbb{R}$ , které je limitou  $\{a_n\}$ .

**Věta 8** (jednoznačnost limity). *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Značíme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  nebo jenom  $\lim a_n = A$ .

*Poznámka.* Necht'  $\{a_n\}$  je posloupnost reálných čísel a  $A \in \mathbb{R}$ . Pak

$$\lim a_n = A \Leftrightarrow \lim(a_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n - A| = 0.$$

**Věta 9.** *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

**Definice.** Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  je *vybranou posloupností* z  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  (nebo též *podposloupností* posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  taková, že  $b_k = a_{n_k}$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ .

**Věta 10** (limita vybrané posloupnosti). *Necht'  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  je vybraná posloupnost z posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Jestliže platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ , pak také  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$ .*

*Poznámka.* Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost reálných čísel,  $A \in \mathbb{R}$ ,  $K \in \mathbb{R}$ ,  $K > 0$ . Jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < K\varepsilon,$$

potom  $\lim a_n = A$ .

**Věta 11** (aritmetika limit). Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$  a  $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$ . Potom platí:

(i)  $\lim(a_n + b_n) = A + B$ ,

(ii)  $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ ,

(iii) je-li  $B \neq 0$  a  $b_n \neq 0$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , je  $\lim(a_n/b_n) = A/B$ .

**Věta 12.** Necht'  $\lim a_n = 0$  a necht' posloupnost  $\{b_n\}$  je omezená. Potom  $\lim a_n b_n = 0$ .

**Věta 13** (limita a uspořádání). Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$  a  $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$ .

(i) Necht' existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé přirozené  $n \geq n_0$  je  $a_n \geq b_n$ . Potom  $A \geq B$ .

(ii) Necht'  $A < B$ . Potom existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé přirozené  $n \geq n_0$  je  $a_n < b_n$ .

**Věta 14** (o dvou policajtech). Bud'te  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  dvě konvergentní posloupnosti a  $\{c_n\}$  taková posloupnost, že platí:

(i)  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n \leq c_n \leq b_n$ ,

(ii)  $\lim a_n = \lim b_n$ .

Potom existuje  $\lim c_n$  a platí, že  $\lim c_n = \lim a_n$ .

### II.3. Nevlastní limita posloupnosti

**Definice.** Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu  $+\infty$  (plus nekonečno), jestliže

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n > L.$$

Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu  $-\infty$  (minus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n < K.$$

Věta 8 o jednoznačnosti limity platí i pro limity  $+\infty$  a  $-\infty$ . Je-li  $\lim a_n = +\infty$ , říkáme, že posloupnost  $\{a_n\}$  *diverguje* k  $+\infty$ , podobně pro  $-\infty$ . Je-li  $\lim a_n \in \mathbb{R}$ , říkáme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má *vlastní* limitu, je-li  $\lim a_n = +\infty$  nebo  $\lim a_n = -\infty$ , říkáme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má *nevlastní* limitu.

Věta 9 pro nevlastní limity neplatí. Platí však

**Věta 9'.**

- Necht'  $\lim a_n = +\infty$ . Pak posloupnost  $\{a_n\}$  není shora omezená, je však zdola omezená.
- Necht'  $\lim a_n = -\infty$ . Pak posloupnost  $\{a_n\}$  není zdola omezená, je však shora omezená.

Věta 10 (limita vybrané posloupnosti) platí i pro nevlastní limity.

**Definice.** Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  s následujícím rozšířením operací a uspořádání z  $\mathbb{R}$ :

- $a < +\infty$  a  $-\infty < a$  pro  $a \in \mathbb{R}$ ,  $-\infty < +\infty$ ,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$  pro  $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$ ,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$  pro  $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$ ,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$  pro  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $a > 0$ ,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$  pro  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < 0$ ,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$  pro  $a \in \mathbb{R}$ .

Některé operace nejsou definovány. Jsou to:

- $(-\infty) + (+\infty)$ ,  $(+\infty) + (-\infty)$ ,  $(+\infty) - (+\infty)$ ,  $(-\infty) - (-\infty)$ ,

- $(+\infty) \cdot 0, 0 \cdot (+\infty), (-\infty) \cdot 0, 0 \cdot (-\infty),$
- $\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{a}{0}$  pro  $a \in \mathbb{R}^*$ .

