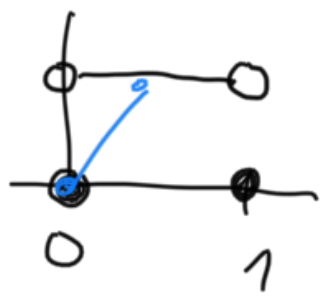
<u>Pozn.</u>: • M konvexní $\Leftrightarrow$ každá úsečka s koncovými body v M leží celá v M.

• $M, N \subset \mathbb{R}^n$ konvexní, pak $M \cap N$ je konvexní, ale $M \cup N$ <u>nemusí</u> být konvexní!

• $M \subset \mathbb{R}$ konvexní $\Leftrightarrow$ M je interval (L3 z MA I)



konkávní na $\langle 0, 1 \rangle$

Tedy konkávní fce nemusí být spojitá na D_f.

<u>Důkaz</u>: Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zvolme $a, b \in Q_\alpha$ libovolně. Pak $f(a) \geq \alpha$, $f(b) \geq \alpha$.

Pro každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ pak platí, že

$$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \geq \lambda \cdot \alpha + (1-\lambda) \cdot \alpha = \alpha,$$

neboli $\lambda a + (1-\lambda) b \in Q_\alpha$.

$\square$

Důkaz: Dokážeme (i)

„⇒" Zvolme libovolná $x, y \in G$.

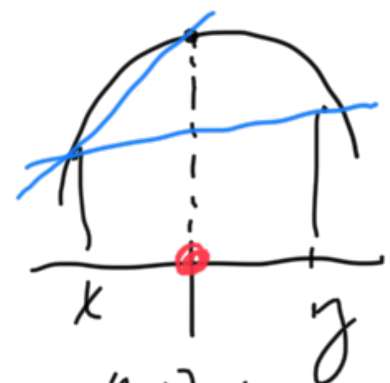
f je konkávní

je-li $\lambda \in (0,1)$, pak $f(x+\lambda(y-x)) = f((1-\lambda)x+\lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Tedy $f((1-\lambda)x+\lambda y) - f(x) \geq \lambda(f(y)-f(x))$, tj.

$$\frac{f((1-\lambda)x+\lambda y) - f(x)}{\lambda} \geq f(y) - f(x).$$

$$\frac{f((1-\lambda)x+\lambda y) - f(x)}{\lambda \cdot \rho(x,y)} \geq \frac{f(y)-f(x)}{\rho(x,y)}$$



Podle věty o limitě a uspořádání je

$$\lim_{\lambda \to 0+} \frac{f((1-\lambda)x+\lambda y) - f(x)}{\lambda} \geq f(y) - f(x).$$

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) = f(x_1+\lambda(y_1-x_1), \dots, x_n+\lambda(y_n-x_n)) = f(\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)) =: F(\lambda)$$

položme $\varphi_i(\lambda) = x_i + \lambda(y_i - x_i)$ ... třídy C^1

řez nad přímkou

$$\frac{f((1-\lambda)x+\lambda y) - f(x)}{\lambda} = \frac{F(\lambda)-F(0)}{\lambda}$$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{F(t)-F(0)}{t} \geq f(y)-f(x)$$

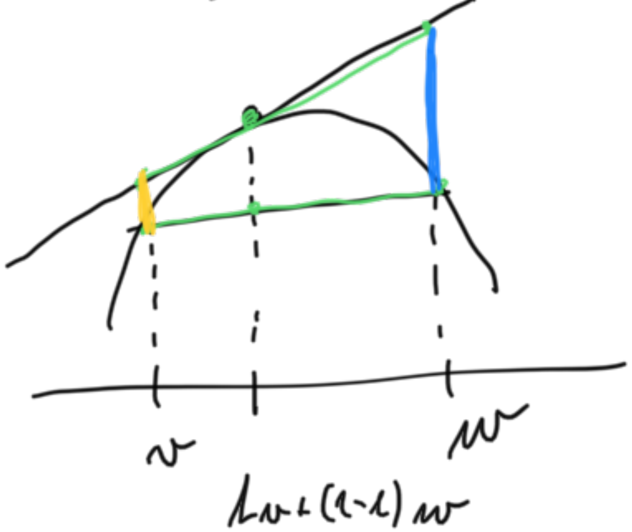
$\|$ → složení C^1 fcí $\quad [\varphi_1(0),\dots,\varphi_n(0)]$

$$F'(0) \underset{V21}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot \varphi_i'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot (y_i - x_i),$$

tedy

$$f(y) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot (y_i - x_i).$$

„⇐" Zvolme libovolné $v, w \in G$ a $t \in \langle 0,1\rangle$.



