## $\boxed{\text{Gaussova eliminace}}$

Předpokládejme, že $A$ je nenulová (jinak je situace triviální).

$A$ převedeme pomocí nějaké transf. $T$ na schodovitou $A'$ (V37(ii)).

Potom dle T49 má soustava $Ax=b$ stejnou množinu řešení jako soust. $A'x=b'$, kde $b'=T(b)$.

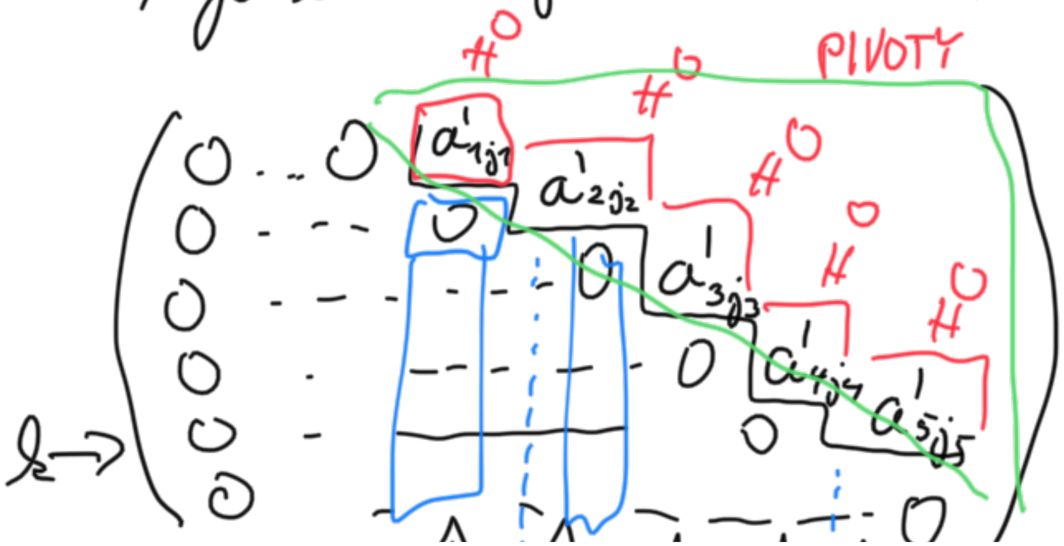
Rozlišme dva případy podle toho, jak vypadá poslední nenulový řádek matice $(A'|b')$. Nechť je to $k$-tý řádek, $k\in\{1,\dots,m\}$.

1) Je-li $k$-tý ř. matice $A'$ nulový, pak $k$-tá rovnice soust. $A'x=b'$ je

$$0\cdot x_1+\dots+0\cdot x_n=b'_k\neq 0.$$

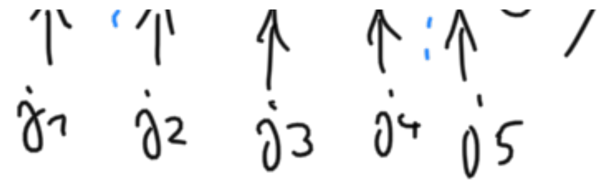
Tedy soustava nemá řešení.

2) Je-li $k$-tý ř. matice $A'$ nenulový, pak označme $j_p$ nejmenší př. č. takové, že $a_{pj_p}\neq 0$, $p=1,\dots,k$.



