Sčítání konečně mnoha R čísel je komutativní a asociativní.

Pro sčítání „nekonečně" mnoha čísel je situace složitější.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-1+1\dots\dots \quad \begin{cases} \underbrace{(-1+1)}_{0} + \underbrace{(-1+1)}_{0} + \underbrace{(-1+1)}_{0} + \dots = 0 \\ -1 + \underbrace{(1-1)}_{0} + \underbrace{(1-1)}_{0} + \underbrace{(1-1)}_{0} + \dots = -1 \end{cases}$$

$s_2 \quad s_4 \quad s_6$

Lze ukázat, že posl. část. součtů „uzávorkované" řady je vybraná z posl. č. součtů původní řady. Tedy pokud řada konverguje (resp. diverguje k $\pm\infty$), pak konverguje (resp. diverguje k $\pm\infty$) i její libovolné uzávorkování a to ke stejnému součtu.

Na druhou stranu uzávorkováním oscilující řady lze dostat řadu konvergentní.

Je-li řada s nezáp. členy, pak má vždy součet. Pro jeho určení stačí řadu libovolně uzávorkovat (spočítat limitu libovolné podposl. část. součtů).

$\cancel{1}$ 2 $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ 5 vybraná posl

k_1 k_2

1 2 3 4 5 .... přerovnání

k_2 k_4 k_1 k_5 k_3

Důkaz: Stačí dokázat pro řady s nezáp. členy: předp., že to platí

$\sum |a_n|$ K a je to řada s nezáp. členy $\Rightarrow \sum |a_{k_n}|$ K,

a tedy $\sum a_{k_n}$ je AK.

Dále $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_{k_n}^+ - \sum a_{k_n}^- = \sum a_{k_n}$.

řady s nezáp. členy, které konvergují (viz důk. V58)

Nechť tedy $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq 0$.

Pak součet $\sum a_n$ existuje.

Nechť $m \in \mathbb{N}$ a vezmeme prvních m členů přerovnání $a_{k_1}, \dots, a_{k_m}$.

Položme $p = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Pak $\{k_1, \dots, k_m\} \subset \{1, \dots, p\}$

tedy všechny členy $a_{k_1}, \dots, a_{k_m}$ jsou obsaženy mezi členy $a_1, \dots, a_r$, tedy

$$a_{k_1} + \dots + a_{k_m} \overset{\uparrow\, a_n \geq 0}{\leq} \underbrace{a_1 + \dots + a_r}_{\text{posl. část. součtů je neklesající}} \leq \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

pevné číslo nezávisející na m

Tedy platí $\forall m \in \mathbb{N}$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Protože $\sum a_n$ je přerovnáním řady $\sum a_{k_n}$, plyne z předchozího, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} .$$

Dohromady tedy $\sum a_n = \sum a_{k_n}$.

$\square$

Pozn. (součin řad):

Uvažujme výraz $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_m)$. (*)

