Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy) + \cos(x+y) + 1 = 0 \qquad (*)$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou fci $y = \varphi(x)$.

Spočtěte $\varphi'(\pi)$ a $\varphi''(\pi)$.

Tedy

$$F(x,y) = \sin(xy) + \cos(x+y) + 1$$

(i) $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$

Dokonce $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ... aritmetika a skládání fcí třídy C^∞.

(ii) $F(\pi, 0) \overset{?}{=} 0$

$$\sin(\pi \cdot 0) + \cos(\pi + 0) + 1 = 0 - 1 + 1 = 0 \quad ✓$$

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) \overset{?}{\neq} 0$

parc. der. dle proměnné, kterou chci „vyjádřit".

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \cos(xy)\cdot x - \sin(x+y)\cdot 1 \;\Big|\; = \cos(\pi \cdot 0)\cdot \pi - \sin(\pi + 0) =$$

Pozn.: Pro fce třídy C^2, resp. C^∞ platí věty o aritmetice a skládání stejně jako pro fce třídy C^1.

Polynomy jsou třídy C^∞. exp, sin, cos jsou třídy C^∞ na $\mathbb{R}$.

$|[\pi,0] \quad - \quad " \neq 0 \quad \checkmark$

Závěr: Existuje okolí bodu $[\pi,0]$ takové, že na němž je rovnicí (*) zadána implicitní fce $y=\varphi(x)$, která je třídy C^2 (dokonce C^∞).

jedna možnost:

$$\varphi'(\pi) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\pi,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\pi,0)} = -\frac{0}{\pi} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos(xy)\cdot y - \sin(x+y)\Big|_{[\pi,0]} = (\cos 0)\cdot 0 - \sin\pi = 0$$

jiná možnost:

víme: $\exists$ okolí U bodu π takové, že

$$\boxed{\forall x \in U: \quad \underbrace{\sin(x\cdot\varphi(x)) + \cos(x+\varphi(x)) + 1}_{g(x) \text{ fce 1 proměnné}} = \underbrace{0}_{\text{je konstantní}}} \implies$$

$$\implies \forall x \in U: g'(x) = 0$$

$$(**)\qquad g'(x) = \cos(x\cdot\varphi(x))\cdot\left(\varphi(x) + x\cdot\varphi'(x)\right) - \sin\left(x+\varphi(x)\right)\cdot\left(1+\varphi'(x)\right) = 0$$

chci $\varphi'(\pi)$, tedy dosadím do ↑ $x=\pi$, a vím, že $\varphi(\pi)=0$ (to taky dosadím).

$$g'(\pi) = \cos(\pi\cdot 0)\cdot\left(0+\pi\cdot\varphi'(\pi)\right) - \sin(\pi+0)\cdot\left(1+\varphi'(\pi)\right) = 0$$

$$\pi\cdot\varphi'(\pi) = 0$$

$$\underline{\varphi'(\pi)=0}$$

Pro $\varphi''(\pi)$:

(zderivuji rovnici (**))

$$g''(x) = -\sin(x\cdot\varphi(x))\cdot\left(\varphi(x)+x\cdot\varphi'(x)\right)\cdot\left(\varphi(x)+x\cdot\varphi'(x)\right) + \cos(x\cdot\varphi(x))\cdot\left(2\varphi'(x)+x\cdot\varphi''(x)\right) - \cos\left(x+\varphi(x)\right)\cdot\left(1+\varphi'(x)\right)^2 - \sin\left(x+\varphi(x)\right)\cdot\varphi''(x) = 0 \text{ pro } \forall x\in U$$

(neboť g' je konstantní fce na U z (**)).

