Pozn.: Je-li f lineární, pak $f(o)=o$:

$$f(o)=f(0\cdot o) \underset{(ii)}{=} 0\cdot f(o)=o.$$

Př.: $f(x)=a\cdot x$, $a\in\mathbb{R}$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

$f(x)=x+1$ není lineární ($f(0)=1\neq 0$)

$f(x)=x^2$ není lineární ($f(1+1)=(1+1)^2=4$
$f(1)+f(1)=1^2+1^2=2$ $\neq$)

V tomto oddílu chápeme vektory z $\mathbb{R}^n$ jako „sloupcové vektory", tj. matice $n\times 1$.

Důkaz: „$\Leftarrow$" Zobrazení $u\mapsto A\cdot u$ je lineární dle V34 (ii) a (iv).

„$\Rightarrow$" Existuje-li taková matice, pak $A\cdot e^j=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ \vdots \\ a_{mj}\end{pmatrix}$ je j-tý sloupec matice A,

tudíž nutně $\begin{pmatrix} a_{1j}\\ \vdots \\ a_{mj}\end{pmatrix}=f(e^j)$.

Položíme tedy $a_{ij}=f(e^j)_i$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$.
$\uparrow$ i-tá souřadnice

vektoru $f(e^j)$

Pak $A=(a_{ij})$ je hledanou maticí:

$$\forall u\in\mathbb{R}^n:\quad f(u)_i = f\Big(\sum_{j=1}^n u_j e^j\Big)_i = \Big(\sum_{j=1}^n f(u_j e^j)\Big)_i =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^n u_j f(e^j)\Big)_i = \sum_{j=1}^n u_j f(e^j)_i = \sum_{j=1}^n u_j a_{ij} = (Au)_i .$$

$\square$

Př.: Z V53 plyne, že všechna lin. zobr. z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ jsou tvaru $x\mapsto a\cdot x$, $a\in\mathbb{R}$

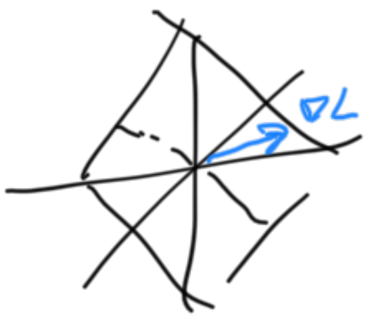
Repr. matice je $(a)\in M(1\times 1)$.

(Jsou to tedy nám známé lineární funkce.)

Podobně všechna lin. zobr. z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$ mají tvar $L(x,y) = \underset{\in M(1\times 2)}{(a\ b)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} =$

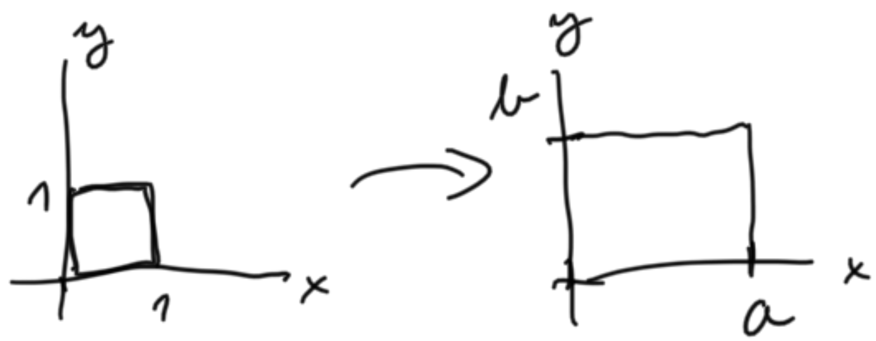
$= ax+by$, $a,b\in\mathbb{R}$

Grafem L je rovina v $\mathbb{R}^3$ procházející počátkem.

