Matematika II

Program

Program

- Funkce více proměnných

Program

- Funkce více proměnných
- Maticový počet

Program

- Funkce více proměnných
- Maticový počet
- Číselné řady

Program

- Funkce více proměnných
- Maticový počet
- Číselné řady
- Riemannův integrál

Věta 1 (Cauchyova nerovnost)

Nechť $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

V. Funkce více proměnných

V.1. $\mathbb{R}^n$ jako vektorový a metrický prostor

V.1. $\mathbb{R}^n$ jako vektorový a metrický prostor

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Množina $\mathbb{R}^n$ je množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}$$

V.1. $\mathbb{R}^n$ jako vektorový a metrický prostor

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Množina $\mathbb{R}^n$ je množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}$$

Definice

Euklidovskou metrikou (vzdáleností) na $\mathbb{R}^n$ rozumíme funkci $\rho\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \langle 0, +\infty)$ definovanou předpisem

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Číslo $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ nazýváme vzdáleností bodu $\boldsymbol{x}$ od bodu $\boldsymbol{y}$.

Věta 2 (vlastnosti euklidovské metriky)

Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:

Věta 2 (vlastnosti euklidovské metriky)

Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:

(i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

Věta 2 (vlastnosti euklidovské metriky)

Euklidovská metrika ρ *má následující vlastnosti:*

(i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

(ii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, *(symetrie)*

Věta 2 (vlastnosti euklidovské metriky)

Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:

(i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

(ii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, *(symetrie)*

(iii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \rho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$, *(trojúhelníková nerovnost)*

Věta 2 (vlastnosti euklidovské metriky)

Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:

(i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

(ii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, *(symetrie)*

(iii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \rho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$, *(trojúhelníková nerovnost)*

(iv) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \colon \rho(\lambda \boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y}) = |\lambda| \, \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, *(homogenita)*

Věta 2 (vlastnosti euklidovské metriky)

Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:

(i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

(ii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, *(symetrie)*

(iii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n\colon \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \rho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$, *(trojúhelníková nerovnost)*

(iv) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}\colon \rho(\lambda \boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y}) = |\lambda|\, \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, *(homogenita)*

(v) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n\colon \rho(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. *(translační invariance)*

Definice

Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R}, r > 0$. Množinu $B(\boldsymbol{x}, r)$ definovanou předpisem

$$B(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n;\ \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < r\}$$

nazýváme otevřenou koulí o poloměru r a středu $\boldsymbol{x}$ nebo také okolím bodu $\boldsymbol{x}$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je vnitřním bodem množiny M, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(\boldsymbol{x}, r) \subset M$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je vnitřním bodem množiny M, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(\boldsymbol{x}, r) \subset M$.

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá otevřená v $\mathbb{R}^n$, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je vnitřním bodem množiny M, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(\boldsymbol{x}, r) \subset M$.

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá otevřená v $\mathbb{R}^n$, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Vnitřkem množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M a značíme jej $\operatorname{Int} M$.

Věta 3 (vlastnosti otevřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbb{R}^n$ *jsou otevřené v* $\mathbb{R}^n$*.*

Poznámka

Věta 3 (vlastnosti otevřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbb{R}^n$ *jsou otevřené v* $\mathbb{R}^n$.

(ii) *Nechť množiny* $G_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A \neq \emptyset$, *jsou otevřené v* $\mathbb{R}^n$. *Pak* $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ *je otevřená množina v* $\mathbb{R}^n$.

Poznámka

(ii) *Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.*

Věta 3 (vlastnosti otevřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbb{R}^n$ *jsou otevřené v* $\mathbb{R}^n$.

(ii) *Nechť množiny* $G_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A \neq \emptyset$, *jsou otevřené v* $\mathbb{R}^n$. *Pak* $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ *je otevřená množina v* $\mathbb{R}^n$.

(iii) *Nechť množiny* G_i, $i = 1, \dots, m$, *jsou otevřené v* $\mathbb{R}^n$. *Pak* $\bigcap_{i=1}^{m} G_i$ *je otevřená množina v* $\mathbb{R}^n$.

Poznámka

(ii) *Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.*

(iii) *Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.*

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x}$ je hraničním bodem množiny M, pokud pro každé $r > 0$ platí

$$B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad B(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset.$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x}$ je hraničním bodem množiny M, pokud pro každé $r > 0$ platí

$$B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad B(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset.$$

Hranicí množiny M rozumíme množinu všech hraničních bodů M a značíme ji $H(M)$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x}$ je hraničním bodem množiny M, pokud pro každé $r > 0$ platí

$$B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad B(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset.$$

Hranicí množiny M rozumíme množinu všech hraničních bodů M a značíme ji $H(M)$.

Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$ a značíme jej $\overline{M}$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x}$ je hraničním bodem množiny M, pokud pro každé $r > 0$ platí

$$B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad B(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset.$$

Hranicí množiny M rozumíme množinu všech hraničních bodů M a značíme ji $H(M)$.

Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$ a značíme jej $\overline{M}$.

Řekneme, že množina M je uzavřená v $\mathbb{R}^n$, jestliže obsahuje všechny své hraniční body, tedy $H(M) \subset M$, neboli $M = \overline{M}$.

Definice

Nechť $\boldsymbol{x}^j \in \mathbb{R}^n$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Říkáme, že posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k $\boldsymbol{x}$, pokud

$$\lim_{j\to\infty} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^j) = 0.$$

Prvek $\boldsymbol{x}$ nazýváme limitou posloupnosti $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$.

Definice

Nechť $\boldsymbol{x}^j \in \mathbb{R}^n$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Říkáme, že posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k $\boldsymbol{x}$, pokud

$$\lim_{j\to\infty} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^j) = 0.$$

Prvek $\boldsymbol{x}$ nazýváme limitou posloupnosti $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$.
Posloupnost $\{\boldsymbol{y}^j\}_{j=1}^{\infty}$ prvků $\mathbb{R}^n$ je konvergentní, pokud existuje $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\{\boldsymbol{y}^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k $\boldsymbol{y}$.

Definice

Nechť $\boldsymbol{x}^j \in \mathbb{R}^n$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Říkáme, že posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k $\boldsymbol{x}$, pokud

$$\lim_{j\to\infty} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^j) = 0.$$

Prvek $\boldsymbol{x}$ nazýváme limitou posloupnosti $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$.
Posloupnost $\{\boldsymbol{y}^j\}_{j=1}^{\infty}$ prvků $\mathbb{R}^n$ je konvergentní, pokud existuje $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\{\boldsymbol{y}^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k $\boldsymbol{y}$.

Poznámka

Platí, že $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists j_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0 \colon \boldsymbol{x}^j \in B(\boldsymbol{x}, \varepsilon).$$

Věta 4

Nechť $\boldsymbol{x}^j \in \mathbb{R}^n$ *pro každé* $j \in \mathbb{N}$ *a* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. *Posloupnost* $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ *konverguje k* $\boldsymbol{x}$ *právě tehdy, když pro každé* $i \in \{1, \dots, n\}$ *číselná posloupnost* $\{x_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ *konverguje k číslu* x_i.

Věta 4

Nechť $\boldsymbol{x}^j \in \mathbb{R}^n$ *pro každé* $j \in \mathbb{N}$ *a* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$*. Posloupnost* $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ *konverguje k* $\boldsymbol{x}$ *právě tehdy, když pro každé* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *číselná posloupnost* $\{x_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ *konverguje k číslu* x_i*.*

Poznámka

Věta 4 říká, že konvergence v prostoru $\mathbb{R}^n$ je totéž, jako konvergence „po souřadnicích“.

Věta 4

Nechť $\boldsymbol{x}^j \in \mathbb{R}^n$ *pro každé* $j \in \mathbb{N}$ *a* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$*. Posloupnost* $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ *konverguje k* $\boldsymbol{x}$ *právě tehdy, když pro každé* $i \in \{1, \dots, n\}$ *číselná posloupnost* $\{x_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ *konverguje k číslu* x_i*.*

Poznámka

Věta 4 říká, že konvergence v prostoru $\mathbb{R}^n$ je totéž, jako konvergence „po souřadnicích“. Posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ má tedy nejvýše jednu limitu. Pokud existuje, označíme ji symbolem $\lim_{j\to\infty} \boldsymbol{x}^j$. Někdy též místo $\lim_{j\to\infty} \boldsymbol{x}^j = \boldsymbol{x}$ píšeme $\boldsymbol{x}^j \to \boldsymbol{x}$.

Věta 5 (charakterizace uzavřených množin)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Množina M je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.*

Věta 5 (charakterizace uzavřených množin)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Množina M je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *Množina $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.*

Věta 5 (charakterizace uzavřených množin)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Množina M je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *Množina $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.*

(iii) *Každý bod $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, k němuž konverguje nějaká posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}$ prvků množiny M, patří do množiny M.*

Věta 6 (vlastnosti uzavřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbb{R}^n$ *jsou uzavřené v* $\mathbb{R}^n$.

Poznámka

Věta 6 (vlastnosti uzavřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbb{R}^n$ *jsou uzavřené v* $\mathbb{R}^n$.

(ii) *Nechť množiny* $F_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A \neq \emptyset$, *jsou uzavřené v* $\mathbb{R}^n$. *Pak* $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ *je uzavřená množina v* $\mathbb{R}^n$.

Poznámka

(ii) *Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*

Věta 6 (vlastnosti uzavřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbb{R}^n$ *jsou uzavřené v* $\mathbb{R}^n$.

(ii) *Nechť množiny* $F_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A \neq \emptyset$, *jsou uzavřené v* $\mathbb{R}^n$. *Pak* $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ *je uzavřená množina v* $\mathbb{R}^n$.

(iii) *Nechť množiny* F_i, $i = 1, \dots, m$, *jsou uzavřené v* $\mathbb{R}^n$. *Pak* $\bigcup_{i=1}^m F_i$ *je uzavřená množina v* $\mathbb{R}^n$.

Poznámka

(ii) *Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*

(iii) *Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.*

Pozorování

Nechť $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$. Pak $\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Int} N$ a $\overline{M} \subset \overline{N}$.

Pozorování

Nechť $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$. Pak $\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Int} N$ a $\overline{M} \subset \overline{N}$.

Věta 7

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom platí:

(i) *Množina $\overline{M}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *Množina $\operatorname{Int} M$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.*

(iii) *Množina M je otevřená v $\mathbb{R}^n$, právě když $M = \operatorname{Int} M$.*

Pozorování

Nechť $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$. Pak $\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Int} N$ a $\overline{M} \subset \overline{N}$.

Věta 7

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom platí:

(i) *Množina $\overline{M}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *Množina $\operatorname{Int} M$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.*

(iii) *Množina M je otevřená v $\mathbb{R}^n$, právě když $M = \operatorname{Int} M$.*

Poznámka

Množina $\operatorname{Int} M$ je největší otevřená množina obsažená v M v následujícím smyslu: Je-li G množina otevřená v $\mathbb{R}^n$ splňující $G \subset M$, pak $G \subset \operatorname{Int} M$.

Pozorování

Nechť $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$. Pak $\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Int} N$ a $\overline{M} \subset \overline{N}$.

Věta 7

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom platí:

(i) *Množina $\overline{M}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *Množina $\operatorname{Int} M$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.*

(iii) *Množina M je otevřená v $\mathbb{R}^n$, právě když $M = \operatorname{Int} M$.*

Poznámka

Množina $\operatorname{Int} M$ je největší otevřená množina obsažená v M v následujícím smyslu: Je-li G množina otevřená v $\mathbb{R}^n$ splňující $G \subset M$, pak $G \subset \operatorname{Int} M$. Podobně $\overline{M}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující M.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená, jestliže existuje $r > 0$ splňující $M \subset B(\boldsymbol{o}, r)$.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená, jestliže existuje $r > 0$ splňující $M \subset B(\boldsymbol{o}, r)$. Posloupnost prvků $\mathbb{R}^n$ je omezená, jestliže množina jejích členů je omezená.

Definice

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená, jestliže existuje $r > 0$ splňující $M \subset B(\boldsymbol{o}, r)$. Posloupnost prvků $\mathbb{R}^n$ je omezená, jestliže množina jejích členů je omezená.

Věta 8

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená, právě když je omezená množina $\overline{M}$.

V.2. Spojité funkce více proměnných

V.2. Spojité funkce více proměnných

Definice

Nechť f je funkce n proměnných a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je **spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$**, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \colon f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$$

V.2. Spojité funkce více proměnných

Definice

Nechť f je funkce n proměnných a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) : f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$$

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{x} \in M$. Řekneme, že f je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$ vzhledem k M, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M : f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$$

V.2. Spojité funkce více proměnných

Definice

Nechť f je funkce n proměnných a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta)\colon f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$$

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{x} \in M$. Řekneme, že f je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$ vzhledem k M, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M\colon f(\boldsymbol{y}) \in B(f(\boldsymbol{x}), \varepsilon).$$

Poznámka

Funkce f je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}$, jestliže je spojitá v $\boldsymbol{x}$ vzhledem k nějakému okolí bodu $\boldsymbol{x}$.

Věta 9

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $g\colon M \to \mathbb{R}$ *a* $c \in \mathbb{R}$. *Jestliže* f *a* g *jsou spojité v bodě* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M, *potom také funkce* cf, $f + g$ *a* fg *jsou spojité v* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M. *Pokud navíc funkce* g *je nenulová v bodě* $\boldsymbol{x}$, *pak je spojitá i funkce* f/g *v bodě* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M.

Věta 9

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $g\colon M \to \mathbb{R}$ *a* $c \in \mathbb{R}$. *Jestliže* f *a* g *jsou spojité v bodě* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M*, potom také funkce* cf, $f + g$ *a* fg *jsou spojité v* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M*. Pokud navíc funkce* g *je nenulová v bodě* $\boldsymbol{x}$*, pak je spojitá i funkce* f/g *v bodě* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M*.*

Věta 10

Nechť $r, s \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^s$, $L \subset \mathbb{R}^r$ *a* $\boldsymbol{y} \in M$*. Nechť* $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ *jsou funkce definované na* M*, spojité v bodě* $\boldsymbol{y}$ *vzhledem k* M *a* $[\varphi_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_r(\boldsymbol{x})] \in L$ *pro každé* $\boldsymbol{x} \in M$*. Nechť* $f\colon L \to \mathbb{R}$ *je spojitá v bodě* $[\varphi_1(\boldsymbol{y}), \ldots, \varphi_r(\boldsymbol{y})]$ *vzhledem k* L*. Potom složená funkce* $F\colon M \to \mathbb{R}$ *daná předpisem*

$$F(\boldsymbol{x}) = f\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \varphi_r(\boldsymbol{x})\big), \quad \boldsymbol{x} \in M,$$

je spojitá v $\boldsymbol{y}$ *vzhledem k* M*.*

Věta 11 (Heine)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní:

(i) *f je spojitá v $\boldsymbol{x}$ vzhledem k M,*

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty} f(\boldsymbol{x}^j) = f(\boldsymbol{x})$ *pro každou posloupnost* $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ *splňující* $\boldsymbol{x}^j \in M$ *pro* $j \in \mathbb{N}$ *a* $\lim\limits_{j\to\infty} \boldsymbol{x}^j = \boldsymbol{x}$.

Věta 11 (Heine)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ *a* $f\colon M \to \mathbb{R}$. *Pak je ekvivalentní:*

(i) f *je spojitá v* $\boldsymbol{x}$ *vzhledem k* M,

(ii) $\lim_{j\to\infty} f(\boldsymbol{x}^j) = f(\boldsymbol{x})$ *pro každou posloupnost* $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ *splňující* $\boldsymbol{x}^j \in M$ *pro* $j \in \mathbb{N}$ *a* $\lim_{j\to\infty} \boldsymbol{x}^j = \boldsymbol{x}$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je spojitá na množině M, jestliže je spojitá v každém bodě $\boldsymbol{x} \in M$ vzhledem k M.

Věta 11 (Heine)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní:

(i) *f je spojitá v $\boldsymbol{x}$ vzhledem k M,*

(ii) *$\lim_{j\to\infty} f(\boldsymbol{x}^j) = f(\boldsymbol{x})$ pro každou posloupnost $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ splňující $\boldsymbol{x}^j \in M$ pro $j \in \mathbb{N}$ a $\lim_{j\to\infty} \boldsymbol{x}^j = \boldsymbol{x}$.*

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je spojitá na množině M, jestliže je spojitá v každém bodě $\boldsymbol{x} \in M$ vzhledem k M.

Poznámka

Funkce $\pi^j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi^j(\boldsymbol{x}) = x_j$, $1 \le j \le n$, jsou spojité na $\mathbb{R}^n$. Těmto funkcím říkáme souřadnicové projekce.

Věta 12

Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

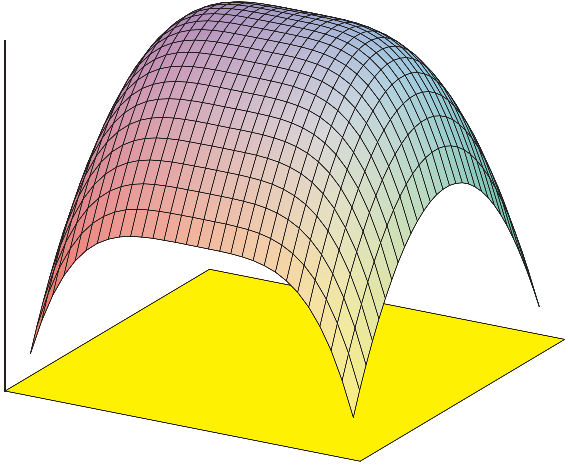
(i) *Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) < c\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.*

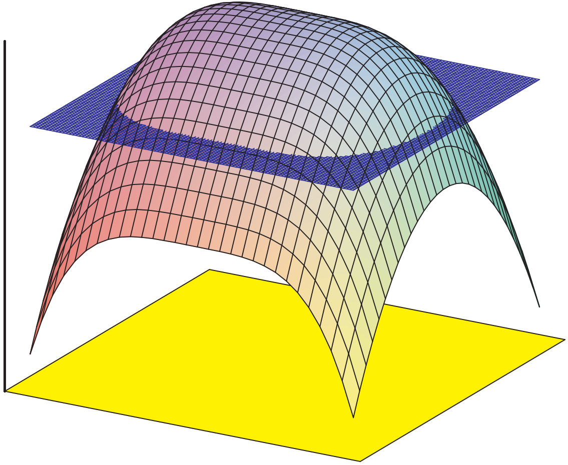
(ii) *Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) > c\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.*

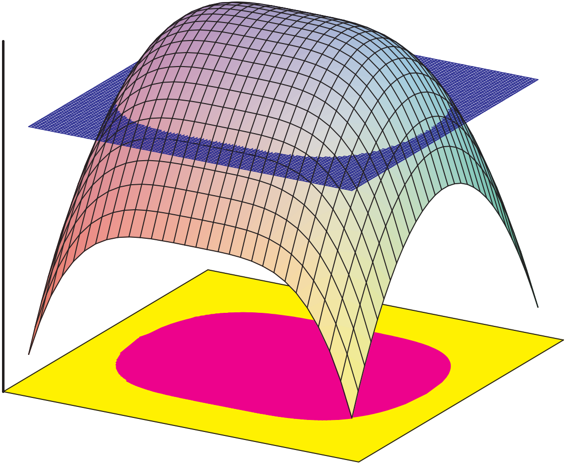
(iii) *Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) \leq c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.*

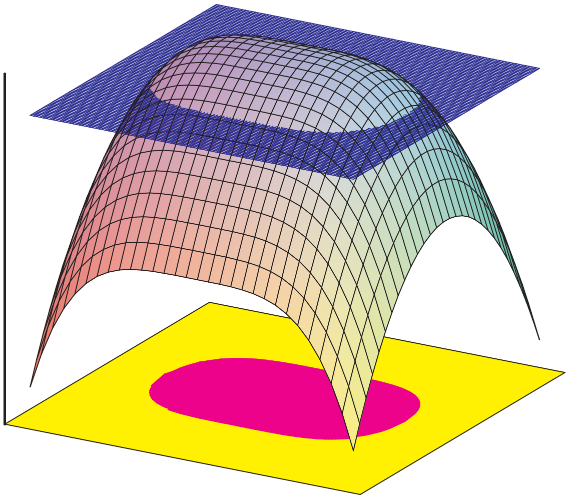
(iv) *Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) \geq c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.*

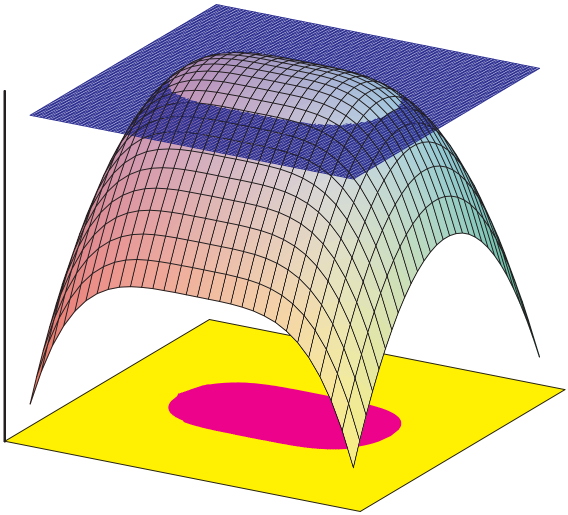
(v) *Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) = c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.*











Definice

Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme kompaktní, pokud z každé posloupnosti prvků množiny M lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v M.

Definice

Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme kompaktní, pokud z každé posloupnosti prvků množiny M lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v M.

Věta 13 (charakterizace kompaktních množin v $\mathbb{R}^n$)

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

Definice

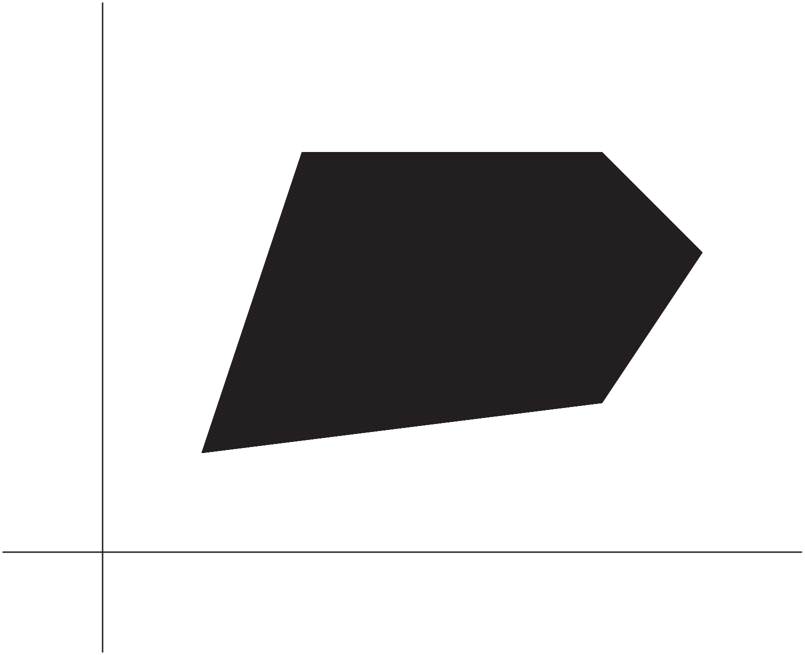
Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme kompaktní, pokud z každé posloupnosti prvků množiny M lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v M.

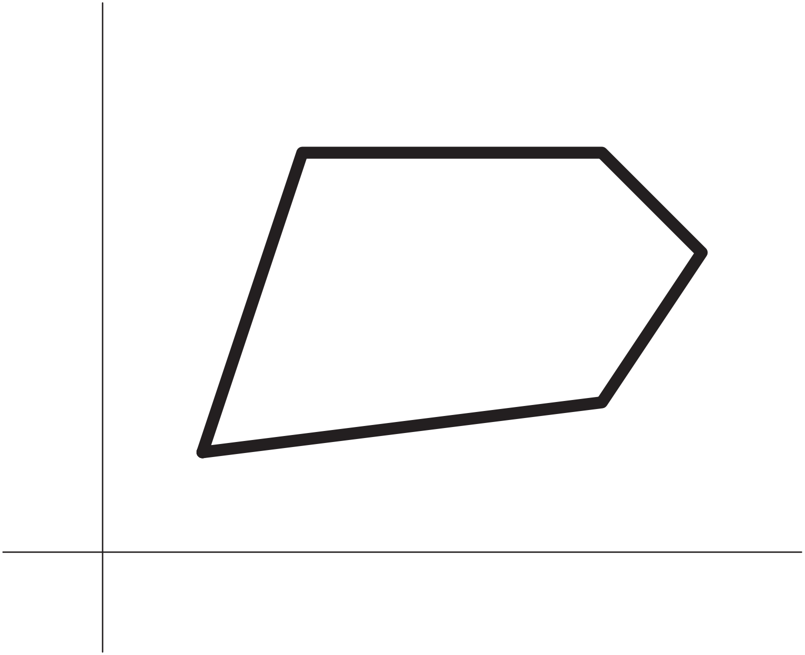
Věta 13 (charakterizace kompaktních množin v $\mathbb{R}^n$)

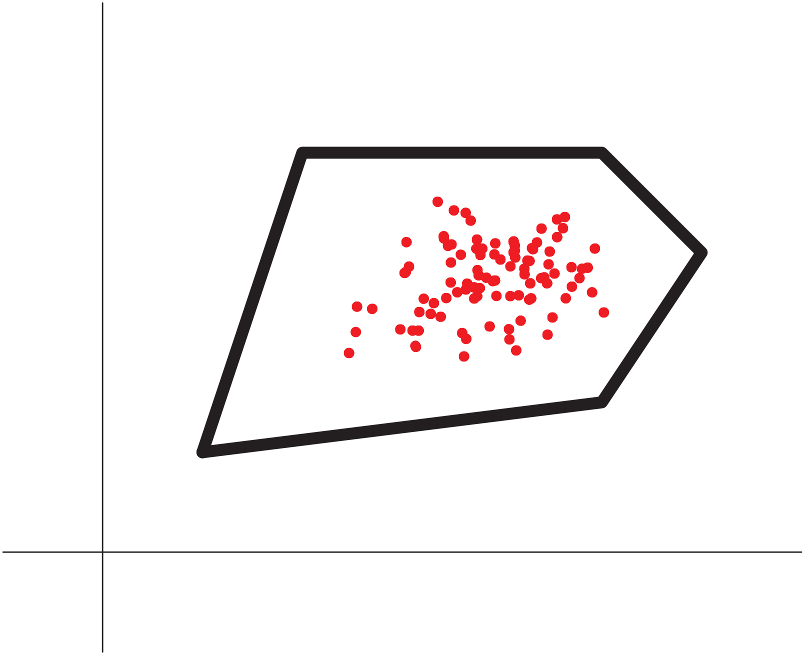
Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

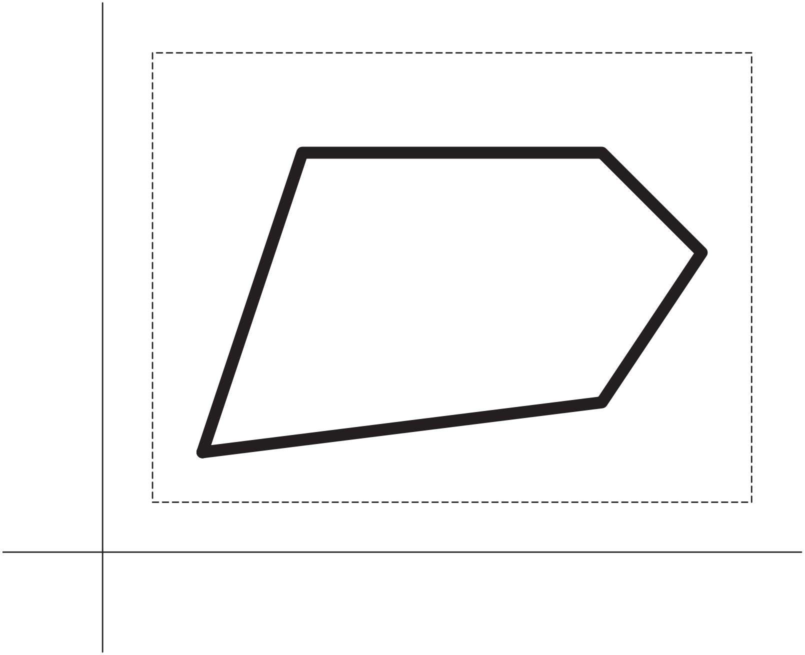
Lemma 14

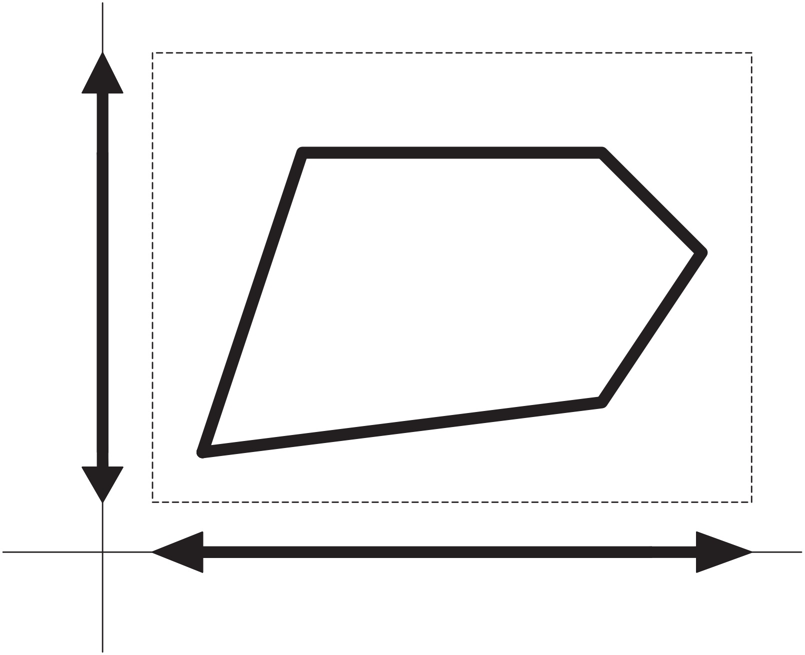
Nechť $\{\boldsymbol{x}^j\}_{j=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost v $\mathbb{R}^n$. Pak z ní lze vybrat konvergentní podposloupnost.