**Věta 11'** (aritmetika limit). *Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$  a  $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$ . Potom platí:*

- (i)  $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$ , *pokud je pravá strana definována,*
- (ii)  $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ , *pokud je pravá strana definována,*
- (iii)  $\lim a_n/b_n = A/B$ , *pokud je pravá strana definována.*

**Věta 15.** *Necht'  $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ ,  $A > 0$ ,  $\lim b_n = 0$  a existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , platí  $b_n > 0$ . Pak  $\lim a_n/b_n = +\infty$ .*

Věta 13 (limita a uspořádání) a Věta 14 (o dvou policajtech) platí i pro nevlastní limity. Dokonce platí

**Věta 14'** (o jednom policajtově). *Bud' te  $\{a_n\}$  a  $\{b_n\}$  dvě posloupnosti.*

- *Jestliže  $\lim a_n = +\infty$  a existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$  platí  $b_n \geq a_n$ , pak  $\lim b_n = +\infty$ .*
- *Jestliže  $\lim a_n = -\infty$  a existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$  platí  $b_n \leq a_n$ , pak  $\lim b_n = -\infty$ .*

**Definice.** *Budiž  $A \subset \mathbb{R}$  neprázdná. Není-li  $A$  shora omezená, pak definujeme  $\sup A = +\infty$ . Není-li  $A$  zdola omezená, pak definujeme  $\inf A = -\infty$ .*

**Lemma 16.** *Necht'  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná množina,  $G \in \mathbb{R}^*$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i)  $G = \sup M$ .
- (ii) *Číslo  $G$  je horní závorou  $M$  a existuje posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  bodů z  $M$ , pro kterou  $\lim x_n = G$ .*

## II.4. Hlubší věty o limitě posloupnosti

**Věta 17** (o limitě monotónní posloupnosti). *Každá monotónní posloupnost má limitu. Je-li  $\{a_n\}$  neklesající, pak  $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ . Je-li  $\{a_n\}$  nerostoucí, pak  $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ .*

**Věta 18** (Bolzano-Weierstraß). *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

### III. Zobrazení

**Definice.** Necht'  $A$  a  $B$  jsou množiny. *Zobrazením  $f$  množiny  $A$  do množiny  $B$*  nazveme předpis, kterým každému prvku  $x$  množiny  $A$  přiřadíme jediný prvek  $y$  z množiny  $B$ . Tento prvek  $y$  značíme symbolem  $f(x)$ . Prvek  $y$  se pak nazývá *obrazem* prvku  $x$ , prvek  $x$  se nazývá *vzorem* prvku  $y$ .

- Symbolem  $f: A \rightarrow B$  značíme, že  $f$  je zobrazením množiny  $A$  do množiny  $B$ .
- Symbolem  $f: x \mapsto f(x)$  značíme, že zobrazení  $f$  přiřazuje prvku  $x$  prvek  $f(x)$ .
- Množinu  $A$  z definice zobrazení nazýváme *definičním oborem zobrazení  $f$*  a značíme ji symbolem  $D_f$ .

**Definice.** Necht'  $f: A \rightarrow B$  je zobrazení.

- Podmnožina  $G_f = \{[x, y] \in A \times B; x \in A, y = f(x)\}$  kartézského součinu  $A \times B$  se nazývá *grafem zobrazení  $f$* .
- *Obrazem* množiny  $M \subset A$  při zobrazení  $f$  se nazývá množina

$$f(M) = \{y \in B; \exists x \in M: f(x) = y\} \quad (= \{f(x); x \in M\}).$$

- Množina  $f(A)$  se nazývá *obor hodnot* zobrazení  $f$ . (Značíme  $R_f$  nebo  $H_f$ .)
- *Vzorem* množiny  $W \subset B$  při zobrazení  $f$  nazveme množinu

$$f_{-1}(W) = \{x \in A; f(x) \in W\}.$$

*Poznámka.* Necht'  $f: A \rightarrow B$ ,  $X, Y \subset A$ ,  $U, V \subset B$ . Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$ ,
- $f_{-1}(U \cap V) = f_{-1}(U) \cap f_{-1}(V)$ ,
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ ,
- $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ .

**Definice.** Necht'  $A, B, C$  jsou množiny,  $C \subset A$  a  $f: A \rightarrow B$ . *Zúžením (restrikcí) zobrazení  $f$  na množinu  $C$*  rozumíme zobrazení  $\tilde{f}: C \rightarrow B$  definované předpisem  $\tilde{f}(x) = f(x)$  pro každé  $x \in C$ . Značíme  $f|_C$ .