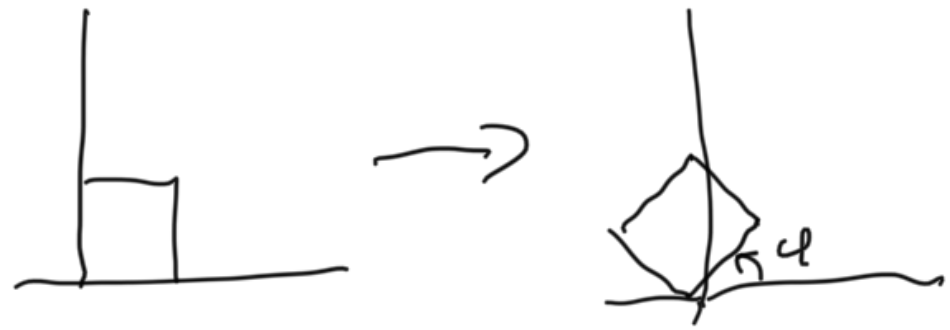


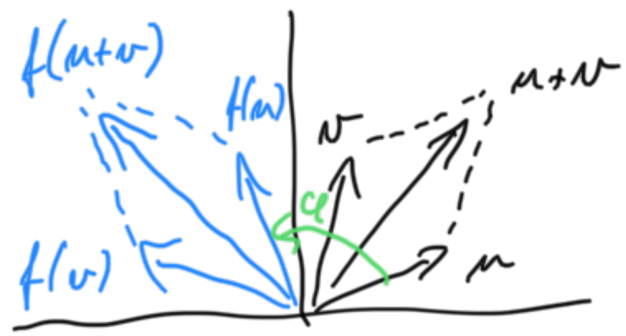
$\nabla L(x,y) = (a,b)$ ← repr. matice

Příkladem lin. zobr. z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ je „roztažení" repre. maticí $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$



nebo otočení okolo počátku o úhel φ:

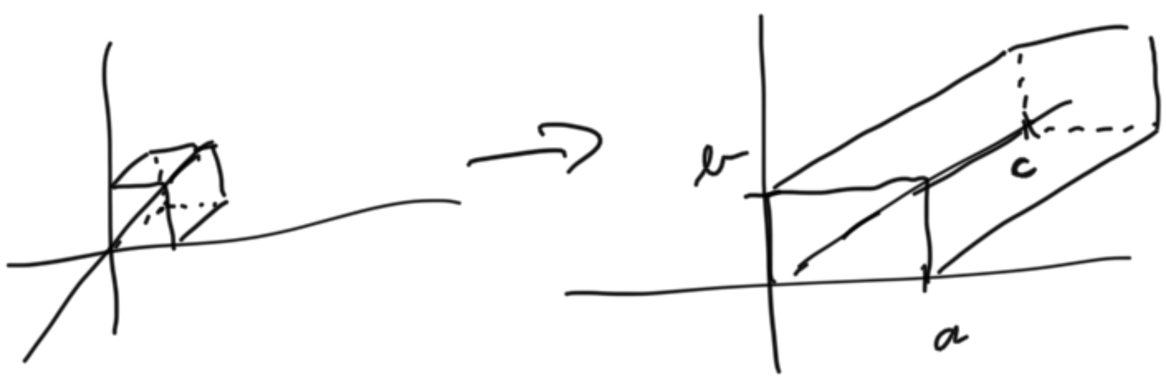




Repre. matice je

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Příkladem lin. zobr. z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ je „roztažení" repre. maticí $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$



nebo otočení o úhel φ kolem osy dané vektorem $v \in \mathbb{R}^3$:

Důkaz: Nechť A je reprez. matice f (V53). Reformulace tvrzení:

(i) $\forall b \in \mathbb{R}^n \; \exists!\, x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{Ax}_{f(x)} = b \iff \forall b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ právě 1 řešení

(iii) $\forall b \in \mathbb{R}^n \; \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \iff \forall b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ alespoň 1 řešení

(i) $\Rightarrow$ (ii) zřejmé

(iii) $\Rightarrow$ (i) V57

(ii) $\Rightarrow$ (iii) sporem: Nechť f není na. Pak ex. $b \in \mathbb{R}^n$, že $Ax = b$ nemá řešení.

$$\underset{V51}{\Rightarrow} A \text{ není regulární} \underset{V36(ii)}{\Rightarrow} A^T \text{ není regulární} \underset{V40}{\Rightarrow} \text{řádky } A^T \text{ jsou LZ} \Rightarrow$$

sloupce A jsou LZ.

Označme sloupce A jako $s^1, \dots, s^n$. Pak ex. netriv. LK $s^1, \dots, s^n$ rovna o,

tedy $\underbrace{x_1 \cdot s^1 + \dots + x_n \cdot s^n}_{\|} = o$ pro nějaká $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $[x_1, \dots, x_n] \neq o$.

Tedy $Ax = o$, kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \neq o$

$$\underset{f(x)}{\parallel}$$

To je spor $\begin{pmatrix} f(x)=0 \\ f(0)=0 \\ x\neq 0 \end{pmatrix}$ s prostotou f. $\square$

Důkaz: Pro $v\in\mathbb{R}^n$ je $g(f(v)) = g(Av) = B(Av) \overset{\text{asociativita nás.}}{\underset{\text{V34(ii)}}{=}} (BA)\cdot v$. $\square$

Pozn.: Nechť $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ je lineární a bijekce, repre. maticí A.

A je regulární dle V51 (viz důk. V54).