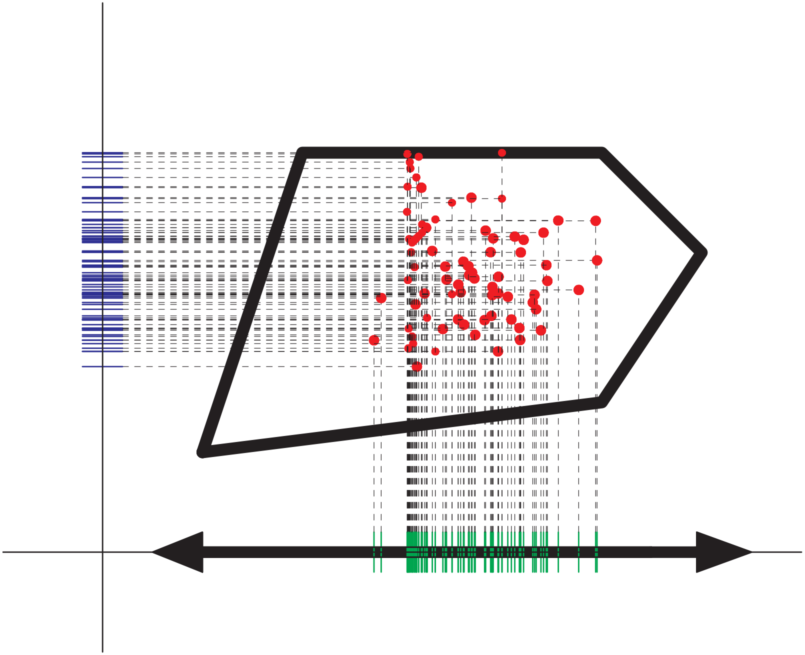


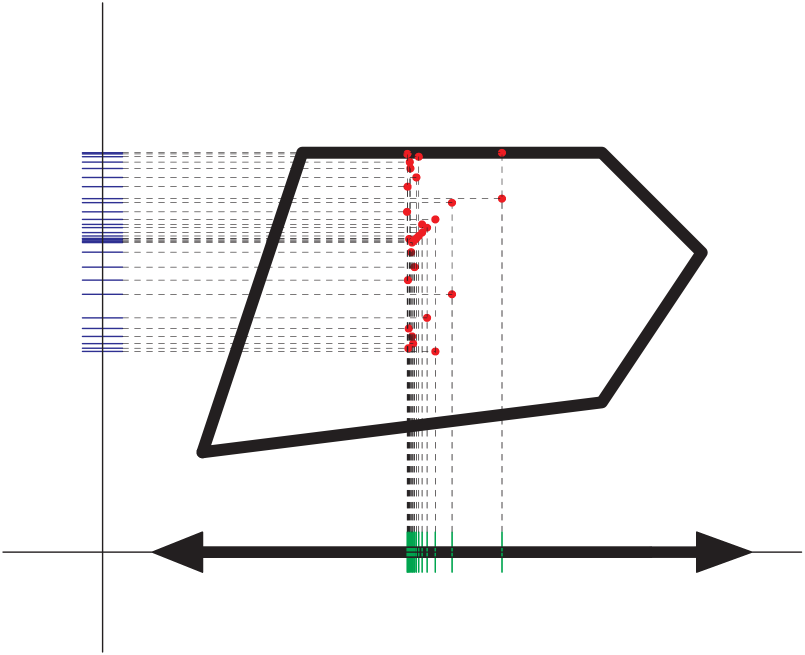


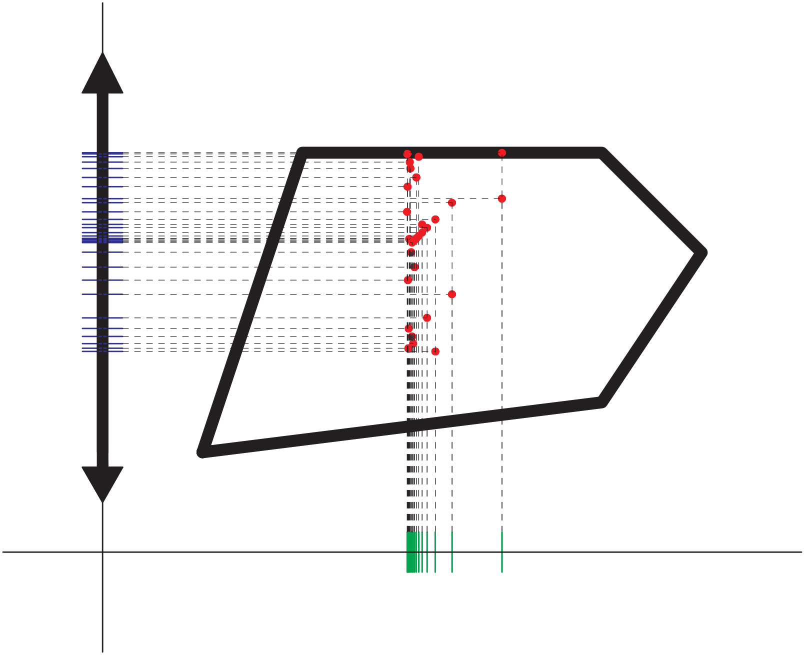


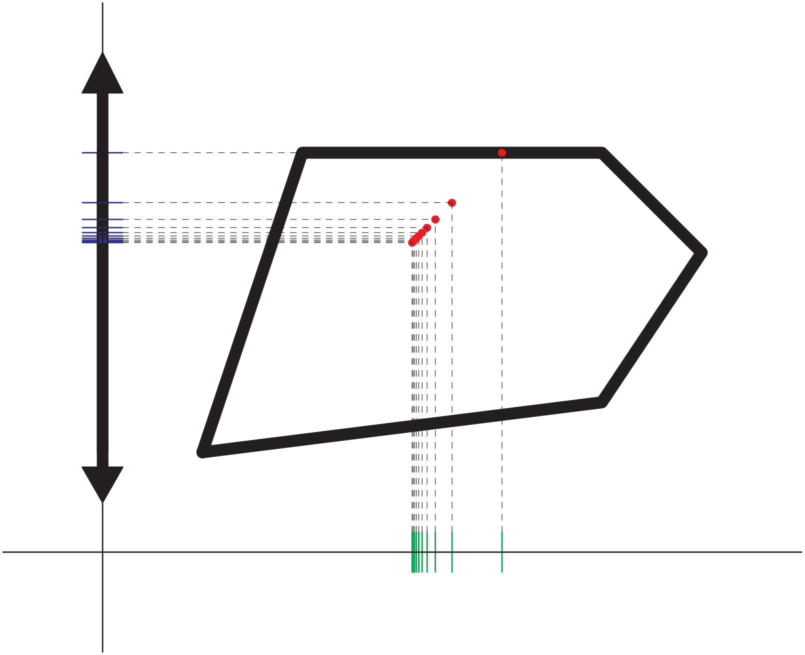












Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě $\boldsymbol{x}$

- maxima na M, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M\colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})$,

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě $\boldsymbol{x}$

- maxima na M, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M\colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})$,
- lokálního maxima vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M\colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})$,

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě $\boldsymbol{x}$

- maxima na M, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M\colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})$,
- lokálního maxima vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M\colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})$,
- ostrého maxima na M, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M \setminus \{\boldsymbol{x}\}\colon f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x})$,

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě $\boldsymbol{x}$

- maxima na M, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M \colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})$,
- lokálního maxima vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M \colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})$,
- ostrého maxima na M, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M \setminus \{\boldsymbol{x}\} \colon f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x})$,
- ostrého lokálního maxima vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \boldsymbol{y} \in \big(B(\boldsymbol{x}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{x}\}\big) \cap M \colon f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x})$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě $\boldsymbol{x}$

- maxima na M, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M\colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})$,
- lokálního maxima vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, \delta) \cap M\colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x})$,
- ostrého maxima na M, jestliže platí $\forall \boldsymbol{y} \in M \setminus \{\boldsymbol{x}\}\colon f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x})$,
- ostrého lokálního maxima vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \boldsymbol{y} \in \big(B(\boldsymbol{x}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{x}\}\big) \cap M\colon f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x})$.

Analogicky definujeme *minimum* a *ostré minimum* na M, *lokální minimum* a *ostré lokální minimum* vzhledem k M.

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ lokální maximum, má-li v $\boldsymbol{x}$ lokální maximum vzhledem k nějakému okolí bodu $\boldsymbol{x}$.

Podobně pro *lokální minimum*, *ostré lokální maximum* a *ostré lokální minimum*.

Věta 15 (o nabývání extrémů)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ *je neprázdná kompaktní množina a* $f: M \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* M*. Pak* f *nabývá na* M *svého maxima i minima.*

Věta 15 (o nabývání extrémů)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ *je neprázdná kompaktní množina a* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* M*. Pak* f *nabývá na* M *svého maxima i minima.*

Důsledek

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ *je kompaktní množina a* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *je spojitá na* M*. Pak* f *je omezená na* M*.*

Definice

Řekneme, že funkce f o n proměnných má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\} \colon f(\boldsymbol{x}) \in B(A, \varepsilon).$$

Definice

Řekneme, že funkce f o n proměnných má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\} \colon f(\boldsymbol{x}) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámka

- Každá funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu, píšeme $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$.

Definice

Řekneme, že funkce f o n proměnných má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\} : f(\boldsymbol{x}) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámka

- Každá funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu, píšeme $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$.
- f je spojitá v $\boldsymbol{a}$, právě když $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$.

Definice

Řekneme, že funkce f o n proměnných má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\} : f(\boldsymbol{x}) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámka

- Každá funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu, píšeme $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$.
- f je spojitá v $\boldsymbol{a}$, právě když $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$.
- Pro limity funkcí více proměnných platí obdobné věty jako pro limity funkcí jedné proměnné (aritmetika, policajti, ...).

Věta 16 (limita složené funkce více proměnných s podmínkou (S))

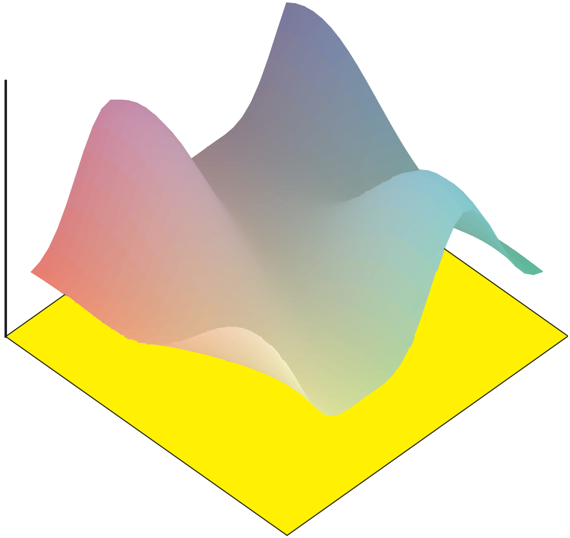
Nechť $r, s \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a} \in M \subset \mathbb{R}^s$, $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ *jsou funkce definované na* M *splňující* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \varphi_j(\boldsymbol{x}) = b_j$, $j = 1, \dots, r$, *a* $\boldsymbol{b} = [b_1, \dots, b_r] \in \mathbb{R}^r$. *Nechť* f *je funkce* r *proměnných spojitá v bodě* $\boldsymbol{b}$. *Definujme složenou funkci* $F\colon M \to \mathbb{R}$ *předpisem*

$$F(\boldsymbol{x}) = f(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in M.$$

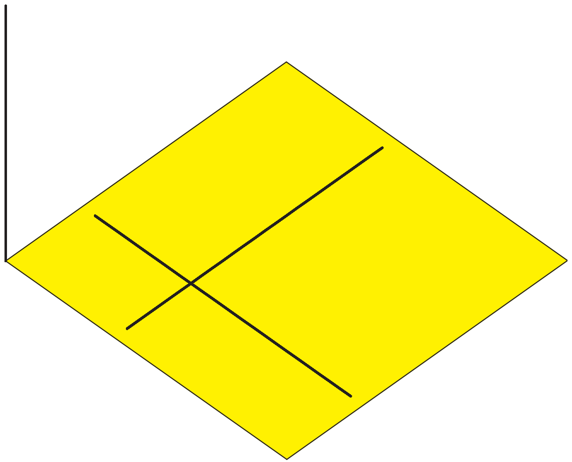
Pak $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{b})$.

V.3. Parciální derivace a tečná nadrovina

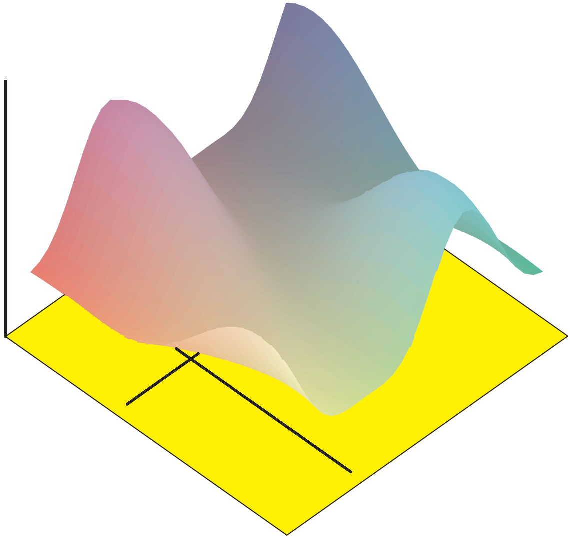
V.3. Parciální derivace a tečná nadrovina



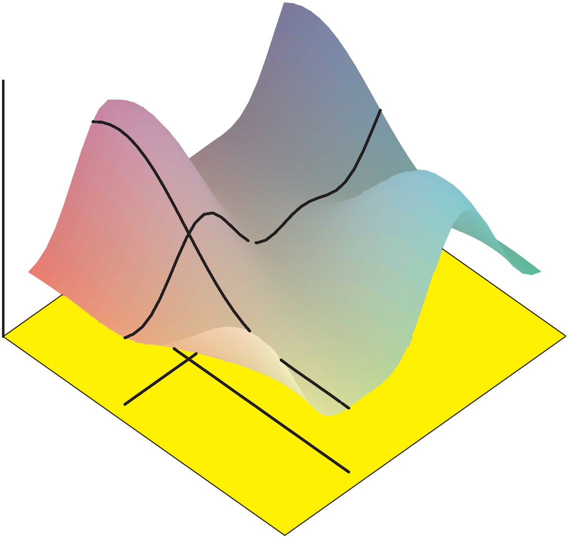
V.3. Parciální derivace a tečná nadrovina



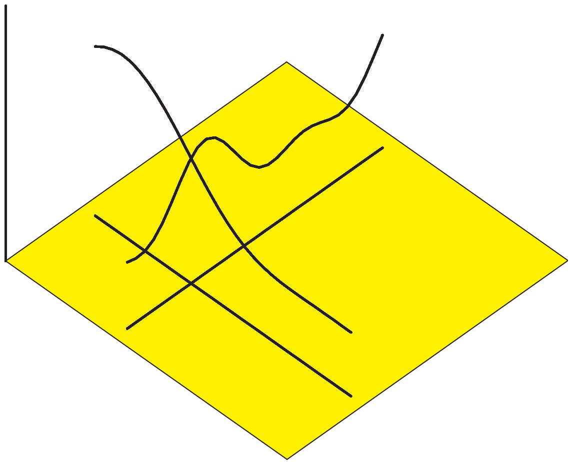
V.3. Parciální derivace a tečná nadrovina



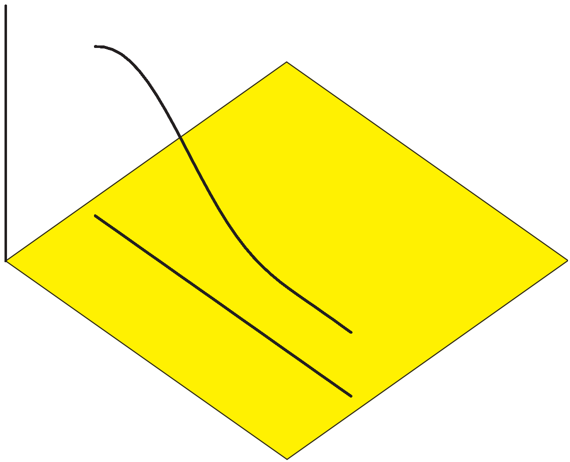
V.3. Parciální derivace a tečná nadrovina



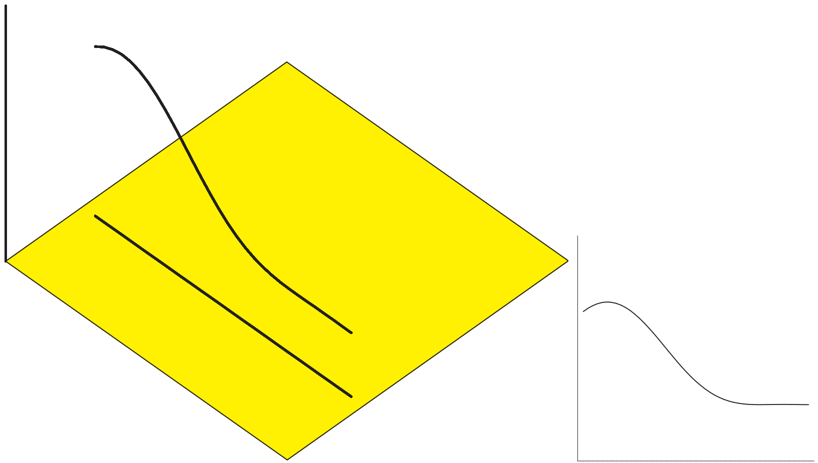
V.3. Parciální derivace a tečná nadrovina



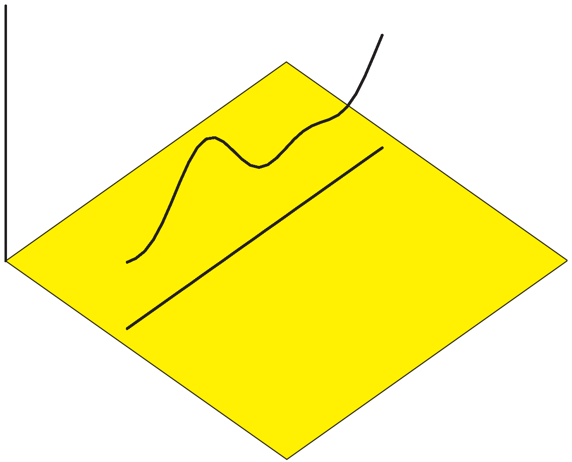
V.3. Parciální derivace a tečná nadrovina



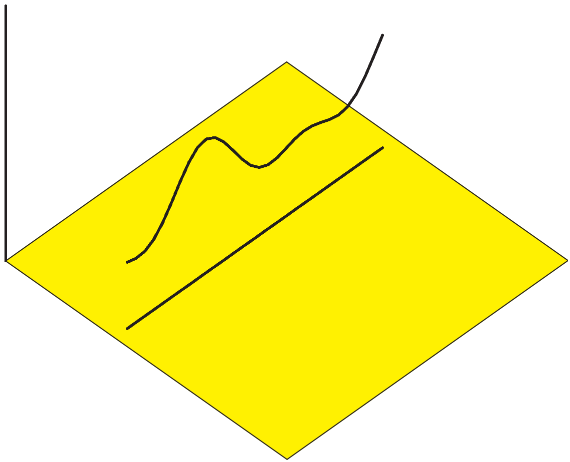
V.3. Parciální derivace a tečná nadrovina

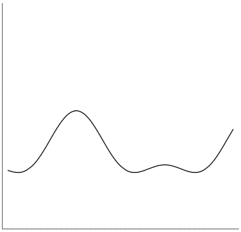


V.3. Parciální derivace a tečná nadrovina



V.3. Parciální derivace a tečná nadrovina





Definice

Nechť f je funkce n proměnných, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Pak číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^j) - f(\boldsymbol{a})}{t}$$

nazýváme parciální derivací (prvního řádu) funkce f podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$ (pokud limita existuje).

Definice

Nechť f je funkce n proměnných, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Pak číslo

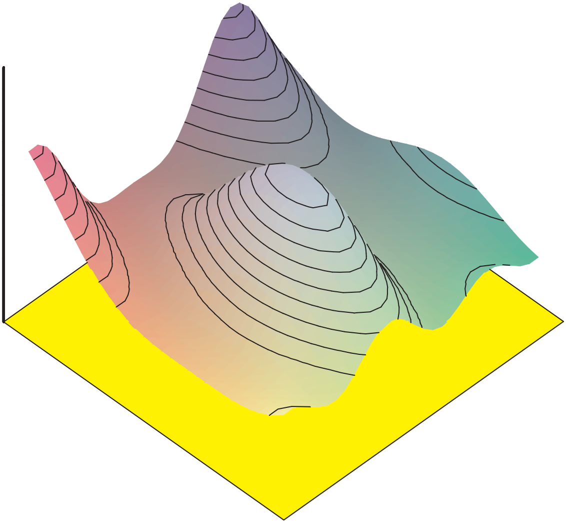
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^j) - f(\boldsymbol{a})}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

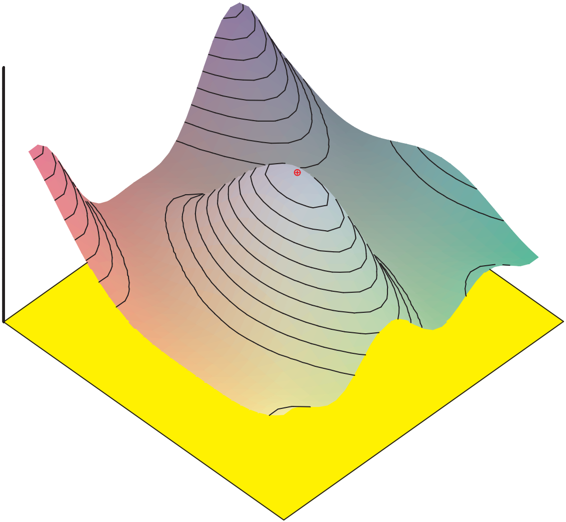
nazýváme parciální derivací (prvního řádu) funkce f podle j-té proměnné v bodě $\boldsymbol{a}$ (pokud limita existuje).

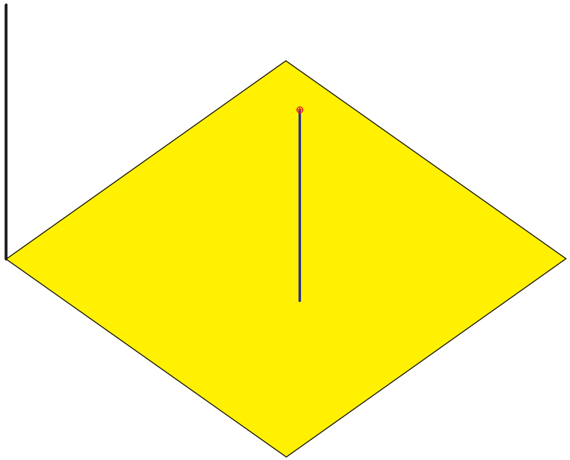
Věta 17 (nutná podmínka lokálního extrému)

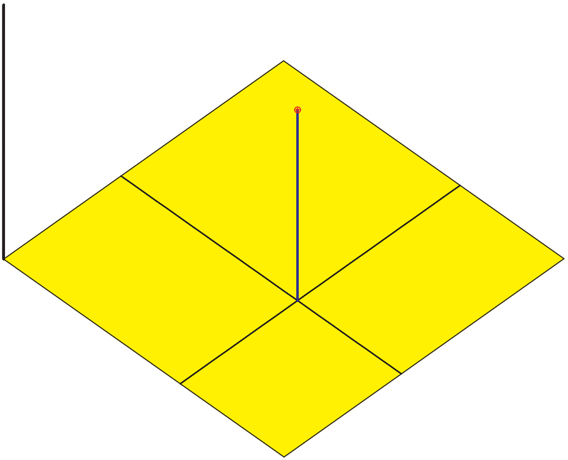
Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$ a funkce $f\colon G \to \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém. Pak pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí:

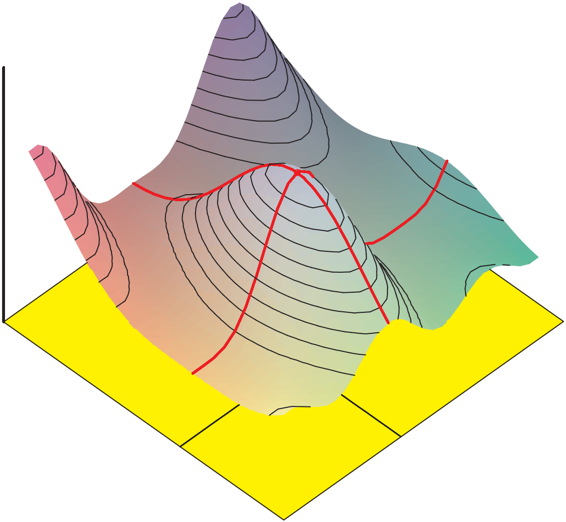
Parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ buď neexistuje, nebo je rovna nule.

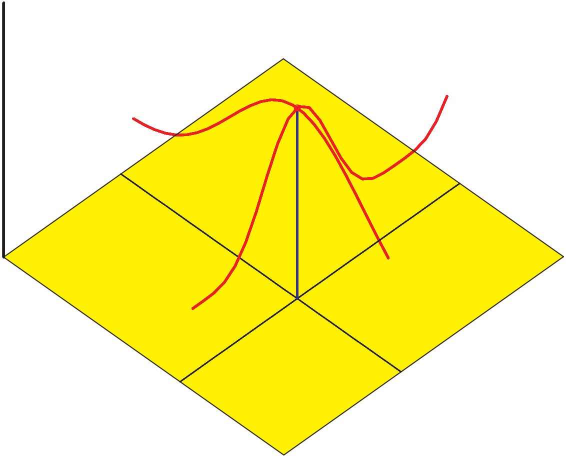


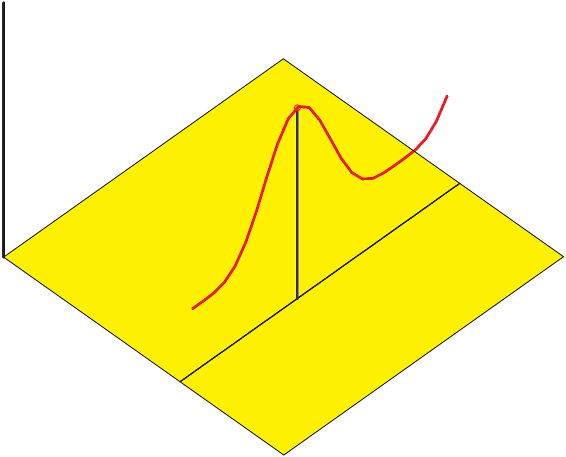


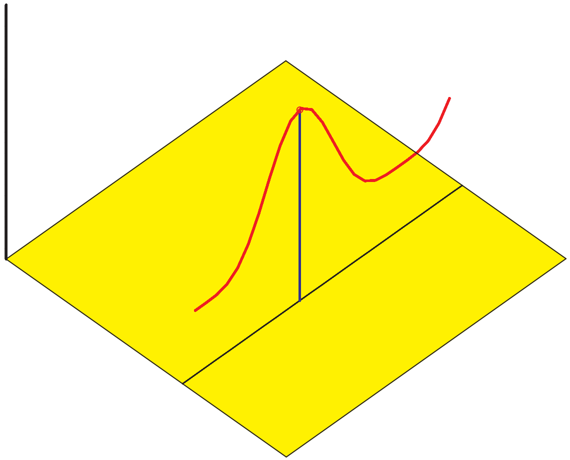


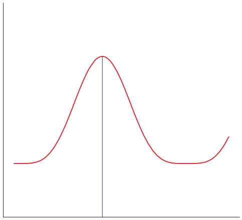












Definice

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná a otevřená. Nechť funkce $f\colon G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě množiny G spojité všechny parciální derivace (tj. funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ jsou spojité na G pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$). Pak říkáme, že funkce f je třídy $\mathcal{C}^1$ na G. Množinu všech takových funkcí značíme $C^1(G)$.

