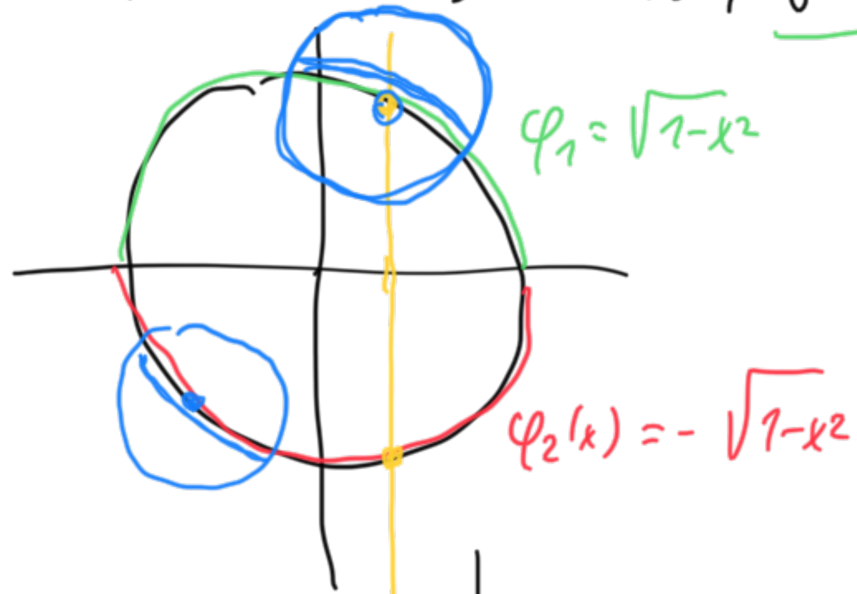
$\{[x,y];\ x^2+y^2=1\} = \{[x,y];\ y=\varphi_1(x)\} \cup \{[x,y];\ y=\varphi_2(x)\}$



rovnice $x^2+y^2=1$

parametr ↑ ↑ neznámá

$y=\varphi(x)$ … řešení rovnice v závislosti na parametru x

$x \in \langle -1, 1\rangle$

pro $x \in (-1,1)$ existují právě dvě řešení

$F(x,y) = x^2+y^2$

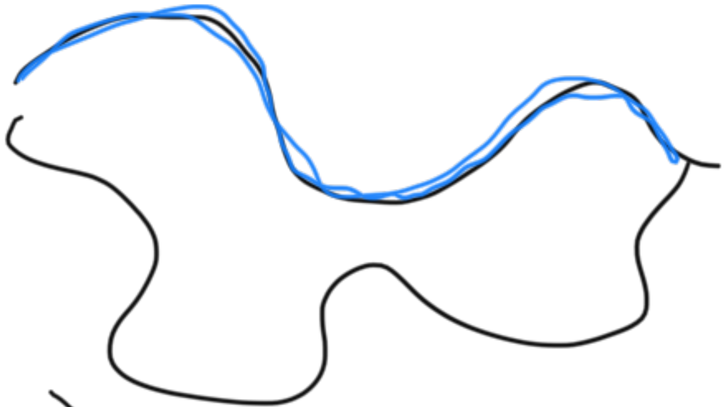
$\{[x,y];\ \underbrace{F(x,y)=c}_{\text{rovnice}}\}$ …. vrstevnice fce F dvou proměnných

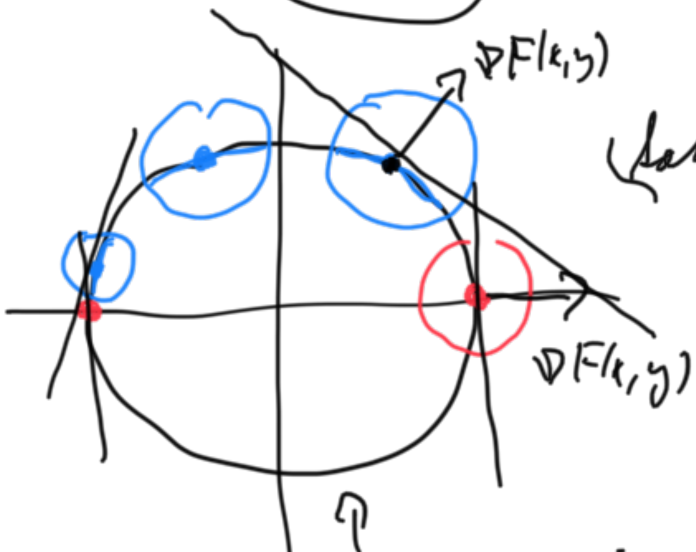
stačí $c=0$: $\{[x,y];\ F(x,y)=0\}$ | $F(x,y) = x^2+y^2-1$

studuji rovnici $F(x,y)=0$: lze ji „vyřešit" vzhledem k y?

