Př. C: Nechť M je neprázdná množina, $f: M \to \mathbb{R}$ a $C \in \mathbb{R}$.

Jestliže $\forall a, b \in M: |f(a) - f(b)| \le C$, pak $\sup_M f - \inf_M f \le C$.

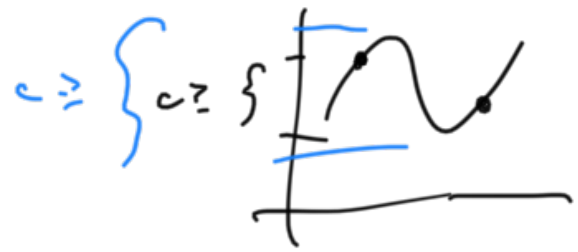
Zvolme $b \in M$ libovolně.

Pak $\forall a \in M$: $f(a) \le \overbrace{C + f(b)}^{\text{pevné č.}}$, tedy

$$\sup_M f \le C + f(b).$$

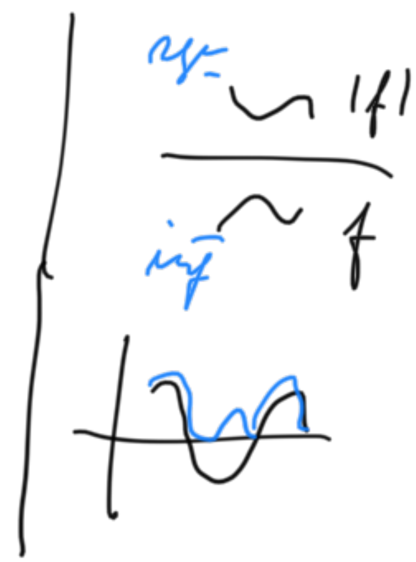
Odtud $\forall b \in M$: $f(b) \ge \overbrace{\sup_M f - C}^{\text{pevné č.}}$,

tedy $$\inf_M f \ge \sup_M f - C.$$



Př. D: Nechť M je neprázdná množina a $f: M \to \mathbb{R}$.

Pak $$\sup_M |f| - \inf_M |f| \le \sup_M f - \inf_M f.$$



Položme $C = \sup_M f - \inf_M f$.

Pro $\forall a, b \in M$ je $\overbrace{f(a)}^{\le \sup} - \overbrace{f(b)}^{\ge \inf} \le C$ a

$f(b) - f(a) \le C$

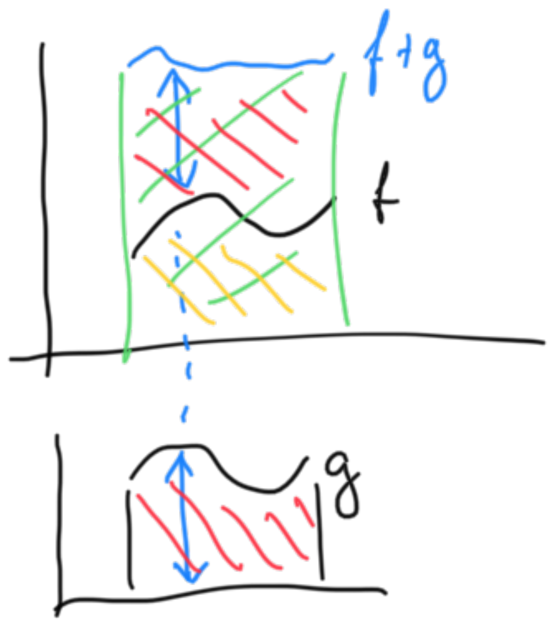
$f(b) - f(a) \leq C$,

takže $|f(a)-f(b)| \leq C$.

Tedy $\big|\, |f(a)| - |f(b)| \,\big| \leq |f(a)-f(b)| \leq C$.

$\triangle$ ner.

Nyní stačí použít př. C výše na fci $|f|$.



<u>Důkaz</u>: Pro $a=b$ vše zřejmě platí. Předp. že $a<b$.

(i) Nechť nejprve $\underline{\alpha \geq 0}$. Pak pro libovolné dělení D int. $\langle a,b\rangle$ je

$$\overline{S}(\alpha f, D) \underset{\uparrow}{=} \alpha \cdot \overline{S}(f,D) \qquad \Leftarrow \quad \sum \sup_{\langle\dots\rangle} \alpha f \cdot (\dots)$$

$$\underline{S}(\alpha f, D) \overset{\text{Př. A}}{=} \alpha \cdot \underline{S}(f,D)$$

$\alpha \cdot \sup f$
$\leq \dots$

$$\Rightarrow \quad \overline{\int_a^b} \alpha f = \inf\{\overline{S}(\alpha f, D)\} = \inf\{\alpha \overline{S}(f,D)\} \overset{\text{Př. A}}{=} \alpha \inf\{\overline{S}(f,D)\} = \alpha \cdot \overline{\int_a^b} f = \alpha \int_a^b f$$

$$\underline{\int_a^b} \alpha f = \alpha \underline{\int_a^b} f = \alpha \int_a^b f$$

$$\overset{\text{def.}}{\Rightarrow} \quad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

