Pozn.: Rozdíl mezi spojitostí na I a stejnoměrnou spojitostí na I:

f je spojitá na I $\Leftrightarrow$ f je spojitá v každém bodě I vzhledem k I, tj.:

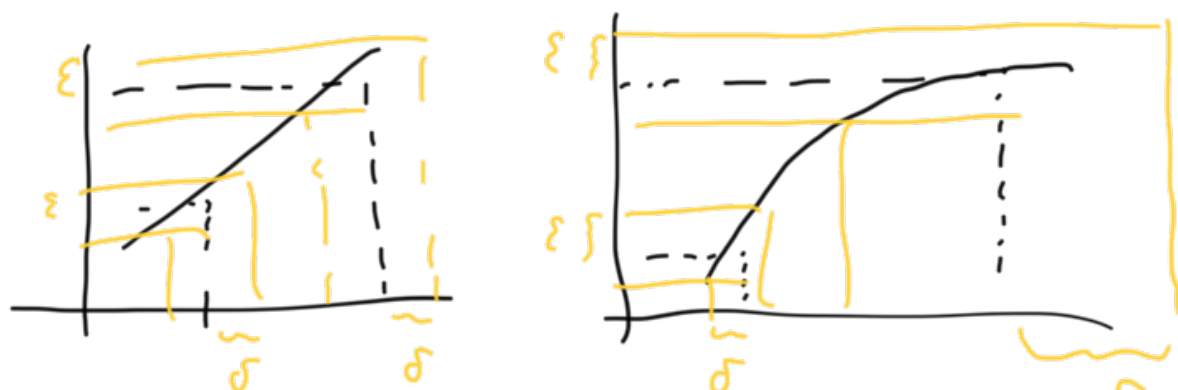
$$\forall x \in I: \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in I, |x-y|<\delta : |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in I \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in I, |x-y|<\delta : |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

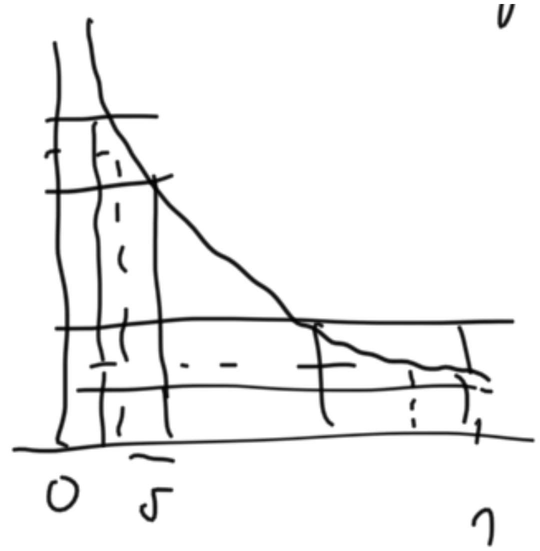
f je stejnoměrně spojitá na I:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I, \forall y \in I, |x-y|<\delta : |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$



Vidíme, že každá fce stejnoměrně spojitá na I je spojitá na I.

Opačná implikace neplatí: $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (0,1)$



Důkaz: Sporem.

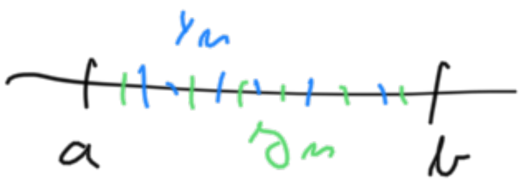
Předpokládejme, že $\exists \varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall \delta > 0 \ \exists x, y \in \langle a, b \rangle, \ |x - y| < \delta : \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

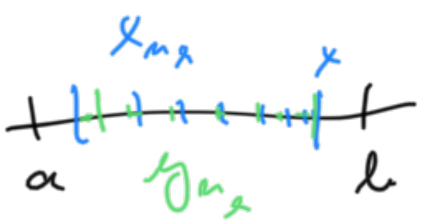
$\frac{1}{n}$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy existují $x_n, y_n \in \langle a, b \rangle$ takové, že $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$

a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.



Díky kompaktnosti $\langle a, b \rangle$ lze z posl. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrat podposl. $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s limitou $x \in \langle a, b \rangle$.