Definice

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná a otevřená. Nechť funkce $f\colon G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě množiny G spojité všechny parciální derivace (tj. funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ jsou spojité na G pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$). Pak říkáme, že funkce f je **třídy $\mathcal{C}^1$ na G**. Množinu všech takových funkcí značíme $C^1(G)$.

Poznámka

Pokud je $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a neprázdná a $f, g \in C^1(G)$, pak i funkce $f + g \in C^1(G)$, $f - g \in C^1(G)$ a $fg \in C^1(G)$. Pokud navíc $\forall \boldsymbol{x} \in G\colon g(\boldsymbol{x}) \neq 0$, pak i $f/g \in C^1(G)$.

Tvrzení 18 (slabá Lagrangeova věta)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené intervaly, $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, $f \in C^1(I)$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I$. Potom existují body $\boldsymbol{\xi}^1, \dots, \boldsymbol{\xi}^n \in I$, splňující $\xi^i_j \in \langle a_j, b_j \rangle$ pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$, takové, že

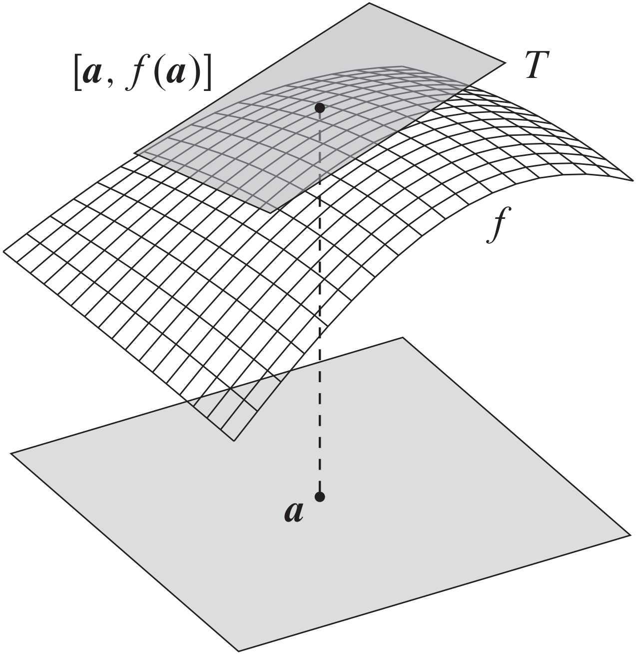
$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{\xi}^i)(b_i - a_i).$$

Definice

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$ a $f \in C^1(G)$. Pak graf funkce

$$T\colon \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a})(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})(x_n - a_n), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

nazýváme tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$.



$[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$
T
f
$\boldsymbol{a}$

Věta 19 (o tečné nadrovině)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$, $f \in C^1(G)$ a T je funkce, jejímž grafem je tečná nadrovina ke grafu funkce f v bodě $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$. Pak

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x})}{\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})} = 0.$$

Věta 19 (o tečné nadrovině)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$, $f \in C^1(G)$ a T je funkce, jejímž grafem je tečná nadrovina ke grafu funkce f v bodě $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$. Pak

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x})}{\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})} = 0.$$

Věta 20

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina a $f \in C^1(G)$. Pak f je spojitá na G.

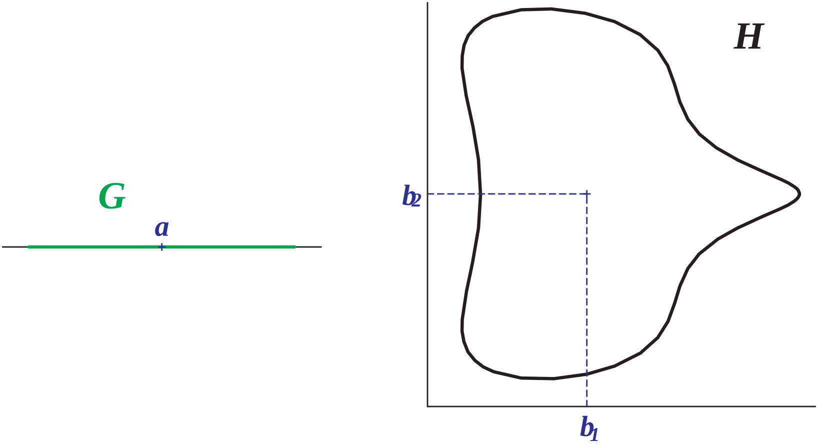
Věta 21 (derivace složené funkce)

Nechť $r, s \in \mathbb{N}$ a nechť $G \subset \mathbb{R}^s$, $H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G)$, $f \in C^1(H)$ a bod $[\varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{x})] \in H$ pro každé $\boldsymbol{x} \in G$. Potom složená funkce $F\colon G \to \mathbb{R}$ daná předpisem

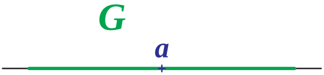
$$F(\boldsymbol{x}) = f\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{x})\big), \quad \boldsymbol{x} \in G,$$

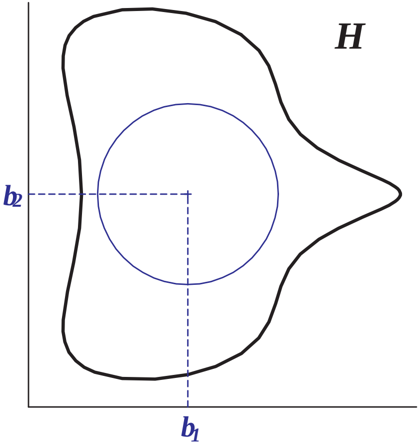
je třídy $\mathcal{C}^1$ na G. Nechť $\boldsymbol{a} \in G$ a $\boldsymbol{b} = [\varphi_1(\boldsymbol{a}), \dots, \varphi_r(\boldsymbol{a})]$. Pak pro $j \in \{1, \dots, s\}$ platí

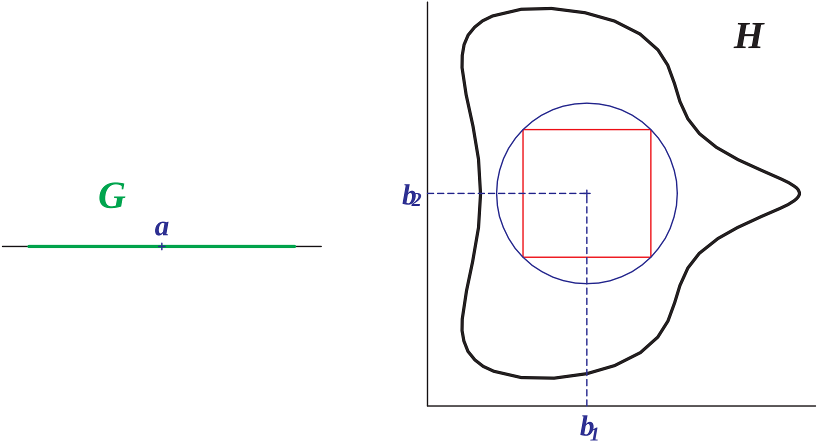
$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(\boldsymbol{b}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}).$$

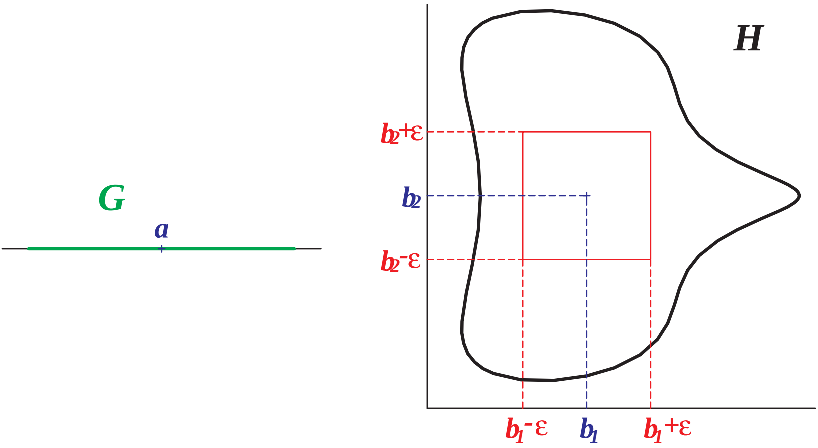


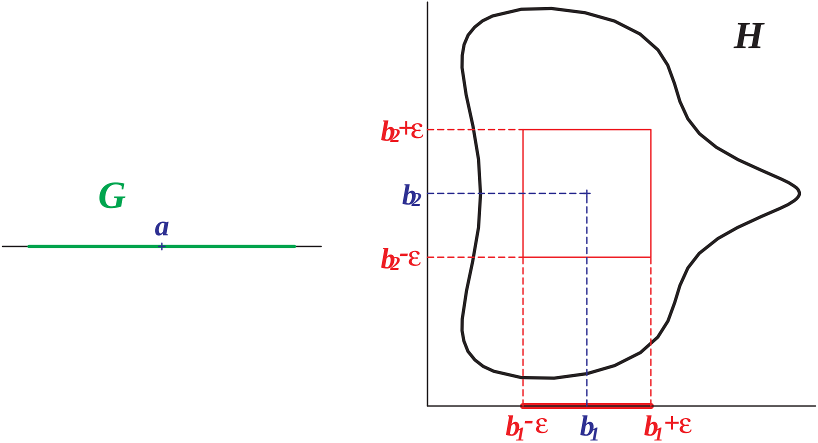
G
a
H
b2
b1


G
a

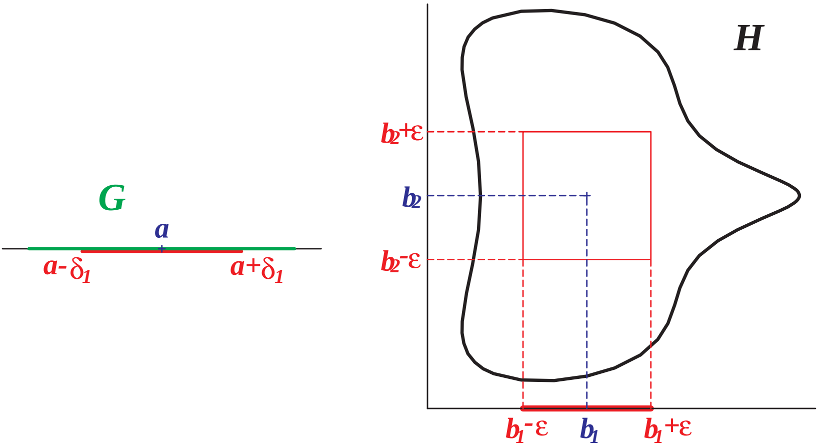

H
b2
b1

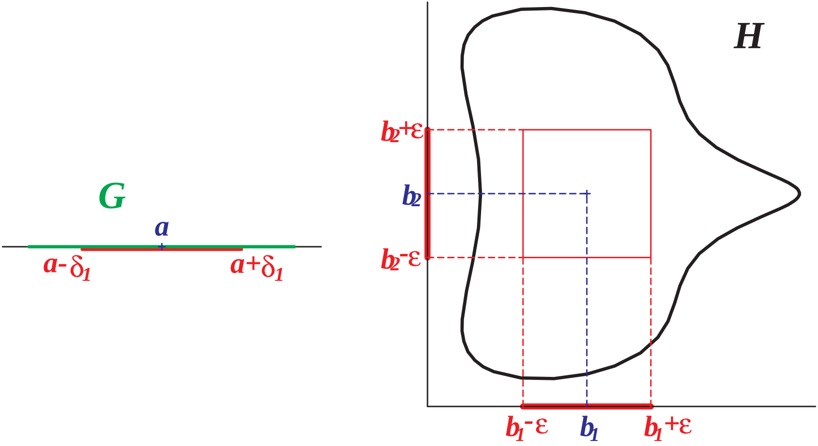

G
a
H
b2
b1

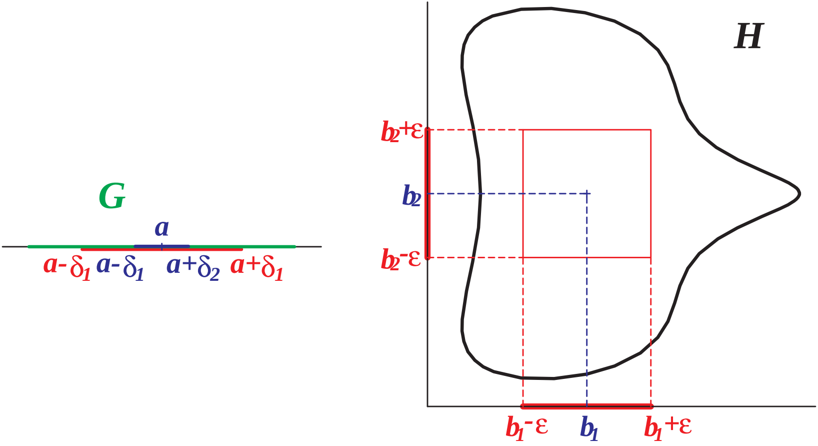

G
a
H
b2+ε
b2
b2-ε
b1-ε
b1
b1+ε



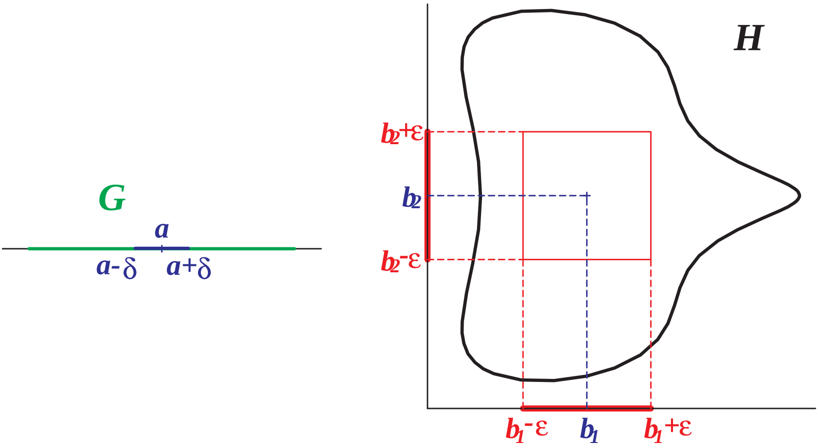
G
a
H
b2+ε
b2
b2-ε
b1-ε
b1
b1+ε


G
a
a-δ1
a+δ1
H
b2+ε
b2
b2-ε
b1-ε
b1
b1+ε


G
a
a-δ1
a+δ1
H
b2+ε
b2
b2-ε
b1-ε
b1
b1+ε



G
a
a-δ1
a-δ1
a+δ2
a+δ1
H
b2+ε
b2
b2-ε
b1-ε
b1
b1+ε

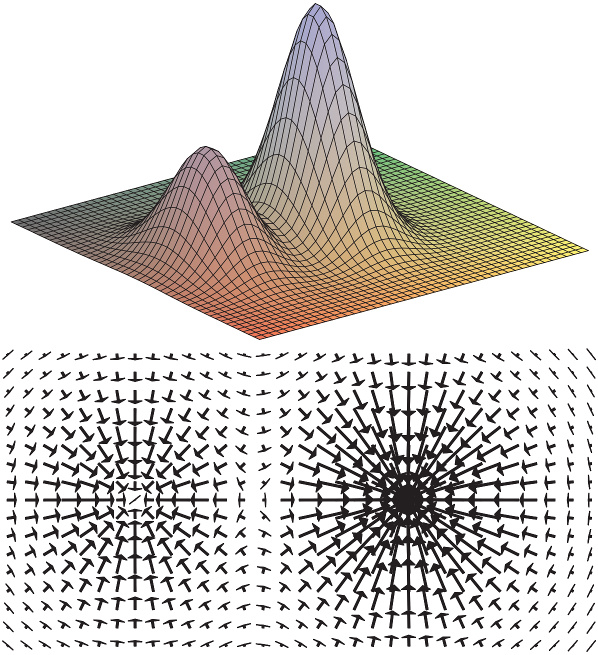


G
a
a-δ
a+δ
H
b2+ε
b2
b2-ε
b1-ε
b1
b1+ε

Definice

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$ a $f \in C^1(G)$.
Gradientem funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ rozumíme vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right].$$



Definice

Je-li $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$, $f \in C^1(G)$ a $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$, pak bod $\boldsymbol{a}$ nazýváme stacionárním (někdy též kritickým) bodem funkce f.

Definice

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, funkce $f\colon G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě G vlastní i-tou parciální derivaci a $\boldsymbol{a} \in G$. Parciální derivaci funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ podle proměnné x_j v bodě $\boldsymbol{a}$ značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$$

a nazýváme ji parciální derivací druhého řádu funkce f. Je-li $i = j$, pak používáme značení $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{a})$.

Definice

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, funkce $f \colon G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě G vlastní i-tou parciální derivaci a $\boldsymbol{a} \in G$. Parciální derivaci funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ podle proměnné x_j v bodě $\boldsymbol{a}$ značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$$

a nazýváme ji parciální derivací druhého řádu funkce f.

Je-li $i = j$, pak používáme značení $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{a})$.

Analogicky se definují parciální derivace vyšších řádů.

Poznámka

Obecně nemusí platit, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$.

Poznámka

Obecně nemusí platit, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$.

Věta 22 (o záměnnosti parciálních derivací)

Nechť $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ a funkce f má na okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ obě parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, a tyto funkce jsou v bodě $\boldsymbol{a}$ spojité. Pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}).$$

Definice

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že funkce f je třídy $\mathcal{C}^k$ na G, má-li f všechny parciální derivace až do řádu k spojité na množině G. Množinu všech takových funkcí značíme $C^k(G)$.

Definice

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že funkce f je třídy $\mathcal{C}^k$ na G, má-li f všechny parciální derivace až do řádu k spojité na množině G. Množinu všech takových funkcí značíme $C^k(G)$.

Řekneme, že funkce f je třídy $\mathcal{C}^\infty$ na G, má-li f všechny parciální derivace všech řádů spojité na množině G. Množinu všech funkcí třídy $\mathcal{C}^\infty$ na G značíme $C^\infty(G)$.

V.4. Věta o implicitních funkcích

V.4. Věta o implicitních funkcích

Věta 23 (o implicitní funkci)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbb{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

V.4. Věta o implicitních funkcích

Věta 23 (o implicitní funkci)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F\colon G \to \mathbb{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

(i) $F \in C^1(G)$,

V.4. Věta o implicitních funkcích

Věta 23 (o implicitní funkci)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbb{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in C^1(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,

V.4. Věta o implicitních funkcích

Věta 23 (o implicitní funkci)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbb{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in C^1(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

V.4. Věta o implicitních funkcích

Věta 23 (o implicitní funkci)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F\colon G \to \mathbb{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

(i) $F \in C^1(G)$,

(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$.

Věta 23 (o implicitní funkci)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F\colon G \to \mathbb{R}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

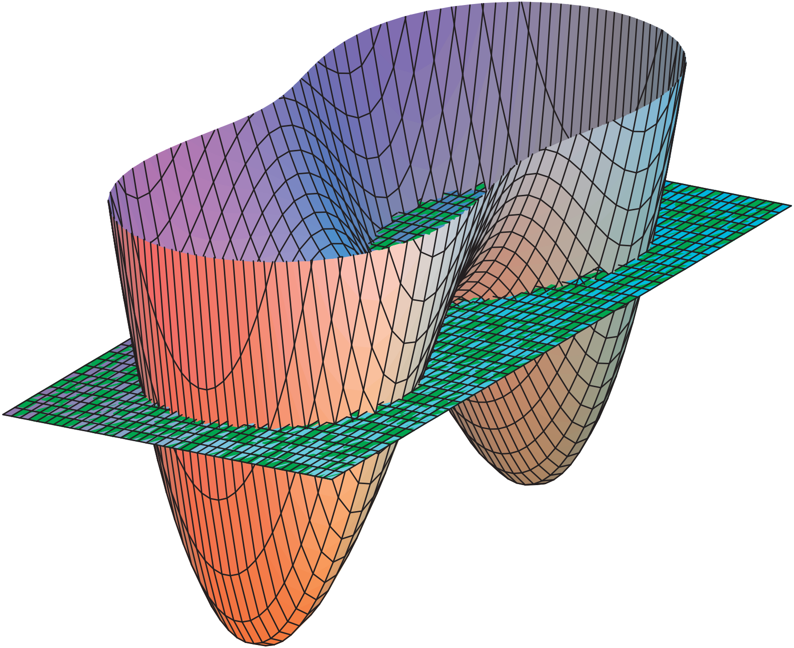
(i) $F \in C^1(G)$,

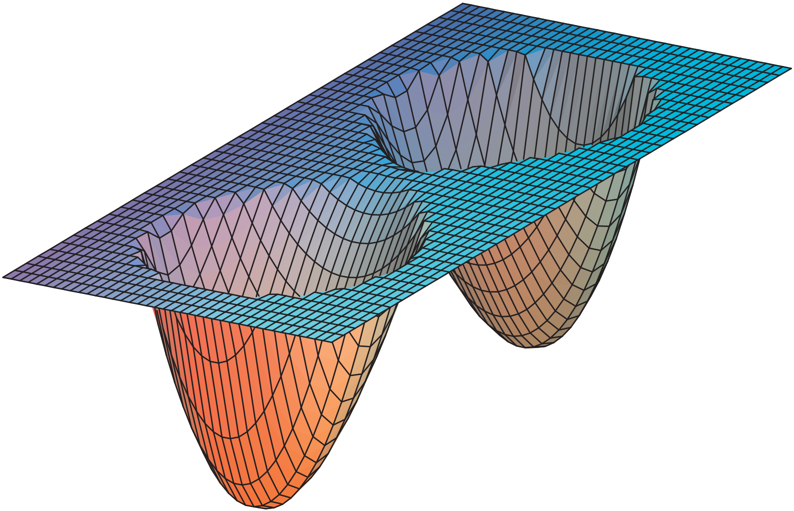
(ii) $F(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) = 0$,

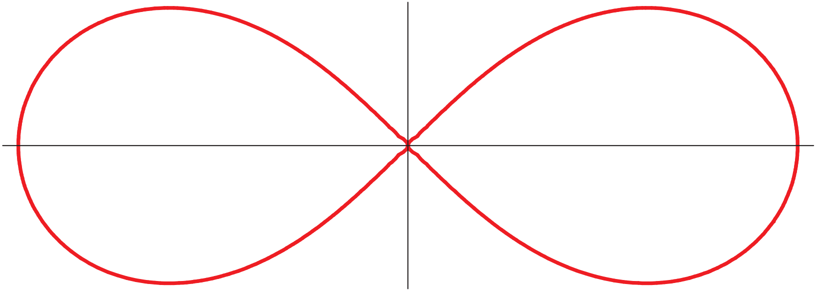
(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{y}) \neq 0$.

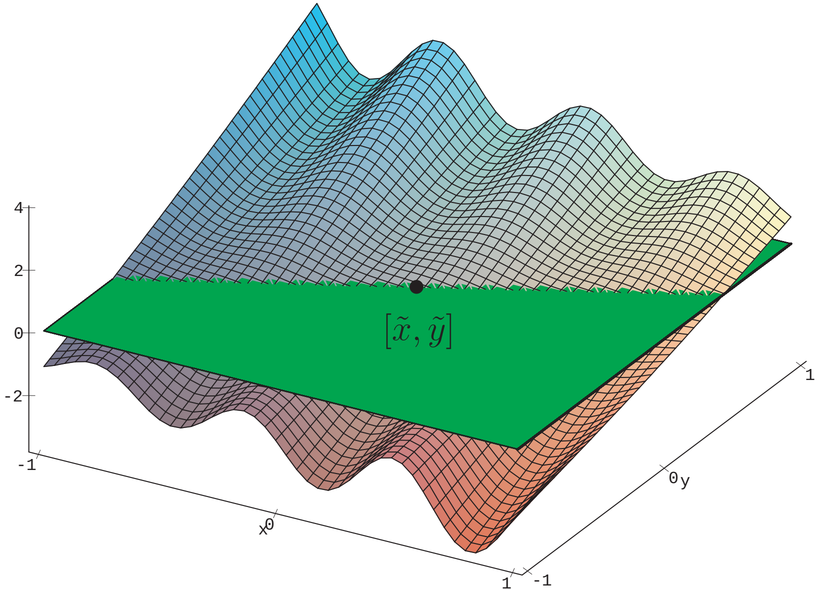
Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$. Označíme-li toto y jako $\varphi(\boldsymbol{x})$, pak takto vzniklá funkce $\varphi \in C^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}))} \quad \text{pro } \boldsymbol{x} \in U,\ j \in \{1, \dots, n\}.$$

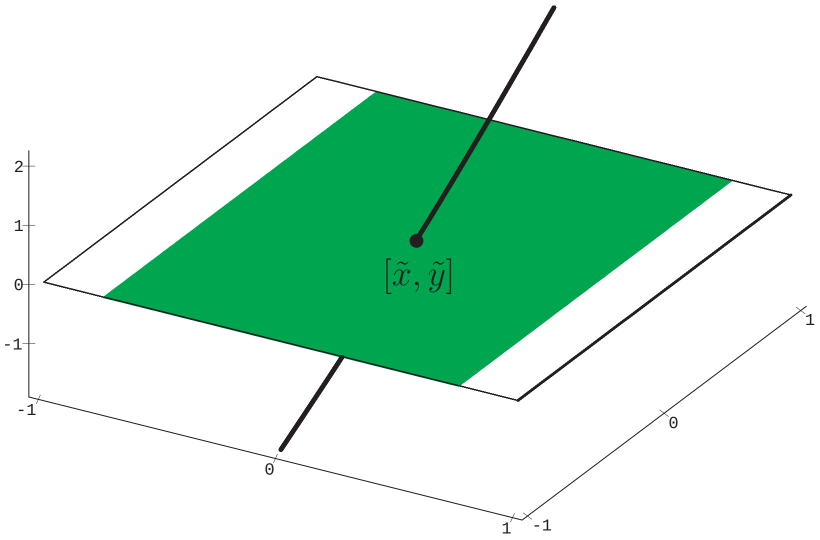




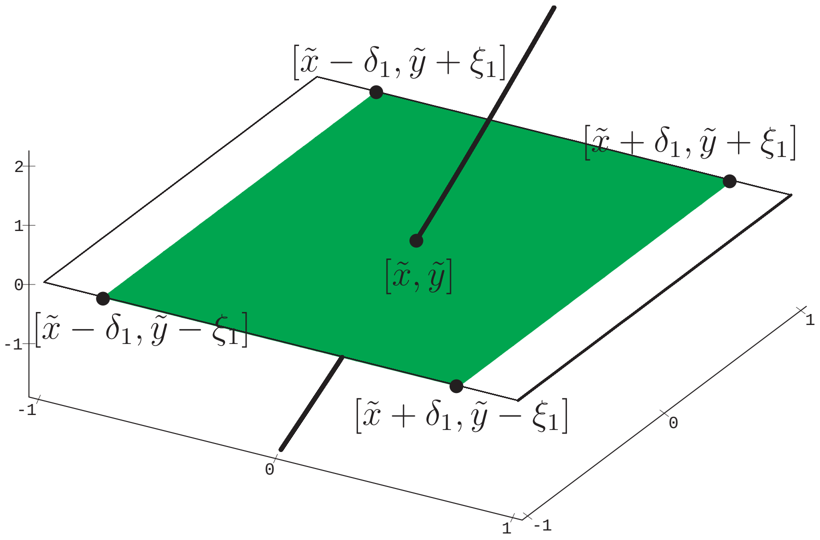




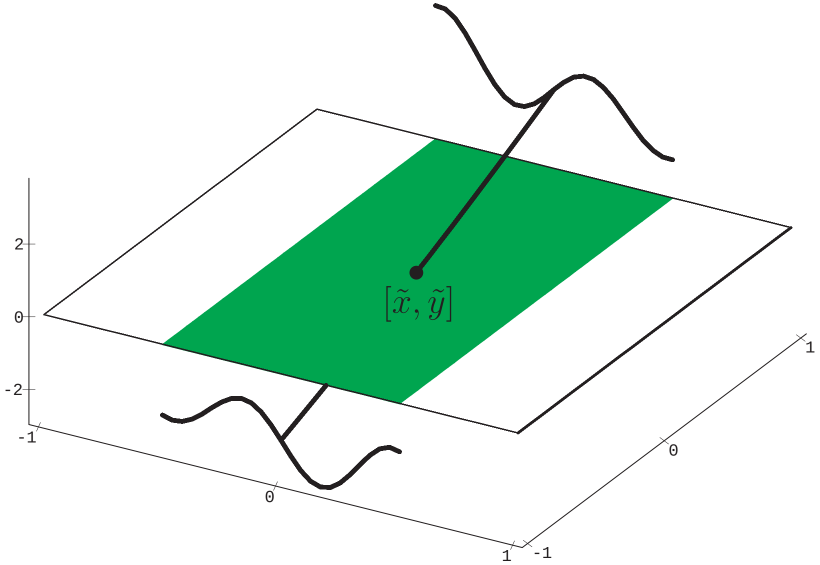
4
2
0
-2
-1
x0
1
-1
0y
1
$[\tilde{x}, \tilde{y}]$



