$\vec{a} = [a_1, \dots, a_n]$

$\vec{b} = [b_1, \dots, b_n]$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \le \underbrace{\sqrt{\sum a_i^2}}_{\text{velikost } \vec{a}} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum b_i^2}}_{\text{velikost } \vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\varphi$$

<u>Důkaz</u>: Je-li $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, pak nerovnost zjevně platí (dokonce $=$).

V opačném případě $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i_0} \neq 0$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2. \quad \text{Pak } f(x) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)}_{\alpha} x^2 + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i\right)}_{\beta} x + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}_{\gamma} =$$

$$= \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0$$

Pro $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \ge 0$

$\Rightarrow$ kvadratická rovnice $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ má nejvýše jeden reálný kořen.

Tedy $D = \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0.$

$$\overset{\shortparallel}{4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)} \leq 0$$

$\square$

<u>Značení</u>: $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{x} = [x_1, \dots, x_n]$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

x_i … i-tá souřadnice prvku $\vec{x}$

- $o = [0, \dots, 0]$ … počátek
- $e^j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ … j-tý kanonický bázový vektor

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\uparrow$ j-tá pozice

$n = 1$ … $\mathbb{R}$ … přímka

$n=2 \ldots \mathbb{R}^2 \ldots$ rovina

$n=3 \ldots \mathbb{R}^3 \ldots$ prostor

$\mathbb{R}^4 \ldots$ časoprostor

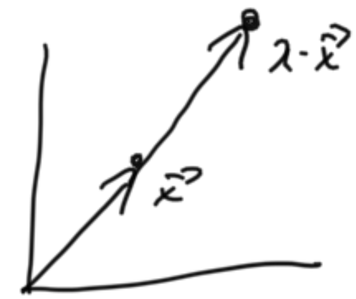
Operace s prvky $\mathbb{R}^n$

SČÍTÁNÍ: $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\vec{y} = [y_1, \ldots, y_n]$

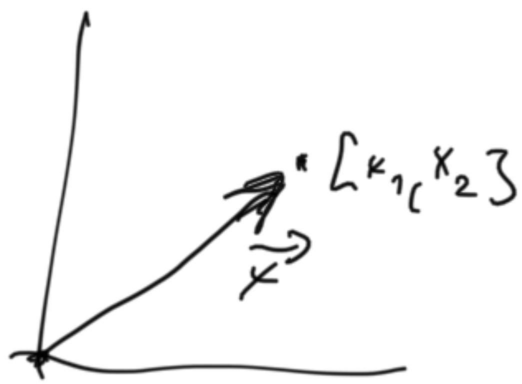
$$\vec{x}+\vec{y} = [x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n]$$

NÁSOBENÍ REÁLNÝM ČÍSLEM (skalárem): $x = [x_1, \ldots, x_n]$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot x = [\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n]$$



Někdy je užitečné pohlížet na prvky $x \in \mathbb{R}^n$ jako na vektory, tj. orientovanou úsečku z o do x.



Platí řada pěkných pravidel odvozených z pravidel pro $\mathbb{R}$ čísla.

Např.: $\vec x + \vec y = \vec y + \vec x$

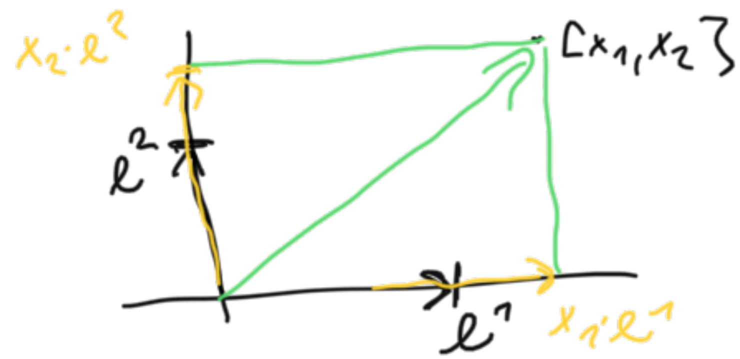
$\lambda(\vec x + \vec y) = \lambda \vec x + \lambda \vec y$