**Definice.** Necht'  $f: A \rightarrow B$  a  $g: B \rightarrow C$  jsou dvě zobrazení. Symbolem  $g \circ f$  označíme zobrazení množiny  $A$  do množiny  $C$  definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Takto definované zobrazení se nazývá *složeným zobrazením*.

**Definice.** Řekneme, že zobrazení  $f: A \rightarrow B$

- zobrazuje množinu  $A$  na množinu  $B$ , jestliže  $f(A) = B$ , tj. ke každému  $y \in B$  existuje  $x \in A$  takové, že  $f(x) = y$ ,
- je *prosté*, jestliže rozdílným prvkům přiřazuje rozdílné hodnoty, tj.

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

- je *bijekce  $A$  na  $B$*  (nebo též *vzájemně jednoznačné zobrazení*), jestliže je zároveň prosté a zobrazuje  $A$  na  $B$ .

**Definice.** Necht'  $f: A \rightarrow B$  je bijekce (tj.  $f$  je prosté a na). *Inverzním zobrazením  $f^{-1}: B \rightarrow A$*  rozumíme zobrazení, které každému prvku  $y \in B$  přiřadí (jednoznačně určený) prvek  $x \in A$  splňující  $f(x) = y$ .



## IV. Funkce jedné reálné proměnné

### IV.1. Základní pojmy

**Definice.** Funkce  $f$  jedné reálné proměnné (dále jen funkce) je zobrazení  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $M$  je podmnožinou množiny reálných čísel.

**Definice.** Funkce  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  je *rostoucí* na intervalu  $J$ , jestliže pro každou dvojici  $x_1, x_2 \in J$ ,  $x_1 < x_2$ , platí nerovnost  $f(x_1) < f(x_2)$ . Analogicky definujeme funkci *klesající* (*neklesající*, *nerostoucí*) na intervalu  $J$ .

**Definice.** *Monotónní funkci* (resp. *ryze monotónní funkci*) na intervalu  $J$  rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na  $J$ .

**Definice.** Necht'  $f$  je funkce a  $M \subset D_f$ . Řekneme, že funkce  $f$  je

- *shora omezená* na  $M$ , jestliže existuje číslo  $K \in \mathbb{R}$  takové, že pro všechna  $x \in M$  je  $f(x) \leq K$ ,
- *zdola omezená* na  $M$ , jestliže existuje číslo  $K \in \mathbb{R}$  takové, že pro všechna  $x \in M$  je  $f(x) \geq K$ ,
- *omezená* na  $M$ , jestliže existuje číslo  $K \in \mathbb{R}$  takové, že pro všechna  $x \in M$  je  $|f(x)| \leq K$ ,
- *lichá*, jestliže pro každé  $x \in D_f$  platí  $-x \in D_f$  a  $f(-x) = -f(x)$ ,
- *sudá*, jestliže pro každé  $x \in D_f$  platí  $-x \in D_f$  a  $f(-x) = f(x)$ ,
- *periodická s periodou  $a$* , kde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , jestliže pro každé  $x \in D_f$  platí  $x + a \in D_f$ ,  $x - a \in D_f$  a  $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$ .

### IV.2. Limita funkce

**Definice.** Necht'  $c \in \mathbb{R}$  a  $\varepsilon > 0$ . Potom definujeme

- *okolí bodu  $c$*  o poloměru  $\varepsilon$  jako  $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ ,
- *prstencové okolí bodu  $c$*  o poloměru  $\varepsilon$  jako  $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$ .

**Definice.** Řekneme, že číslo  $A \in \mathbb{R}$  je *limitou funkce  $f$  v bodě  $c \in \mathbb{R}$* , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

**Věta 19** (jednoznačnost limity). *Funkce  $f$  má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu  $A \in \mathbb{R}$ .*

Má-li funkce  $f$  v bodě  $c \in \mathbb{R}$  limitu  $A \in \mathbb{R}$ , pak píšeme  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ .

**Definice.** Řekneme, že funkce  $f$  je *spojitá v bodě  $c \in \mathbb{R}$* , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

*Poznámka.* Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $c$ , právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in B(c, \delta): f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

**Definice.** Necht'  $\varepsilon > 0$ . Okolí a prstencové okolí bodu  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

**Definice.** Řekneme, že  $A \in \mathbb{R}^*$  je *limitou funkce  $f$  v bodě  $c \in \mathbb{R}^*$* , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 19 platí i pro  $c \in \mathbb{R}^*$ ,  $A \in \mathbb{R}^*$ , tedy lze použít označení  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ .