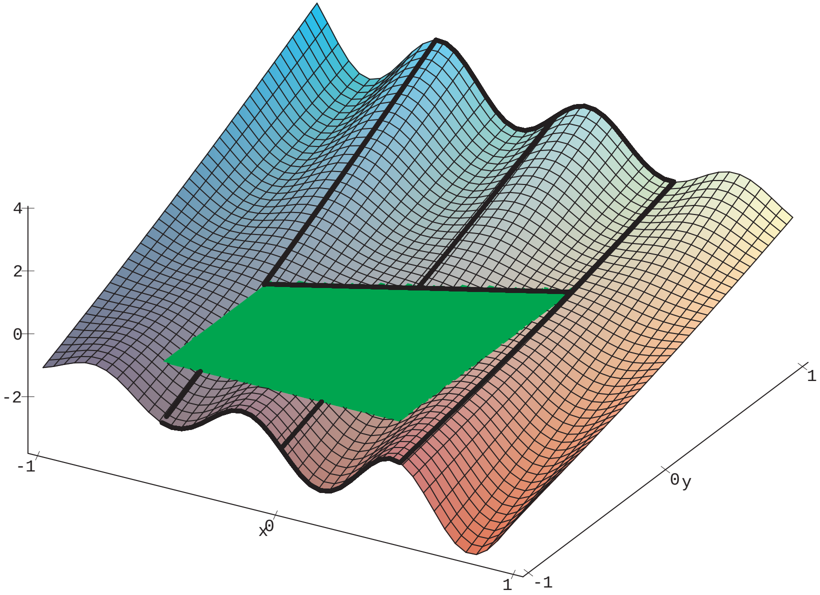
2
1
0
-1
$[\tilde{x}, \tilde{y}]$
-1
0
1
-1
0
1

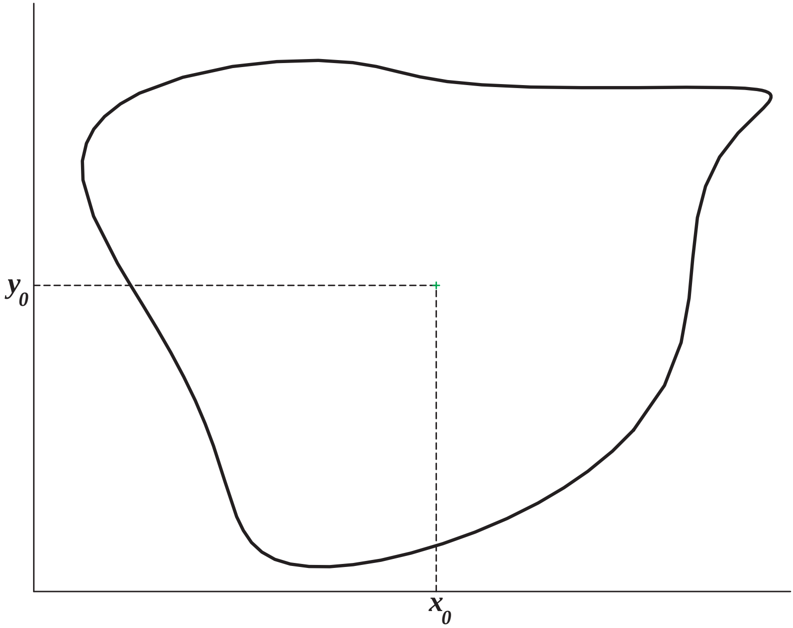


$[\tilde{x} - \delta_1, \tilde{y} + \xi_1]$
$[\tilde{x} + \delta_1, \tilde{y} + \xi_1]$
$[\tilde{x}, \tilde{y}]$
$[\tilde{x} - \delta_1, \tilde{y} - \xi_1]$
$[\tilde{x} + \delta_1, \tilde{y} - \xi_1]$
2
1
0
-1
-1
0
1
-1
0
1

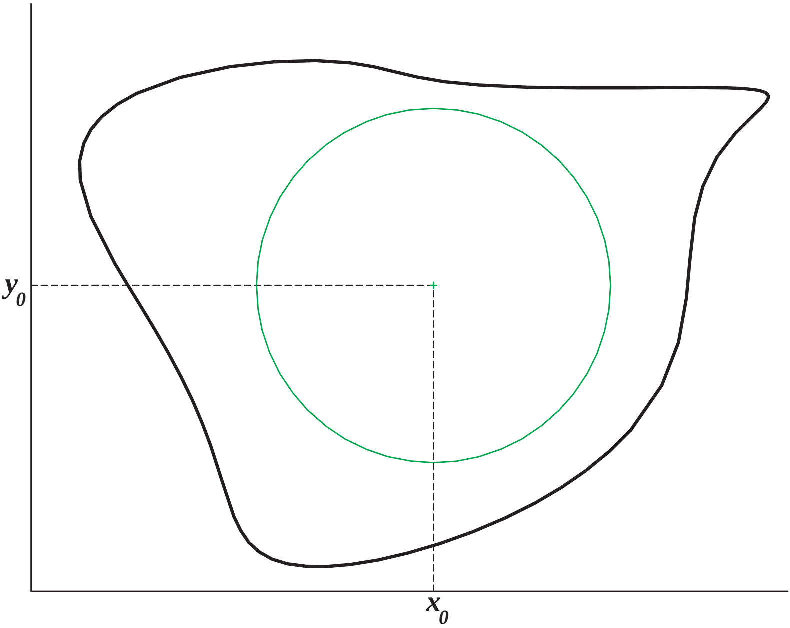


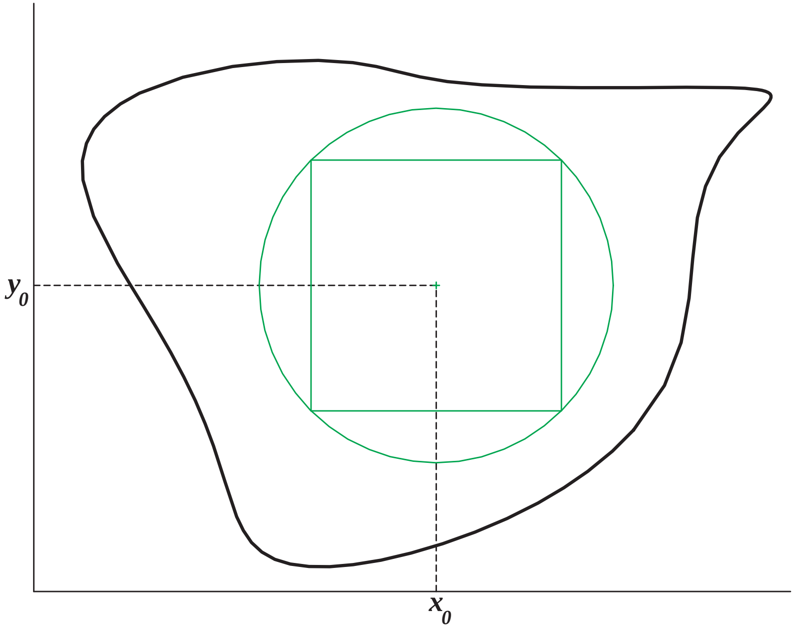
2
0
-2
-1
0
1
-1
0
1
$[\tilde{x}, \tilde{y}]$

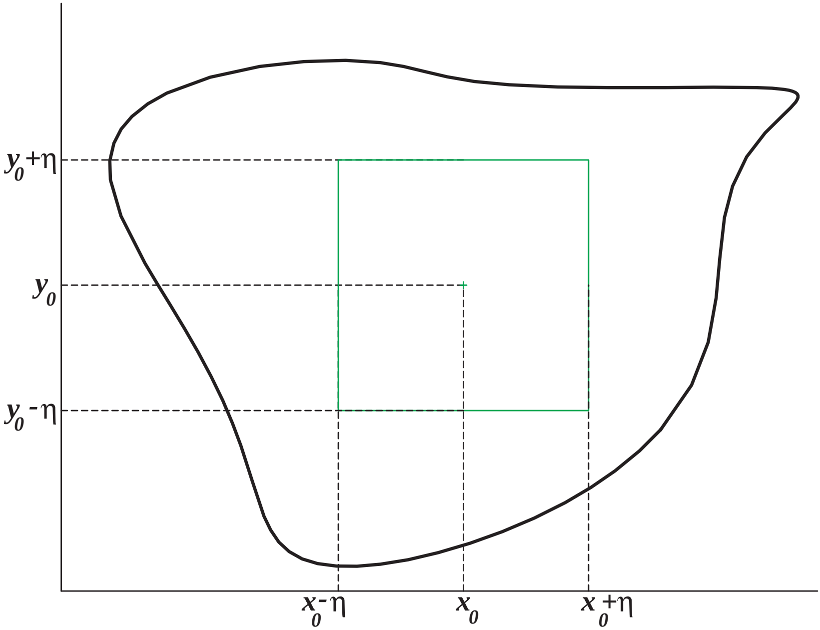

4
2
0
-2
-1
x0
1
-1
0y
1



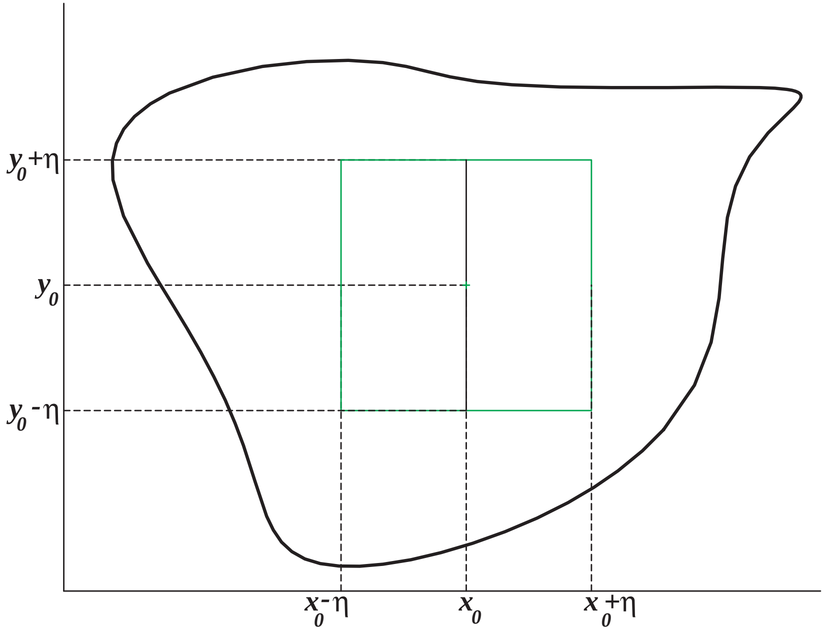
y_0
x_0


y_0
x_0

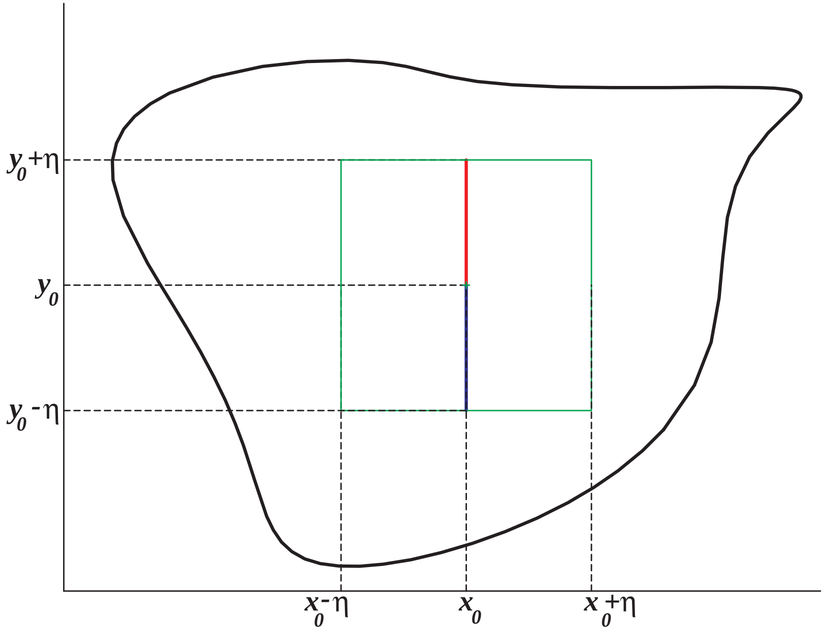

y_0
x_0

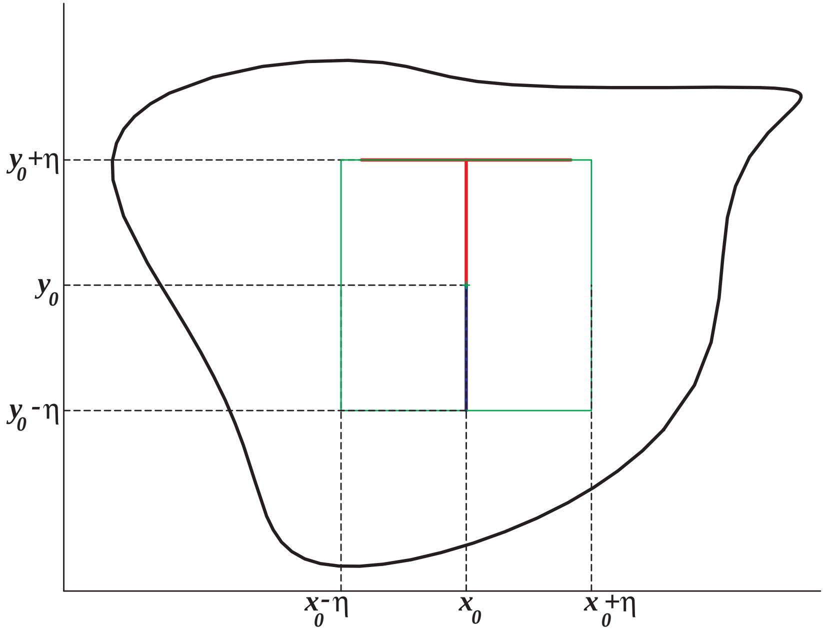


$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\eta$
x_0
$x_0+\eta$

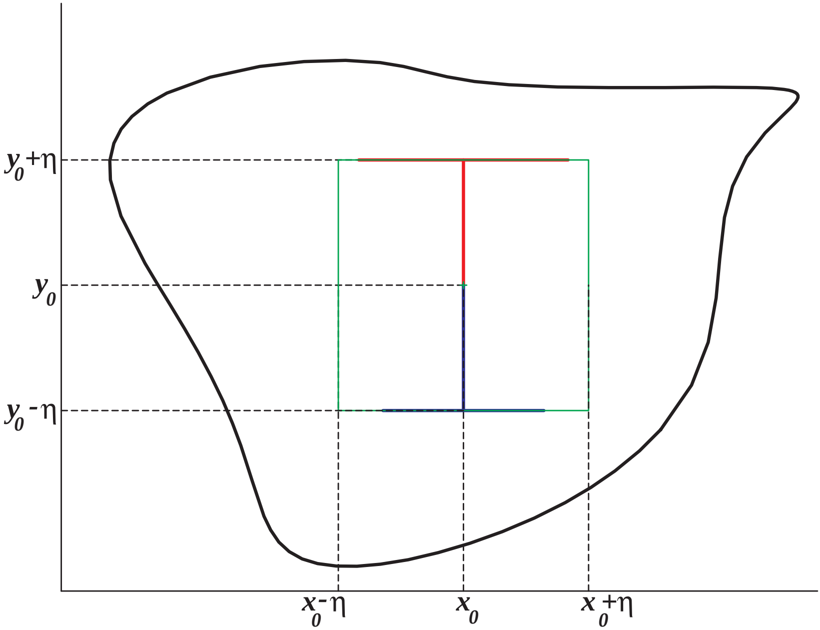


$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\eta$
x_0
$x_0+\eta$

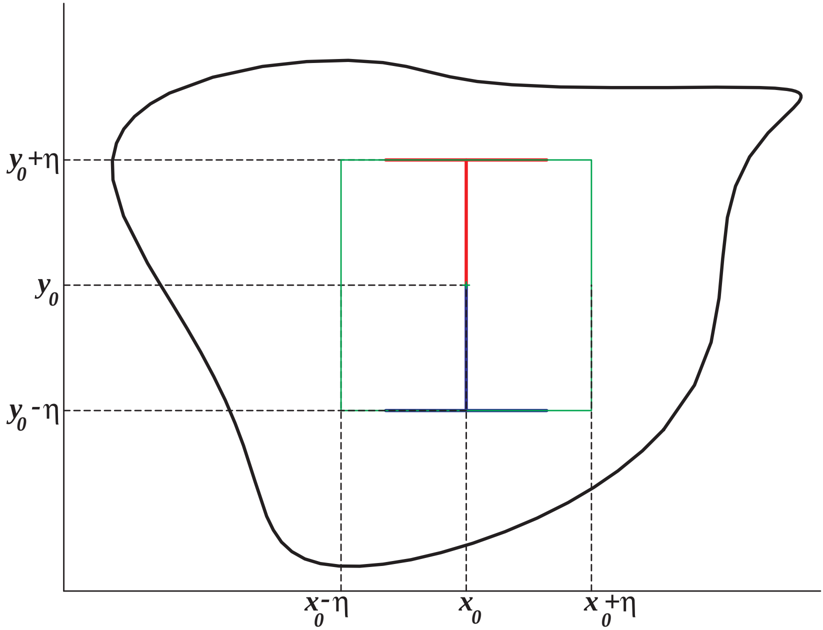

$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\eta$
x_0
$x_0+\eta$



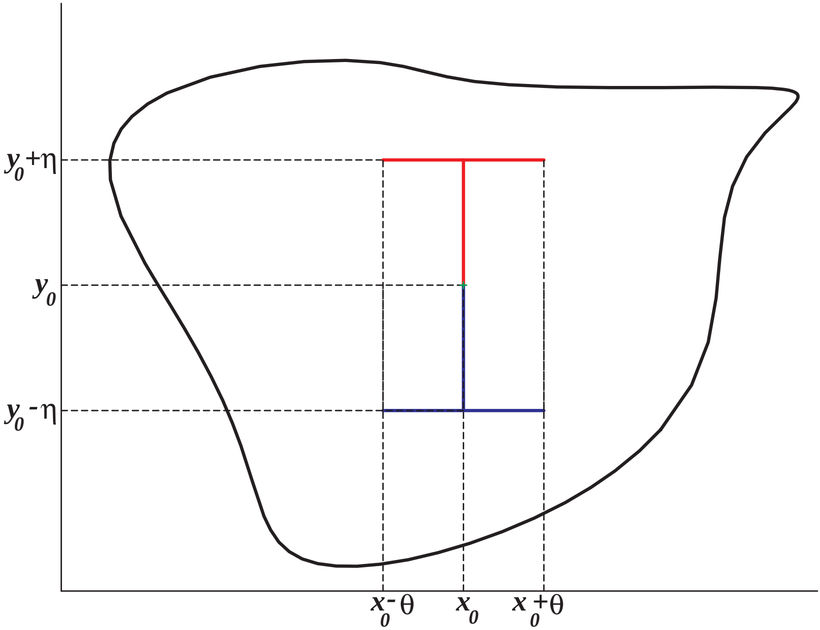
$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\eta$
x_0
$x_0+\eta$

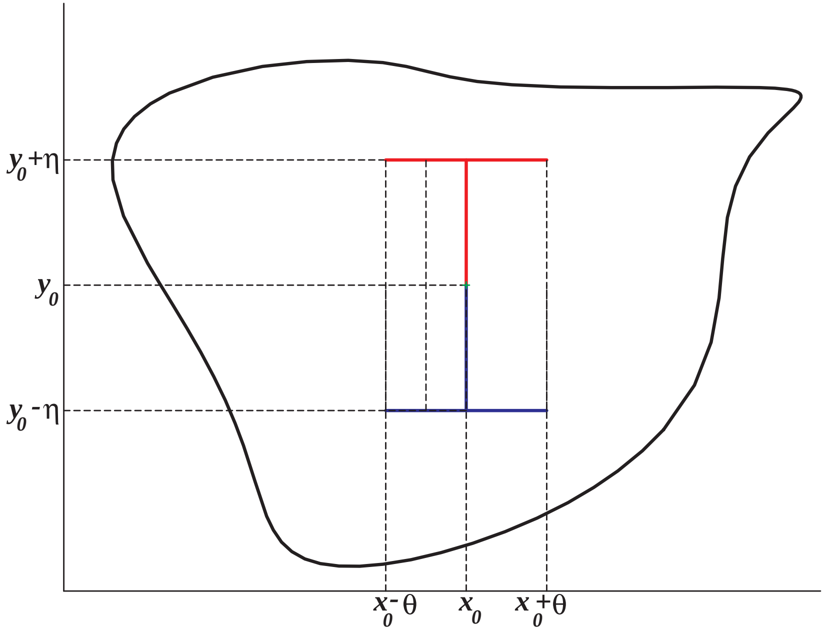


$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\eta$
x_0
$x_0+\eta$

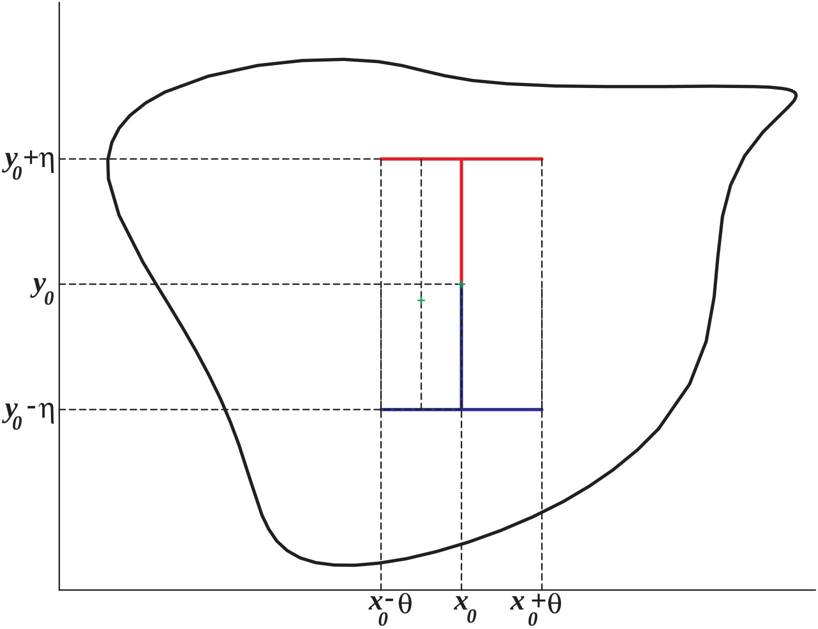


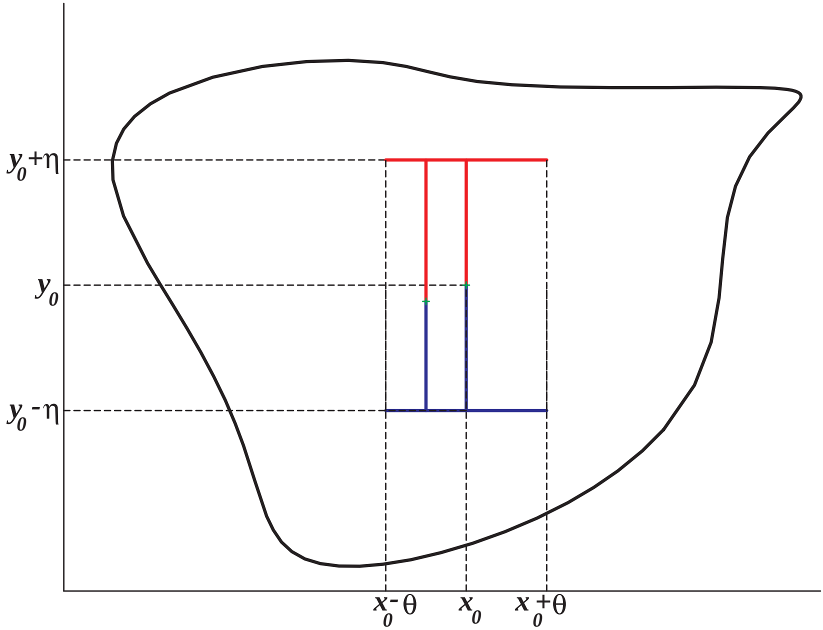
$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\eta$
x_0
$x_0+\eta$


$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\theta$
x_0
$x_0+\theta$

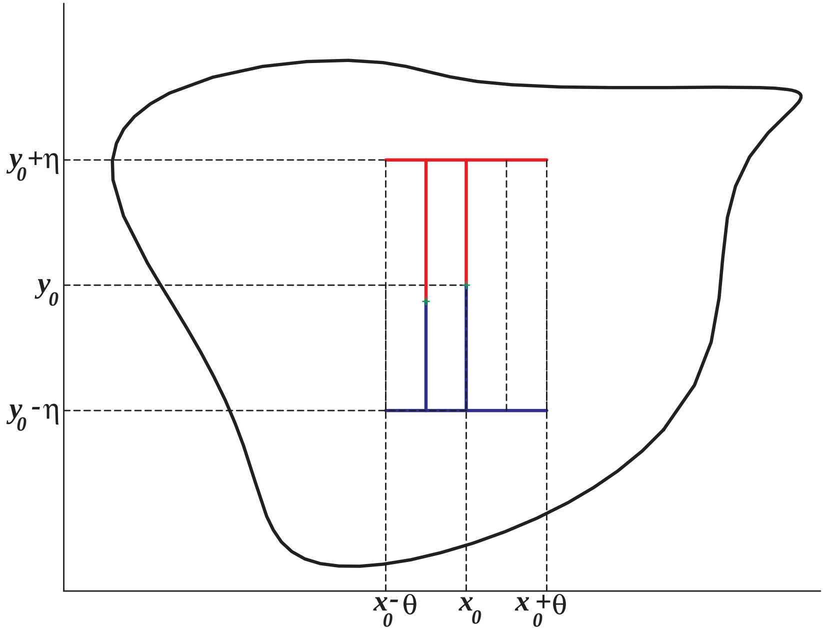


$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\theta$
x_0
$x_0+\theta$

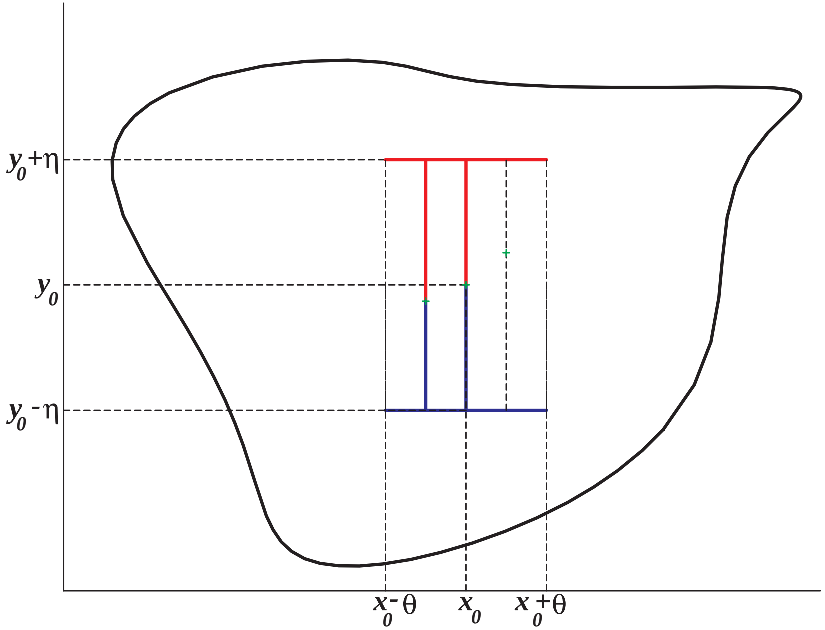

$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\theta$
x_0
$x_0+\theta$



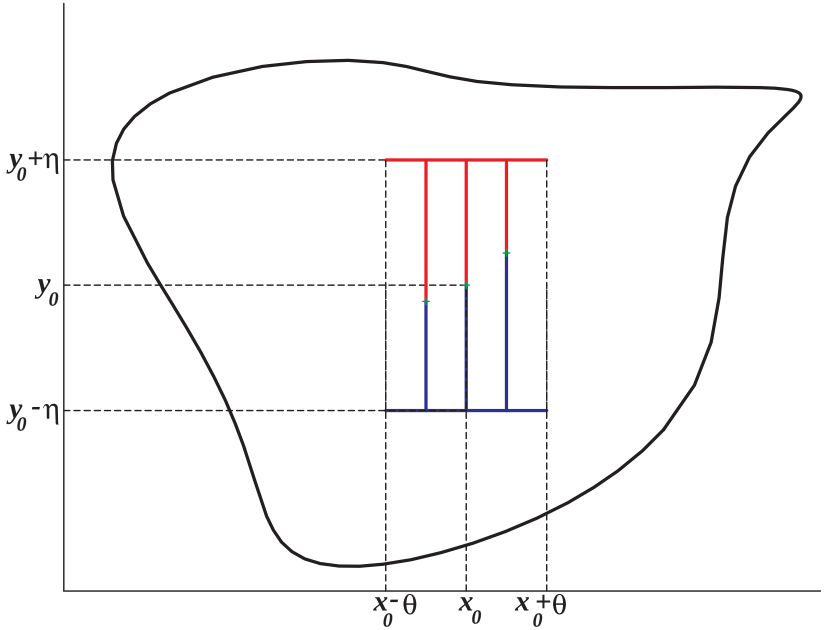
$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\theta$
x_0
$x_0+\theta$



