1. CVIČENÍ

1) Nechť $f: X \to Y$ je prosté zobrazení. Ukažte, že je-li $f(A) = f(B)$, pak $A = B$.
2) a) Ukažte, že v pologrupě je jednotkový prvek určen jednoznačně a existuje-li levá i pravá jednotka, pak jsou si rovny a je to jednotka.
   b) Ukažte, že v monoidu M je ke každému $x \in M$ inverzní prvek určen jednoznačně a existuje-li k $x \in M$ levý i pravý invers, pak jsou si rovny a je to invers k x.
   c) Ukažte, že množina invertibilních prvků v monoidu tvoří grupu.
   d) Nechť X je množina. Ukažte, že $M(X) = \{f: X \to X\}$ s operací skládání je monoid. (Co je jednotkou?) Pro jaká $f \in M(X)$ existuje inverzní prvek k f a jak vypadá? Pro jaká $f \in M(X)$ existuje levý invers? Pro jaká $f \in M(X)$ existuje pravý invers? Ukažte, že existuje X a $f \in M(X)$ tak, že f má levý, ale nemá pravý invers (tj. k existenci inverzního zobrazení k f nestačí předpokládat $g \circ f = \mathrm{Id}_X$).
3) Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$ konvexní. Ukažte, že $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in M$ pro libovolné $x_1, \dots, x_n \in M$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, +\infty)$ splňující $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.
4) Nechť $f: A \times B \to \mathbb{R}$. Ukažte, že
$$\sup_{x\in A}\Big(\sup_{y\in B} f(x,y)\Big) = \sup_{y\in B}\Big(\sup_{x\in A} f(x,y)\Big).$$
5) Ukažte, že podmnožina $\mathbb{C}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.
6) a) Ukažte, že v součinu metrických prostorů konvergence posloupností funguje „po složkách“.
   b) Nechť X, Y jsou metrické prostory. Ukažte, že je-li A hustá v X a B hustá v Y, pak $A \times B$ je hustá v $X \times Y$.
   c) Ukažte, že součin úplných metrických prostorů je úplný.
7) Dokažte následující větu:

   Věta. *Nechť P a Q jsou metrické prostory, $f, g: P \to Q$ jsou spojitá zobrazení a $M \subset P$ je hustá v P. Jestliže $f = g$ na M, pak $f = g$ na celém P.*

8) a) Ukažte, že podmnožina totálně omezeného metrického prostoru je totálně omezená.
   b) Ukažte, že uzávěr totálně omezené podmnožiny metrického prostoru je totálně omezený.
9) Dokažte následující fakt:

   Fakt. *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak funkce $x \mapsto \mathrm{dist}(x, A)$ je spojitá na P.*

10) Nechť (X, μ) je prostor s mírou a $f, g: X \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Ukažte, že $\operatorname{ess\,sup}(f + g) \le \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g$.
11) Dokažte následující důsledek Baireovy věty:

    Důsledek. *Nechť P je úplný metrický prostor, $\{F_n\} \subset P$ je posloupnost uzavřených množin v P a $P = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek.*

2. CVIČENÍ

1) Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že $B(x, r) = x + B(0, r)$ a $B(0, r) = rB_X$.
2) Ukažte, že $B(x, r)$ a $U(x, r)$ v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.
3) Ukažte, že vnitřek konvexní množiny v normovaném lineárním prostoru je konvexní.
4) Ukažte, že v normovaném lineárním prostoru $\overline{U(x, r)} = B(x, r)$ a $\operatorname{Int} B(x, r) = U(x, r)$. Nalezněte příklad metrického prostoru, kde tyto identity neplatí.
5) Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $M \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ Ukažte, že $\overline{\alpha M} = \alpha \overline{M}$.
6) Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, Y je podprostor X, $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ukažte, že $\mathrm{dist}(\alpha x, Y) = |\alpha| \,\mathrm{dist}(x, Y)$.
7) Nechť X je normovaný lineární prostor, $F \subset X$ uzavřená a $K \subset X$ kompaktní.
   a) Ukažte, že $F + K$ je uzavřená.
   b) Ukažte, že je-li F kompaktní, pak $F + K$ je kompaktní.
   c) Nalezněte uzavřené množiny $A, B \subset \mathbb{R}^2$ takové, že $A + B$ není uzavřená.
8) Ukažte, že c_0 je uzavřený podprostor c a c je uzavřený podprostor ℓ_∞.
9) a) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory ℓ_p a ℓ_q pro $p < q$? Jaký je jejich vztah k prostoru c_0?
   b) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p([0, 1])$ a $L_q([0, 1])$ pro $p < q$?
   c) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p(\mathbb{R})$ a $L_q(\mathbb{R})$ pro $p < q$?
10) Vektory $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ v prostorech c_0 a ℓ_p, $1 \le p < \infty$, kde pouze n-tá souřadnice je rovna 1, budeme nazývat kanonické bázové vektory. Ukažte, že pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ v c_0, resp. ℓ_p platí $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, kde konvergenci řady chápeme v příslušné normě.
11) Ukažte, že prostor c_0 je separabilní.
12) Ukažte, že prostor ℓ_p, $1 \le p < \infty$ je separabilní.
13) Ukažte, že prostor ℓ_∞ je neseparabilní.