(tj. lze jednoznačně „vyjádřit" y pomocí x?)

$y \sin y + x = 0$ … nejde explicitně vyjádřit

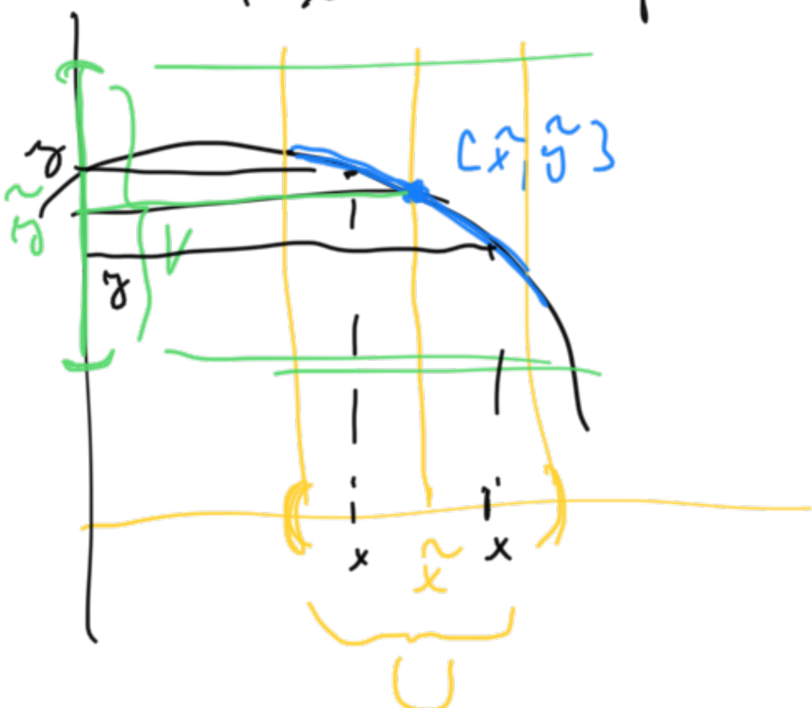




jako množinu nelze vyjádřit jako graf fce v bodech, kde tečna je rovnoběžná s osou y, tj.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0$$

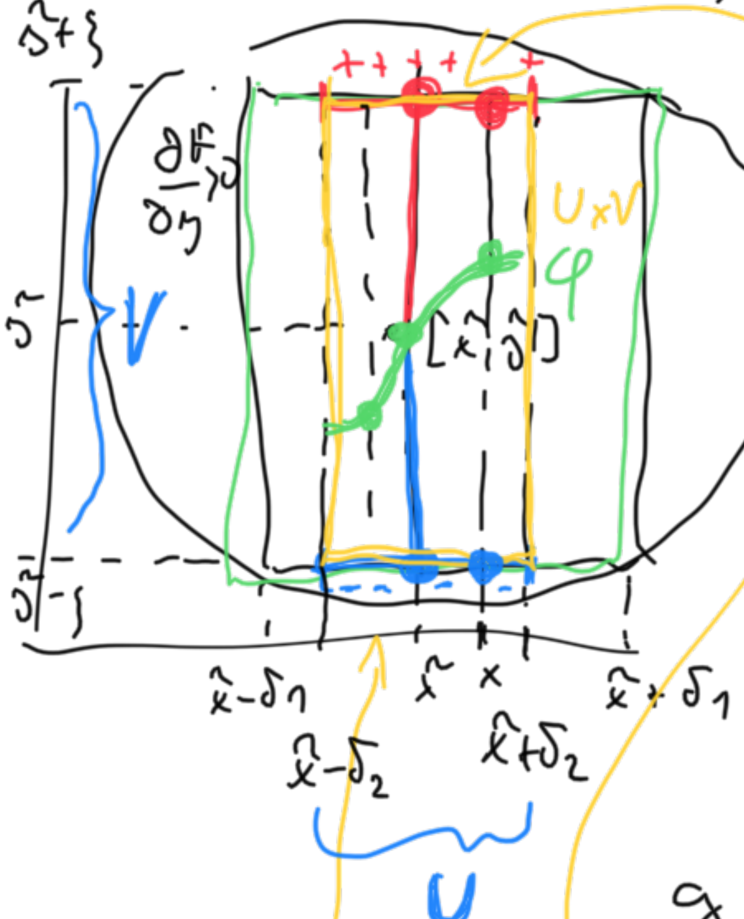
vrstevnice fce $F(x,y)=x^2+y^2-1$



Důkaz: Dokážeme pouze 1. část (existence a jednoznačnost), pro $n=1$.