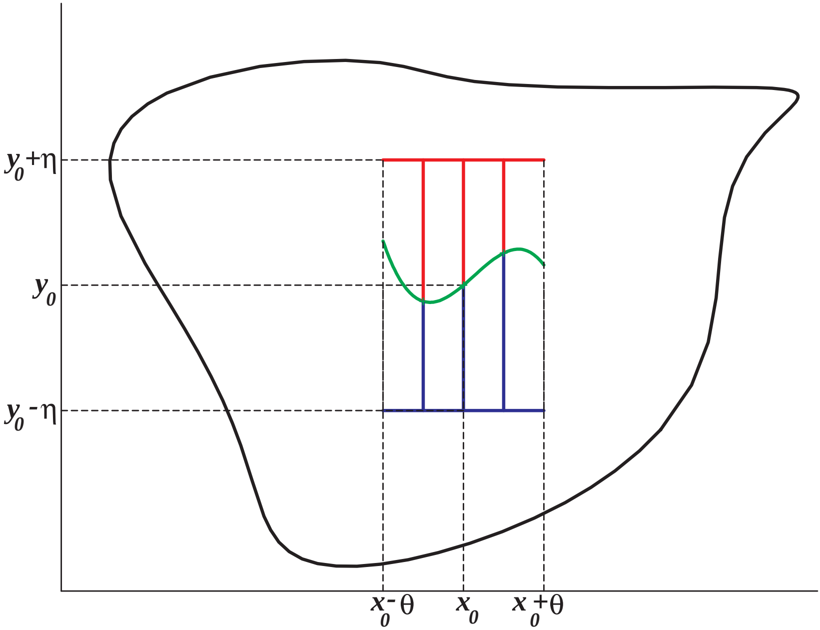
$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\theta$
x_0
$x_0+\theta$

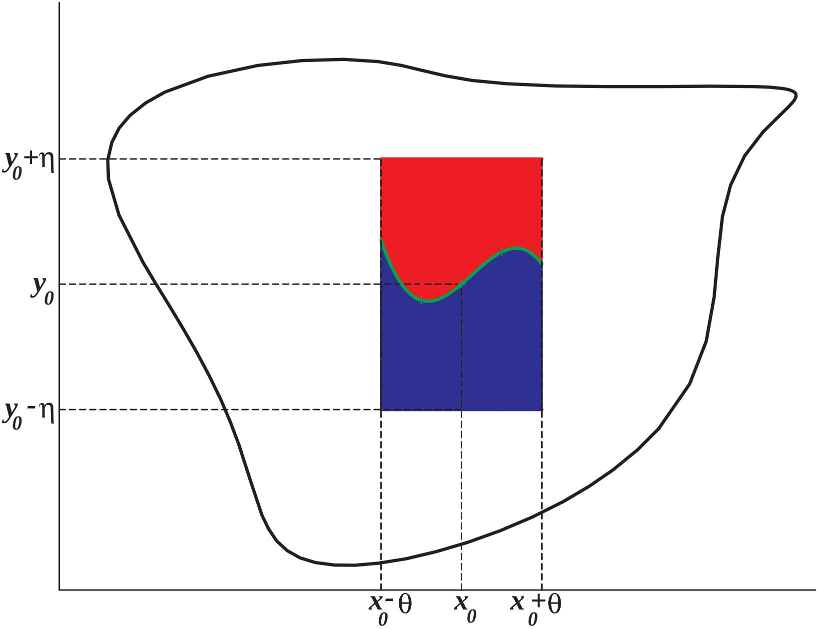


$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\theta$
x_0
$x_0+\theta$



$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\theta$
x_0
$x_0+\theta$


$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\theta$
x_0
$x_0+\theta$



$y_0+\eta$
y_0
$y_0-\eta$
$x_0-\theta$
x_0
$x_0+\theta$

Věta 24 (o implicitních funkcích)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $F_j \colon G \to \mathbb{R}$ *pro* $j = 1, \dots, m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m] \in G$ *a nechť platí:*

Věta 24 (o implicitních funkcích)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $F_j \colon G \to \mathbb{R}$ *pro* $j = 1, \dots, m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F_j \in C^k(G)$ *pro všechna* $j \in \{1, \dots, m\}$,

Věta 24 (o implicitních funkcích)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $F_j \colon G \to \mathbb{R}$ *pro* $j = 1, \dots, m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F_j \in C^k(G)$ *pro všechna* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(ii) $F_j(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = 0$ *pro všechna* $j \in \{1, \dots, m\}$,

Věta 24 (o implicitních funkcích)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $F_j \colon G \to \mathbb{R}$ *pro* $j = 1, \dots, m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F_j \in C^k(G)$ *pro všechna* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(ii) $F_j(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = 0$ *pro všechna* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(iii) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Věta 24 (o implicitních funkcích)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $F_j\colon G \to \mathbb{R}$ *pro* $j = 1, \dots, m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F_j \in C^k(G)$ *pro všechna* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(ii) $F_j(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = 0$ *pro všechna* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(iii) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ *bodu* $\tilde{\boldsymbol{x}}$ *a okolí* $V \subset \mathbb{R}^m$ *bodu* $\tilde{\boldsymbol{y}}$ *taková, že pro každé* $\boldsymbol{x} \in U$ *existuje právě jedno* $\boldsymbol{y} \in V$ *s vlastností* $F_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ *pro každé* $j \in \{1, \dots, m\}$.

Věta 24 (o implicitních funkcích)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j\colon G \to \mathbb{R}$ pro $j = 1, \dots, m$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}] = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m] \in G$ a nechť platí:

(i) *$F_j \in C^k(G)$ pro všechna $j \in \{1, \dots, m\}$,*

(ii) *$F_j(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = 0$ pro všechna $j \in \{1, \dots, m\}$,*

(iii) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{\boldsymbol{y}}$ taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in U$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} \in V$ s vlastností $F_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$. Označíme-li jednotlivé souřadnice tohoto $\boldsymbol{y}$ jako $\varphi_j(\boldsymbol{x})$, $j = 1, \dots, m$, pak takto vzniklé funkce $\varphi_j \in C^k(U)$.

Poznámka

Symbol v podmínce (iii) Věty 24 se nazývá determinant.
Definován bude později.

Poznámka

Symbol v podmínce (iii) Věty 24 se nazývá determinant. Definován bude později.

Pro $m = 1$ platí $\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$, $a \in \mathbb{R}$, tedy podmínka (iii) Věty 24 přechází v podmínku (iii) Věty 23.

Pro $m = 2$ platí $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

V.5. Lagrangeova věta o multiplikátorech

V.5. Lagrangeova věta o multiplikátorech

Věta 25 (Lagrangeova věta o multiplikátoru)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ *je otevřená množina,* $f, g \in C^1(G)$*,* $M = \{[x, y] \in G;\ g(x, y) = 0\}$ *a* $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in M$ *je bodem lokálního extrému funkce* f *vzhledem k množině* M*. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

V.5. Lagrangeova věta o multiplikátorech

Věta 25 (Lagrangeova věta o multiplikátoru)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in C^1(G)$, $M = \{[x, y] \in G;\ g(x, y) = 0\}$ a $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) $\nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \boldsymbol{o}$,

V.5. Lagrangeova věta o multiplikátorech

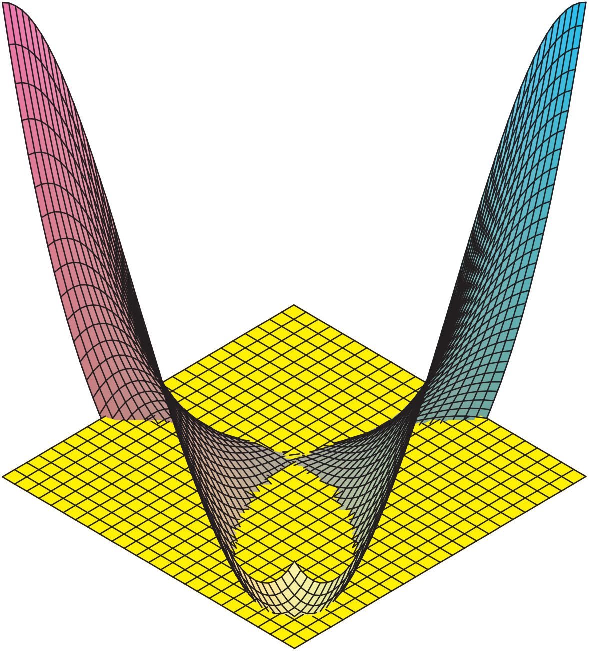
Věta 25 (Lagrangeova věta o multiplikátoru)

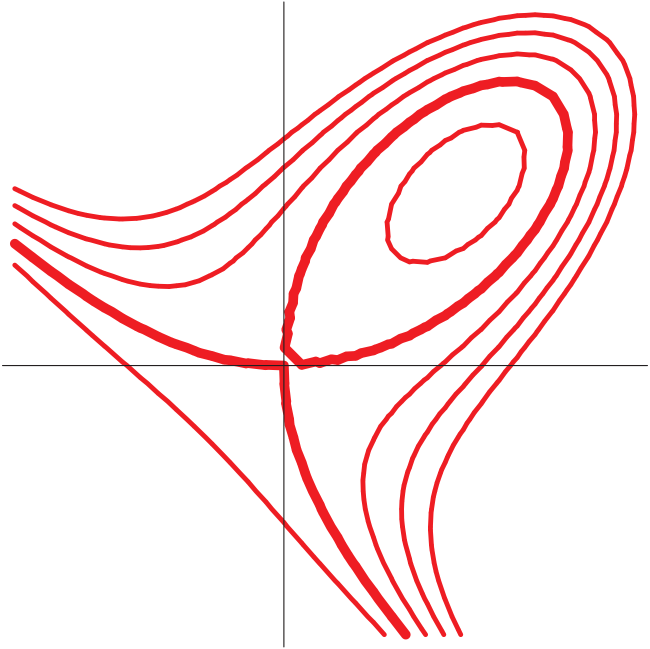
Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in C^1(G)$, $M = \{[x, y] \in G;\ g(x, y) = 0\}$ a $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

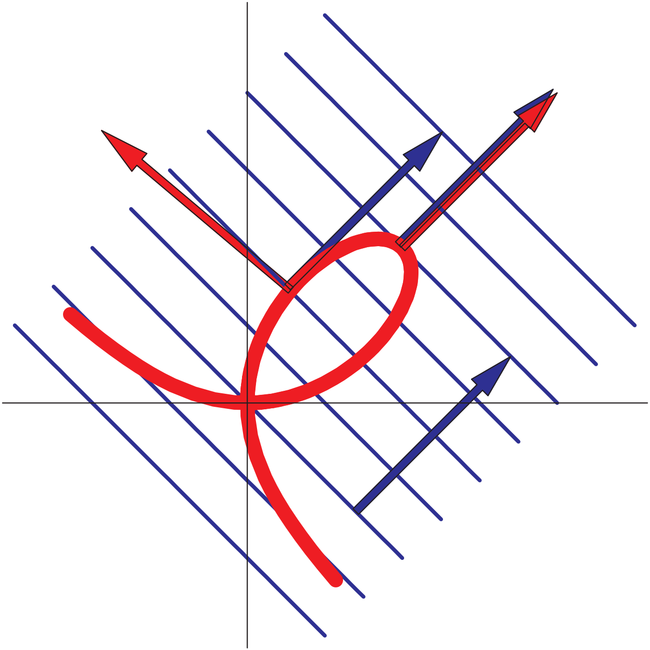
(I) $\nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \boldsymbol{o}$,

(II) *existuje reálné číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0.$$







Věta 26 (Lagrangeova věta o multiplikátorech)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina,* $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$,

$$M = \{\boldsymbol{z} \in G;\ g_1(\boldsymbol{z}) = 0, g_2(\boldsymbol{z}) = 0, \dots, g_m(\boldsymbol{z}) = 0\}$$

a bod $\tilde{\boldsymbol{z}} \in M$ *je bodem lokálního extrému funkce* f *vzhledem k množině* M*. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

Věta 26 (Lagrangeova věta o multiplikátorech)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$,

$$M = \{\boldsymbol{z} \in G;\ g_1(\boldsymbol{z}) = 0, g_2(\boldsymbol{z}) = 0, \dots, g_m(\boldsymbol{z}) = 0\}$$

a bod $\tilde{\boldsymbol{z}} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) *vektory*

$$\nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}), \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}), \dots, \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}})$$

jsou lineárně závislé,

Věta 26 (Lagrangeova věta o multiplikátorech)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$,

$$M = \{\boldsymbol{z} \in G;\ g_1(\boldsymbol{z}) = 0, g_2(\boldsymbol{z}) = 0, \dots, g_m(\boldsymbol{z}) = 0\}$$

a bod $\tilde{\boldsymbol{z}} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) *vektory*

$$\nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}), \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}), \dots, \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}})$$

jsou lineárně závislé,

(II) *existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ splňující*

$$\nabla f(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{o}.$$

Poznámka

- Pojem lineární závislosti vektorů bude zaveden později.

Poznámka

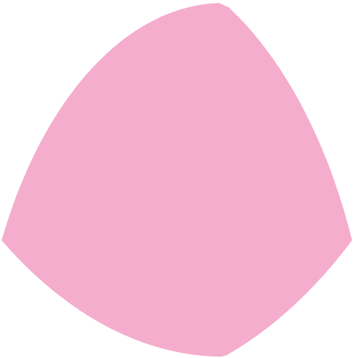
- Pojem lineární závislosti vektorů bude zaveden později.
  Pro $m = 1$ platí, že vektor je lineárně závislý, právě když je nulový.
  Pro $m = 2$ platí, že dva vektory jsou lineárně závislé, právě když jeden z nich je násobkem druhého.

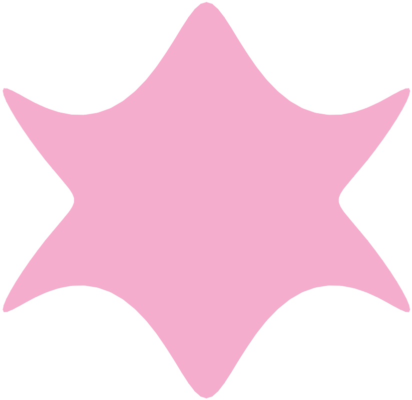
Poznámka

- Pojem lineární závislosti vektorů bude zaveden později.
  Pro $m = 1$ platí, že vektor je lineárně závislý, právě když je nulový.
  Pro $m = 2$ platí, že dva vektory jsou lineárně závislé, právě když jeden z nich je násobkem druhého.
- Čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory.

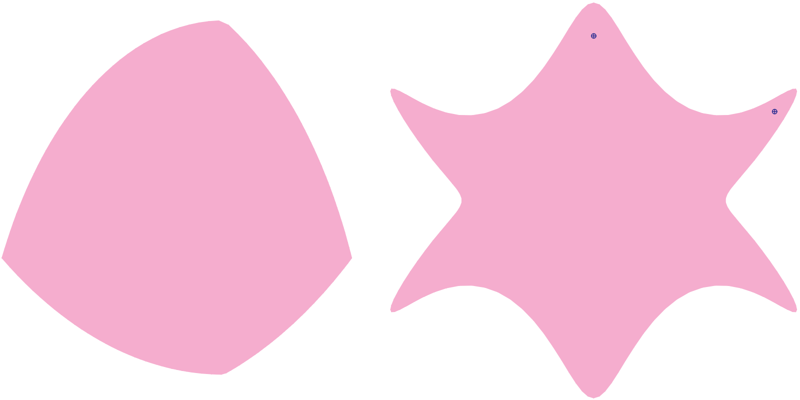
V.6. Funkce konkávní a kvazikonkávní

V.6. Funkce konkávní a kvazikonkávní

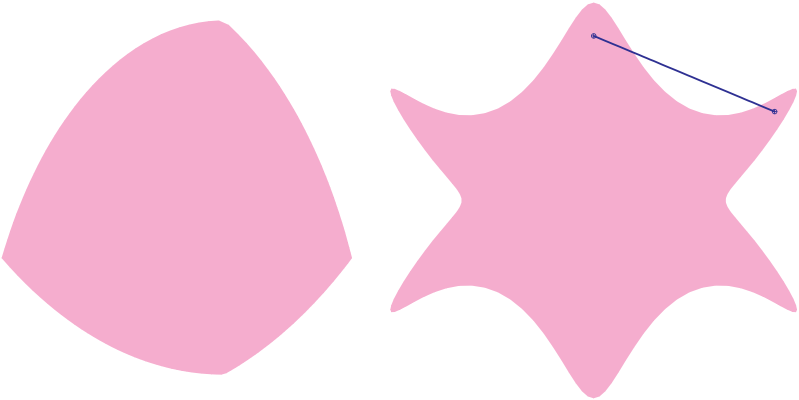




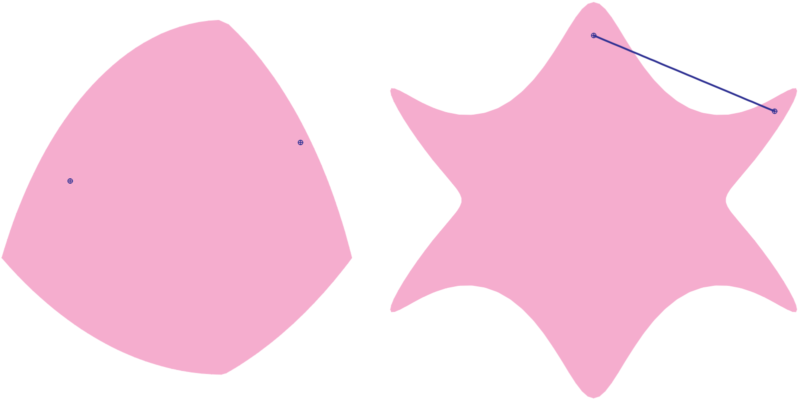
V.6. Funkce konkávní a kvazikonkávní



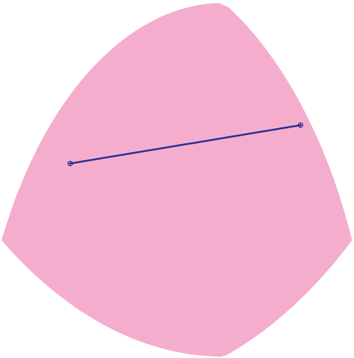
V.6. Funkce konkávní a kvazikonkávní

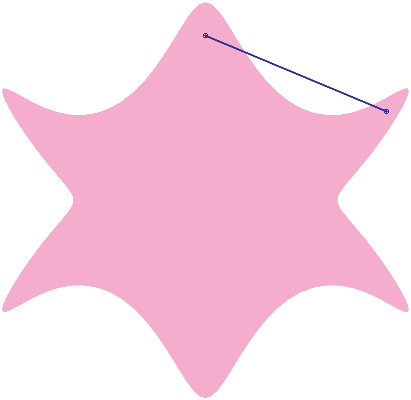


V.6. Funkce konkávní a kvazikonkávní

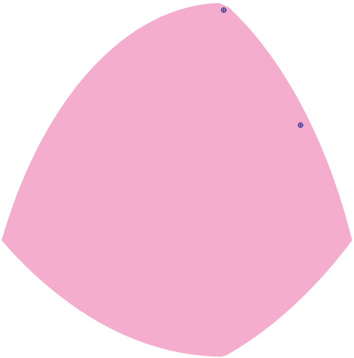


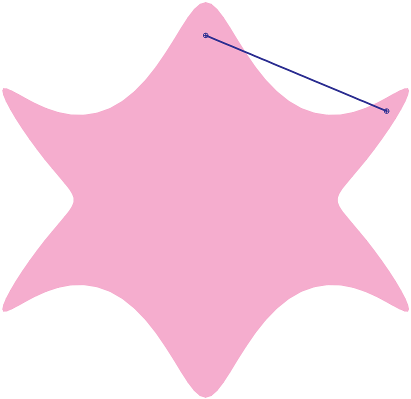
V.6. Funkce konkávní a kvazikonkávní



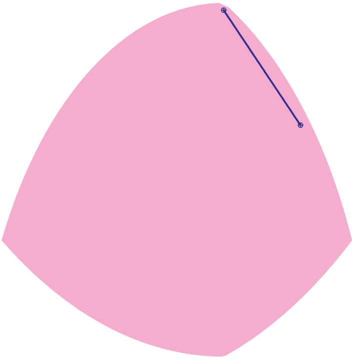


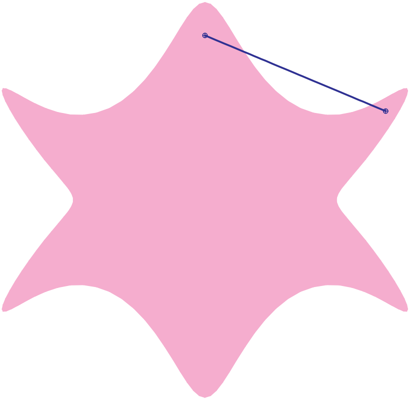
V.6. Funkce konkávní a kvazikonkávní



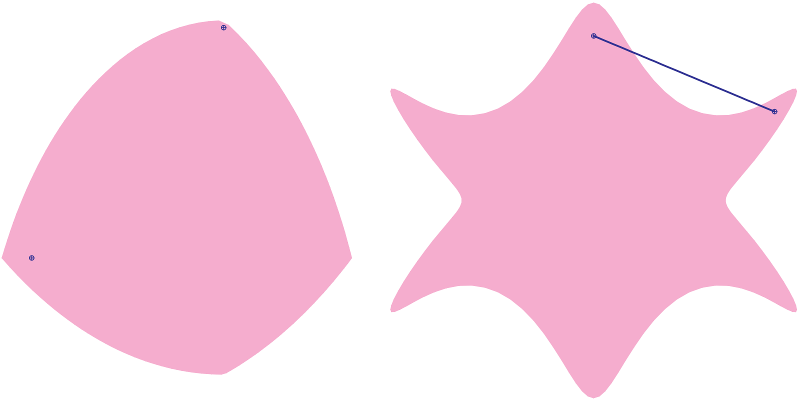


V.6. Funkce konkávní a kvazikonkávní

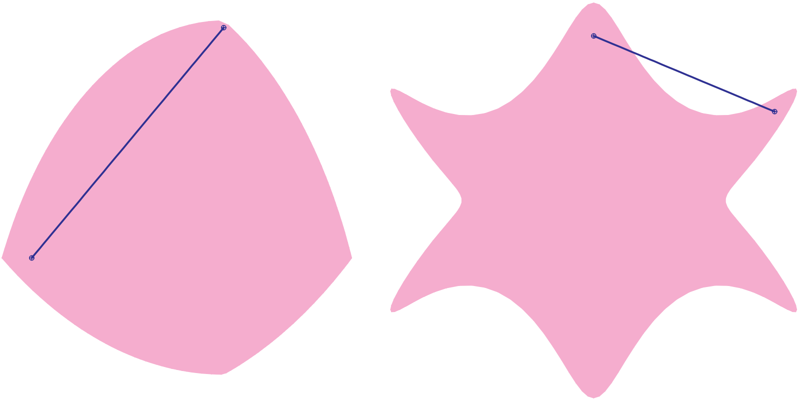




V.6. Funkce konkávní a kvazikonkávní

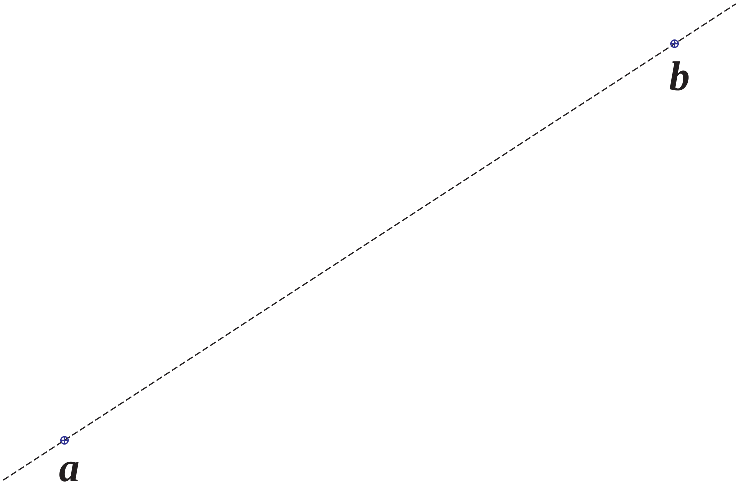


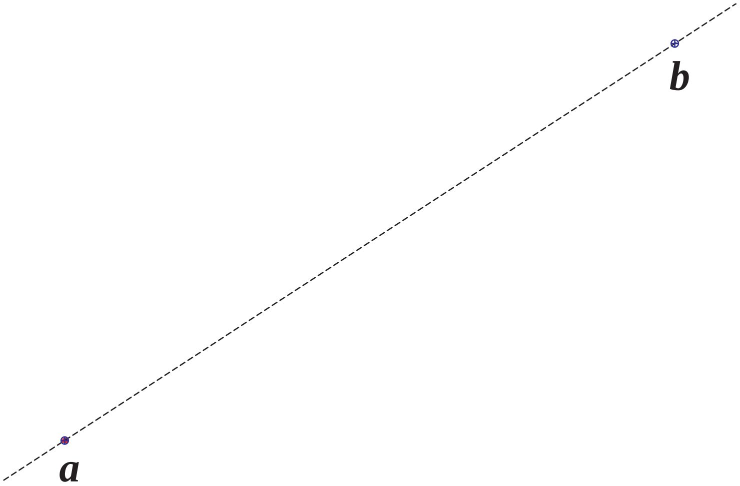
V.6. Funkce konkávní a kvazikonkávní



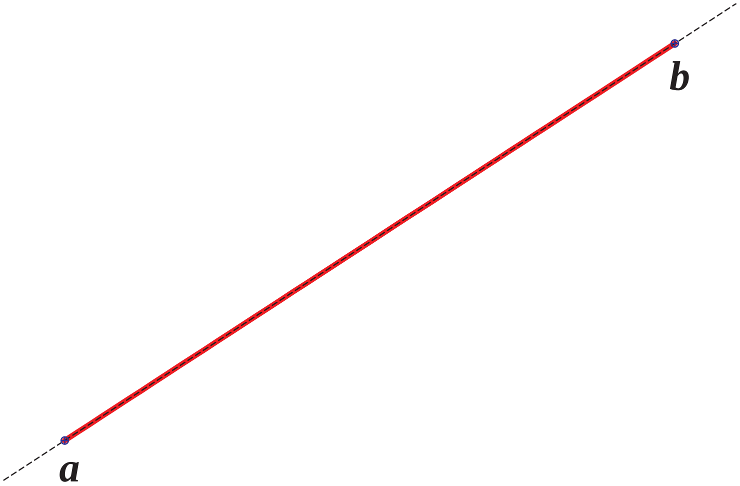
b

a

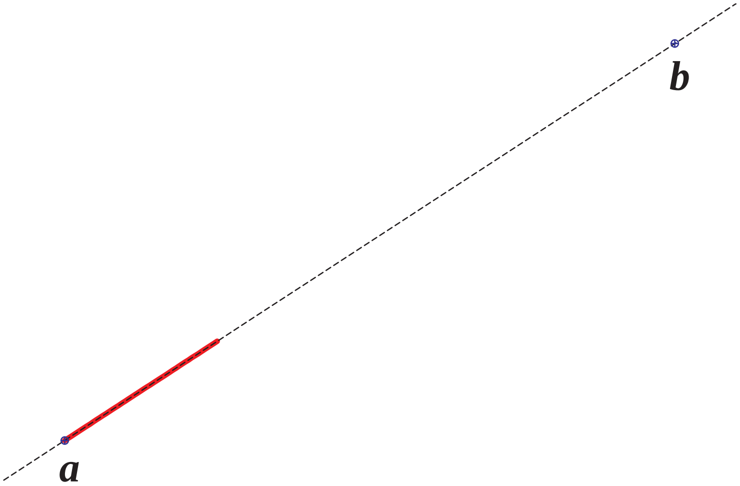

b
a



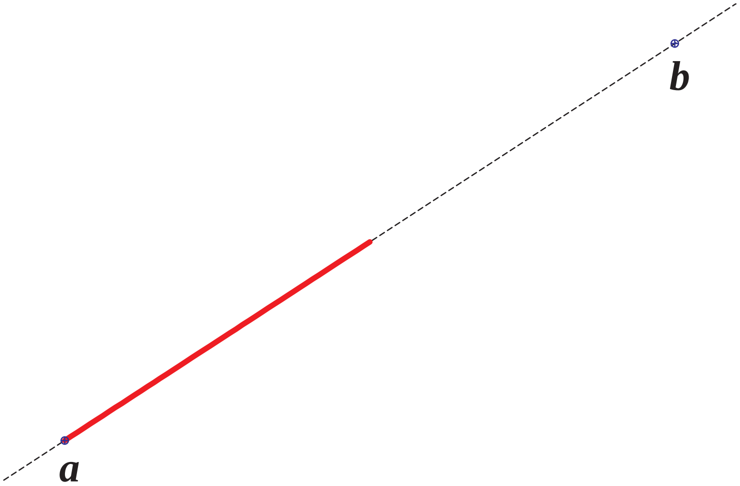
$$\boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + 0 \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$



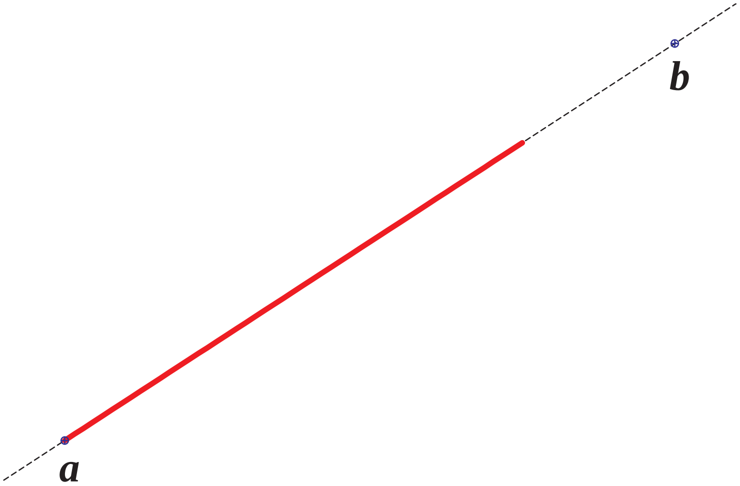
$$\boldsymbol{b} = 0 \cdot \boldsymbol{a} + 1 \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + 1 \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$



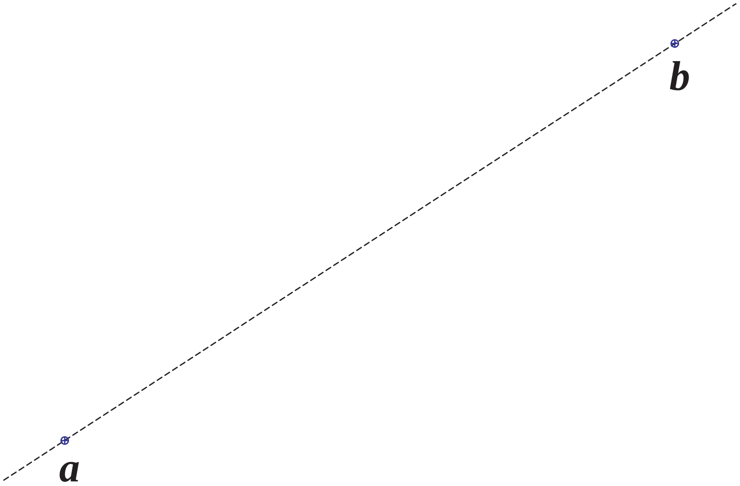
$$\frac{3}{4} \cdot \boldsymbol{a} + \frac{1}{4} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{4} \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$



$$\frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$



$$\frac{1}{4} \cdot \boldsymbol{a} + \frac{3}{4} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \frac{3}{4} \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$



$$t \cdot \boldsymbol{a} + (1 - t) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (1 - t) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že M je konvexní množina, jestliže platí:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M \ \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \ t\boldsymbol{x} + (1 - t)\boldsymbol{y} \in M.$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že funkce f je

- konkávní na M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \; \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b}),$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že funkce f je

- konkávní na M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \; \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b}),$$

- ryze konkávní na M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \; \forall t \in (0, 1) : \\ f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) > tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b}).$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že funkce f je

- konkávní na M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \; \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b}),$$

- ryze konkávní na M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \; \forall t \in (0, 1) : \quad f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) > tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b}).$$

Poznámka

Obrácením nerovností obdržíme definici *konvexní* a *ryze konvexní* funkce.

