(ii)

- Je-li T elem. řádková úprava 1. druhu (záměna 2 řádků), pak označíme $T^{-1} := T$
- Je-li T elem. ř. ú. 2. druhu, vynásobení i-tého ř. číslem $\lambda \neq 0$, pak označíme T^{-1} e.ř.ú., která vynásobí i-tý ř. číslem $\frac{1}{\lambda} \neq 0$.
- Je-li T el.ř.ú. 3. druhu, kdy k i-tému ř. přičteme λ-násobek j-tého ř., $i \neq j$, pak ozn. T^{-1} e.ř.ú., která k i-tému ř. přičte $(-\lambda)$-násobek j-tého ř.

Zjevně platí, že $A \overset{T}{\rightsquigarrow} B \iff B \overset{T^{-1}}{\rightsquigarrow} A$ pro libovolnou e.ř.ú. T aplikovatelnou na matice o m řádcích a každou $A \in M(m \times n)$.

Nechť nyní T_1 je transf. tvořená posloupností $P_1, \dots, P_k$ e.ř.ú.

Pak za T_2 zvolím transf. tvořenou posl. $P_k^{-1}, \dots, P_1^{-1}$ e.ř.ú.

Pak $\forall A \in M(m \times n)$ platí, že

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A & \overset{P_1}{\rightsquigarrow} & A_1 & \overset{P_2}{\rightsquigarrow} & A_2 & \overset{P_3}{\rightsquigarrow} & \cdots & A_{k-1} \overset{P_k}{\rightsquigarrow} & B \\
 & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\
A & \overset{P_1^{-1}}{\leftsquigarrow} & A_1 & \overset{P_2^{-1}}{\leftsquigarrow} & A_2 & \overset{P_3^{-1}}{\leftsquigarrow} & \cdots \leftsquigarrow & A_{k-1} \overset{P_k^{-1}}{\leftsquigarrow} & B
\end{array},
$$

tedy $A \overset{\vec{v}_1}{\rightsquigarrow} B \Leftrightarrow B \overset{\vec{v}_2'}{\rightsquigarrow} A$.

$$\lambda_1 \vec{\mu}^1 + \dots + \underbrace{\lambda_j \overset{\neq 0}{c}}_{\lambda_j'} \vec{\mu}^j + \dots + \lambda_n \vec{\mu}^n = o$$

(iii) E.ř.ú. 1. a 2. druhu nemění hodnost matice.

Nyní ukážeme, že e.ř.ú. 3. druhu nezmění hodnost matice:

Nechť $v^1, \dots, v^m$ jsou řádkové vektory matice A a $h(A) = l \le m$.

BÚNO $v^1, \dots, v^l$ LN. Provedeme na A e.ř.ú. 3. druhu. $\rightsquigarrow A'$.

a) Pokud se nezměnily řádky $v^1, \dots, v^l$, pak $h(A') \ge l = h(A)$.

b) Pokud se změní některý z $v^1, \dots, v^l$, BÚNO můžeme předpokládat, že děláme úpravu $v^l \rightsquigarrow v^l + \lambda \cdot v^i$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq l$.

α) Jsou-li $v^1, \dots, v^{l-1}, v^i$ LN, pak $h(A') \ge l = h(A)$.

β) Nechť $v^1, \dots, v^{l-1}, v^i$ LZ.

$\exists\, \beta_1, \dots, \beta_l$ ne všechny 0, že

$$\beta_1 v^1 + \dots + \beta_{l-1} v^{l-1} + \overset{\neq 0}{\beta_l} v^i = o$$

$v^1, \dots, v^{l-1}$ LN $\Rightarrow B_l \neq 0 \Rightarrow$

v^i lze vyjádřit jako LK $v^1, \dots, v^{l-1}$, např.

$$v^i = \tau_1 v^1 + \dots + \tau_{l-1} v^{l-1}.$$

Tvrdím, že $v^1, \dots, v^{l-1}, v^l + \lambda v^i$ jsou LN:

Nechť $\mu_1 v^1 + \dots + \mu_{l-1} v^{l-1} + \mu_l (v^l + \lambda v^i) = o$ pro nějaká $\mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{R}$.

Pak $\mu_1 v^1 + \dots + \mu_{l-1} v^{l-1} + \mu_l \left(v^l + \lambda \sum_{j=1}^{l-1} \tau_j v^j\right) = o$

$$\parallel$$

$$\underbrace{(\mu_1 + \mu_l \lambda \tau_1)}_{0} v^1 + \dots + \underbrace{(\mu_{l-1} + \mu_l \lambda \tau_{l-1})}_{\overset{\shortparallel}{0}} v^{l-1} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\mu_l} v^l = o$$

$v^1, \dots, v^l$ LN $\Rightarrow$

$$\mu_l = 0 \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_{l-1} = 0$$

Tedy $v^1, \dots, v^{l-1}, v^l + \lambda v^i$ jsou LN $\Rightarrow h(A') \geq l = h(A)$.