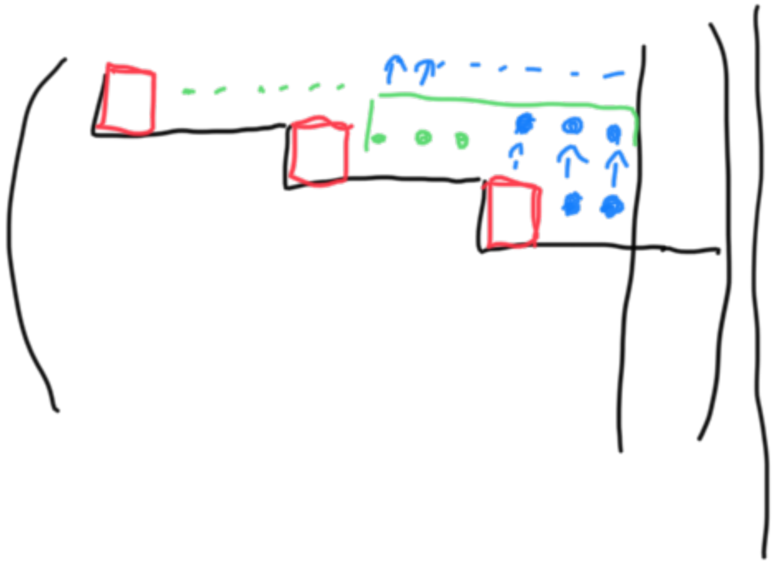

Prvek $a_{pj_p}$ je první nenulový v $p$-tém ř.

(Takové prvky existují, neboť $A'$ je schodovitá a $p\le k$.)



Označme $I_1=\{j_1,\dots,j_k\}$, $I_2=\{1,\dots,n\}\setminus I_1$.

Soustavu $A'x=b'$ zapíšeme jako



$$\sum_{s\in I_1} a'_{is}x_s + \sum_{s\in I_2} a'_{is}x_s = b'_i, \quad i=1,\dots,k,$$

což lze přepsat jako

$$a'_{1j_1}x_{j_1} = b'_1 - \sum_{s\in I_2} a'_{1s}x_s - a'_{1j_2}x_{j_2} - a'_{1j_3}x_{j_3} - \dots - a'_{1j_k}x_k,$$

$$a'_{2j_2}x_{j_2} = b'_2 - \sum_{s\in I_2} a'_{2s}x_s - a'_{2j_3}x_{j_3} - \dots - a'_{2j_k}x_{j_k}, \qquad (a'_{2j_1}=0)$$

$$(S')\qquad a'_{3j_3}x_{j_3} = b'_3 - \sum_{s\in I_2} a'_{3s}x_s - a'_{3j_4}x_{j_4} - \dots$$

$$\vdots$$

$$a'_{k-1,j_{k-1}}x_{j_{k-1}} = b'_{k-1} - \sum a'_{k-1,s}x_s \quad - a' \dots$$

$0^{\#}$ $\qquad s\in I_2$ $\qquad \ldots a'_{r-1\, j_r} x_{j_r},$

$$\underbrace{a'_{r j_r}}_{0^{\#}} x_{j_r} = b'_r - \sum_{s\in I_2} a'_{rs} x_s .$$

---

Pro libovolnou volbu čísel $x_s$, $s\in I_2$ lze jednoznačně dopočítat $x_s$, $s\in I_1$ ze soustavy (S'): Z poslední rovnice vypočteme $x_{j_r}$, to dosadíme do $(r-1)$.-ní rovnice, vypočteme $x_{j_{r-1}}$, atd.

Množina řešení soustavy (S') (a tedy i (S)) je tvořena vektory $\vec{y}=[y_1,\dots,y_n]$, kde hodnoty $y_s$, $s\in I_2$ jsou zvoleny libovolně a hodnoty $y_s$, $s\in I_1$ jsou jednoznačně určeny soustavou (S').

Př.: $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} j_1=1 & j_2=2 & & j_3=4 & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow r \\ \\ \end{array}, \text{ tj.}$$

$$(S')\qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_4 + x_5 &= -1 \end{aligned}$$

---

$k = 3,\quad I_1 = \{1, 2, 4\},\quad I_2 = \{3, 5\}$

$$\rightsquigarrow\quad \begin{aligned} x_1 &= 1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 \\ x_2 &= 1 - x_3 - x_4 - x_5 \\ x_4 &= -1 - x_5 \end{aligned}$$

---

$x_3 = s \in \mathbb{R}$

$x_5 = t \in \mathbb{R}$

$x_4 = -1 - t$

$x_2 = 1 - s - (-1 - t) - t = 2 - s$

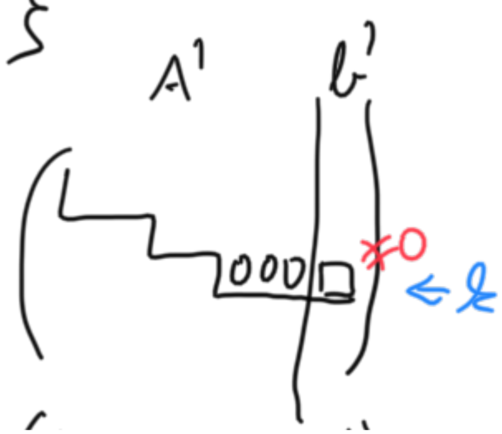
$x_1 = 1 - 2(2 - s) - s - 2(-1 - t) - t = -1 + s + t$