Poznámka

Funkce f je konvexní (ryze konvexní), právě když funkce $-f$ je konkávní (ryze konkávní).

Věty v tomto oddíle jsou formulovány pro konkávní a ryze konkávní funkce, jejich zřejmé analogie platí i pro konvexní a ryze konvexní funkce.

Poznámka

Funkce f je konvexní (ryze konvexní), právě když funkce $-f$ je konkávní (ryze konkávní).
Věty v tomto oddíle jsou formulovány pro konkávní a ryze konkávní funkce, jejich zřejmé analogie platí i pro konvexní a ryze konvexní funkce.

Poznámka

- Pokud je funkce f je ryze konkávní na M, pak je i konkávní na M.

Poznámka

Funkce f je konvexní (ryze konvexní), právě když funkce $-f$ je konkávní (ryze konkávní).
Věty v tomto oddíle jsou formulovány pro konkávní a ryze konkávní funkce, jejich zřejmé analogie platí i pro konvexní a ryze konvexní funkce.

Poznámka

- Pokud je funkce f je ryze konkávní na M, pak je i konkávní na M.
- Nechť funkce f je konkávní na M. Pak f je ryze konkávní na M, právě když graf f „neobsahuje úsečku“, tj.

$$\neg\Big(\exists \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b},\ \forall t \in \langle 0, 1\rangle : \\ f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) = tf(\boldsymbol{a}) + (1-t)f(\boldsymbol{b})\Big)$$

Věta 27

Nechť funkce f je konkávní na otevřené konvexní množině $G \subset \mathbb{R}^n$. Pak f je spojitá na G.

Věta 27

Nechť funkce f je konkávní na otevřené konvexní množině $G \subset \mathbb{R}^n$. Pak f je spojitá na G.

Věta 28

Nechť funkce f je konkávní na konvexní množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina $Q_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in M;\ f(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$ konvexní.

Věta 29 (charakterizace konkávních funkcí třídy $\mathcal{C}^1$)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$.

(i) *Funkce f je konkávní na G, právě když*

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G\colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(y_i - x_i).$$

Věta 29 (charakterizace konkávních funkcí třídy $\mathcal{C}^1$)

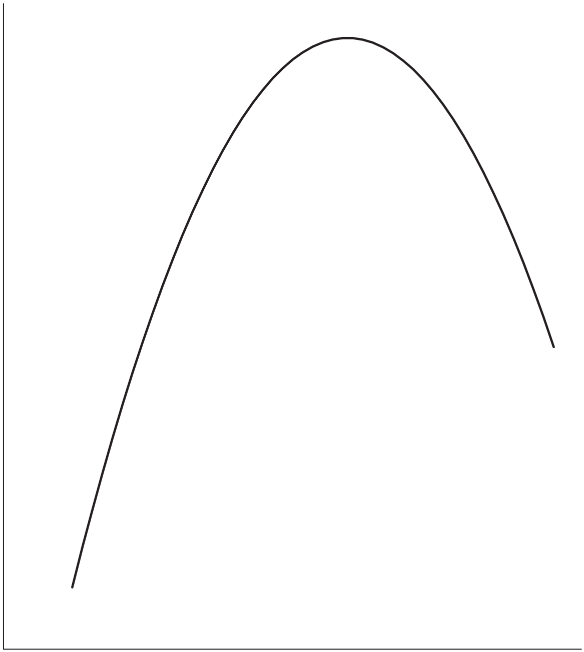
Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in C^1(G)$.

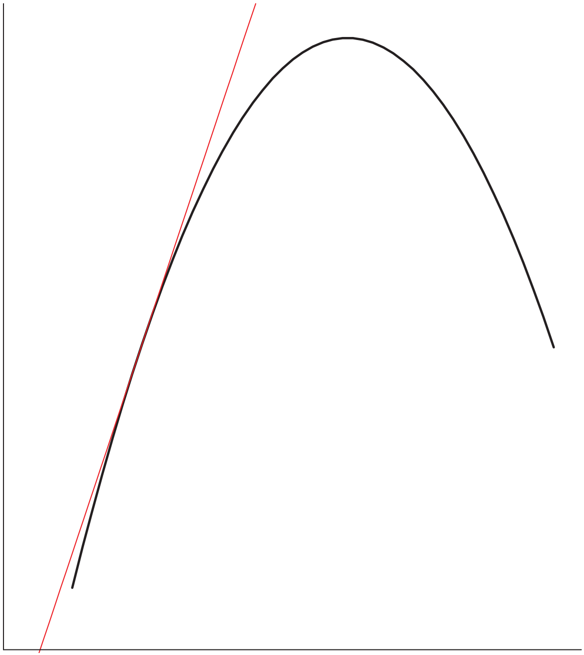
(i) *Funkce f je konkávní na G, právě když*

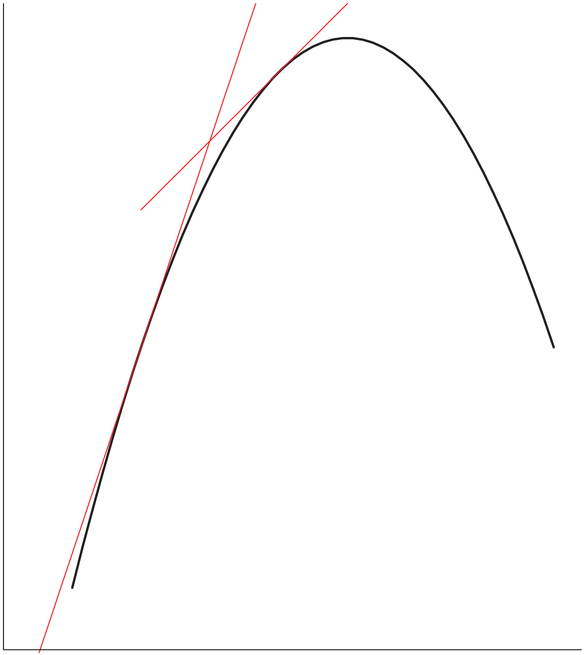
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G\colon f(\boldsymbol{y}) \leq f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(y_i - x_i).$$

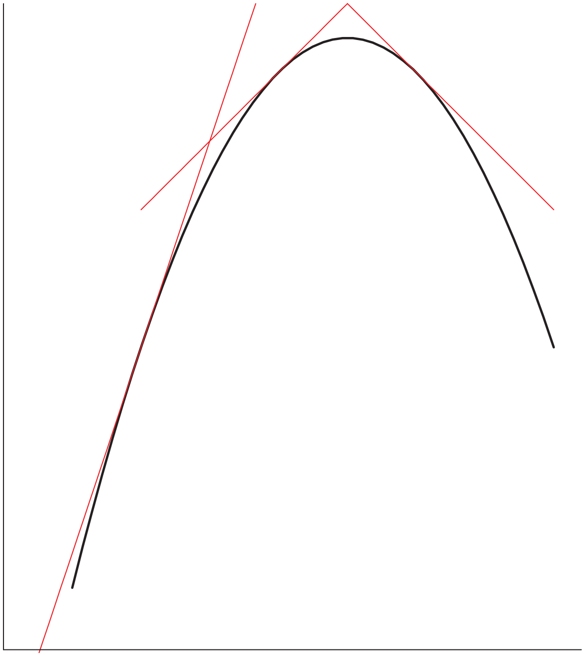
(ii) *Funkce f je ryze konkávní na G, právě když*

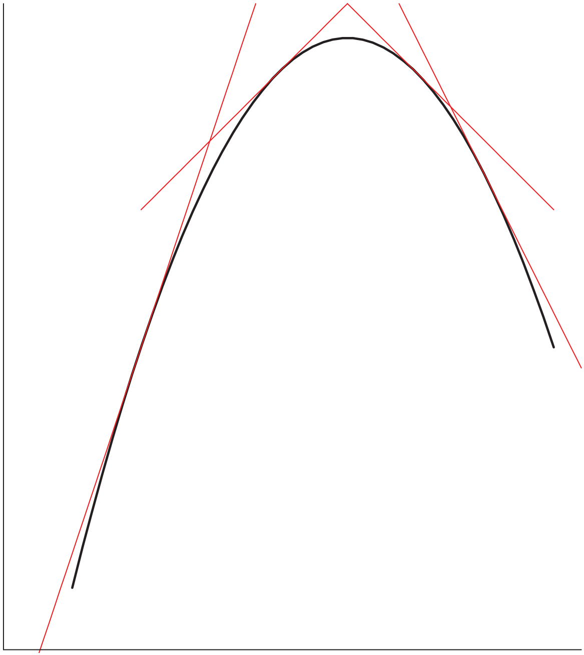
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}\colon f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(y_i - x_i).$$











Důsledek 30

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ *je konvexní otevřená množina a* $f \in C^1(G)$ *je konkávní na* G*. Je-li bod* $\boldsymbol{a} \in G$ *stacionárním bodem funkce* f *(tj.* $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$*), pak je bod* $\boldsymbol{a}$ *bodem maxima funkce* f *na množině* G*.*

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že funkce f je

- kvazikonkávní na M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \; \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \; f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\},$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že funkce f je

- kvazikonkávní na M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M \; \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \; f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\},$$

- ryze kvazikonkávní na M, jestliže

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}, \; \forall t \in (0, 1) : \\ f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) > \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\}.$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že funkce f je

- kvazikonkávní na M, jestliže

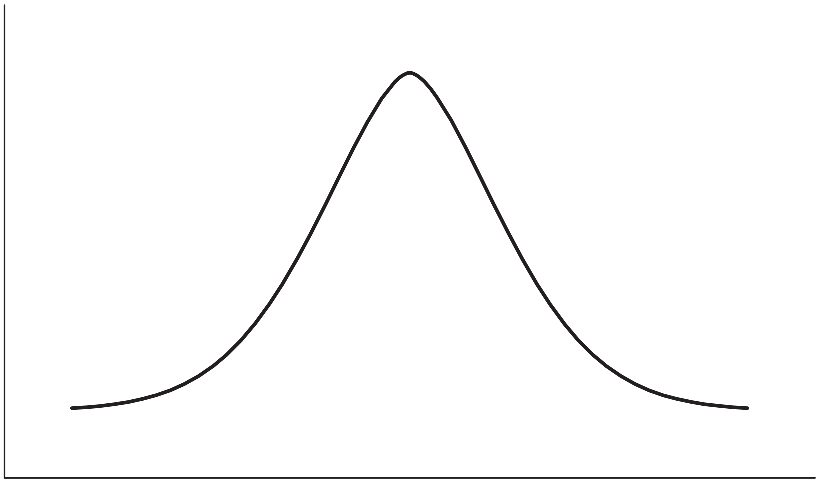
$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M\ \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) \geq \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\},$$

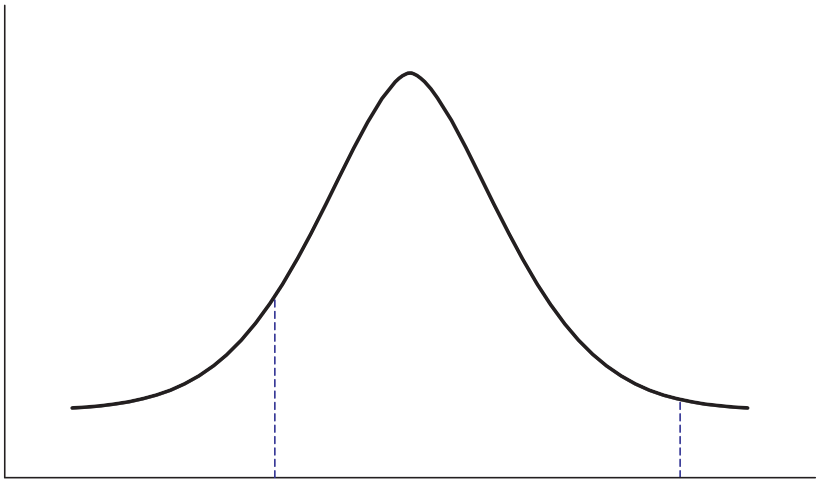
- ryze kvazikonkávní na M, jestliže

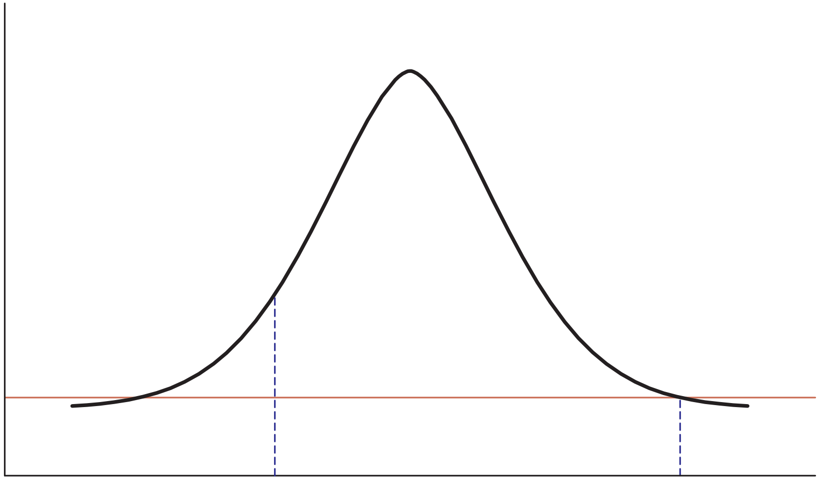
$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b},\ \forall t \in (0, 1) :$$
$$f(t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}) > \min\{f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})\}.$$

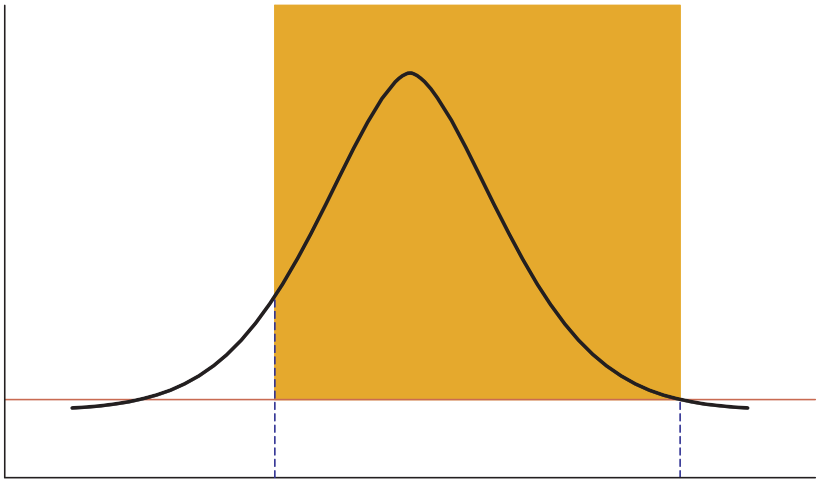
Poznámka

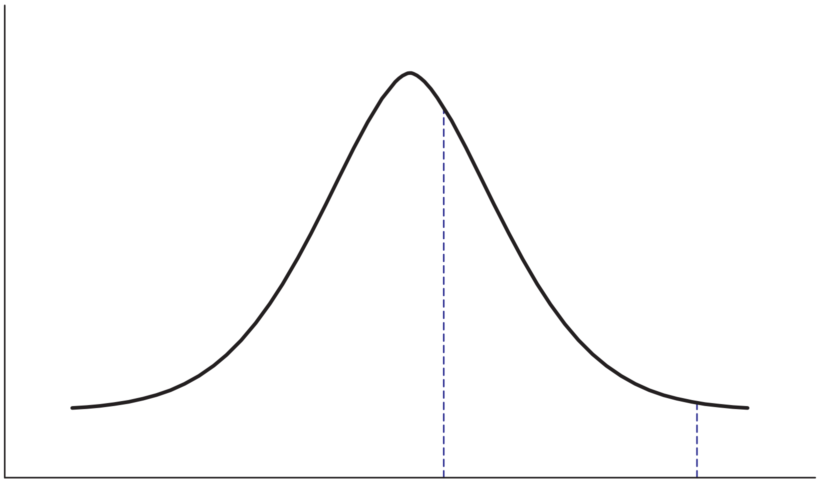
Obrácením nerovností a záměnou minima za maximum obdržíme definici *kvazikonvexní* a *ryze kvazikonvexní* funkce.

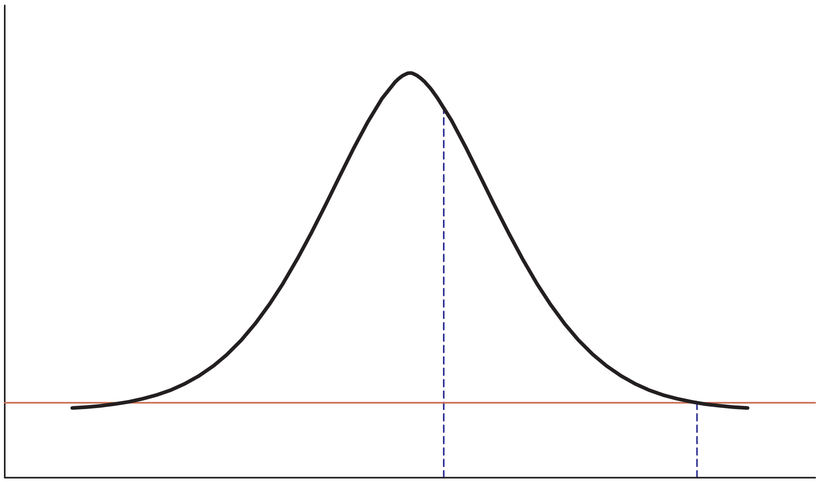


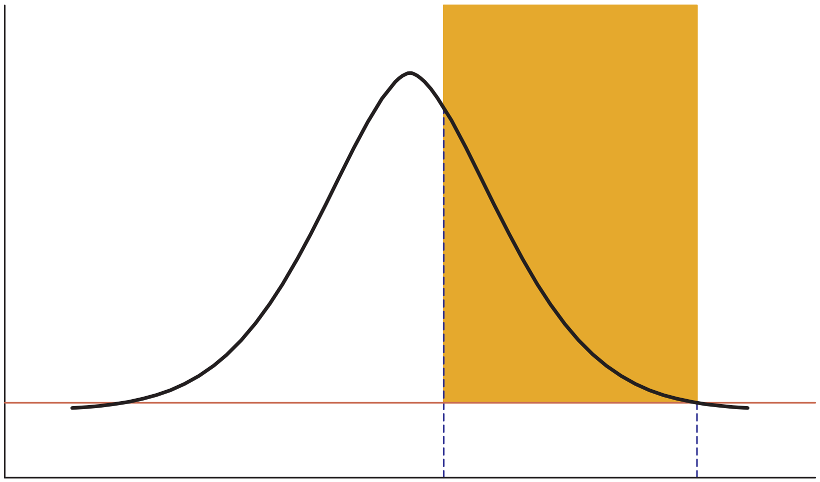


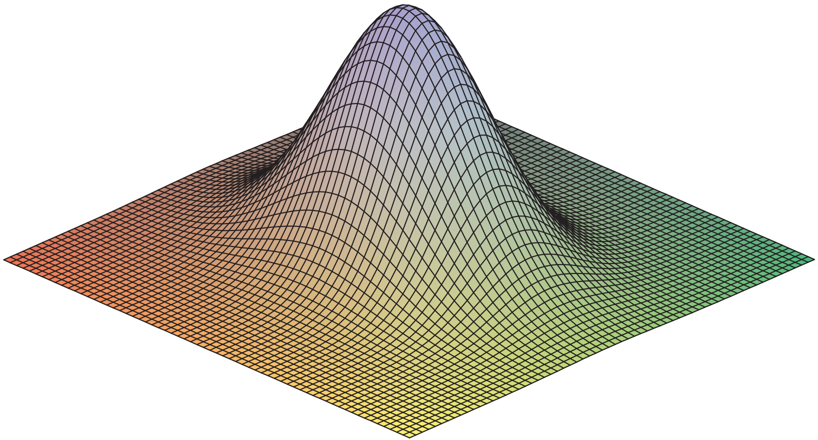












Poznámka

Funkce f je kvazikonvexní (ryze kvazikonvexní), právě když funkce $-f$ je kvazikonkávní (ryze kvazikonkávní). Věty v tomto oddíle jsou formulovány pro kvazikonkávní a ryze kvazikonkávní funkce, jejich zřejmé analogie platí i pro kvazikonvexní a ryze kvazikonvexní funkce.

Poznámka

Funkce f je kvazikonvexní (ryze kvazikonvexní), právě když funkce $-f$ je kvazikonkávní (ryze kvazikonkávní). Věty v tomto oddíle jsou formulovány pro kvazikonkávní a ryze kvazikonkávní funkce, jejich zřejmé analogie platí i pro kvazikonvexní a ryze kvazikonvexní funkce.

Poznámka

- Pokud je funkce f je ryze kvazikonkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.

Poznámka

Funkce f je kvazikonvexní (ryze kvazikonvexní), právě když funkce $-f$ je kvazikonkávní (ryze kvazikonkávní). Věty v tomto oddíle jsou formulovány pro kvazikonkávní a ryze kvazikonkávní funkce, jejich zřejmé analogie platí i pro kvazikonvexní a ryze kvazikonvexní funkce.

Poznámka

- Pokud je funkce f je ryze kvazikonkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.
- Nechť funkce f je kvazikonkávní na M. Pak f je ryze kvazikonkávní na M, právě když graf f „neobsahuje vodorovnou úsečku“, tj.

$$\neg\big(\exists \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b},\ \forall t \in \langle 0, 1\rangle :\ f(t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a})\big).$$

Poznámka

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Pak platí:

Poznámka

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Pak platí:

- Je-li f konkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.

Poznámka

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Pak platí:

- Je-li f konkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.
- Je-li f ryze konkávní na M, pak je i ryze kvazikonkávní na M.

Věta 31 (o jednoznačnosti extrému)

Nechť f je ryze kvazikonkávní funkce na konvexní množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Pokud f nabývá na M svého maxima, pak ho nabývá právě v jednom bodě.

Věta 31 (o jednoznačnosti extrému)

Nechť f je ryze kvazikonkávní funkce na konvexní množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Pokud f nabývá na M svého maxima, pak ho nabývá právě v jednom bodě.

Důsledek

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní, omezená, uzavřená a neprázdná množina a f je spojitá a ryze kvazikonkávní funkce na M. Pak f nabývá maxima na M právě v jednom bodě.

Věta 32 (charakterizace kvazikonkávních funkcí pomocí úrovňových množin)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Funkce f je kvazikonkávní na M právě tehdy, když pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je množina $Q_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in M;\ f(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$ konvexní.

VI. Maticový počet

VI.1. Základní operace s maticemi

Definice

Tabulku

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazýváme maticí typu $m \times n$. Zkráceně zapisujeme $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$.

Definice

Tabulku

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazýváme matic typu $m \times n$. Zkráceně zapisujeme $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$.

Matici typu $n \times n$ nazýváme čtvercovou maticí řádu n.

Definice

Tabulku

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazýváme matící typu $m \times n$. Zkráceně zapisujeme $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$.

Matici typu $n \times n$ nazýváme čtvercovou maticí řádu n.

Množinu všech matic typu $m \times n$ značíme $M(m \times n)$.

Definice

Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, mluvíme jako o i-tém řádku matice $\boldsymbol{A}$.

Definice

Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, mluvíme jako o i-tém řádku matice $\boldsymbol{A}$.

Definice

Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, mluvíme jako o *i-tém řádku* matice $\boldsymbol{A}$.

Definice

Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, mluvíme jako o *i-tém řádku* matice $\boldsymbol{A}$.

Definice

Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, mluvíme jako o i-tém řádku matice $\boldsymbol{A}$.

Definice

Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, mluvíme jako o i-tém řádku matice $\boldsymbol{A}$.

O m-tici čísel $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, kde $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mluvíme jako o j-tém sloupci matice $\boldsymbol{A}$.

Definice

Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, mluvíme jako o i-tém řádku matice $\boldsymbol{A}$.

O m-tici čísel $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, kde $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mluvíme jako o j-tém sloupci matice $\boldsymbol{A}$.

Definice

Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, mluvíme jako o i-tém řádku matice $\boldsymbol{A}$.

O m-tici čísel $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, kde $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mluvíme jako o j-tém sloupci matice $\boldsymbol{A}$.

Definice

Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, mluvíme jako o i-tém řádku matice $\boldsymbol{A}$.

O m-tici čísel $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, kde $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mluvíme jako o j-tém sloupci matice $\boldsymbol{A}$.

Definice

Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O n-tici čísel $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, mluvíme jako o i-tém řádku matice $\boldsymbol{A}$.

O m-tici čísel $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, kde $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mluvíme jako o j-tém sloupci matice $\boldsymbol{A}$.