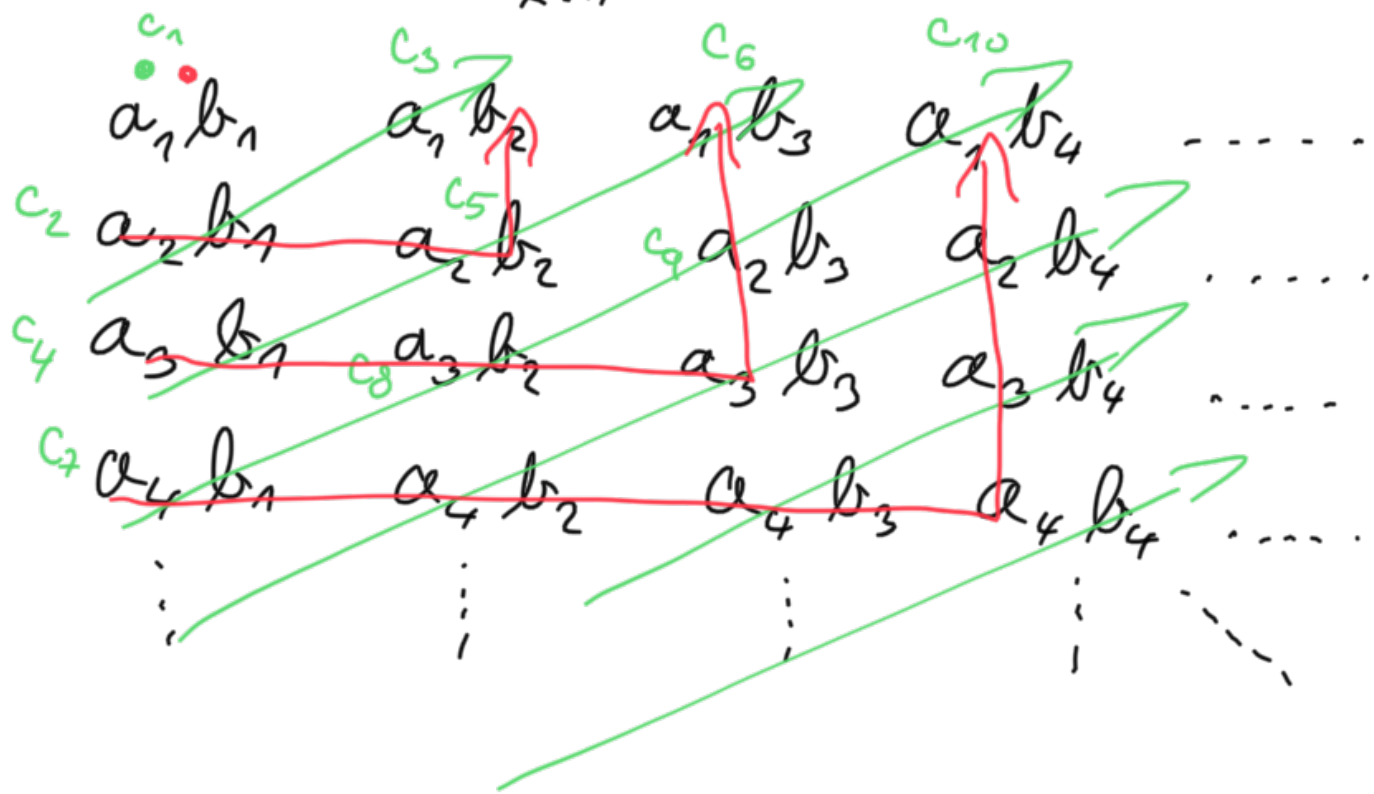
Utvoříme-li všechny součiny $a_i b_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ a ty pak sečteme (v libovolném pořadí), dostaneme hodnotu výrazu (*).

Pro nekonečné řady platí následující:

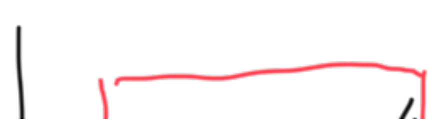
Nechť $\sum a_n$, $\sum b_n$ jsou dvě AK řady.

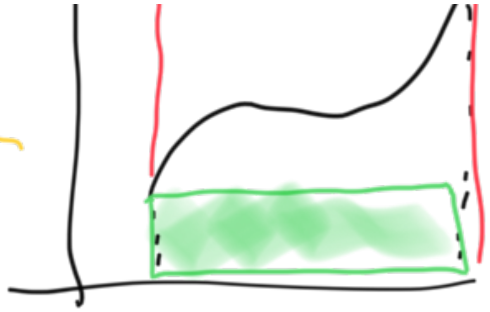
Prvky $a_i b_j$, $i,j \in \mathbb{N}$ uspořádejme do nějaké posl. $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$.



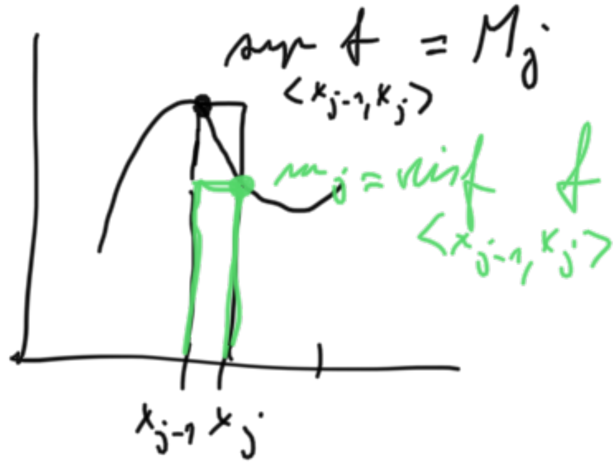
Předp. abs. konvergence je podstatný, bez něj tvrzení neplatí.





Značení: $\sup_M f = \sup f(M) = \sup\{f(x); x \in M\}$,

$\inf_M f = \inf f(M)$



$\overline{S}(f,D)$ .... horní součet při dělení D

$\underline{S}(f,D)$ .... dolní součet při dělení D

$\overline{\int_a^b} f$ .... horní integrál

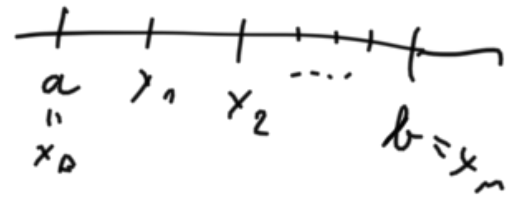
$\underline{\int_a^b} f$ .... dolní integrál

Pozn.: Z omezenosti fce f plyne, že $\overline{S}(f,D) \in \mathbb{R}$ a $\underline{S}(f,D) \in \mathbb{R}$.

