Motivace: lineární rovnice $a \cdot x = b$, $a, b \in \mathbb{R}$

neznámá $x \in \mathbb{R}$

řešení $x = \frac{b}{a}$

podrobněji: a) $a = 0$, $b = 0$

nekonečně řešení, $x \in \mathbb{R}$

b) $a = 0$, $b \neq 0$

žádné řešení

c) $a \neq 0$

$$a \cdot x = b \quad / \cdot a^{-1}$$

$$\underbrace{a^{-1} \cdot a}_{1} \cdot x = a^{-1} \cdot b$$

$$\underbrace{1 \cdot x}_{x} = a^{-1} \cdot b$$

---

soustava lineárních rovnic:

$$x + y = 2$$
$$x - y = 1$$

neznámé $x, y \in \mathbb{R}$

a) $y = 2 - x$

$x - 2 + x = 1$

$2x = 3$

b) sečteme rovnice

$2x = 3$

$\vdots$

$x = \frac{3}{2}, \ y = \frac{1}{2}$

obecně: $n \in \mathbb{N}$, n rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,\dots,n$ | neznámé $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$

Otázky:
- existuje alespoň 1 řešení?
- kolik řešení existuje?
- najít (všechna) řešení

$$\begin{aligned} x+y&=1 \Rightarrow 2x+2y=2 \\ 2x+2y&=1 \end{aligned}$$ nemá řešení

$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ 2x+2y&=2 \end{aligned}$$ nekonečně řešení

$\downarrow$

najdeme „ekvivalentní" soustavu:

$$\tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1$$
$$\tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2$$
$$\vdots$$
$$\tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n$$

Odpovědi: teorie matic

<u>Pozn.:</u> • Body prostoru $\mathbb{R}^n$ $\vec{x}=[x_1,\dots,x_n]$ budeme někdy chápat jako tzv. <u>řádkový vektor</u>, tj. matici typu $1\times n$

$$\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in M(1\times n),$$

jindy jako tzv. <u>sloupcový vektor</u>, tj. matici typu $n\times 1$,

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\in M(n\times 1).$$

• Máme-li <u>řádkové</u> vektory $\vec{u}^1,\dots,\vec{u}^m\in\mathbb{R}^n$, pak symbolem $\begin{pmatrix}\vec{u}^1\\ \vdots \\ \vec{u}^m\end{pmatrix}$ značíme matici typu $m\times n$, jejíž i-tý řádek je roven vektoru $\vec{u}^i$, $i=1,\dots,m$.

Podobně, máme-li <u>sloupcové</u> vektory $\vec{v}^1,\dots,\vec{v}^n\in\mathbb{R}^m$, pak $(\vec{v}^1,\dots,\vec{v}^n)$ označuje matici typu $m\times n$ s j-tým sloupcem rovným $\vec{v}^j$, $j=1,\dots,n$.

Pozn.: Prvek matice AB s indexem ij vypočteme tak, že vezmeme i-tý řádek matice A a j-tý sloupec matice B (což jsou vektory stejného typu) a ty „skalárně vynásobíme", tj. jejich odpovídající prvky mezi sebou vynásobíme a tato čísla pak sečteme.

Př.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 3\cdot 0 & \dots \\ & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 13 & 15 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Pozn.: Definice násobení matic souvisí např. s reprezentací lineárních zobrazení (viz později), ale také se soustavami lin. rovnic: soustavu

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \; \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m$$

lze pomocí maticového násobení přepsat jako

$$\underline{A \cdot x = b}\,,\quad \text{kde } A = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} \in M(m\times n),$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M(n\times 1)$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M(m\times 1)$$

<u>Pozn.:</u> • Je-li $A \in M(1\times n)$, $B \in M(n\times 1)$.

Pak $AB \in M(1\times 1)$, tj. výsledek AB je vlastně číslo.

(AB odpovídá skal. součinu vektorů)

• $A \in M(m\times n)$, $B \in M(n\times k)$

Označme řádky matice A jako $\vec{u}^1, \dots, \vec{u}^m \in M(1\times n)$,

sloupce mat B jako $\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^k \in M(n\times 1)$

$\vec{u}^i \cdot \vec{v}^j \in M(1\times 1)$, $\vec{u}^i \cdot \vec{v}^j = c_{ij}$, kde $(c_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots k}} = AB.$

Tedy $$AB = A(\vec{v}^1, \ldots, \vec{v}^k) = (A\cdot\vec{v}^1, \ldots, \underbrace{\overset{M(m\times n)}{A}\cdot\overset{\in M(n\times 1)}{\vec{v}^k}}_{\in M(m\times 1)}) =$$

$$= \begin{pmatrix}\vec{u}^1\\ \vdots\\ \vec{u}^m\end{pmatrix}\cdot B = \begin{pmatrix}\vec{u}^1\cdot B\\ \vdots\\ \vec{u}^m B\end{pmatrix}.$$