Definice

Řekneme, že dvě matice se rovnají, pokud jsou stejného typu a všechny odpovídající prvky se rovnají, tj. pokud $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ a $\boldsymbol{B} = (b_{uv})_{\substack{u=1..r \\ v=1..s}}$, pak $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, právě když $m = r$, $n = s$ a $a_{ij} = b_{ij}\ \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Definice

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n)$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m\\ j=1..n}}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{\substack{i=1..m\\ j=1..n}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak součtem matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ rozumíme matici

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definice

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n)$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak součtem matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ rozumíme matici

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Součinem reálného čísla λ a matice $\boldsymbol{A}$ (též λ-násobkem matice $\boldsymbol{A}$) rozumíme matici

$$\lambda \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tvrzení 33 (základní vlastnosti sčítání matic a násobení skalárem)

Platí:

- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(m \times n): \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$, *(asociativita)*

Tvrzení 33 (základní vlastnosti sčítání matic a násobení skalárem)

Platí:

- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(m \times n):\ \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$, *(asociativita)*
- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n):\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, *(komutativita)*

Tvrzení 33 (základní vlastnosti sčítání matic a násobení skalárem)

Platí:

- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(m \times n)\colon \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$, *(asociativita)*
- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n)\colon \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, *(komutativita)*
- $\exists! \boldsymbol{O} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\colon \boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$, *(existence nulového prvku)*

Tvrzení 33 (základní vlastnosti sčítání matic a násobení skalárem)

Platí:

- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(m \times n) \colon \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$, *(asociativita)*
- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n) \colon \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, *(komutativita)*
- $\exists! \boldsymbol{O} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n) \colon \boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$, *(existence nulového prvku)*
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \exists \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} \in M(m \times n) \colon \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{O}$, *(existence opačného prvku)*

Tvrzení 33 (základní vlastnosti sčítání matic a násobení skalárem)

Platí:

- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(m \times n): \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$, *(asociativita)*
- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n): \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, *(komutativita)*
- $\exists! \boldsymbol{O} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n): \boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$, *(existence nulového prvku)*
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \exists \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} \in M(m \times n): \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{O}$, *(existence opačného prvku)*
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: (\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A})$,

Tvrzení 33 (základní vlastnosti sčítání matic a násobení skalárem)

Platí:

- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(m \times n) \colon \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$, *(asociativita)*
- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n) \colon \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, *(komutativita)*
- $\exists ! \boldsymbol{O} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n) \colon \boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$, *(existence nulového prvku)*
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \exists \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} \in M(m \times n) \colon \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{O}$, *(existence opačného prvku)*
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \colon (\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A})$,
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n) \colon 1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$,

Tvrzení 33 (základní vlastnosti sčítání matic a násobení skalárem)

Platí:

- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(m \times n):\ \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$, *(asociativita)*
- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n):\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, *(komutativita)*
- $\exists! \boldsymbol{O} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n):\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$, *(existence nulového prvku)*
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \exists \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} \in M(m \times n):\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{O}$, *(existence opačného prvku)*
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}:\ (\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A})$,
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n):\ 1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$,
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}:\ (\lambda + \mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{A}$,

Tvrzení 33 (základní vlastnosti sčítání matic a násobení skalárem)

Platí:

- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(m \times n): \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$, *(asociativita)*
- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n): \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, *(komutativita)*
- $\exists! \boldsymbol{O} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n): \boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$, *(existence nulového prvku)*
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \exists \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} \in M(m \times n): \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{O}$, *(existence opačného prvku)*
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: (\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A})$,
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n): 1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$,
- $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: (\lambda + \mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{A}$,
- $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B}$.

Poznámka

- Matici $\boldsymbol{O}$ z předešlého tvrzení říkáme nulová matice a všechny její prvky jsou nulové.

Poznámka

- Matici $\boldsymbol{O}$ z předešlého tvrzení říkáme nulová matice a všechny její prvky jsou nulové.
- Matice $\boldsymbol{C_A}$ z předešlého tvrzení se nazývá matice opačná k $\boldsymbol{A}$. Je určena jednoznačně, značíme ji $-\boldsymbol{A}$ a platí $-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ a $-\boldsymbol{A} = -1 \cdot \boldsymbol{A}$.

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$, $\boldsymbol{A} = (a_{is})_{\substack{i=1..m \\ s=1..n}}$, $\boldsymbol{B} \in M(n \times k)$, $\boldsymbol{B} = (b_{sj})_{\substack{s=1..n \\ j=1..k}}$. Pak součinem matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ rozumíme matici $\boldsymbol{AB} \in M(m \times k)$, $\boldsymbol{AB} = (c_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..k}}$, kde

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}.$$

Násobení matic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Násobení matic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{33} \\ a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} & a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} & a_{41}b_{13} + a_{42}b_{23} \end{pmatrix}$$

Násobení matic

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{33} \\ a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} & a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} & a_{41}b_{13} + a_{42}b_{23} \end{pmatrix}
$$

Násobení matic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{33} \\ a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} & a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} & a_{41}b_{13} + a_{42}b_{23} \end{pmatrix}$$

Násobení matic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{33} \\ a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} & a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} & a_{41}b_{13} + a_{42}b_{23} \end{pmatrix}$$

Násobení matic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{33} \\ a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} & a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} & a_{41}b_{13} + a_{42}b_{23} \end{pmatrix}$$

Věta 34 (vlastnosti maticového násobení)

Nechť $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Pak platí:

(i) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B} \in M(n \times k)\ \forall \boldsymbol{C} \in M(k \times l)\colon \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$, *(asociativita násobení)*

Věta 34 (vlastnosti maticového násobení)

Nechť $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. *Pak platí:*

(i) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B} \in M(n \times k)\ \forall \boldsymbol{C} \in M(k \times l)\colon \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$, *(asociativita násobení)*

(ii) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times k)\colon \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, *(distributivita zleva)*

Věta 34 (vlastnosti maticového násobení)

Nechť $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. *Pak platí:*

(i) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B} \in M(n \times k)\ \forall \boldsymbol{C} \in M(k \times l)$: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$, *(asociativita násobení)*

(ii) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times k)$: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, *(distributivita zleva)*

(iii) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{C} \in M(n \times k)$: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, *(distributivita zprava)*

Věta 34 (vlastnosti maticového násobení)

Nechť $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. *Pak platí:*

(i) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B} \in M(n \times k)\ \forall \boldsymbol{C} \in M(k \times l)\colon \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$, *(asociativita násobení)*

(ii) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times k)\colon \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$, *(distributivita zleva)*

(iii) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{C} \in M(n \times k)\colon (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$, *(distributivita zprava)*

(iv) $\exists! \boldsymbol{I} \in M(n \times n)\ \forall \boldsymbol{A} \in M(n \times n)\colon \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$, *(existence a jednoznačnost jednotkové matice* $\boldsymbol{I}$*)*

Věta 34 (vlastnosti maticového násobení)

Nechť $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Pak platí:

(i) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B} \in M(n \times k)\ \forall \boldsymbol{C} \in M(k \times l)\colon \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$, *(asociativita násobení)*

(ii) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times k)\colon \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, *(distributivita zleva)*

(iii) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{C} \in M(n \times k)\colon (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, *(distributivita zprava)*

(iv) $\exists! \boldsymbol{I} \in M(n \times n)\ \forall \boldsymbol{A} \in M(n \times n)\colon \boldsymbol{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$, *(existence a jednoznačnost jednotkové matice* $\boldsymbol{I}$*)*

(v) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B} \in M(n \times k)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\colon (\lambda \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{B}) = \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$.

Věta 34 (vlastnosti maticového násobení)

Nechť $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Pak platí:

(i) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B} \in M(n \times k)\ \forall \boldsymbol{C} \in M(k \times l)$: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$, *(asociativita násobení)*

(ii) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times k)$: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$, *(distributivita zleva)*

(iii) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{C} \in M(n \times k)$: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$, *(distributivita zprava)*

(iv) $\exists! \boldsymbol{I} \in M(n \times n)\ \forall \boldsymbol{A} \in M(n \times n)$: $\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}$, *(existence a jednoznačnost jednotkové matice $\boldsymbol{I}$)*

(v) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B} \in M(n \times k)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{B}) = \lambda(\boldsymbol{AB})$.

Poznámka

Pozor! Maticové násobení není komutativní.

Definice

Transponovanou maticí k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

rozumíme matici

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

tj. pokud $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, pak $\boldsymbol{A}^T = (b_{uv})_{\substack{u=1..n \\ v=1..m}}$, kde $b_{uv} = a_{vu}$ pro každé $u \in \{1, \dots, n\}$, $v \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Definice

Transponovanou maticí k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

rozumíme matici

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

tj. pokud $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, pak $\boldsymbol{A}^T = (b_{uv})_{\substack{u=1..n \\ v=1..m}}$, kde $b_{uv} = a_{vu}$ pro každé $u \in \{1, \dots, n\}$, $v \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Definice

Transponovanou maticí k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

rozumíme matici

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

tj. pokud $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, pak $\boldsymbol{A}^T = (b_{uv})_{\substack{u=1..n \\ v=1..m}}$, kde $b_{uv} = a_{vu}$ pro každé $u \in \{1, \dots, n\}$, $v \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Definice

Transponovanou maticí k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

rozumíme matici

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

tj. pokud $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, pak $\boldsymbol{A}^T = (b_{uv})_{\substack{u=1..n \\ v=1..m}}$, kde $b_{uv} = a_{vu}$ pro každé $u \in \{1, \dots, n\}$, $v \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Definice

Transponovanou maticí k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

rozumíme matici

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

tj. pokud $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, pak $\boldsymbol{A}^T = (b_{uv})_{\substack{u=1..n \\ v=1..m}}$, kde $b_{uv} = a_{vu}$ pro každé $u \in \{1, \dots, n\}$, $v \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Věta 35 (vlastnosti transponovaných matic)

Platí:

(i) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n) \colon \left(\boldsymbol{A}^T\right)^T = \boldsymbol{A}$,

Věta 35 (vlastnosti transponovaných matic)

Platí:

(i) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n) \colon \left(\boldsymbol{A}^T\right)^T = \boldsymbol{A}$,

(ii) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n) \colon (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$,

Věta 35 (vlastnosti transponovaných matic)

Platí:

(i) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\colon \left(\boldsymbol{A}^T\right)^T = \boldsymbol{A}$,

(ii) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n)\colon (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$,

(iii) $\forall \boldsymbol{A} \in M(m \times n)\ \forall \boldsymbol{B} \in M(n \times k)\colon (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T$.

VI.2. Regulární matice

VI.2. Regulární matice

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\boldsymbol{A}$ je regulární matice, pokud existuje $\boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ taková, že

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

VI.2. Regulární matice

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\boldsymbol{A}$ je regulární matice, pokud existuje $\boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ taková, že

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ je inverzní maticí k matici $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$, jestliže $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.

VI.2. Regulární matice

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\boldsymbol{A}$ je regulární matice, pokud existuje $\boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ taková, že

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ je inverzní maticí k matici $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$, jestliže $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.

Poznámka

Matice $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je regulární, právě když k ní existuje inverzní matice.

Poznámka

- Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je regulární. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice. Značíme ji $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Poznámka

- Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je regulární. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice. Značíme ji $\boldsymbol{A}^{-1}$.
- Pokud pro matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ platí $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$, pak také $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.

Poznámka

- Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je regulární. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice. Značíme ji $\boldsymbol{A}^{-1}$.
- Pokud pro matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ platí $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$, pak také $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.

Věta 36 (regularita a maticové operace)

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ jsou regulární matice. Pak platí:

Poznámka

- Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je regulární. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice. Značíme ji $\boldsymbol{A}^{-1}$.
- Pokud pro matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ platí $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$, pak také $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.

Věta 36 (regularita a maticové operace)

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ jsou regulární matice. Pak platí:

(i) $\boldsymbol{A}^{-1}$ *je regulární matice a* $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$,

Poznámka

- Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je regulární. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice. Značíme ji $\boldsymbol{A}^{-1}$.
- Pokud pro matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ platí $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$, pak také $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.

Věta 36 (regularita a maticové operace)

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ jsou regulární matice. Pak platí:

(i) $\boldsymbol{A}^{-1}$ *je regulární matice a* $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$,

(ii) $\boldsymbol{A}^{T}$ *je regulární matice a* $\left(\boldsymbol{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{T}$,

Poznámka

- Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je regulární. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice. Značíme ji $\boldsymbol{A}^{-1}$.
- Pokud pro matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ platí $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$, pak také $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.

Věta 36 (regularita a maticové operace)

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ jsou regulární matice. Pak platí:

(i) $\boldsymbol{A}^{-1}$ *je regulární matice a* $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$,

(ii) $\boldsymbol{A}^{T}$ *je regulární matice a* $\left(\boldsymbol{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{T}$,

(iii) $\boldsymbol{AB}$ *je regulární matice a* $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

Definice

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}^1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}^k.$$

V tomto případě také říkáme, že lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ je rovna $\boldsymbol{u}$.

Definice

Nechť $k, n \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ s koeficienty $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}^1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}^k.$$

V tomto případě také říkáme, že lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ s koeficienty $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ je rovna $\boldsymbol{u}$. Pokud $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, pak mluvíme o triviální lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^k$; je-li některý koeficient nenulový, pak mluvíme o netriviální lineární kombinaci.

Definice

Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně závislé, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru.

Definice

Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně závislé, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé, pokud nejsou lineárně závislé, tj. pokud platí:

kdykoli $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $\lambda_1 \boldsymbol{v}^1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}^k = \boldsymbol{o}$, pak $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Definice

Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně závislé, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé, pokud nejsou lineárně závislé, tj. pokud platí:
kdykoli $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $\lambda_1 \boldsymbol{v}^1 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{v}^k = \boldsymbol{o}$, pak $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.
(Mezi všemi lineárními kombinacemi vektorů $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k$ je rovna nulovému vektoru jenom triviální lineární kombinace.)

Definice

Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně závislé, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé, pokud nejsou lineárně závislé, tj. pokud platí:
kdykoli $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ jsou taková, že
$\lambda_1 \boldsymbol{v}^1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}^k = \boldsymbol{o}$, pak $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.
(Mezi všemi lineárními kombinacemi vektorů $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k$ je rovna nulovému vektoru jenom triviální lineární kombinace.)

Poznámka

Vektory $\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^k$ jsou lineárně závislé, právě když jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$. Hodností matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků, tj. hodnost je rovna $k \in \mathbb{N}$, jestliže

(i) existuje k lineárně nezávislých řádkových vektorů matice $\boldsymbol{A}$ a

(ii) každá l-tice řádkových vektorů matice $\boldsymbol{A}$, kde $l > k$, je lineárně závislá.

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$. Hodností matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků, tj. hodnost je rovna $k \in \mathbb{N}$, jestliže

(i) existuje k lineárně nezávislých řádkových vektorů matice $\boldsymbol{A}$ a

(ii) každá l-tice řádkových vektorů matice $\boldsymbol{A}$, kde $l > k$, je lineárně závislá.

Hodnost nulové matice je rovna nule. Hodnost matice $\boldsymbol{A}$ značíme $h(\boldsymbol{A})$.

Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ je schodovitá, jestliže pro každé $i \in \{2, \ldots, m\}$ platí, že i-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i-1)$-ní řádek.

Definice

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ je schodovitá, jestliže pro každé $i \in \{2, \ldots, m\}$ platí, že i-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i-1)$-ní řádek.

Poznámka

Hodnost schodovité matice je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Definice

Elementárními řádkovými úpravami matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme:

(i) záměnu dvou řádků,

Definice

Elementárními řádkovými úpravami matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme:

(i) záměnu dvou řádků,

(ii) vynásobení řádku nenulovým číslem,

Definice

Elementárními řádkovými úpravami matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme:

(i) záměnu dvou řádků,

(ii) vynásobení řádku nenulovým číslem,

(iii) přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Definice

Elementárními řádkovými úpravami matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme:

(i) záměnu dvou řádků,

(ii) vynásobení řádku nenulovým číslem,

(iii) přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Definice

Transformací budeme rozumět konečnou posloupnost řádkových elementárních úprav. Matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ aplikací transformace $\mathcal{T}$ budeme značit $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})$.

Definice

Elementárními řádkovými úpravami matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme:

(i) záměnu dvou řádků,

(ii) vynásobení řádku nenulovým číslem,

(iii) přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Definice

Transformací budeme rozumět konečnou posloupnost řádkových elementárních úprav. Matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ aplikací transformace $\mathcal{T}$ budeme značit $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})$. Fakt, že $\boldsymbol{B} = \mathcal{T}(\boldsymbol{A})$, také budeme někdy značit takto: $\boldsymbol{A} \overset{\mathcal{T}}{\rightsquigarrow} \boldsymbol{B}$.

Věta 37 (vlastnosti transformace)

(i) *Nechť* ***A*** *je matice. Pak existuje transformace převádějící matici* ***A*** *na schodovitou matici.*

Věta 37 (vlastnosti transformace)

(i) *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je matice. Pak existuje transformace převádějící matici* $\boldsymbol{A}$ *na schodovitou matici.*

(ii) *Nechť* $\mathcal{T}_1$ *je transformace aplikovatelná na matice o m řádcích. Pak existuje transformace* $\mathcal{T}_2$ *aplikovatelná na matice o m řádcích taková, že pro každé dvě matice* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n)$ *platí* $\boldsymbol{B} = \mathcal{T}_1(\boldsymbol{A})$*, právě když* $\boldsymbol{A} = \mathcal{T}_2(\boldsymbol{B})$*.*

Věta 37 (vlastnosti transformace)

(i) *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je matice. Pak existuje transformace převádějící matici* $\boldsymbol{A}$ *na schodovitou matici.*

(ii) *Nechť* $\mathcal{T}_1$ *je transformace aplikovatelná na matice o m řádcích. Pak existuje transformace* $\mathcal{T}_2$ *aplikovatelná na matice o m řádcích taková, že pro každé dvě matice* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(m \times n)$ *platí* $\boldsymbol{B} = \mathcal{T}_1(\boldsymbol{A})$*, právě když* $\boldsymbol{A} = \mathcal{T}_2(\boldsymbol{B})$*.*

(iii) *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je matice a* $\mathcal{T}$ *je transformace aplikovatelná na* $\boldsymbol{A}$*. Pak* $h(\mathcal{T}(\boldsymbol{A})) = h(\boldsymbol{A})$*.*

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix}
\color{green}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\color{green}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\color{red}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\color{green}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\color{green}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} {\color{red}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & {\color{green}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \textcolor{green}{\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \textcolor{green}{\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \textcolor{green}{\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & {\color{red}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \color{green}{\bullet} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \color{green}{\bullet} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \color{green}{\bullet} & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{\bullet} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \color{green}{\bullet} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \color{green}{\bullet} & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}\bullet} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{green}{\bullet} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{green}{\bullet} \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {\color{red}\bullet} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {\color{green}\bullet} \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {\color{red}\bullet} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Převod matice na schodovitou

$$\begin{pmatrix} {\color{red}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & {\color{red}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}\bullet} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {\color{red}\bullet} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka

Podobně jako jsme definovali elementární řádkové úpravy matic, můžeme definovat i elementární sloupcové úpravy matic. Lze ukázat, že elementární sloupcové úpravy nemění hodnost matice.

Poznámka

Podobně jako jsme definovali elementární řádkové úpravy matic, můžeme definovat i elementární sloupcové úpravy matic. Lze ukázat, že elementární sloupcové úpravy nemění hodnost matice.

Poznámka

Lze ukázat, že pro matici $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ platí $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}^T)$.

Věta 38 (součin a transformace)

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(m \times k)$, $\boldsymbol{B} \in M(k \times n)$ *a* $\mathcal{T}$ *je transformace aplikovatelná na matice o m řádcích. Pak*
$\mathcal{T}(\boldsymbol{AB}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$.

Věta 38 (součin a transformace)

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(m \times k)$, $\boldsymbol{B} \in M(k \times n)$ *a* $\mathcal{T}$ *je transformace aplikovatelná na matice o m řádcích. Pak* $\mathcal{T}(\boldsymbol{AB}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$.

Lemma 39

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *a* $h(\boldsymbol{A}) = n$. *Pak existuje transformace, která převádí* $\boldsymbol{A}$ *na* $\boldsymbol{I}$.

Věta 38 (součin a transformace)

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(m \times k)$, $\boldsymbol{B} \in M(k \times n)$ *a* $\mathcal{T}$ *je transformace aplikovatelná na matice o m řádcích. Pak* $\mathcal{T}(\boldsymbol{AB}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$.

Lemma 39

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *a* $h(\boldsymbol{A}) = n$. *Pak existuje transformace, která převádí* $\boldsymbol{A}$ *na* $\boldsymbol{I}$.

Věta 40

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. *Pak* $\boldsymbol{A}$ *je regulární, právě když* $h(\boldsymbol{A}) = n$.

VI.3. Determinanty

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Symbolem $\boldsymbol{A}_{ij}$ označíme matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z $\boldsymbol{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

VI.3. Determinanty

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Symbolem $\boldsymbol{A}_{ij}$ označíme matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z $\boldsymbol{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

VI.3. Determinanty

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Symbolem $\boldsymbol{A}_{ij}$ označíme matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z $\boldsymbol{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

VI.3. Determinanty

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Symbolem $\boldsymbol{A}_{ij}$ označíme matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z $\boldsymbol{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
 & & & & & & \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}
\end{pmatrix}$$

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Symbolem $\boldsymbol{A}_{ij}$ označíme matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z $\boldsymbol{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

$$\boldsymbol{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n}$. Determinant matice $\boldsymbol{A}$ definujeme takto:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{cases} a_{11} & \text{pokud } n = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \boldsymbol{A}_{i1} & \text{pokud } n > 1. \end{cases}$$

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n}$. Determinant matice $\boldsymbol{A}$ definujeme takto:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{cases} a_{11} & \text{pokud } n = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \boldsymbol{A}_{i1} & \text{pokud } n > 1. \end{cases}$$

Pro $\det \boldsymbol{A}$ budeme také používat symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 41

Nechť $j, n \in \mathbb{N}$*,* $j \leq n$ *a matice* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times n)$ *se shodují ve všech řádcích vyjma* j*-tého. Nechť* j*-tý řádek matice* $\boldsymbol{A}$ *je roven součtu* j*-tého řádku matice* $\boldsymbol{B}$ *a* j*-tého řádku matice* $\boldsymbol{C}$*. Pak platí* $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B} + \det \boldsymbol{C}$*.*

Věta 41

Nechť $j, n \in \mathbb{N}$, $j \leq n$ a matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times n)$ se shodují ve všech řádcích vyjma j-tého. Nechť j-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je roven součtu j-tého řádku matice $\boldsymbol{B}$ a j-tého řádku matice $\boldsymbol{C}$. Pak platí $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B} + \det \boldsymbol{C}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,n} \\ u_1 + v_1 & \dots & u_n + v_n \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,n} \\ u_1 & \dots & u_n \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,n} \\ v_1 & \dots & v_n \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Věta 42 (determinant a elementární úpravy)

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \in M(n \times n)$*.*

(i) *Jestliže matice* $\boldsymbol{A}'$ *vznikne z* $\boldsymbol{A}$ *tak, že v* $\boldsymbol{A}$ *jeden řádek vynásobíme reálným číslem* μ*, pak platí* $\det \boldsymbol{A}' = \mu \det \boldsymbol{A}$*.*

Věta 42 (determinant a elementární úpravy)

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \in M(n \times n)$.

(i) *Jestliže matice* $\boldsymbol{A}'$ *vznikne z* $\boldsymbol{A}$ *tak, že v* $\boldsymbol{A}$ *jeden řádek vynásobíme reálným číslem* μ, *pak platí* $\det \boldsymbol{A}' = \mu \det \boldsymbol{A}$.

(ii) *Jestliže matice* $\boldsymbol{A}'$ *vznikne z* $\boldsymbol{A}$ *tak, že v* $\boldsymbol{A}$ *vyměníme dva řádky mezi sebou (tj. provedeme elementární řádkovou úpravu prvního druhu), pak platí* $\det \boldsymbol{A}' = -\det \boldsymbol{A}$.

Věta 42 (determinant a elementární úpravy)

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \in M(n \times n)$.

(i) *Jestliže matice* $\boldsymbol{A}'$ *vznikne z* $\boldsymbol{A}$ *tak, že v* $\boldsymbol{A}$ *jeden řádek vynásobíme reálným číslem* μ, *pak platí* $\det \boldsymbol{A}' = \mu \det \boldsymbol{A}$.

(ii) *Jestliže matice* $\boldsymbol{A}'$ *vznikne z* $\boldsymbol{A}$ *tak, že v* $\boldsymbol{A}$ *vyměníme dva řádky mezi sebou (tj. provedeme elementární řádkovou úpravu prvního druhu), pak platí* $\det \boldsymbol{A}' = -\det \boldsymbol{A}$.

(iii) *Jestliže matice* $\boldsymbol{A}'$ *vznikne z* $\boldsymbol{A}$ *tak, že v* $\boldsymbol{A}$ *přičteme* μ*-násobek jednoho řádku k jinému řádku (tj. provedeme elementární řádkovou úpravu třetího druhu), pak platí* $\det \boldsymbol{A}' = \det \boldsymbol{A}$.

Důsledek 43 (determinant a transformace)

(i) *Nechť $\mathcal{T}$ je transformace aplikovatelná na matice typu $n \times n$. Pak existuje nenulové číslo $\alpha_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou matici $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ platí* $\det \mathcal{T}(\boldsymbol{A}) = \alpha_{\mathcal{T}} \det \boldsymbol{A}$.

Důsledek 43 (determinant a transformace)

(i) *Nechť $\mathcal{T}$ je transformace aplikovatelná na matice typu $n \times n$. Pak existuje nenulové číslo $\alpha_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou matici $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ platí* $\det \mathcal{T}(\boldsymbol{A}) = \alpha_{\mathcal{T}} \det \boldsymbol{A}$.

(ii) *Jestliže matice $\boldsymbol{A}'$ vznikne ze čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ jistou transformací, pak* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, *právě když* $\det \boldsymbol{A}' \neq 0$.

Poznámka

Determinant matice s nulovým řádkem je roven nule.

Poznámka

Determinant matice s nulovým řádkem je roven nule.
Determinant matice, která má dva řádky shodné, je také roven nule.

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n}$. Řekneme, že $\boldsymbol{A}$ je horní trojúhelníková matice, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n}$. Řekneme, že $\boldsymbol{A}$ je horní trojúhelníková matice, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Řekneme, že $\boldsymbol{A}$ je dolní trojúhelníková matice, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i < j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definice

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n}$. Řekneme, že $\boldsymbol{A}$ je horní trojúhelníková matice, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Řekneme, že $\boldsymbol{A}$ je dolní trojúhelníková matice, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i < j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Věta 44

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n}$ je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice. Pak platí

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Věta 45

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. *Pak* $\boldsymbol{A}$ *je regulární, právě když* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Věta 46 (determinant součinu)

Pro $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ *platí* $\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}$.

Věta 46 (determinant součinu)

Pro $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ *platí* $\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}$.

Věta 47 (determinant a transpozice)

Pro $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *platí* $\det \boldsymbol{A}^T = \det \boldsymbol{A}$.

Věta 48

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. *Pak*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det \boldsymbol{A}_{ik} \quad \textit{(rozvoj podle k-tého sloupce)},$$

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det \boldsymbol{A}_{kj} \quad \textit{(rozvoj podle k-tého řádku)}.$$

VI.4. Řešení soustav lineárních rovnic

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{S}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{S}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Maticový zápis

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

kde $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n)$, se nazývá matice soustavy, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M(m \times 1)$ vektor pravých stran a $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M(n \times 1)$ vektor neznámých.

Definice

Matici

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazýváme rozšířenou maticí soustavy (S).

Tvrzení 49

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$, $\boldsymbol{b} \in M(m \times 1)$ *a* $\mathcal{T}$ *je transformace matic s m řádky. Označme* $\boldsymbol{A}' = \mathcal{T}(\boldsymbol{A})$ *a* $\boldsymbol{b}' = \mathcal{T}(\boldsymbol{b})$. *Pak pro* $\boldsymbol{y} \in M(n \times 1)$ *platí* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, *právě když* $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}'$, *neboli soustavy* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *a* $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ *mají stejnou množinu řešení.*

Věta 50 (Rouchéova-Fonteneova)

Soustava (S) *má řešení právě tehdy, když matice této soustavy má stejnou hodnost jako rozšířená matice této soustavy.*

Soustavy *n* rovnic o *n* neznámých

Soustavy n rovnic o n neznámých

Věta 51

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *matice $\boldsymbol{A}$ je regulární,*

Soustavy *n* rovnic o *n* neznámých

Věta 51

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *matice* $\boldsymbol{A}$ *je regulární,*

(ii) *soustava* (S) *má pro každé* $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$ *právě jedno řešení,*

Soustavy n rovnic o n neznámých

Věta 51

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *matice $\boldsymbol{A}$ je regulární,*

(ii) *soustava* (S) *má pro každé $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$ právě jedno řešení,*

(iii) *soustava* (S) *má pro každé $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$ alespoň jedno řešení.*

Věta 52 (Cramerovo pravidlo)

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je regulární matice,* $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$*,* $\boldsymbol{x} \in M(n \times 1)$ *a* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$*. Pak*

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det \boldsymbol{A}}$$

pro $j = 1, \dots, n$*.*

VI.5. Matice a lineární zobrazení

VI.5. Matice a lineární zobrazení

Definice

Řekneme, že zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární, pokud platí:

(i) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\colon f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$,

VI.5. Matice a lineární zobrazení

Definice

Řekneme, že zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární, pokud platí:

(i) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\colon f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\colon f(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda f(\boldsymbol{u})$.

Definice

Nechť $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vektor s n složkami

$$\boldsymbol{e}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \; i\text{-tá souřadnice}$$

nazýváme *i*-tým kanonickým bázovým vektorem prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definice

Nechť $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vektor s n složkami

$$\boldsymbol{e}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ } i\text{-tá souřadnice}$$

nazýváme i-tým kanonickým bázovým vektorem prostoru $\mathbb{R}^n$. Množinu $\{\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n\}$ všech kanonických bázových vektorů v $\mathbb{R}^n$ nazýváme kanonickou bází prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definice

Nechť $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vektor s n složkami

$$\boldsymbol{e}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ \ldots \ i\text{-tá souřadnice}$$

nazýváme *i-tým kanonickým bázovým vektorem* prostoru $\mathbb{R}^n$. Množinu $\{\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n\}$ všech kanonických bázových vektorů v $\mathbb{R}^n$ nazýváme *kanonickou bází prostoru $\mathbb{R}^n$*.