Množina řešení: $\{[-1 + s + t, 2 - s, s, -1 - t, t];\ s, t \in \mathbb{R}\}$

---

Metoda řešení soust. popsaná výše spolu s faktem, že $h(A) = h(A')$ a $h(A|b) = h(A'|b')$,

1)



dává větu 50 o řešitelnosti.


## Soust. n rovnic o n neznámých

Je-li matice $A$ regulární, pak po provedení Gaussovy eliminace je $A'$ též regulární, a tedy $k = n$, $I_1 = \{1, \dots, n\}$, $I_2 = \emptyset$.

Soustava (S') je tedy tvaru

$$
\begin{aligned}
a'_{11}x_1 &= b'_1 - a'_{12}x_1 - \dots - a'_{1n}x_n \\
&\vdots \\
a'_{n-1,n-1}x_{n-1} &= b'_{n-1} - a'_{n-1,n}x_n \\
a'_{nn}x_n &= b'_n
\end{aligned}
$$

Hodnoty $x_1, \dots, x_n$ lze tedy jednoznačně vypočítat a soustava (S) má právě jedno řešení.

Toto řešení má tvar $x = A^{-1} \cdot b$.

Vskutku, $Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$.

$Ax = b \quad / A^{-1}\cdot$ zleva

$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$

$\parallel$

$I x = x$

Důkaz: (i) ⇒ (ii) Je-li $A$ regulární, pak $Ax = b \iff x = A^{-1}b$.

(ii) ⇒ (iii) zřejmé

(iii) ⇒ (i) Předp., že $A$ není regulární. Pak $h(A) < n$ (V40), takže existuje transf. $T$ převádějící $A$ na schodovitou $A'$ (V37(i)), přičemž $A'$ má posl. řádek nulový (V37(iii)).

Položme $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M(n \times 1)$. Pak soustava $A'x = c$ nemá řešení. Dle V37(ii) existuje $b \in M(n \times 1)$ takové, že $c = T(b)$.

Pak T49 $Ax = b$ nemá řešení, což je spor s předpokladem. $\square$

Pozn.: Cramerovo pravidlo má spíše teoretický, než praktický význam. Hodí se jen pokud chceme vypočítat např. jen jednu proměnnou.

Důkaz: Zvolme pevně $j \in \{1, \dots, n\}$.

Dle předp. je

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}+\dots+x_j\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}+\dots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

Odtud

$$\underbrace{x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}+\dots+\boxed{1}\begin{pmatrix}x_ja_{1j}-b_1\\ \vdots\\ x_ja_{nj}-b_n\end{pmatrix}+\dots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}}_{\text{LK jistých vektorů s koef. } x_1,\dots,1,\dots,x_n}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

netriviální

Tedy vektory jsou LZ, neboli matice

$$B=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{n1}\\ & \dots & \\ x_ja_{1j}-b_1 & \dots & x_ja_{nj}-b_n\\ & \dots & \\ a_{1n} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

má LZ řádky. Tudíž $h(B)<n$, neboli $\det B=0$ (V40, V45).

Dle V41 a V42 (i) je

$$0=\det B=x_1\begin{vmatrix}a_{11}\dots a_{n1}\\ \dots\end{vmatrix}\ \dots\ \begin{vmatrix}a_{11}\dots a_{n1}\\ \dots\end{vmatrix}\ \dots\ \begin{vmatrix}a_{11}\dots a_{n1}\end{vmatrix}$$

$$0 = \det B - x_j \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{nj} \\ & \cdots & \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A^T} - \begin{vmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ & \cdots & \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_j \cdot \det A^T - \begin{vmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

transpozice

V47

$$= x_j \det A - \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ j \end{array}.$$

Odtud vzorec ihned plyne.

$\square$