Zároveň $\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = x$, neboť

$$0 \leq |y_{n_k} - x| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x|$$

n_k $\downarrow$ 0 $\quad\downarrow$ 0

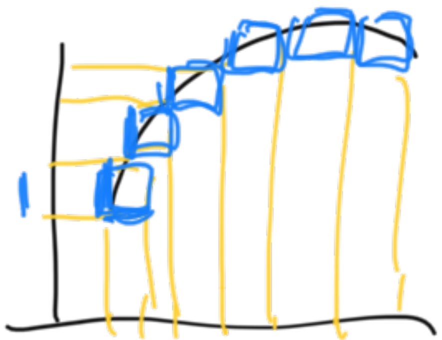
a můžeme použít větu o 2 policajtech.

Dle předp. je f spojitá v x vzhledem k $\langle a, b\rangle$,

tedy dle Heineovy věty je $\lim f(x_{n_k}) = f(x)$,
$\lim f(y_{n_k}) = f(x)$.

To je spor s faktem, že $\forall k \in \mathbb{N}: \underbrace{|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|}_{\to 0} \geq \varepsilon$. $\square$

__Důkaz__: Pro $a=b$ jasné! Nyní $a<b$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$.



Dle V69 je f stejnoměrně spojitá na $\langle a, b\rangle$,
tedy $\exists \delta > 0$ takové, že

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle, |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Zvolme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ int. $\langle a, b\rangle$ takové, že $x_j - x_{j-1} < \delta$, $j = 1, \dots, n$.

Označme $M_j = \sup_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f$, $m_j = \inf_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f$

Pro $x, y \in \langle x_{j-1}, x_j \rangle$ je $|x-y| < \delta$, tj. $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Dle Př. C je tedy $M_j - m_j \le \frac{\varepsilon}{b-a}$, $j = 1, \dots, n$.

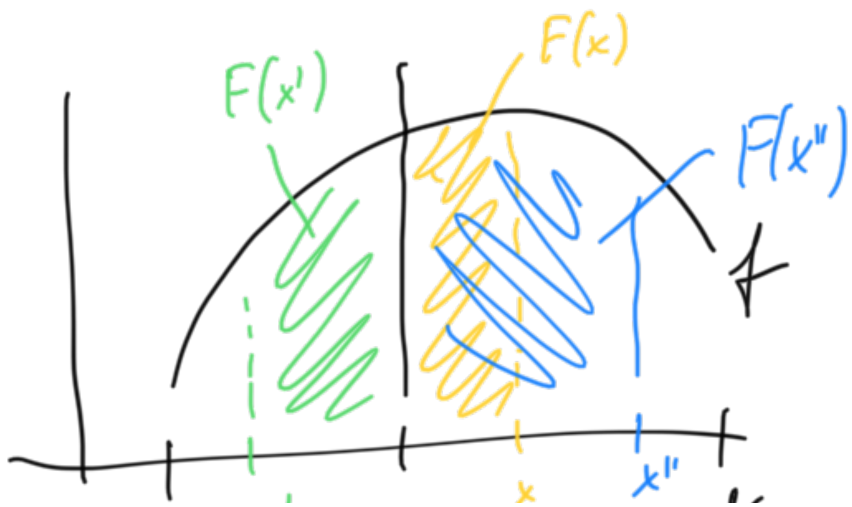
Platí tedy, že

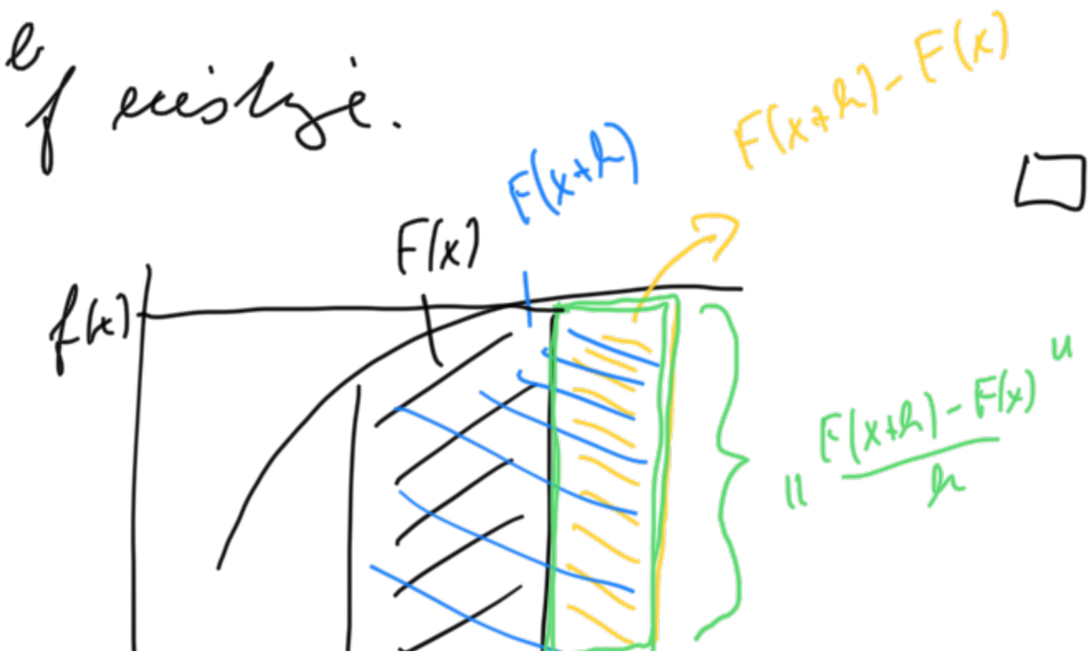
$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \overbrace{(M_j - m_j)} \overbrace{(x_j - x_{j-1})}^{>0} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_j - x_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon .$$