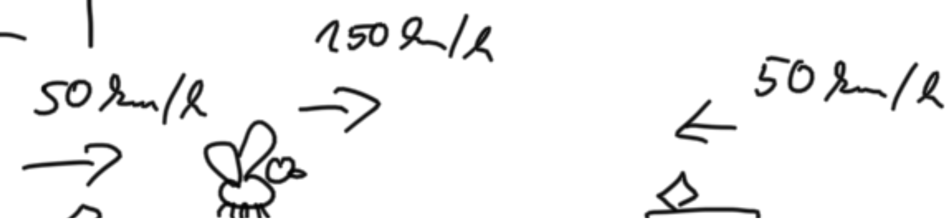
Je-li $u\in\mathbb{R}^n$, pak $\exists x\in\mathbb{R}^n: f(x)=u$.

Tedy $f^{-1}(u) = x = A^{-1}(A\cdot x) = A^{-1}\cdot f(x) = A^{-1}\cdot u$.

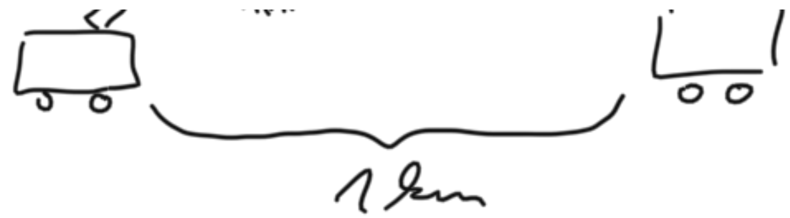
To znamená, že $f^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ je také lineární a je reprezentováno maticí A^{-1}.

VII. Číselné řady

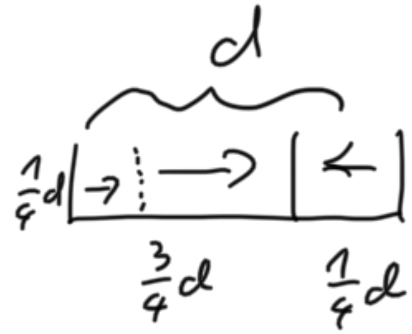
Motivace: 1)



Moucha uletí do 1. setkání ...



… $\frac{1}{4}d$, obě …



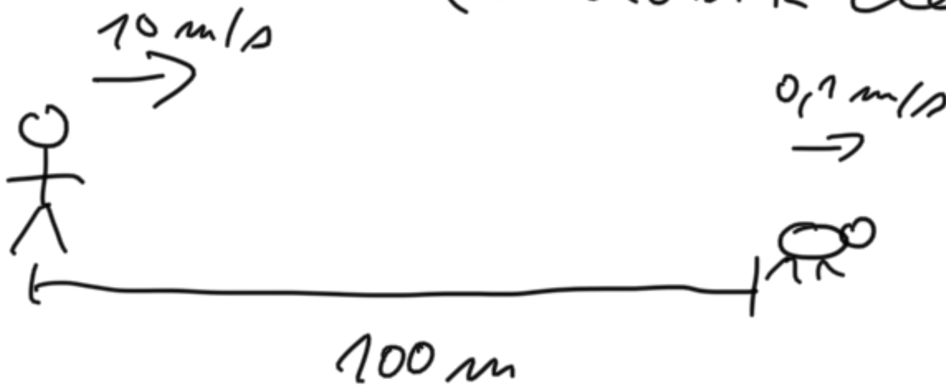
$\frac{1}{4}d \to$ nová vzdál.
je $\frac{1}{2}d$

Tedy moucha celkem uletí

$$1\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \dots =$$

$$= \frac{3}{4}\Big(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots}_{\text{geometrická řada}}\Big) = \frac{3}{4}\cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

2) Achilles a želva (Zénón z Eleje)



do bodu setkání:

$$100 + 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots =$$

$$= 100\Big(\underbrace{1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots}\Big) = 100\cdot\frac{100}{99} \doteq 101$$

geom. řada

3) Časová hodnota peněz:

Splácíme ročně částku č, úrok je ú.

Částka č vyplacená za rok má „hodnotu" $\frac{č}{1+ú}$, (kdybych měl č hned, mohu ho investovat a vydělat lépe)

za dva roky $\frac{č}{(1+ú)^2}$, ...

Tedy celková hodnota toho, že každý rok obdržíme částku č, je

$$\frac{č}{(1+ú)}+\frac{č}{(1+ú)^2}+\frac{č}{(1+ú)^3}+\dots = č\underbrace{\left(\frac{1}{1+ú}+\frac{1}{(1+ú)^2}+\frac{1}{(1+ú)^3}+\dots\right)}_{\text{geom. řada}}$$

4) cihly

s_n ... vzdálenost těžiště soustavy n cihel od pravého okraje

$$s_1 = \frac{1}{2}$$

$$s_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rovnováha} \\ \text{na páce}}}{=} \frac{n\cdot s_n + 1\cdot\left(s_n+\frac{1}{2}\right)}{n+1} = s_n + \frac{1}{2(n+1)} = \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{2(n+1)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots}_{\text{harmonická řada}}\Big).$$