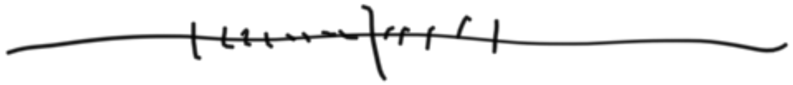
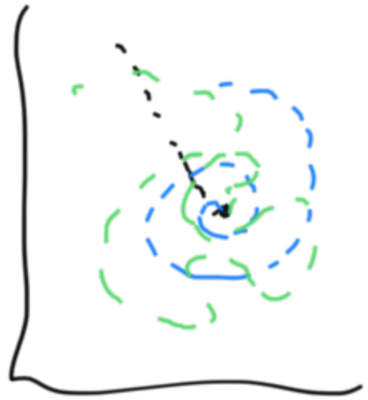
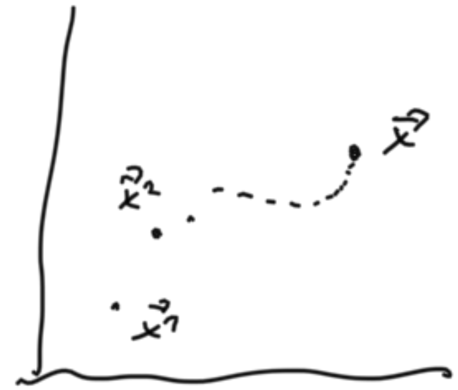







<u>Důkaz</u>: „$\Rightarrow$" Pokud $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k $x$, pak

$$\lim_{j\to\infty} \rho(x^j, x) = 0, \text{ tj.}$$

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k^j - x_k)^2} = 0$$

Pro libovolné $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ platí, že

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k^j - x_k)^2} \geq \sqrt{(x_{k_0}^j - x_{k_0})^2} = |x_{k_0}^j - x_{k_0}| \geq 0$$

$\downarrow j \to \infty$

$0$

$\Rightarrow$ dle VO2 policajtech je

$$\lim_{j\to\infty} |x_{k_0}^j - x_{k_0}| = 0$$

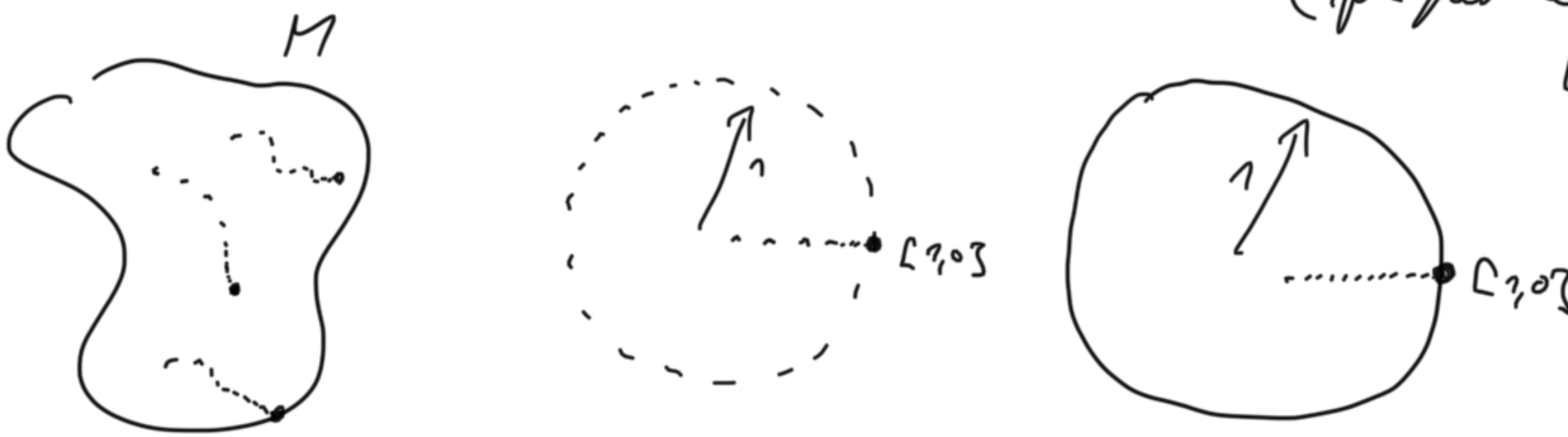
$\Leftrightarrow \lim_{j\to\infty} x_k^j = x_k$.