Vlastnosti kanonické báze:

(i) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{x} = x_1 \cdot \boldsymbol{e}^1 + \cdots + x_n \cdot \boldsymbol{e}^n$,

Definice

Nechť $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vektor s n složkami

$$\boldsymbol{e}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ \ldots \ i\text{-tá souřadnice}$$

nazýváme *i-tým kanonickým bázovým vektorem* prostoru $\mathbb{R}^n$. Množinu $\{\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n\}$ všech kanonických bázových vektorů v $\mathbb{R}^n$ nazýváme *kanonickou bází prostoru $\mathbb{R}^n$*.

Vlastnosti kanonické báze:

(i) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{x} = x_1 \cdot \boldsymbol{e}^1 + \cdots + x_n \cdot \boldsymbol{e}^n$,

(ii) vektory $\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n$ jsou lineárně nezávislé.

Věta 53 (reprezentace lineárních zobrazení)

Zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární právě tehdy, když existuje matice $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ taková, že

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\colon\ f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}.$$

Věta 53 (reprezentace lineárních zobrazení)

Zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární právě tehdy, když existuje matice $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ taková, že

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\colon f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}.$$

Poznámka

Matice $\boldsymbol{A}$ z předchozí věty je určena jednoznačně a nazývá se reprezentující maticí zobrazení f.

Věta 54

Nechť zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) *f je bijekce (tj. f je prosté zobrazení $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$),*

(ii) *f je prosté zobrazení,*

(iii) *f je zobrazení $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$.*

Věta 54

Nechť zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) *f je bijekce (tj. f je prosté zobrazení $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$),*

(ii) *f je prosté zobrazení,*

(iii) *f je zobrazení $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$.*

Věta 55 (skládání lineárních zobrazení)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení reprezentované maticí $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ a $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení reprezentované maticí $\boldsymbol{B} \in M(k \times m)$. Potom složené zobrazení $g \circ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je lineární a je reprezentováno maticí $\boldsymbol{BA}$.

VII. Číselné řady

VII.1. Základní pojmy

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečnou řadou**.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečnou řadou. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme m-tým částečným součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečnou řadou. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme m-tým částečným součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat n-tým členem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečnou řadou. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme m-tým částečným součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat n-tým členem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečnou řadou. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme m-tým částečným součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat n-tým členem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečnou řadou. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme m-tým částečným součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat n-tým členem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada konverguje, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada diverguje.

Věta 56 (nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim a_n = 0$*.*

Věta 56 (nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim a_n = 0$.

Poznámka

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 56 (nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim a_n = 0$.

Poznámka

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jestliže řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ a platí
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

VII.2. Řady s nezápornými členy a absolutní konvergence

VII.2. Řady s nezápornými členy a absolutní konvergence

Věta 57 (srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$*.*

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

VII.2. Řady s nezápornými členy a absolutní konvergence

Věta 57 (srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady splňující $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(i) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(ii) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.*

Věta 58

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Jestliže konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$*, konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Věta 58

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Věta 58

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Jestliže konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$*, konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, pak ji nazýváme neabsolutně konvergentní.

Věta 58

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Jestliže konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, pak ji nazýváme neabsolutně konvergentní.

Poznámka

Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq b_n$. Jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní (dokonce absolutně konvergentní).

Věta 59 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}^*.$$

- *Je-li* $c \in (0, +\infty)$, *pak konvergence* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je ekvivalentní konvergenci* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 59 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}^*.$$

- *Je-li* $c \in (0, +\infty)$, *pak konvergence* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je ekvivalentní konvergenci* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- *Je-li* $c = 0$, *pak z konvergence* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *plyne konvergence* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 59 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}^*.$$

- *Je-li* $c \in (0, +\infty)$*, pak konvergence* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je ekvivalentní konvergenci* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*
- *Je-li* $c = 0$*, pak z konvergence* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *plyne konvergence* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*
- *Je-li* $c = +\infty$*, pak z divergence* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *plyne divergence* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Věta 60 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní.*

Věta 60 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta 60 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta 61 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s nenulovými členy. Potom platí:*

Věta 60 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta 61 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s nenulovými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní.*

Věta 60 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta 61 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s nenulovými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta 62

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *konverguje právě tehdy, když* $\alpha > 1$.

VII.3. Alternující řady

VII.3. Alternující řady

Věta 63 (Leibnizovo kritérium)

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Nechť platí

- $a_n \geq a_{n+1}$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

VII.4. Hlubší vlastnosti absolutně konvergentních řad

VII.4. Hlubší vlastnosti absolutně konvergentních řad

Definice

Budiž $\{k_n\}$ posloupnost přirozených čísel taková, že každé přirozené číslo je v ní obsaženo právě jednou. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ nazveme přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

VII.4. Hlubší vlastnosti absolutně konvergentních řad

Definice

Budiž $\{k_n\}$ posloupnost přirozených čísel taková, že každé přirozené číslo je v ní obsaženo právě jednou. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ nazveme přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 64 (přerovnávání absolutně konvergentních řad)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Potom každé její přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ je absolutně konvergentní a platí

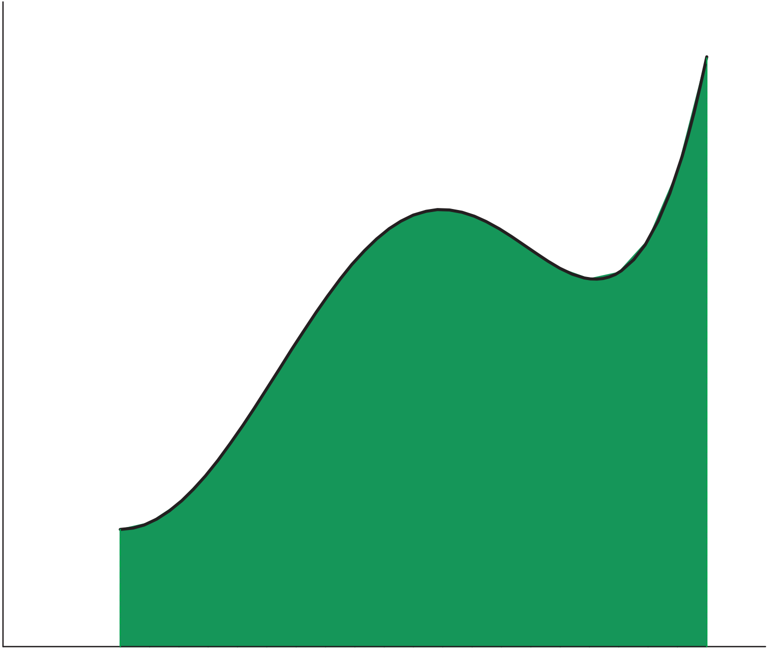
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.$$

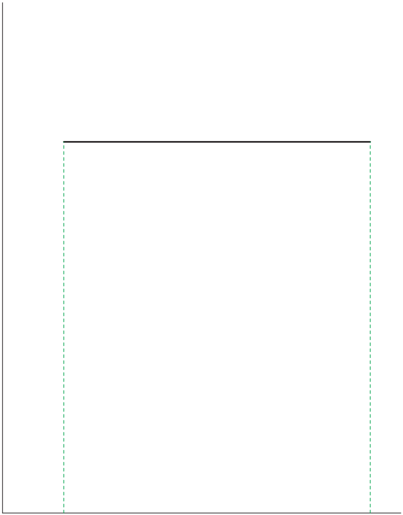
Poznámka (Riemannova věta)

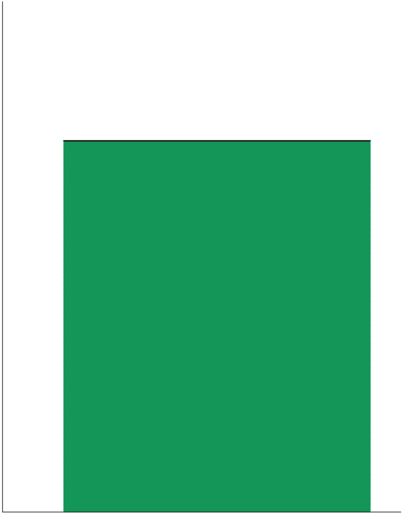
Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně konvergentní, pak pro libovolné $s \in \mathbb{R}^*$ existuje její přerovnání, jehož součet je s, a existuje její přerovnání, které nemá součet.

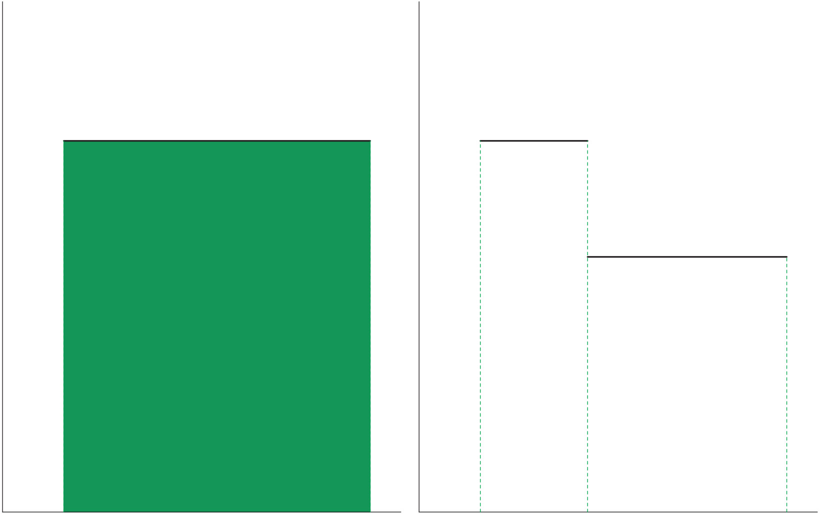
VIII. Primitivní funkce a Riemannův integrál

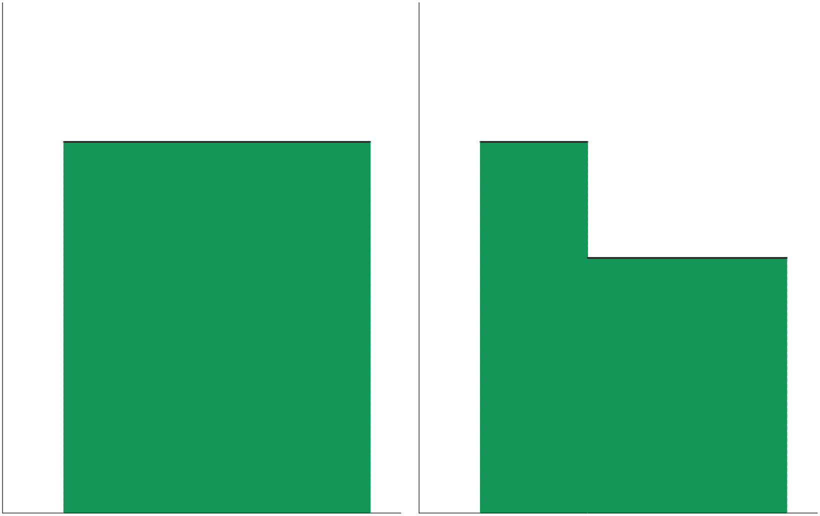
VIII.1. Riemannův integrál

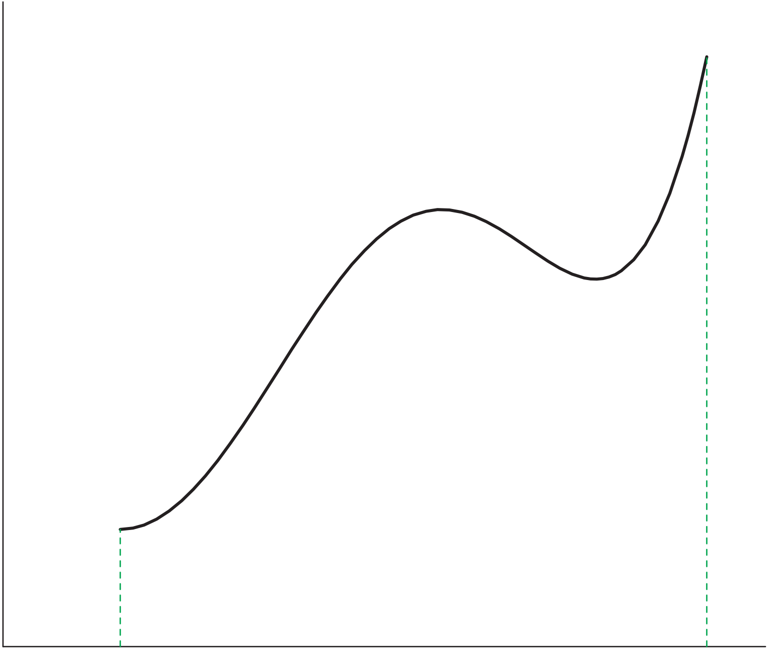


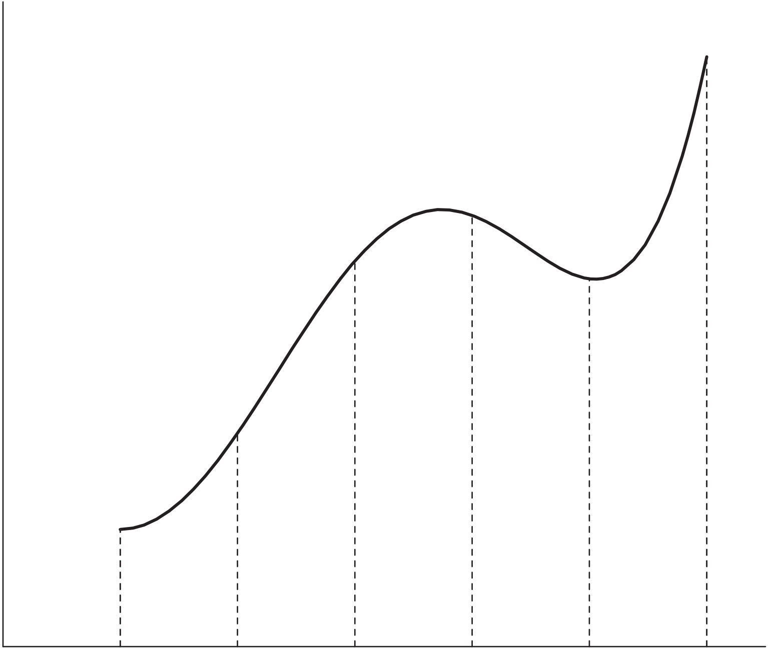


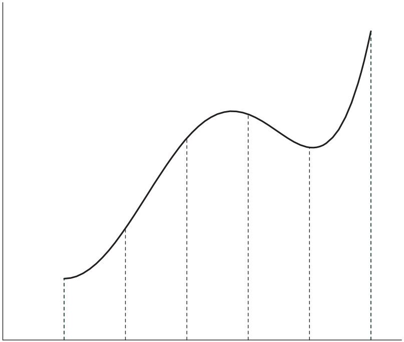


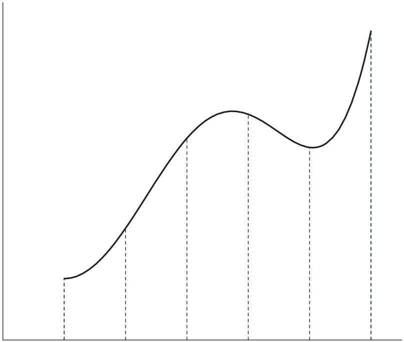


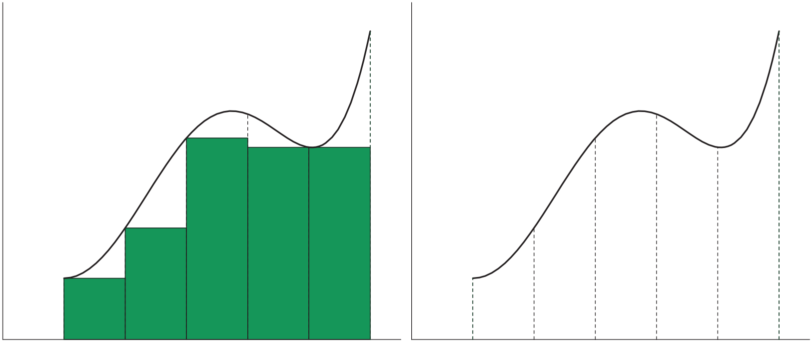


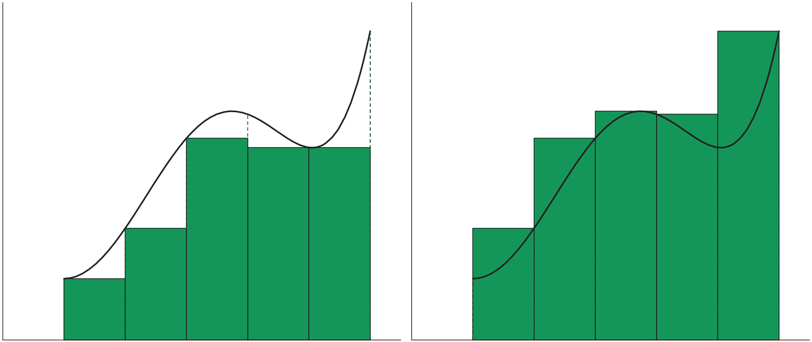


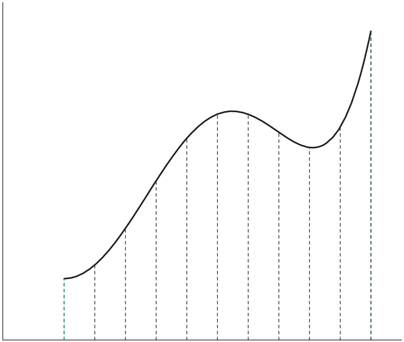


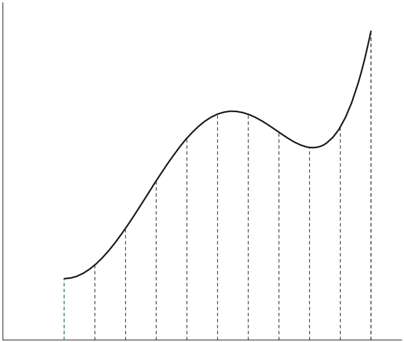


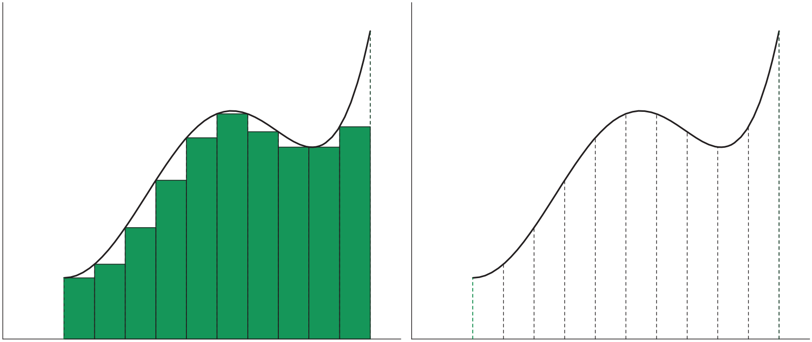


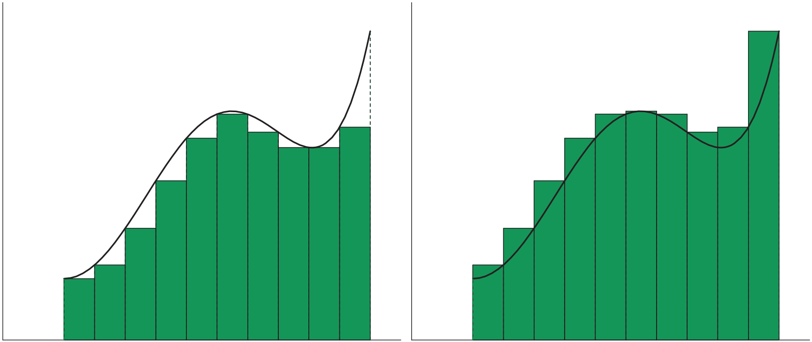












Definice

Konečnou posloupnost $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ nazýváme dělením intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme dělícími body.

Definice

Konečnou posloupnost $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme dělením intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \dots, x_n$ nazýváme dělícími body.
Řekneme, že dělení D' intervalu $\langle a, b \rangle$ je zjemněním dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ je dělení $\langle a, b\rangle$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f,$$

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ je dělení $\langle a, b\rangle$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f,$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f,$$

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $\langle a, b\rangle$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f,$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f,$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\left\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\right\},$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\right\}.$$

Definice

Řekneme, že funkce f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$, pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

Definice

Řekneme, že funkce f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$, pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Hodnota integrálu funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ je pak rovna společné hodnotě $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

Definice

Řekneme, že funkce f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$, pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Hodnota integrálu funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ je pak rovna společné hodnotě $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

Značíme ji $\displaystyle\int_a^b f$.

Definice

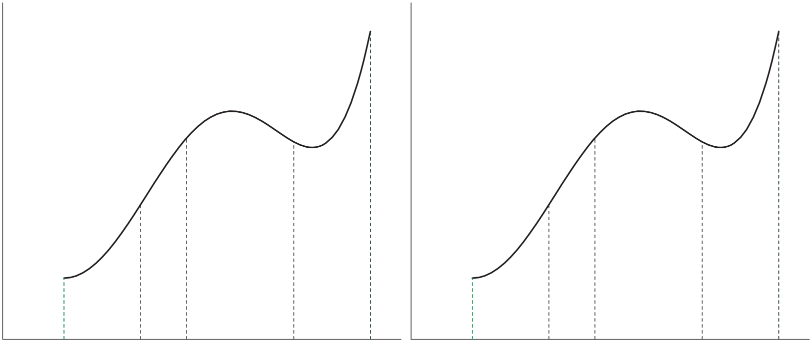
Řekneme, že funkce f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b \rangle$, pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Hodnota integrálu funkce f přes interval $\langle a, b \rangle$ je pak rovna společné hodnotě $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Značíme ji $\displaystyle\int_a^b f$. Pokud $a > b$, definujeme $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$, v případě, že $a = b$, definujeme $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Poznámka

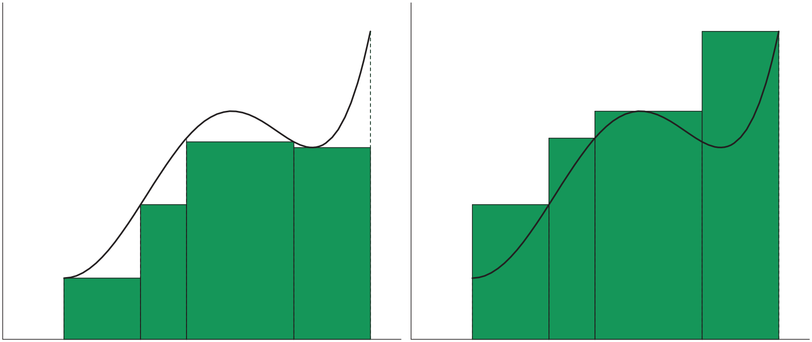
Nechť D, D' jsou dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, D' zjemňuje D a nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$

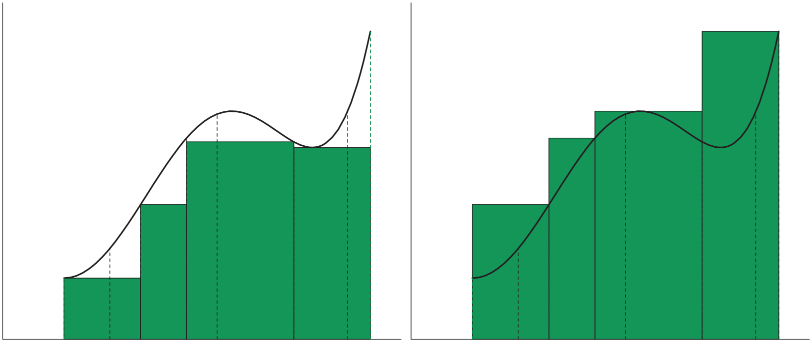
$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$



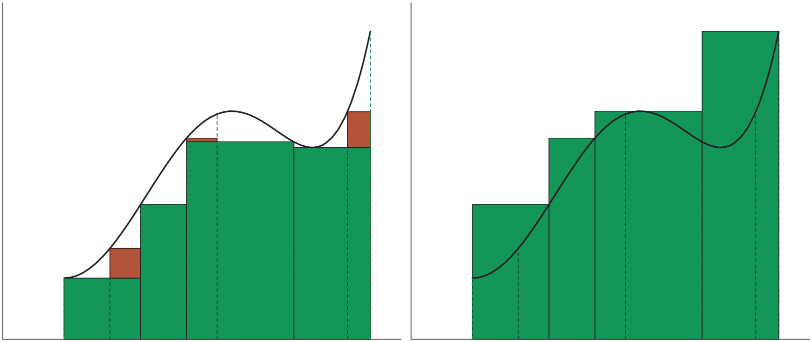
$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$



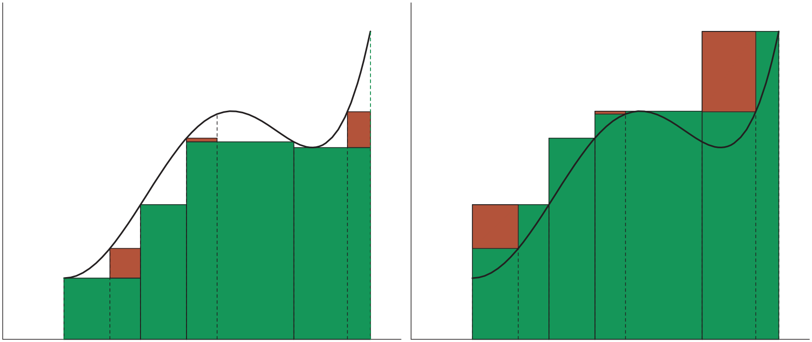
$$\underline{S}(f,D) \le \underline{S}(f,D') \le \overline{S}(f,D') \le \overline{S}(f,D).$$



$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$



$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$



Poznámka

Nechť D, D' jsou dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, D' zjemňuje D a nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$

Poznámka

Nechť D, D' jsou dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, D' zjemňuje D a nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$

Mějme nyní dvě dělení D_1, D_2 intervalu $\langle a, b \rangle$ a dělení D' zjemňující dělení D_1 i dělení D_2. Pak platí

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D_2).$$

Poznámka

Nechť D, D' jsou dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, D' zjemňuje D a nechť f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$

Mějme nyní dvě dělení D_1, D_2 intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení D' zjemňující dělení D_1 i dělení D_2. Pak platí

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D_2).$$

Odtud lze snadno odvodit $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Lemma 65 (kritérium existence Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *a* f *je funkce omezená na intervalu* $\langle a, b\rangle$.

(a) $\int_a^b f = I \in \mathbb{R}$ *právě tehdy, když ke každému* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *existuje dělení* D *intervalu* $\langle a, b\rangle$ *takové, že*

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Lemma 65 (kritérium existence Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$.

(a) $\int_a^b f = I \in \mathbb{R}$ *právě tehdy, když ke každému* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *existuje dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že*

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

(b) *Funkce f má na $\langle a, b \rangle$ Riemannův integrál právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že*

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Věta 66

(i) *Nechť funkce f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál i na intervalu $\langle c, d\rangle$.*

Věta 66

(i) *Nechť funkce f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál i na intervalu $\langle c, d\rangle$.*

(ii) *Nechť $c \in (a, b)$ a funkce f má Riemannův integrál na intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{1}$$

Věta 66

(i) *Nechť funkce f má Riemannův integrál na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a nechť* $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$*. Pak f má Riemannův integrál i na intervalu* $\langle c, d\rangle$*.*

(ii) *Nechť* $c \in (a, b)$ *a funkce f má Riemannův integrál na intervalech* $\langle a, c\rangle$ *a* $\langle c, b\rangle$*. Pak f má Riemannův integrál na* $\langle a, b\rangle$ *a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{1}$$

Poznámka

Vzorec (1) platí pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$, pokud existuje integrál funkce f přes interval $\big\langle \min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}\big\rangle$.

Věta 67 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť f a g jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

(i) *funkce αf má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

Věta 67 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť f a g jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

(i) *funkce αf má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

(ii) *funkce $f + g$ má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Věta 68

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, *a nechť* f *a* g *jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu* $\langle a, b \rangle$. *Potom platí:*

(i) *Je-li* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in \langle a, b \rangle$, *pak*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Věta 68

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, *a nechť* f *a* g *jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Potom platí:*

(i) *Je-li* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *pak*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(ii) *Funkce* $|f|$ *má Riemannův integrál na* $\langle a, b\rangle$ *a platí*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Definice

Řekneme, že funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$$
$$\forall x, y \in I, \ |x - y| < \delta : \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Definice

Řekneme, že funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\quad \forall x, y \in I,\ |x - y| < \delta :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 69

Je-li funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je stejnoměrně spojitá na $\langle a, b\rangle$.

Věta 70

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$.

Věta 71

Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b) a nechť $c \in (a, b)$. Označíme-li $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in (a, b)$, pak $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.