BÚNO $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})>0$. (jinak bychom vzali fci $-F$)

Protože $F\in C^1(G)$, existují $\delta_1>0$, $\xi>0$ taková, že



$\forall [x,y]\in\langle\tilde{x}-\delta_1,\tilde{x}+\delta_1\rangle\times\langle\tilde{y}-\xi,\tilde{y}+\xi\rangle: \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)>0$

Tedy $g(t)=F(\tilde{x},t)$ je tedy rostoucí funkce na

$(g'=\frac{\partial F}{\partial y}>0)$

intervalu $\langle\tilde{y}-\xi,\tilde{y}+\xi\rangle$.

Protože $g(\tilde{y})=F(\tilde{x},\tilde{y})=0$, je

$g(t)>0$ pro $t\in(\tilde{y},\tilde{y}+\xi\rangle$

$g(t)<0$ pro $t\in\langle\tilde{y}-\xi,\tilde{y})$.

Speciálně $F(\tilde{x},\tilde{y}+\xi)=g(\tilde{y}+\xi)>0$,

$F(\tilde{x},\tilde{y}-\xi)=g(\tilde{y}-\xi)<0$

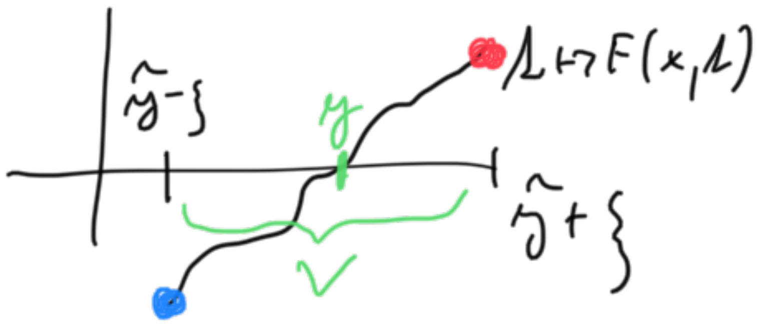
Protože F je spojitá v bodech $[\tilde{x},\tilde{y}+\xi]$ a $[\tilde{x},\tilde{y}-\xi]$, existuje $\delta_2>0$ takové, že $\forall x\in(\tilde{x}-\delta_2,\tilde{x}+\delta_2)$ je

$F(x,\tilde{y}+\xi)>0$ a $F(x,\tilde{y}-\xi)<0$

$\ldots \hat{y}+\xi)>0$ a $F(x,\hat{y}-\xi)<0$.

Položme $U=(\hat{x}-\delta_2,\hat{x}+\delta_2)$ a $V=(\hat{y}-\xi,\hat{y}+\xi)$.

Nyní $\forall x\in U$ platí: řez $t\mapsto F(x,t)$ je rostoucí a spojitá na $\langle\hat{y}-\xi,\hat{y}+\xi\rangle$.



Protože $F(x,\hat{y}+\xi)>0$ a $F(x,\hat{y}-\xi)<0$, dle Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot $\exists y\in V: F(x,y)=0$.

Protože $t\mapsto F(x,t)$ je rostoucí, tato y je právě jedno.

Důkaz tvrzení, že $\varphi\in C^1(U)$ je obtížnější – vynecháme.

Víme-li, že $\varphi\in C^1(U)$, vzorec pro derivaci φ snadno vypočteme:

Položme $g(x)=F(x,\varphi(x))$ pro $x\in U$.

Pak $g(x)=0$ pro $x\in U$, tj. g je konstantní, tedy $g'(x)=0$ pro $x\in U$.

Dle věty o derivaci sl. fce (V21):

$$0=g'(x)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\quad\forall x\in U,$$

kde $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))}$. $\square$

Pozn.: • O fci φ lze dokázat, že je tak „hladká", jako je „hladká" fce F:

je-li F třídy C^k (C^∞), pak φ je též třídy C^k (C^∞)!

• V23 lze chápat jako větu o „lokální jednoznačnosti" řešení rovnice $F(x,y)=0$.

• Někdy říkáme, že fce φ je implicitně zadaná rovnicí $F(x,y)=0$.

$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ ... explicitní zadání φ

φ řeší ... $x^2+y^2-1=0$ ... implicitní zadání