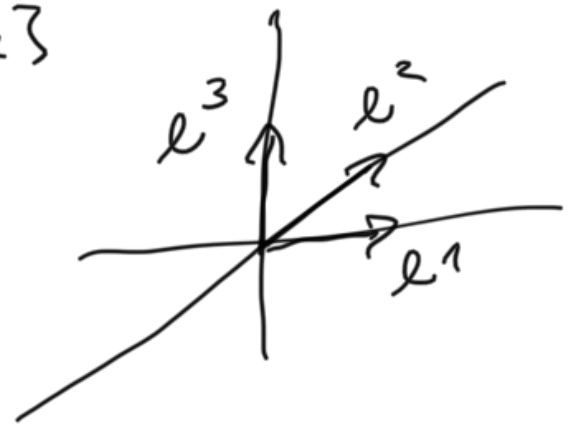
Množina $\mathbb{R}^n$ spolu se sčítáním a náso. skalárem ... prostor $\mathbb{R}^n$

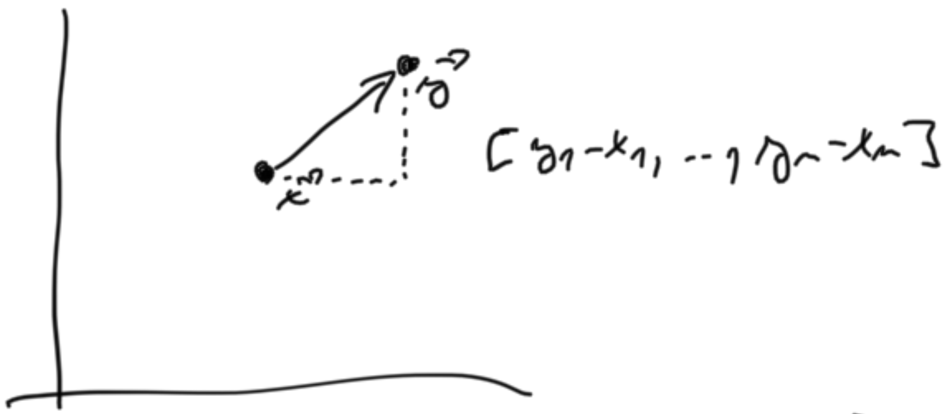
Prvky $\mathbb{R}^n$ .... body prostoru $\mathbb{R}^n$

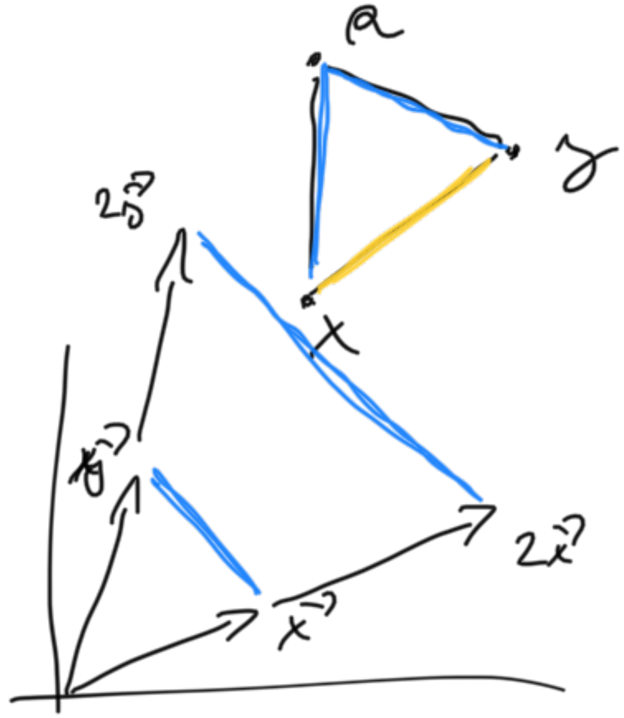
(vektory)

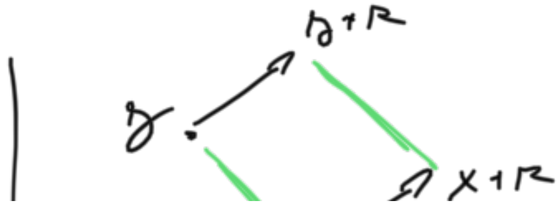
Pozorování: Pro každý $\vec x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ je $\vec x = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{x_j \cdot \vec e^{\,j}}_{=[0,\dots,0,x_j,0,\dots,0]}$

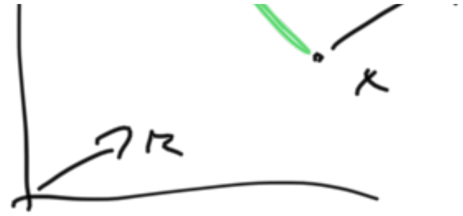












Pozn.: Funkce ρ: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \langle 0,+\infty)$, která splňuje (i)–(iii) se nazývá <u>metrika</u>.