**Definice.** Necht'  $c \in \mathbb{R}$  a  $\varepsilon > 0$ . Potom definujeme

- *pravé okolí bodu  $c$*  jako  $B^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$ ,
- *levé okolí bodu  $c$*  jako  $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$ ,

- pravé prstencové okolí bodu  $c$  jako  $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$ ,
- levé prstencové okolí bodu  $c$  jako  $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$ ,
- levé okolí bodu  $+\infty$  jako  $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$ ,
- pravé okolí bodu  $-\infty$  jako  $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$ ,
- levé prstencové okolí bodu  $+\infty$  jako  $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$ ,
- pravé prstencové okolí bodu  $-\infty$  jako  $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$ .

**Definice.** Necht'  $A \in \mathbb{R}^*$ ,  $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $c$  limitu zprava rovnou  $A$  (značíme  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = A$ ), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P^+(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem *limity zleva* v bodě  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Pro limitu zleva funkce  $f$  v bodě  $c$  užíváme symbol  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ .

*Poznámka.* Necht'  $c \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = A \ \& \ \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = A \right).$$

**Definice.** Necht'  $c \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že funkce  $f$  je v bodě  $c$  *spojitá zprava* (resp. *zleva*), jestliže  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ ).

**Věta 20.** Necht' funkce  $f$  má vlastní limitu v bodě  $c \in \mathbb{R}^*$ . Pak existuje takové  $\delta > 0$ , že  $f$  je na  $P(c, \delta)$  omezená.

**Věta 21** (aritmetika limit). Necht'  $c \in \mathbb{R}^*$ . Necht'  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$  a  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$ . Potom platí:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$ , pokud je výraz  $A + B$  definován,
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$ , pokud je výraz  $AB$  definován,
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = A/B$ , pokud je výraz  $A/B$  definován.

**Důsledek.** Necht' funkce  $f$  a  $g$  jsou spojité v bodě  $c \in \mathbb{R}$ . Pak také funkce  $f + g$  a  $fg$  jsou spojité v bodě  $c$ . Pokud navíc  $g(c) \neq 0$ , pak také funkce  $f/g$  je spojitá v bodě  $c$ .

**Věta 22.** Necht'  $c \in \mathbb{R}^*$ . Necht'  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$  a  $A > 0$ . Jestliže existuje  $\eta > 0$  takové, že funkce  $g$  je kladná na  $P(c, \eta)$ , pak  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = +\infty$ .

**Definice.** Polynomem budeme rozumět každou funkci  $P$  tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Čísla  $a_0, \dots, a_n$  se nazývají *koefficienty polynomu*  $P$ .

*Poznámka.* Necht'  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  a

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R}, \\ Q(x) &= b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ ,  $b_m \neq 0$ . Jestliže se polynomy  $P$  a  $Q$  rovnají (tj.  $P(x) = Q(x)$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ ), pak  $n = m$  a  $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$ .

**Definice.** Necht'  $P$  je polynom tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řekneme, že  $P$  je polynom *stupně*  $n$ , jestliže  $a_n \neq 0$ . *Stupeň nulového polynomu* (tj. konstantní nulové funkce definované na  $\mathbb{R}$ ) definujeme jako  $-1$ .

**Věta 23** (limita a uspořádání). Necht'  $c \in \mathbb{R}^*$  a existuje  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ .

(i) Jestliže  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ , pak existuje  $\delta > 0$  takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) > g(x).$$

(ii) Jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že  $\forall x \in P(c, \delta): f(x) \leq g(x)$ , potom

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

(iii) (o dvou policajtech) Necht' existuje  $\eta > 0$  takové, že

$$\forall x \in P(c, \eta): f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Je-li navíc  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$ , potom existuje rovněž  $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$  a rovná se  $A$ .

**Důsledek.** Necht'  $c \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  a necht' existuje  $\eta > 0$  takové, že  $g$  je omezená na  $P(c, \eta)$ . Potom  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = 0$ .

**Věta 24** (limita složené funkce). Necht'  $c, A, B \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = A$ ,  $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$  a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P)  $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0 \forall x \in P(c, \eta): g(x) \neq A$ ,

(S) funkce  $f$  je spojitá v bodě  $A$ .

Potom

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = B.$$

**Důsledek.** Necht' funkce  $g$  je spojitá v bodě  $c \in \mathbb{R}$  a funkce  $f$  je spojitá v bodě  $g(c)$ . Potom je funkce  $f \circ g$  spojitá v bodě  $c$ .