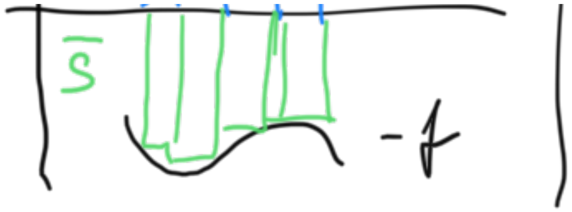
Nechť dále $\underline{\alpha = -1}$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je libovolné dělení $\langle a,b \rangle$.

$$\sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} (-f) = -\inf_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f, \quad i = 1, \dots, n \qquad \Big| \quad \sup(-M) = -\inf M$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{S}(-f, D) = -\underline{S}(f,D) \text{ a podobně } \underline{S}(-f,D) = -\overline{S}(f,D).$$

Tedy $\overline{\int_a^b} -f = \inf\{\overline{S}(-f,D),\ D \text{ dělení } \langle a,b \rangle\} =$



$$= \inf\{-\underline{S}(f,D), \dots\} =$$

$$= -\sup\{\underline{S}(f,D), \dots\} = -\underline{\int_a^b} f = -\int_a^b f,$$

podobně $\overline{\int_a^b} -f = -\underline{\int_a^b} f = -\int_a^b f.$

def. $\Rightarrow$ $$\int_a^b -f = -\int_a^b f.$$

Konečně pro $\alpha < 0$ libovolné:

$$\int_a^b \alpha f = \int_a^b (-|\alpha| \cdot f) = -\int_a^b |\alpha| f \overset{\text{dle 1. části}}{=} -|\alpha| \int_a^b f = \alpha \int_a^b f.$$

(ii) Použijeme L65. Označme $I_1 = \int_a^b f$, $I_2 = \int_a^b g$.

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně.

Dle L65(a) $\exists$ dělení D_1 int. $\langle a,b \rangle$ takové, že

$$I_1 - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_1) < I_1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

$\exists$ dělení D_2 int. $\langle a,b \rangle$ takové, že

$$I_2 - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(g, D_2) \leq \overline{S}(g, D_2) < I_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Vezmeme dělení D zjemňující zadaná D_1 i D_2.

Pak
$$\begin{cases} I_1 - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,D) < I_1 + \frac{\varepsilon}{2}, \\ I_2 - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(g,D) \le \overline{S}(g,D) < I_2 + \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Podle Tvr. B je
$$\overline{S}(f+g,D) \le \overline{S}(f,D) + \overline{S}(g,D),$$
$$\underline{S}(f+g,D) \ge \underline{S}(f,D) + \underline{S}(g,D).$$

$\sum \sup(f+g)\cdot(\ldots)$
$\le$
$(\sup f + \sup g)\cdot(\ldots)$
$\sum \sup f(\,) + \sum \sup g(\,)$

sečteme

$$I_1 + I_2 - \varepsilon < \underline{S}(f,D) + \underline{S}(g,D) \le \underline{S}(f+g,D) \le \overline{S}(f+g,D) \le$$
$$\le \overline{S}(f,D) + \overline{S}(g,D) < I_1 + I_2 + \varepsilon.$$

Tedy dle LGS(a) je $\int_a^b (f+g) = I_1 + I_2$. $\square$

$|a+b| \le |a| + |b|$

Důkaz: (ii)

$$\int_a g - \int_a f \underset{V67}{=} \int_a (g-f) \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$\forall$ dělení D int. $\langle a,b\rangle$

$$\forall x\in\langle a,b\rangle:\ g(x)-f(x)\geq 0 \Rightarrow \underline{S}(g-f,D)\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b}(g-f)\geq 0$$

(ii) Pokud již víme, že $\int_a^b |f|$ existuje, tak se nerovnost dokáže snadno: $\forall x\in\langle a,b\rangle:\quad -|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)|$,

takže dle (i) a V67(ii) je

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| .$$

Dokažme nyní existenci $\int_a^b |f|$:

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. Dle L65(a) $\exists$ dělení D int. $\langle a,b\rangle$ takové, že

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) \ldots$$

$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon$. $\{x_i\}_{i=0}^{n}$

Označme $M_i = \sup\limits_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f$, $m_i = \inf\limits_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f$,

$$\hat{M}_i = \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} |f|, \quad \hat{m}_i = \inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} |f|, \quad i=1,\dots,n.$$

Dle Př. D je $\hat{M}_i - \hat{m}_i \le M_i - m_i$, $i = 1,\dots,n$

Odtud

$$\overline{S}(|f|,D) - \underline{S}(|f|,D) = \sum_{i=1}^{n} \hat{M}_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \hat{m}_i (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\hat{M}_i - \hat{m}_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{>0} \le \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon$$

Dle LG5(c) tedy existuje $\int_a^b |f|$.

$\square$