Důkaz

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^{n} M_j \overbrace{(x_j - x_{j-1})}^{\geq 0} \leq \sum_{j=1}^{n} \sup_{\langle a,b \rangle} f \cdot (x_j - x_{j-1}) =$$

$$M_j = \sup_{\langle x_{j-1},x_j\rangle} f \le \sup_{\langle a,b\rangle} f \qquad = \sup_{\langle a,b\rangle} f \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \sup_{\langle a,b\rangle} f \cdot (b-a)$$



Tedy

$$\inf_{\langle a,b\rangle} f \cdot (b-a) \le \overline{S}(f,D) \le \sup_{\langle a,b\rangle} f \cdot (b-a),$$

odkud $\overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$ $\left(\text{a dokonce } \inf_{\langle a,b\rangle} f \cdot (b-a) \le \overline{\int_a^b} f \le \sup_{\langle a,b\rangle} f \cdot (b-a)\right).$

Obdobně pro $\underline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$.

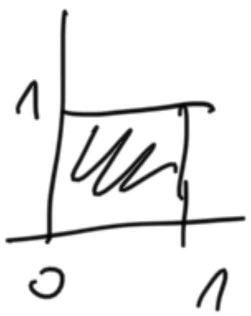
Značení: $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f(t)\,dt$

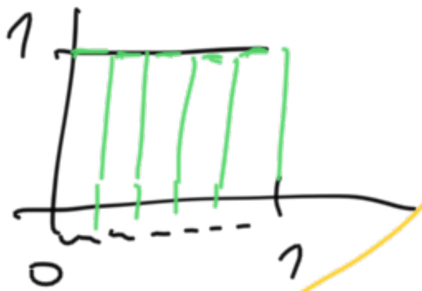
zejména v případě, kdy je nutno zdůraznit proměnnou fce f

Př.: $\int^1 1\,dx = 1$ …

$\overline{\int_0^1} 1\,dx = 1$, neboť $\overline{S}(f,D) = \sum_{j=1} 1\cdot(x_j - x_{j-1}) = 1$

pro libovolné dělení D

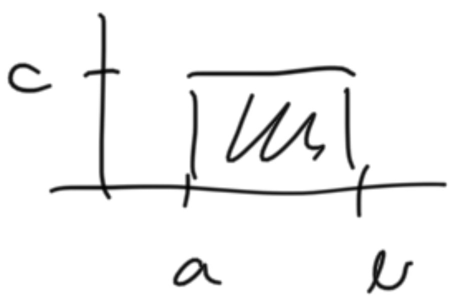




podobně $\underline{S}(f,D) = 1$ ... " —

$$\overline{\int_0^1} 1 = \inf\{1\} = 1, \quad \underline{\int_0^1} 1 = \sup\{1\} = 1$$

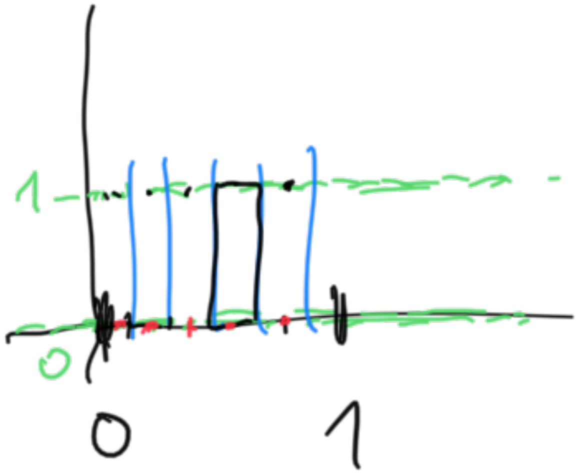
Obecněji: $\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$



Př.: Definujme fci $f: R \to R$ takto:

$\langle a,b\rangle = \langle 0,1\rangle \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \dots \text{ pro } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ (Dirichletova fce)

$0 \ldots$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



Díky hustotě $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je

$\overline{S}(f,D) = 1$ pro libovolné dělení D int. $\langle 0,1\rangle$

$\underline{S}(f,D) = 0$ — " —

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = 1 \neq \quad \Rightarrow \quad f \text{ nemá Riemannův integrál na } \langle 0,1\rangle.$$

$$\underline{\int_0^1} f = 0$$