<u>Důkaz</u> (iii): Mějme $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Chceme ukázat, že

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n (\underbrace{x_i-z_i}_{a_i})^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (\underbrace{z_i-y_i}_{b_i})^2}.$$

$a_i+b_i = x_i-y_i$, $i=1,\dots,n$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

$$\| $$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^2+2a_ib_i+b_i^2)}$$

$\Updownarrow$ nezáp. čísla, můžu nerovnost umocnit

$$\cancel{\sum a_i^2} + \cancel{2}\sum a_ib_i + \cancel{\sum b_i^2} \le \cancel{\sum a_i^2} + \cancel{2}\sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2} + \cancel{\sum b_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

to je Cauchyova nerovnost (V1) $\square$

$\underline{n=1}$ $\quad \rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{1} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$

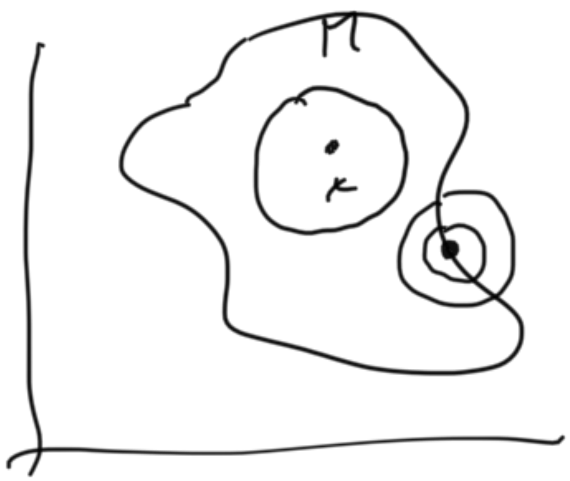
$B(x,r) = (x-r, x+r)$ ... interval (otevřený)

$\quad = \{y;\ |x-y| < r\}$

$\underline{n=2}$ ... kruh

$\underline{n=3}$ ... koule

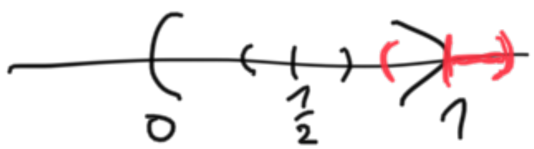
<u>Př.:</u>



$M = (0,1\rangle$ bod $\frac{1}{2}$ je vnitřní m bodem M

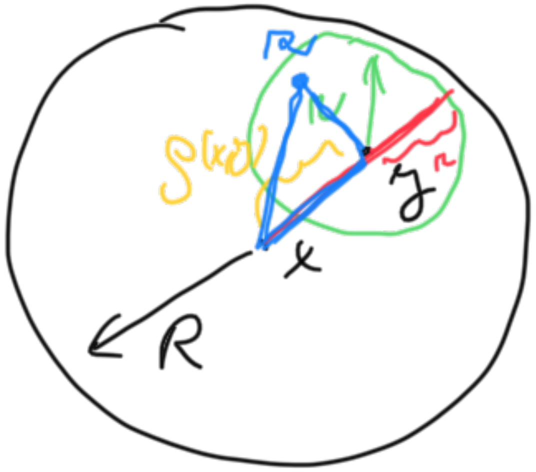
bod 1 není — " —

$\Rightarrow$ M není otevřená



<u>Př.:</u> $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$. Otevřená koule $B(x,R)$ je množina otevřená v $\mathbb{R}^n$.

Zvolme $y \in B(x,R)$ libovolné. Chci: y je vnitřní bod $B(x,R)$.



$\Downarrow$

$\rho(x,y) < R$. Položme $r = R - \rho(x,y)$. Pak $r > 0$.

Tvrdíme, že $B(y,r) \subset B(x,R)$:

Je-li $z \in B(y,r)$, pak

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) < \rho(x,y) + r = R,$$

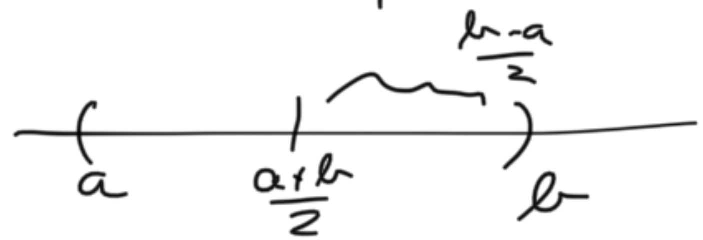
△ ner.

neboli $z \in B(x,R)$.