3. CVIČENÍ

1) Ukažme, že prostor $C(K)$, kde K je kompaktní metrický prostor, je separabilní.
2) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná a $1 \le p < \infty$. Ukažme, že pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.
3) Dokažme následující větu:

Věta. *Nechť (P,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M\subset P$ je hustá v P a $f\colon M\to Q$ je stejnoměrně spojité zobrazení. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité na P.*

4. CVIČENÍ

1) Ukažme, že prostor $L_1([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_1.
2) Ukažme, že prostor $C([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru c_0.
3) Nechť $f\colon c_0\to\mathbb{R}$ je definována předpisem $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}$ pro $x=(x_n)\in c_0$. Rozhodněte, zda f je spojitý lineární funkcionál na c_0 a pokud ano, spočtěte jeho normu.
4) Dokažte následující lemma:

   Lemma. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f\in S_{X^*}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
   (i) Existuje $x\in S_X$ splňující $|f(x)|=1$.
   (ii) Existuje $x\in S_X$ splňující $\operatorname{dist}(x,\operatorname{Ker} f)=1$.
   (iii) Existují $u\in X\setminus\operatorname{Ker} f$ a $v\in\operatorname{Ker} f$ taková, že $\|u-v\|=\operatorname{dist}(u,\operatorname{Ker} f)$.
   (iv) Pro každé $u\in X\setminus\operatorname{Ker} f$ existuje $v\in\operatorname{Ker} f$ takové, že $\|u-v\|=\operatorname{dist}(u,\operatorname{Ker} f)$.

5) Nechť $Y=\left\{x\in c_0;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}=0\right\}$. Ukažte, že Y je uzavřený podprostor c_0 a že neexistuje $x\in S_{c_0}$ takové, že $\operatorname{dist}(x,Y)=1$. Dále ukažte, že pro žádné $x\in c_0\setminus Y$ neexistuje $y\in Y$ takové, že $\|x-y\|=\operatorname{dist}(x,Y)$.

5. CVIČENÍ

Nechť $1<p<\infty$, $X=(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_p)$ a $f\colon X\to\mathbb{R}$ je definována předpisem $f(x,y)=ax+by$ pro nějaká $a,b\in\mathbb{R}$. Nalezněte globální extrémy f na B_X. Je f je spojitý lineární funkcionál na X? Pokud ano, jaká je jeho norma?

Další příklady na lineární funkcionály.

6. CVIČENÍ

Nechť e_n, $n\in\mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v prostoru ℓ_2. Položme $e=(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}\in\ell_2$, $A=\{e_n;\ n\geq 2\}$ a $X=\operatorname{span}(\{e\}\cup A)$. Ukažte, že A je maximální ortonormální množina v X. Ukažte, že $X\neq\overline{\operatorname{span}}\,A$. Je prostor X úplný?

Další příklady na lineární funkcionály.

7. CVIČENÍ

Příklady na lineární operátory.

8. CVIČENÍ

Nechť $X=\ell_1$ a $B=c_0\subset\ell_\infty=\ell_1^*$. Nalezněte $B_\perp$. Ukažte, že $(B_\perp)^\perp\supsetneq\overline{\operatorname{span}}\,B$.

Další příklady na lineární operátory.

9. CVIČENÍ

1) Položme $X=c_0$ a uvažujme operátor $T\colon X\to c_0$ definovaný předpisem $T(x)=\left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ pro $x=(x_n)\in X$. Uvědomme si, že T je prostý spojitý lineární operátor a $\|T\|\leq 1$. Položme dále $Y=T(X)$. Ukažme, že pak $T\colon X\to Y$ je na, ale T není otevřené zobrazení.
2) Nechť $Y=(Y,\|\cdot\|_1)$ je libovolný nekonečněrozměrný Banachův prostor. Na Y existuje norma $\|\cdot\|_2$, která není ekvivalentní normě $\|\cdot\|_1$, ale $\|x\|_1\leq\|x\|_2$ pro každé $x\in Y$. Položme $X=(Y,\|\cdot\|_2)$ a uvažujme lineární operátor $T\colon X\to Y$, $T=\mathrm{Id}_X$. Uvědomme si, že T je spojitý a na. Ukažte, že T není otevřené zobrazení.
3) Nechť P je metrický prostor. Ukažte, že podmnožina $M\subset P$ je relativně kompaktní v P, právě když z každé posloupnosti $\{x_n\}\subset M$ lze vybrat konvergentní podposloupnost.
4) Nechť Q je metrický prostor a P je jeho podprostor. Ukažte, že je-li podmnožina $M\subset P$ relativně kompaktní v P, pak je též relativně kompaktní v Q.
5) Nechť P je úplný metrický prostor. Ukažte, že podmnožina $M\subset P$ je relativně kompaktní v P, právě když je totálně omezená.
6) Hilbertova krychle: Položme
$$Q=\left\{x=(x_n)\in\ell_2;\ |x_n|\leq\tfrac{1}{n}\text{ pro každé }n\in\mathbb{N}\right\}.$$
Ukažme, že Q je kompaktní podmnožina ℓ_2.