„$\Leftarrow$" Víme, že $\lim_{j\to\infty} |x_k^j - x_k| = 0 \quad \forall k \in \{1,\dots,n\}$

CHCI: $\lim_{j\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k^j - x_k)^2} = 0$

$\Downarrow$ AL, známá odmocniny a limity (případně spojitost $\sqrt{\ }$ + HEINE)

$\square$




Důkaz: Ukážeme, že (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

„(i) $\Rightarrow$ (ii)": Nechť $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$.

M je uzav. $\Rightarrow x \notin H(M) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r > 0$, že
- $B(x,r) \cap M = \emptyset$ ... nastane vždy, tj. $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \Rightarrow x$ je vnitřní bod $\mathbb{R}^n \setminus M$
- nebo
- $B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) = \emptyset$ ... nenastane, neboť $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Nechť $\{x^j\}$ prvků $M$ a nechť $x^j \to x$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}^n$:

Ukážeme sporem, že $x \in M$:

Není-li $x \in M$, pak $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$, což je otevřená množina,

tedy $\exists r > 0$: $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$, neboli $B(x,r) \cap M = \emptyset$.

Protože $x^j \to x$, tak $\exists j \in \mathbb{N}$: $x^j \in B(x,r)$, což je spor ($x^j \in M$)


„(iii) $\Rightarrow$ (i)" Chceme, že $H(M) \subset M$.

Nechť $x \in H(M)$. Pak $\forall j \in \mathbb{N}$: $B(x, \frac{1}{j}) \cap M \neq \emptyset$, tedy

$\forall j \in \mathbb{N}\ \exists x^j \in B(x, \frac{1}{j}) \cap M$.


Pak $\lim\limits_{j \to \infty} x^j = x$, neboť $0 \le \rho(x, x^j) < \frac{1}{j}$ a použijeme V o 2 polic.

Podle předp. (iii) $\Rightarrow x \in M$. $\square$

Důk. V6 plyne z (i)$\Leftrightarrow$(ii) ve V5, z V3 a z de Morganových pravidel.

Nejprve:
$$\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha}_{\text{otev.}} = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in A} (\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus F_\alpha}_{\text{otev. (V5)}})}_{\text{otev. (V3)}}$$

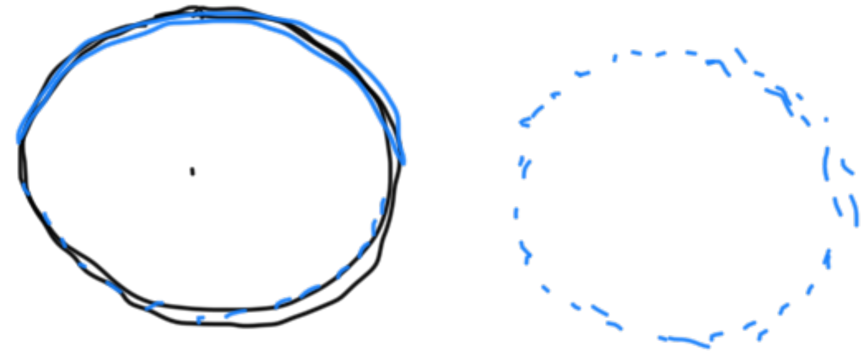
$\Downarrow$ V5

$\square$

Ota uzav.

Varování: Existují množiny, které nejsou ani otevřené, ani uzavřené:

$(0,1\rangle$



---

Je-li $x \in \operatorname{Int} M$, pak $\exists r>0: B(x,r) \subset M \subset N \Rightarrow x \in \operatorname{Int} N$.

Je-li $x \in \overline{M}$, pak

- $x \in M \subset N \subset \overline{N}$
- $x \in H(M)$
  - $x \in N \subset \overline{N}$
  - $x \notin N$

$\forall r>0: B(x,r) \cap M \neq \emptyset \Rightarrow B(x,r) \cap N \neq \emptyset$.

Protože navíc $x \notin N$, tak $B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus N) \neq \emptyset$

$\Leftarrow \; x \in H(N) \subset \overline{N}$

---

Důkaz: (iii) $M$ je otev. $\Leftrightarrow \forall x \in M: x \in \operatorname{Int} M \Leftrightarrow M \subset \operatorname{Int} M \Leftrightarrow M = \operatorname{Int} M$

(ii) Zvolme $x \in \operatorname{Int} M$, tj. $x$ je vnitřním bodem $M$, chci, že $x$ je vnitřním bodem $\operatorname{Int} M$.