**Věta 25** (Heine). Necht'  $c \in \mathbb{R}^*$ ,  $A \in \mathbb{R}^*$  a pro funkci  $f$  platí  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ . Jestliže posloupnost  $\{x_n\}$  splňuje  $x_n \in D_f$ ,  $x_n \neq c$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Věta 26** (limita monotónní funkce). Necht'  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ . Budiž funkce  $f$  monotónní na intervalu  $(a, b)$ . Potom existují  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ , přičemž platí:

- Je-li  $f$  na  $(a, b)$  neklesající, pak  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \inf f((a, b))$  a  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \sup f((a, b))$ .
- Je-li  $f$  na  $(a, b)$  nerostoucí, pak  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \sup f((a, b))$  a  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \inf f((a, b))$ .

### IV.3. Funkce spojité na intervalu

**Definice.** Necht'  $J \subset \mathbb{R}$  je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá na intervalu  $J$ , jestliže platí:

- $f$  je spojitá v každém vnitřním bodě  $J$ ,
- $f$  je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu  $J$ , pokud tento bod patří do  $J$ ,
- $f$  je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu  $J$ , pokud tento bod patří do  $J$ .

**Věta 27** (spojitost složené funkce na intervalu). Necht'  $I$  a  $J$  jsou intervaly,  $g: I \rightarrow J$ ,  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g$  je spojitá na  $I$  a  $f$  je spojitá na  $J$ . Potom funkce  $f \circ g$  je spojitá na  $I$ .

**Věta 28** (Heineova věta pro spojitost na intervalu). Necht' funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $J$  a  $c \in J$ . Potom pro každou posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  bodů intervalu  $J$  splňující  $\lim x_n = c$  platí, že  $\lim f(x_n) = f(c)$ .

**Věta 29** (Bolzano, o nabývání mezihodnot). Budiž funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a předpokládejme, že  $f(a) < f(b)$ . Potom pro každé  $C \in (f(a), f(b))$  existuje  $\xi \in (a, b)$  takové, že  $f(\xi) = C$ .

**Věta 30** (zobrazení intervalu spojitou funkcí). Necht'  $J$  je interval a funkce  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá na  $J$ . Potom je  $f(J)$  interval.

**Definice.** Necht'  $M \subset \mathbb{R}$ ,  $x \in M$  a funkce  $f$  je definována alespoň na  $M$  (tj.  $M \subset D_f$ ). Řekneme, že  $f$  nabývá v bodě  $x$  maxima (resp. minima) na  $M$ , jestliže

$$\forall y \in M: f(y) \leq f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M: f(y) \geq f(x)).$$

Bod  $x$  pak nazýváme bodem maxima (resp. minima) funkce  $f$  na množině  $M$ . Symbol  $\max_M f$  (resp.  $\min_M f$ ) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce  $f$  na množině  $M$  nabývá (pokud taková hodnota existuje). Body maxima či minima souhrnně označujeme jako body extrémů.

**Definice.** Necht'  $f$  je reálná funkce a  $x \in D_f$ . Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x$

- lokální maximum, jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že  $\forall y \in B(x, \delta): f(y) \leq f(x)$ ;
- lokální minimum, jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že  $\forall y \in B(x, \delta): f(y) \geq f(x)$ ;
- ostré lokální maximum, jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že  $\forall y \in P(x, \delta): f(y) < f(x)$ ;
- ostré lokální minimum, jestliže existuje  $\delta > 0$  takové, že  $\forall y \in P(x, \delta): f(y) > f(x)$ .

Bodem lokálního extrémů rozumíme bod lokálního maxima či lokálního minima.

**Věta 31** (o nabývání extrémů). Necht'  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom funkce  $f$  nabývá na  $\langle a, b \rangle$  své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).

**Důsledek 32** (omezenost spojitě funkce). Budiž  $f$  spojitá funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom je  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  omezená.

**Věta 33** (spojitost inverzní funkce). Budiž  $f$  spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu  $J$ . Potom funkce  $f^{-1}$  je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu  $f(J)$ .