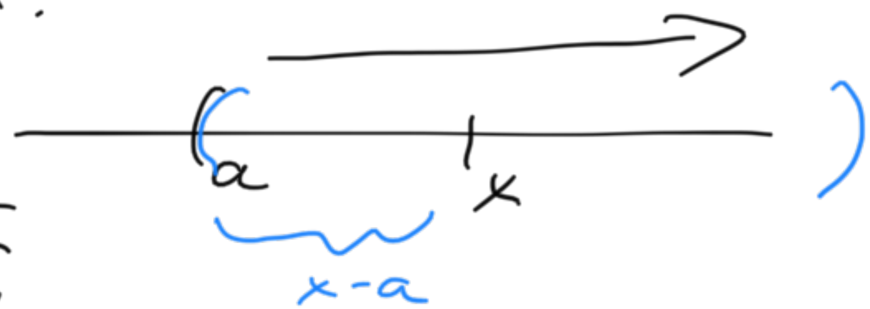
Př.: Interval $I \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina v $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ I je otevřený interval.

„$\Leftarrow$" Je-li $I = (a,b)$, $a < b$

Pro $a, b \in \mathbb{R}$: $(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$, tedy (a,b) je otevřený dle předchozího př.



Je-li $I = (a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

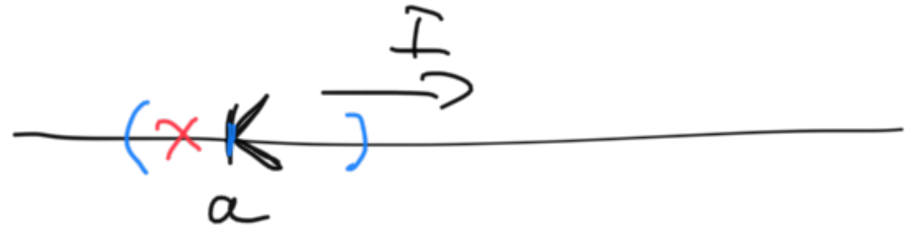


Pro $x \in I$ je $B(x, x-a) \subset I$

Tedy x je vnitřním bodem.

Případy $(-\infty,a)$, $(-\infty,+\infty)$ analogicky. Případ $(a,a)=\emptyset$ je zřejmý.

„$\Rightarrow$" Je-li $a\in I$ krajním bodem I, pak pro žádné $r>0$ není $B(a,r)\subset I$ $\Rightarrow$

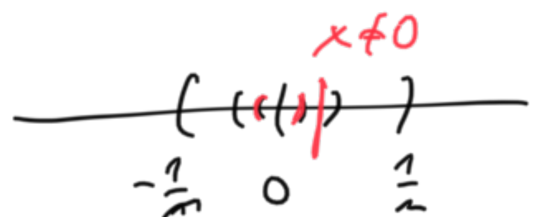


a není vnitřní bod I

$\Rightarrow$ I není otevřená mn. v $\mathbb{R}$

<u>Pozn.:</u> $G_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$ .... otevřené mn.

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n=\{0\}$ ... není otevřená



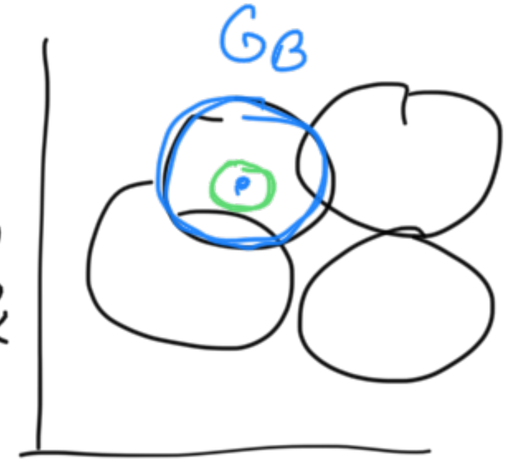
Tedy vl. (iii) ve V3 <u>neplatí</u> pro nekonečně mnoho množin.