Dosadíme $x=\pi$

$\varphi(\pi)=0$

$\varphi'(\pi)=0$

$$0 = g''(\pi) = -\underbrace{\sin(\pi\cdot 0)}_{0}\cdot\left(0+\pi\cdot\varphi'(\pi)\right)^2 + \cos(\pi\cdot 0)\left(2\cdot 0+\pi\cdot\varphi''(\pi)\right) -$$

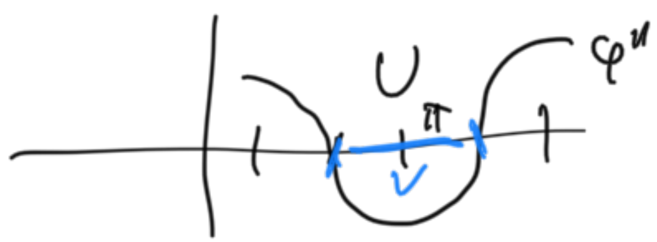
$$- \cos(\pi+0)(1+0)^2 - \underbrace{\sin(\pi+0)}_{0}\cdot\varphi''(\pi) = \pi\varphi''(\pi)+1 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi''(\pi) = -\frac{1}{\pi}$$

Otázka: Je fce φ na nějakém okolí π konvexní nebo konkávní?

$$\left.\begin{array}{l} \varphi\in C^2(U) \Rightarrow \varphi'' \text{ je spojitá na } U \\ \& \\ \varphi''(\pi) = -\frac{1}{\pi} \end{array}\right\} \exists \text{ okolí } V \text{ bodu } \pi \text{ takové, že } \varphi''<0 \text{ na } V.$$

$\Rightarrow \varphi$ je konkávní na V.



$$\underbrace{x\cdot\sin z + y\cdot\cos z - e^z}_{F(x,y,z)} = 0 \qquad (*)$$

bod $[2,1,0]$

je rovnicí určena fce $z = z(x,y)$?

napište rovnici tečné roviny k $z(x,y)$ v bodě $[2,1]$.

(jinými slovy další $\frac{\partial z}{\partial x}(2,1)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(2,1)$).

Ověřím předp. věty o impl. fci:

(i) $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ... dokonce $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ (aritmetika + skládání)

(ii) $F(2,1,0) \overset{?}{=} 0$

$$\| $$

$$2\cdot\sin 0 + 1\cdot\cos 0 - e^0 = 0 + 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

(iii) $$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = x\cdot\cos z - y\sin z - e^z \Big|_{[2,1,0]} = 2\cdot\cos 0 - 1\cdot\sin 0 - e^0 = 2 - 1 = 1 \neq 0 \quad \checkmark$$

Dle věty o impl. fci existuje okolí U bodu $[2,1]$ a okolí V bodu 0 taková, že v $U \times V$ je rovnicí $(*)$ jednoznačně určena fce $z = z(x,y)$, tato fce je třídy C^1 (C^∞).

$G(x,y)$

Víme: $\forall [x,y] \in U: \quad \underbrace{x \cdot \sin R(x,y) + y \cdot \cos R(x,y) - e^{R(x,y)}}_{} = 0.$

konst. fce, tedy má nulové parc. derivace: $\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial G}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial G}{\partial x}$:

$$\sin R(x,y) + x \cdot \cos R(x,y) \cdot \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) - y \sin R(x,y) \cdot \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) - e^{R(x,y)} \cdot \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) = 0$$

dosadím $x=2, y=1, R(2,1)=0$:

$$\sin 0 + 2 \cdot \cos 0 \cdot \frac{\partial R}{\partial x}(2,1) - 1 \cdot \sin 0 \cdot \frac{\partial R}{\partial x}(2,1) - e^0 \cdot \frac{\partial R}{\partial x}(2,1) = 0$$

$$\underline{\frac{\partial R}{\partial x}(2,1) = 0}$$

$\frac{\partial G}{\partial y}$:

$$x \cos R(x,y) \cdot \frac{\partial R}{\partial y}(x,y) + \cos R(x,y) - y \sin R(x,y) \cdot \frac{\partial R}{\partial y}(x,y) - e^{R(x,y)} \cdot \frac{\partial R}{\partial y}(x,y) = 0$$

dosadíme:

$$2\frac{\partial z}{\partial y}(2,1) + 1 - \frac{\partial z}{\partial y}(2,1) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,1) = -1$$

Tečná rovina: $T(x,y) = \underset{z(2,1)}{0} + \underset{\frac{\partial z}{\partial x}}{0} \cdot (x-2) \underset{\frac{\partial z}{\partial y}}{-1} (y-1) = \underline{\underline{1-y}}$