Dle LGS (a) tedy $\int_a^b f$ existuje. $\square$





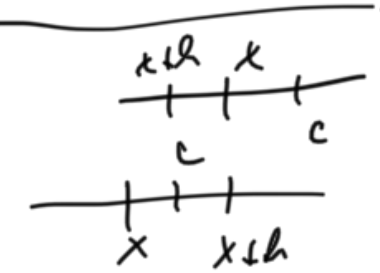
Důkaz: Pro $\forall x \in (a,b)$ je f spojitá na $\langle c,x\rangle$ (resp. $\langle x,c\rangle$),

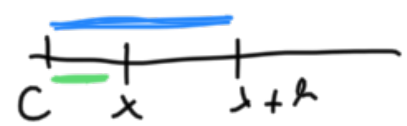
dle V70 je $F(x) \in \mathbb{R}$.

Tedy F je reálná fce na (a,b).

Zvolme pevně $x \in (a,b)$. Chceme ukázat, že $F'(x) = f(x)$, neboli

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right) = 0.$$





Pro $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ takové, že $x+h \in (a,b)$ je

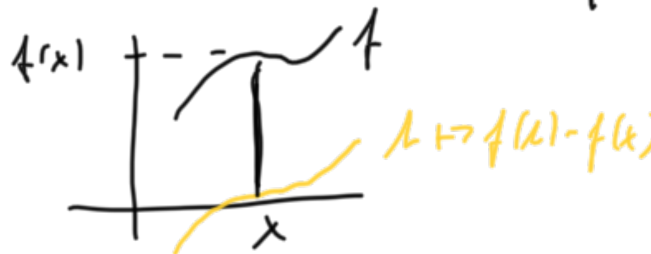
$$\left|\frac{1}{h}\big(F(x+h)-F(x)\big) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^{x} f(t)\,dt\right) - f(x)\right| =$$

$$\overset{\text{VG6}}{=} \left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)\cdot\frac{1}{h}\overbrace{\int_x^{x+h} 1\,dt}^{=h}\right| \overset{\text{VG7}}{=}$$

+ pozn. na m.

$$= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt \right| \le$$

integrujeme podle t, proto ne '1', x je konstanta



$$\overset{V68(ii)}{\le} \begin{cases} \dfrac{1}{|h|} \displaystyle\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt, & h > 0, \\[2ex] \dfrac{1}{|h|} \displaystyle\int_{x+h}^{x} |f(t) - f(x)|\,dt, & h < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Fce f je spojitá v x. Zvolíme-li tedy libovolné $\varepsilon > 0$, pak

$\exists \delta > 0$ takové, že $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ pro $t \in \mathbb{R}$, $|x - t| < \delta$

(především tedy bude $t \in (a, b)$).

Použijeme-li odhad $(*)$, pak pro $\forall h \in \mathbb{R}$, $0 < |h| < \delta$ platí, že

$$\left| \frac{1}{h} \big(F(x+h) - F(x)\big) - f(x) \right| \overset{V68(ii)}{\le} \frac{1}{|h|} \int^{x+h} \varepsilon \ldots$$

$$\ldots \left\{ \frac{1}{|h|} \int_{x+h}^{x} \varepsilon \right\} = \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot |h| = \varepsilon .$$

$t \in (x, x+h)$
$\Rightarrow |x - t| < \delta$

$\square$