$\Updownarrow$

$\exists r>0: B(x,r) \subset M$

Protože $B(x,r)$ je otevřená množina, je $B(x,r) \overset{(iii)}{=} \operatorname{Int} B(x,r)$.

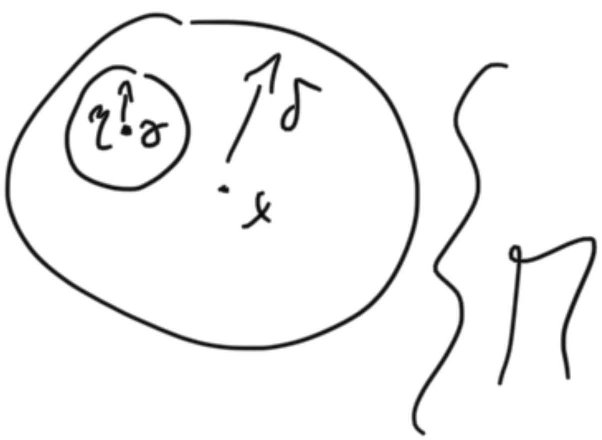
Dle pozorování: $B(x,r) = \operatorname{Int} B(x,r) \subset \operatorname{Int} M \Rightarrow x$ je vnitřní bod $\operatorname{Int} M$.

(i) Použijeme V5: ukážeme, že $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.

Nechť $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$. Pak $x \notin H(M)$, tj. $\exists \delta > 0$:

$$\underline{B(x,\delta) \cap M = \emptyset} \text{ nebo } \underbrace{B(x,\delta) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) = \emptyset}_{\text{nenastane } (x \notin M)}$$

$B(x,\delta)$ je otevřená $\Rightarrow \forall y \in B(x,\delta)\ \exists \eta > 0: B(y,\eta) \subset B(x,\delta)$




$\Rightarrow B(y,\eta) \cap M = \emptyset \Rightarrow y \notin H(M)$

$\Rightarrow \underline{B(x,\delta) \cap H(M)} = \emptyset \Rightarrow B(x,\delta) \cap \overline{M} = \emptyset$

$\Rightarrow B(x,\delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$, tj. $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ je otevřená

$\overset{V5}{\Rightarrow} \overline{M}$ je uzavřená. □

---

| | |
|---|---|
| $G$ je otev. v $\mathbb{R}^n$ a $G \subset M$ | $F$ uzav. v $\mathbb{R}^n$ a $M \subset F$ |
| $G = \operatorname{Int} G \subset \operatorname{Int} M$ | $F = \overline{F} \supset \overline{M}$ |

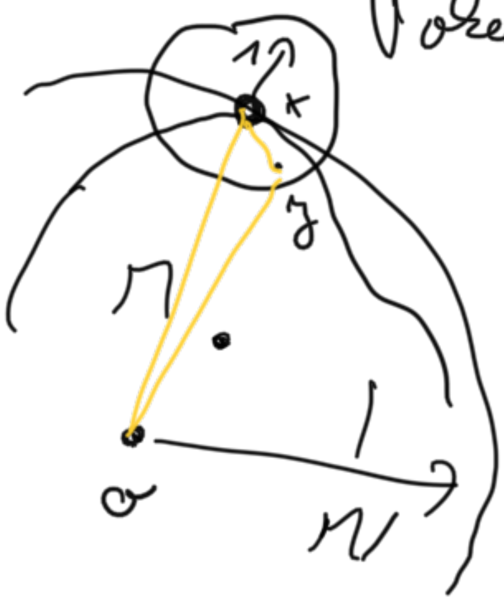
$G = \operatorname{int} G \subset \operatorname{int} M$
V7(iii) pozorování

$F = \overline{F} \supset \overline{M}$

---

**Důk.:** „$\Leftarrow$" triviální: $M \subset \overline{M}$

„$\Rightarrow$" $\exists r > 0: \; M \subset B(o, r).$




Pokud $x \in \overline{M}$, pak $\exists y \in M: \rho(x,y) < 1$

(pro $x \in M$, vezmeme $y = x$, pro $x \in H(M)$, vezmeme $y \in M \cap B(x,1)$)

Tedy $\rho(o,x) \le \rho(o,y) + \rho(y,x) < r + 1$

$\Rightarrow \overline{M} \subset B(o, r+1)$

$\square$