Položme $x = tv + (1-t)w$, $y = v$. Pak dle předp.

$$t\cdot\Big)\quad f(v) \leq f(tv+(1-t)w) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tv+(1-t)w)\cdot \underbrace{(v_i - tv_i - (1-t)w_i)}_{(1-t)(v_i - w_i)}.$$

Dále položme $x = tv + (1-t)w$, $y = w$. Pak

$$(1-t)\cdot\Big)\quad f(w) \leq f(tv+(1-t)w) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tv+(1-t)w)\cdot (w_i - tv_i - (1-t)w_i)$$

$\lambda(w_i - v_i)$

Vynásobíme první nerovnost λ, druhou $(1-\lambda)$ a sečteme:

$$\lambda f(v) + (1-\lambda) f(w) \le \lambda f(\lambda v + (1-\lambda) w) + (1-\lambda) f(\lambda v + (1-\lambda) w) =$$
$$= f(\lambda v + (1-\lambda) w)$$

$\square$

Důkaz: $\forall y \in G$ dle V29 platí, že

$$f(y) \le f(a) + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}_{=0} \cdot (y_i - a_i) = f(a).$$

$\square$

Pozn.: • f je kvazikonkávní $\Leftrightarrow$ vezmeme-li $a, b \in M$, pak f nabývá na úsečce mezi a, b nejmenší hodnoty „na kraji" (tj. buď v a nebo v b).

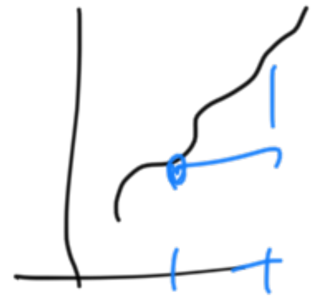
• konk. $\Rightarrow$ kvazikonk.

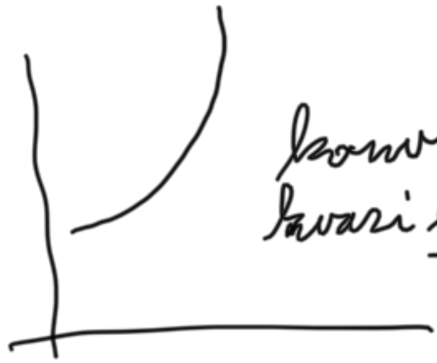
$$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \ge \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \ge \lambda \min\{f(a), f(b)\} + (1-\lambda) \min\{f(a), f(b)\} =$$

$$\underset{\min\{f(a),f(b)\}}{\geq} \qquad \underset{\min\{f(a),f(b)\}}{\geq} \qquad = \min\{f(a),f(b)\}$$

• na $\mathbb{R}$: libovolná monotónní fce je kvazikonkávní

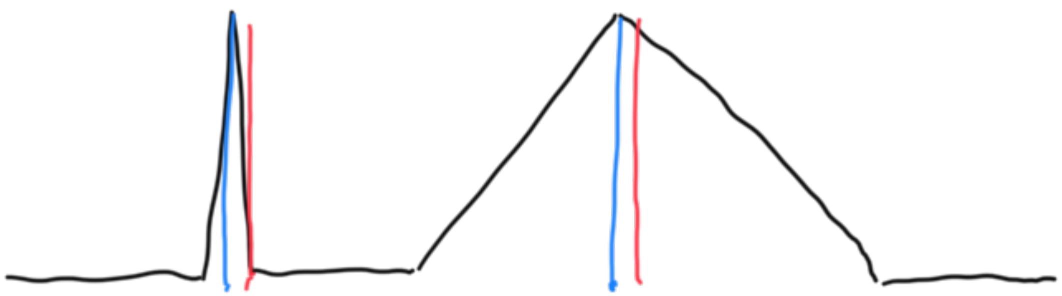
ryze – " –   ryze – " –





konvexní
kvazikonkávní

konvexní
není kvazikonkávní



Důkaz: Sporem: nechť $a, b \in M$, $a \neq b$ jsou body maxima f na M.

Z def. ryzí kvazikonk.:

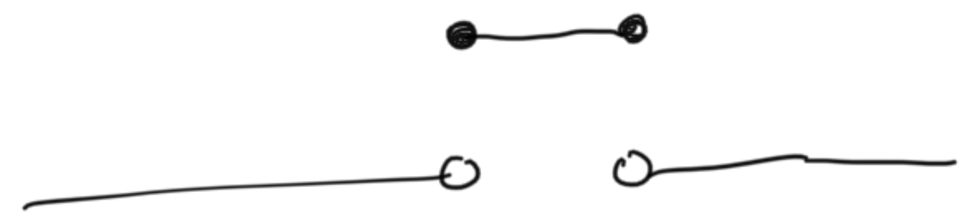
$$f\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b}_{\in M}\Big) > \min\{f(a), f(b)\} = f(a) = f(b) = \max_M f.$$

spor $\square$

Důkaz: V13 M je kompaktní
V15 f nabývá na M maxima
V31 max. je určeno jednoznačně

$\square$

Pozor: kvazikonkávní fce na otevřené konvexní množině **nemusí** být spojitá (na rozdíl od konkávní):



Důkaz: „$\Rightarrow$“ Zvolme libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ a $a, b \in Q_\alpha$ a $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$.

$$\text{Pak } f(\lambda a + (1-\lambda) b) \geq \min\{\underbrace{f(a)}_{\geq \alpha}, \underbrace{f(b)}_{\geq \alpha}\} \geq \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda a + (1-\lambda) b \in Q_\alpha .$$

„$\Leftarrow$“ Zvolme libovolné $a, b \in M$, $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$.

$$\text{Položme } \alpha = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Pak $f(a) \geq \alpha$, $f(b) \geq \alpha \Rightarrow a, b \in Q_\alpha$

Φ_α je konvexní $\Rightarrow \lambda a + (1-\lambda) b \in \Phi_\alpha \Rightarrow$

$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \geq \alpha = \min\{f(a), f(b)\}$. $\square$