#### IV.4. Zavedení elementárních funkcí

**Věta 34** (zavedení logaritmu). *Existuje jediná funkce (značíme ji  $\log$  a nazýváme ji přirozeným logaritmem), která má tyto vlastnosti:*

$$(L1) D_{\log} = (0, +\infty),$$

(L2) *funkce  $\log$  je na  $(0, +\infty)$  rostoucí,*

$$(L3) \forall x, y \in (0, +\infty): \log xy = \log x + \log y,$$

$$(L4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1.$$

##### Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$ ,
- $\forall x \in (0, +\infty): \log(1/x) = -\log x$ ,
- $\forall n \in \mathbb{Z} \forall x \in (0, +\infty): \log x^n = n \log x$ ,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$ ,
- funkce  $\log$  je spojitá na  $(0, +\infty)$ ,
- $H_{\log} = \mathbb{R}$ ,
- existuje právě jedno číslo  $e \in (0, +\infty)$  takové, že  $\log e = 1$ .

**Definice.** *Exponenciální funkci* budeme rozumět funkci inverzní k funkci  $\log$ . Budeme ji značit symbolem  $\exp$ .

##### Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}, H_{\exp} = (0, +\infty)$ ,
- funkce  $\exp$  je spojitá a rostoucí na  $\mathbb{R}$ ,
- $\exp 0 = 1, \exp 1 = e$ ,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(-x) = 1/\exp x$ ,
- $\forall n \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{R}: \exp(nx) = (\exp x)^n$ ,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$ ,
- $\forall r \in \mathbb{Q}: \exp r = e^r$ .

**Definice.** Necht'  $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ . *Obecnou mocninu  $a^b$*  definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

**Definice.** Necht'  $a, b \in (0, +\infty), a \neq 1$ . *Obecný logaritmus  $\log_a b$*  definujeme jako

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}.$$

**Věta 35** (zavedení funkce sinus a čísla  $\pi$ ). *Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit  $\pi$ ) a jediná funkce sinus (budeme ji značit  $\sin$ ), které mají následující vlastnosti:*

$$(S1) D_{\sin} = \mathbb{R},$$

(S2) *sin je rostoucí na  $(-\pi/2, \pi/2)$ ,*

$$(S3) \sin 0 = 0,$$

$$(S4) \forall x, y \in \mathbb{R}: \sin(x + y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y,$$

$$(S5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Definice.** Funkcí *kosinus* rozumíme funkci  $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

### Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce  $\cos$  je klesající na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ .
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ,  $\sin \pi = 0$ ,  $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ ,  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}: \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce  $\cos$  je sudá, funkce  $\sin$  je lichá.
- Funkce  $\sin$  a  $\cos$  jsou  $2\pi$ -periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}: \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}: |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- Funkce  $\sin$  a  $\cos$  jsou spojité na  $\mathbb{R}$ .
- $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle$
- Funkce  $\sin$  je rovna nule právě v bodech množiny  $\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ , funkce  $\cos$  je rovna nule právě v bodech množiny  $\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Definice.** Funkci *tangens* značíme  $\operatorname{tg}$  a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné  $x$ , pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Symbolem  $\operatorname{cotg}$  budeme značit funkci *kotangens*, která je definována na množině  $D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

### Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce  $\operatorname{tg}$  i  $\operatorname{cotg}$  jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce  $\operatorname{tg}$  i  $\operatorname{cotg}$  jsou liché.
- Funkce  $\operatorname{tg}$  i  $\operatorname{cotg}$  jsou  $\pi$ -periodické.
- Funkce  $\operatorname{tg}$  je rostoucí na  $(-\pi/2, \pi/2)$ , funkce  $\operatorname{cotg}$  je klesající na  $(0, \pi)$ .
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cotg} x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$
- $H_{\operatorname{tg}} = H_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{R}$

**Definice.**

- Funkcí *arkussinus* (značíme  $\arcsin$ ) rozumíme funkci inverzní k funkci  $\sin$   $|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ .
- Funkcí *arkuskosinus* (značíme  $\arccos$ ) rozumíme funkci inverzní k funkci  $\cos$   $|_{(0, \pi)}$ .
- Funkcí *arkustangens* (značíme  $\operatorname{arctg}$ ) rozumíme funkci inverzní k funkci  $\operatorname{tg}$   $|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ .
- Funkcí *arkuskotangens* (značíme  $\operatorname{arccotg}$ ) rozumíme funkci inverzní k funkci  $\operatorname{cotg}$   $|_{(0, \pi)}$ .

### Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\arcsin} = D_{\arccos} = (-1, 1)$ ,  $D_{\arctg} = D_{\operatorname{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\arctg 0 = 0$ ,  $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1$
- $\forall x \in (-1, 1): \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}: \arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$

## IV.5. Derivace funkce

**Definice.** Necht'  $f$  je reálná funkce a  $a \in \mathbb{R}$ . Pak

- derivací funkce  $f$  v bodě  $a$  budeme rozumět číslo

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

- derivací funkce  $f$  v bodě  $a$  zprava budeme rozumět číslo

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

- derivací funkce  $f$  v bodě  $a$  zleva budeme rozumět číslo

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud příslušné limity existují.

**Definice.** Necht'  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $a \in \mathbb{R}$ . Tečnou ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[a, f(a)]$  nazveme přímkou

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

**Věta 36.** Necht' funkce  $f$  má v bodě  $a \in \mathbb{R}$  vlastní derivaci. Potom je funkce  $f$  v bodě  $a$  spojitá.

**Věta 37** (aritmetika derivací). Předpokládejme, že funkce  $f$  a  $g$  mají v bodě  $a \in \mathbb{R}$  vlastní derivace a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Potom platí, že

(i)  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ,

(ii)  $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$ ,

(iii)  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ,

(iv) je-li  $g(a) \neq 0$ , pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

**Věta 38** (derivace složené funkce). Necht' funkce  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $y_0 \in \mathbb{R}$ , funkce  $g$  má vlastní derivaci v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  a  $y_0 = g(x_0)$ . Pak

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

**Věta 39** (derivace inverzní funkce). Necht' funkce  $f$  je na intervalu  $(a, b)$  spojitá a ryze monotónní a má v bodě  $x_0 \in (a, b)$  derivaci  $f'(x_0)$  vlastní a různou od nuly. Potom má funkce  $f^{-1}$  derivaci v bodě  $y_0 = f(x_0)$  a platí rovnost

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

### Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$ ,

- $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n < 0$ ,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$  pro  $x \in (0, +\infty)$ ,
- $(\exp x)' = \exp x$  pro  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$  pro  $x \in (0, +\infty)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,
- $(a^x)' = a^x \log a$  pro  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,
- $(\sin x)' = \cos x$  pro  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $(\cos x)' = -\sin x$  pro  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  pro  $x \in D_{\operatorname{tg}}$ ,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$  pro  $x \in D_{\operatorname{cotg}}$ ,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pro  $x \in (-1, 1)$ ,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pro  $x \in (-1, 1)$ ,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$  pro  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$  pro  $x \in \mathbb{R}$ .

**Věta 40** (nutná podmínka lokálního extrému). *Necht' funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  lokální extrém. Jestliže existuje  $f'(x_0)$ , potom je  $f'(x_0) = 0$ .*

#### IV.6. Hlubší věty o derivaci funkce

**Věta 41** (Rolle). *Necht'  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  a funkce  $f$  má následující vlastnosti:*

- (i) *je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,*
- (ii) *má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu  $(a, b)$ ,*
- (iii) *platí, že  $f(a) = f(b)$ .*

*Potom existuje  $\xi \in (a, b)$  takové, že  $f'(\xi) = 0$ .*

**Věta 42** (Lagrange, o střední hodnotě). *Necht'  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu  $(a, b)$ . Potom existuje  $\xi \in (a, b)$  takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Věta 43** (vztah znaménka derivace a monotonie funkce). *Necht'  $J \subset \mathbb{R}$  je nedegenerovaný interval. Necht'  $f$  je spojitá na  $J$  a v každém vnitřním bodě  $J$  (množinu vnitřních bodů intervalu  $J$  označme jako  $\operatorname{Int} J$ ) má derivaci.*

- (i) *Je-li  $f'(x) > 0$  pro všechna  $x \in \operatorname{Int} J$ , pak  $f$  je rostoucí na  $J$ .*
- (ii) *Je-li  $f'(x) < 0$  pro všechna  $x \in \operatorname{Int} J$ , pak  $f$  je klesající na  $J$ .*
- (iii) *Je-li  $f'(x) \geq 0$  pro všechna  $x \in \operatorname{Int} J$ , pak  $f$  je neklesající na  $J$ .*
- (iv) *Je-li  $f'(x) \leq 0$  pro všechna  $x \in \operatorname{Int} J$ , pak  $f$  je nerostoucí na  $J$ .*

**Věta 44** (výpočet jednostranné derivace). *Necht'  $f$  je spojitá zprava v bodě  $a \in \mathbb{R}$  a existuje  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ . Potom existuje  $f'_+(a)$  a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x).$$

**Věta 45** (l'Hospitalovo pravidlo). *Necht' funkce  $f$  a  $g$  mají na jistém prstencovém okolí bodu  $a \in \mathbb{R}^*$  vlastní derivace a existuje  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Necht' platí jedna z následujících podmínek:*

- (i)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ .

*Potom existuje i  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  a platí, že*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

## IV.7. Konvexní a konkávní funkce

**Definice.** Řekneme, že funkce  $f$  je na intervalu  $I$

- *konvexní*, jestliže pro každé  $x_1, x_2 \in I$  a každé  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

- *konkávní*, jestliže pro každé  $x_1, x_2 \in I$  a každé  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

- *ryze konvexní*, jestliže pro každé  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 \neq x_2$  a každé  $\lambda \in (0, 1)$  platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

- *ryze konkávní*, jestliže pro každé  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 \neq x_2$  a každé  $\lambda \in (0, 1)$  platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

**Lemma 46.** Funkce  $f$  je na intervalu  $I$  konvexní, právě když pro každé tři body  $x_1, x_2, x_3 \in I$ ,  $x_1 < x_2 < x_3$  platí, že

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

**Definice.** Necht' funkce  $f$  má na jistém okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$  vlastní derivaci. Druhou derivací funkce  $f$  v bodě  $a$  budeme rozumět číslo

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Necht' nyní  $n \in \mathbb{N}$  a funkce  $f$  má v jistém okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$  vlastní  $n$ -tou derivaci (značíme ji symbolem  $f^{(n)}$ ). Pak  $(n+1)$ -ní derivací funkce  $f$  v bodě  $a$  budeme rozumět číslo

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

**Věta 47** (druhá derivace a konvexitá). Necht'  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$  a  $f$  má na intervalu  $(a, b)$  vlastní druhou derivaci.

- Jestliže  $f''(x) > 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ , pak  $f$  je ryze konvexní na  $(a, b)$ .
- Jestliže  $f''(x) < 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ , pak  $f$  je ryze konkávní na  $(a, b)$ .
- Jestliže  $f''(x) \geq 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ , pak  $f$  je konvexní na  $(a, b)$ .
- Jestliže  $f''(x) \leq 0$  pro každé  $x \in (a, b)$ , pak  $f$  je konkávní na  $(a, b)$ .

**Definice.** Necht'  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $a \in \mathbb{R}$  a  $T_a$  označuje tečnu ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[a, f(a)]$ . Řekneme, že bod  $[x, f(x)]$  leží pod tečnou  $T_a$ , jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod  $[x, f(x)]$  leží nad tečnou  $T_a$ .

**Definice.** Necht'  $f'(a) \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $a$  je inflexním bodem funkce  $f$ , jestliže existuje  $\Delta > 0$  takové, že platí

- $\forall x \in (a - \Delta, a)$ :  $[x, f(x)]$  leží pod tečnou  $T_a$ ,
- $\forall x \in (a, a + \Delta)$ :  $[x, f(x)]$  leží nad tečnou  $T_a$ ,

nebo

- $\forall x \in (a - \Delta, a)$ :  $[x, f(x)]$  leží nad tečnou  $T_a$ ,
- $\forall x \in (a, a + \Delta)$ :  $[x, f(x)]$  leží pod tečnou  $T_a$ .

**Věta 48** (nutná podmínka pro inflexi). Necht'  $a \in \mathbb{R}$  je inflexním bodem funkce  $f$ . Potom  $f''(a)$  neexistuje nebo je rovna nule.

**Věta 49** (postačující podmínka pro inflexi). Necht' funkce  $f$  má spojitou první derivaci na intervalu  $(a, b)$  a  $z \in (a, b)$ . Necht' platí:

- $\forall x \in (a, z)$ :  $f''(x) > 0$ ,
- $\forall x \in (z, b)$ :  $f''(x) < 0$ .

Potom  $z$  je inflexním bodem funkce  $f$ .



## IV.8. Průběh funkce

**Definice.** Přímku, která je grafem afinní funkce  $x \mapsto kx + q$ ,  $k, q \in \mathbb{R}$ , nazveme *asymptotou funkce*  $f$  v  $+\infty$  (resp. v  $-\infty$ ), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - q) = 0, \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - q) = 0).$$

**Tvrzení 50.** Funkce  $f$  má asymptotu v  $+\infty$  popsanou afinní funkcí  $x \mapsto kx + q$ , právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \quad a \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

### Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicitu.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce  $f$  konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Určíme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.