<u>Důkaz:</u> (i) zřejmá

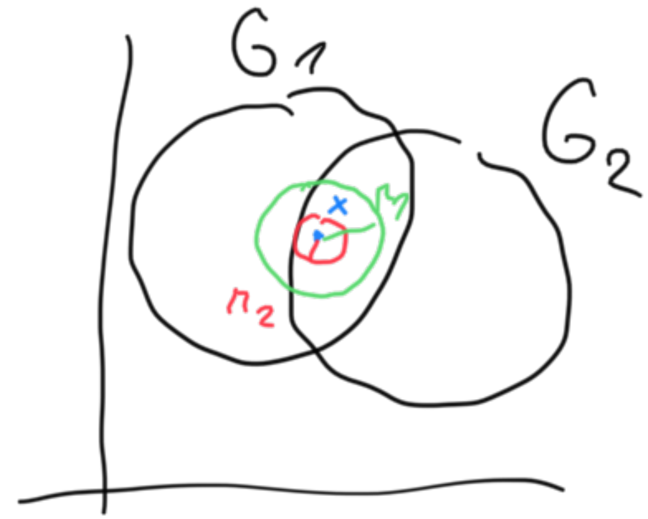
(ii) Nechť $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in A}G_\alpha$. Pak $\exists\beta\in A: x\in G_\beta$

G_β je otevřená $\Rightarrow \exists r>0: B(x,r)\subset G_\beta\subset\bigcup\limits_{\alpha\in A}G_\alpha$

$\Rightarrow x$ je vnitřní bod $\bigcup\limits_{\alpha\in A}G_\alpha$.



(iii) Nechť $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$.



Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ $\exists r_i > 0$ takový, že

$$B(x, r_i) \subset G_i$$

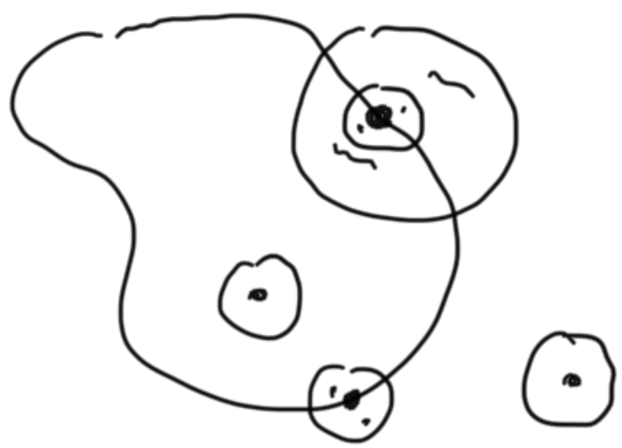
Položím $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$.

Pak $\forall i \in \{1, \dots, n\}$: $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset G_i$

$\leq$

Tedy $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i$.

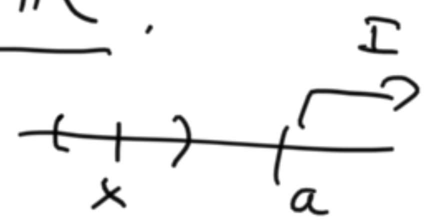
$\square$



Př.: Nechť $I \subset \mathbb{R}$ s krajními body $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \leq b$.

Pak $\underline{H(I) = \{a, b\} \cap \mathbb{R}}$.

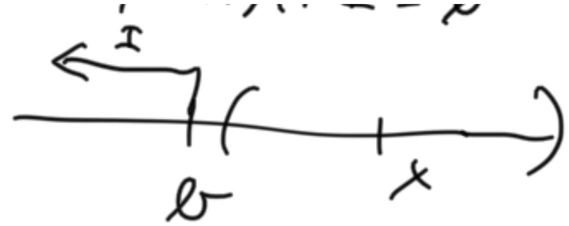
$x \in \mathbb{R}$ — $x < a$



$B(x, a-x) \cap I = \emptyset \Rightarrow x$ ne... hraniční ... I

… $\Rightarrow x$ není hraničním bod I

$x > b$



$B(x, x-b) \cap I = \emptyset$ $\quad \Rightarrow x$ není hr. bod I

$\quad \parallel$

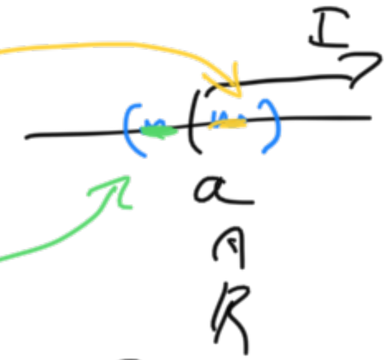
$(b, x + (x-b))$

$x \in (a,b)$, pak x je vnitřním bodem $(a,b) \subset I$, tedy x je vnitřním bodem I $\Rightarrow$ x není hr. bod I

je-li $x \in \{a,b\} \cap \mathbb{R}$, pak zjevně

$\forall r > 0 : B(x,r) \cap I \neq \emptyset$

$\qquad\qquad B(x,r) \cap (\mathbb{R} \setminus I) \neq \emptyset$



Speciálně, jsou-li $a, b \in \mathbb{R}$, pak I je uzavřená mn. v $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ I je uzavřený interval.