Dohromady dostáváme, že $h(A) \leq h(B)$ pro $B = T(A)$.

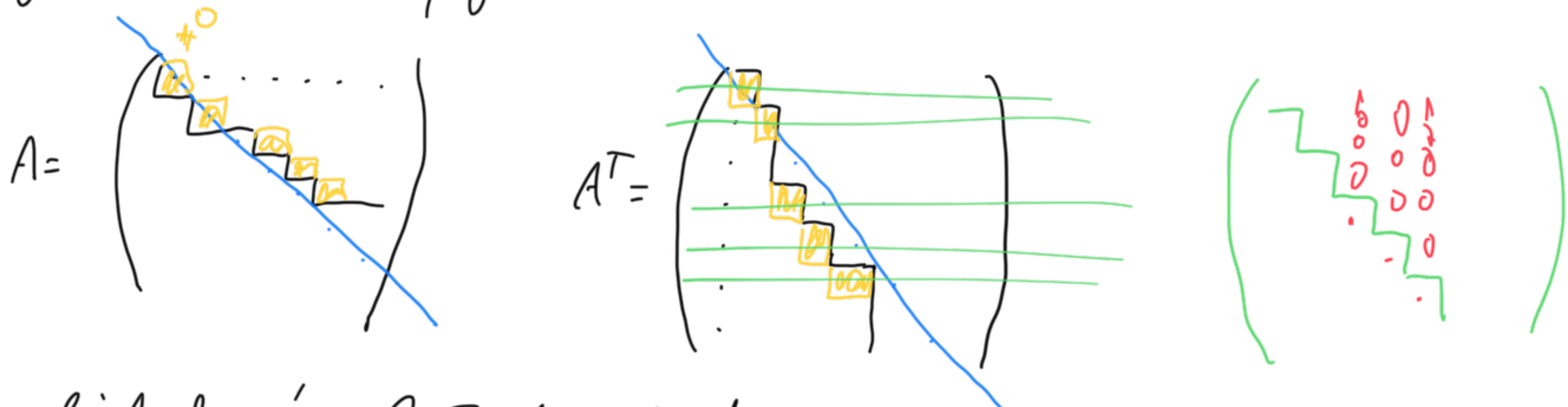
Směr: Inverze (m) el. transf. $\exists$ taková, že $A = \mathcal{S}(B)$.
Dle právě dokázaného je tedy $h(B) \le h(A)$. $\Big\} \; h(A) = h(B)$

$\square$

<u>Pozn.:</u> $\underline{h(A^T) = h(A)}$: Stačí ukázat, že $h(A^T) \ge h(A)$. Pak totiž

$$h(A) = h((A^T)^T) \ge h(A^T).$$

Je-li A schodovitá, je to snadné:



Je-li A obecná, pak $\exists$ transf. převádějící A na schodovitou B.

Odpovídající „sloupcová transf." převádí A^T na B^T.

Dle předchozí pozn. $h(A^T) = h(B^T)$.

B je schodovitá $\Rightarrow h(B) \le h(B^T) = h(A^T)$.

$h(A)$

Důkaz: Stačí pro e. ř. ú.:

$$\begin{tikzcd} AB \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[r, bend right, "\tau_1"'] \arrow[rrrr, bend left, "\tau"] \arrow[rrrr, bend right=50, "\tau"'] & A_1B \arrow[r, "\tau_2"] \arrow[r, bend right, "\tau_2"'] & A_2B \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\tau_k"] \arrow[r, bend right, "\tau_k"'] & A_kB \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} AB \arrow[r, "\tau"] \arrow[r, bend right, "\tau"'] & A'B \end{tikzcd}$$

Označme $C = AB$, $a_1, \dots, a_m$ řádky A

$c_1, \dots, c_m$ řádky C

Pak $c_j = a_j \cdot B$, $j = 1, \dots, m$

Pro e. ř. ú. 1. a 2. druhu vzorec $(\tau(C) = \tau(A) \cdot B)$ platí.

3. druh: přičteme k p-tému ř. λ-násobek q-tého ř., $p \neq q$.

Pak p-tý ř. matice $\tau(A)$ je roven $a_p + \lambda a_q$,

p-tý ř. matice $\underset{\tau''(AB)}{\tau(C)}$ je roven $c_p + \lambda c_q = a_p B + \lambda a_q B =$

$= \underbrace{(a_p + \lambda a_q) \cdot B}$

n-tý ř. matice $T(A)\cdot B$

Ostatní řádky se nezměnily $\Rightarrow$ $T(AB) = T(C) = T(A) \cdot B$.

$\square$