1. Opakování středoškolské látky

Najděte všechna reálná řešení rovnic

1. $4^{x-1} + 4^{2-x} = 5$,
2. $\log_3^2 x + \log_3 9^3 = \log_3 x^5$,
3. $\sin x - \sin(\pi + x) = 2\sin^2 x$.

Najděte všechna reálná řešení nerovnic

4. $\dfrac{x-1}{x-4} > \dfrac{x-2}{x-3}$,
5. $\dfrac{x^2 - x - 4}{x+1} \geq 0$,
6. $\big|4 - |x-3|\big| < 2$,
7. $|x+1| + |x+3| < 4$,
8. $\log_2(x^2 + x + 6) > 0$,
9. $x^2 + 1 - |x+2| > 0$,
10. $\cos^2 x + \frac{3}{2}\cos x - 1 < 0$.

V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ určete všechna reálná x, pro která platí

11. $cx^2 + x + 1 > 0$,
12. $ce^x \in (-1, 0\rangle$,
13. $\log|x| + c \in (-\pi/2, \pi/2)$,
14. $|\cos x| - c > 0$,
15. $e^{\sin x} - c \in (0, +\infty)$.

Řešte nerovnice a množinu řešení zakreslete do roviny:

16. $xy \geq 0 \quad \& \quad y \leq \sin x$;
17. $(x^2 - y^2)\sin x \geq 0$.

18. Dokažte, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$
$$|a-b| \leq |a| + |b|,$$
$$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|,$$
$$\big||a| - |b|\big| \leq |a+b|.$$

Výsledky: 1. $x = 1$ nebo $x = 2$, 2. $x = 9$ nebo $x = 27$, 3. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nebo $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
4. $x \in (\frac{5}{2}, 3) \cup (4, +\infty)$, 5. $x \in \left\langle \frac{1-\sqrt{17}}{2}, -1\right) \cup \left\langle \frac{1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$, 6. $x \in (-3, 1) \cup (5, 9)$, 7. $x \in (-4, 0)$,
8. $x \in \mathbb{R}$, 9. $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, 10. $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right)$,

11.

$c < 0$	$x \in \left(\frac{-1+\sqrt{1-4c}}{2c}, \frac{-1-\sqrt{1-4c}}{2c}\right)$
$c = 0$	$x \in (-1, +\infty)$
$0 < c \le \frac{1}{4}$	$x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{1-4c}}{2c}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-4c}}{2c}, +\infty\right)$
$c > \frac{1}{4}$	$x \in \mathbb{R}$

12.

$c > 0$	$\emptyset$
$c = 0$	$x \in \mathbb{R}$
$c < 0$	$x \in \left(-\infty, \log\left(-\frac{1}{c}\right)\right)$

13. $x \in \left(-e^{\frac{\pi}{2}-c}, -e^{-\frac{\pi}{2}-c}\right) \cup \left(e^{-\frac{\pi}{2}-c}, e^{\frac{\pi}{2}-c}\right)$ pro $c \in \mathbb{R}$

14.

$c < 0$	$x \in \mathbb{R}$
$0 \le c < 1$	$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\arccos c + k\pi, \arccos c + k\pi)$
$c \ge 1$	$\emptyset$

15.

$c < \frac{1}{e}$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{e} \le c < e$	$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\arcsin \log c + 2k\pi, \pi - \arcsin \log c + 2k\pi)$
$c \ge e$	$\emptyset$

2. Matematická indukce

Dokažte matematickou indukcí:

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$, $n \in \mathbb{N}$
4. $(1+x)^n \geq 1+nx$ pro $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$ (Bernoulliova nerovnost)
5. Nechť $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ jsou větší, než -1 a mají stejné znaménko. Pak $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$.
6. $n \leq 2^n$, $n \in \mathbb{N}$
7. $n^2 \leq 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$
8. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{n-1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$
9. $10^n - 4$ je dělitelné 6 pro každé $n \in \mathbb{N}$
10. Nechť $n, k \in \mathbb{N}$. Pak existují $q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pro která platí $r < k$ a $n = qk + r$. (dělení se zbytkem)
11. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
12. $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
13. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$
14. $\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x$ pro $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
15. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$
16. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$
17. $\left|\sin \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$, $x_1, \dots, x_n \in \langle 0, \pi \rangle$, $n \in \mathbb{N}$
18. $(n+1)^n \leq n^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$

19.* $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

Nápovědy:

10. Indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

18. $(n+2)^{n+1} \leq (n+2)^{n+1} \cdot \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$

19. Lze využít Bernoulliovu nerovnost.

3. Výroky

1. Vyjádřete jednoduše množinu $\{a \in \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R}\colon |x-2| \le 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5\}$.

2. Které z následujících výroků jsou pravdivé a které nepravdivé pro a) $M = \mathbb{N}$, b) $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$, c) $M = (0,1)$, d) $M = \{0\}$?

(i) $\forall x \in M\ \exists y \in M\ \exists z \in M\colon x = y + z$

(ii) $\exists y \in M\ \forall x \in M\ \exists z \in M\colon x = y + z$

(iii) $\exists y \in M\ \exists z \in M\ \forall x \in M\colon x = y + z$

3. Jsou pravdivé následující výroky? Napište jejich negace.

(i) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

(ii) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

(iii) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\colon x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

4. Jsou pravdivé následující výroky? Napište jejich negace.

(i) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\colon z > x \Rightarrow y < z$

(ii) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\colon z > x \Rightarrow y < z$

(iii) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R}\colon z > x \Rightarrow y < z$

5. Vyjádřete co nejjednodušeji vztah mezi čísly $a, b \in \mathbb{R}$ určený formulí:

(i) $\forall c > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon |a - x| < c \Rightarrow |b - x| < c$

(ii) $\forall c > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon a - x < c \Rightarrow |b - x| < c$

(iii) $\forall c > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon |a - x| < c \Rightarrow b - x < c$

(iv) $\forall c > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon a - x < c \Rightarrow b - x < c$

(v) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists u > 0\ \forall c \in (0, u)\colon |a - x| < c \Rightarrow |b - x| < u$

Výsledky: 1. $(-\infty, -4)$ 2. a) ne ($x = 1$), ne ($x = 1$ nebo $x = y$), ne; b) ano ($y = 0, z = x$), ano ($y = 0, z = x$), ne ($x = y + z + 1$); c) ano ($y = z = x/2$), ne ($x = y$), ne ($x = \frac{y+z}{2}$); d) ano, ano, ano 3. (i) ano ($\varepsilon = 2, \alpha = a + 1$), (ii) ne ($\alpha = a$), (iii) ano (poslední část platí nezávisle na hodnotách a, ε, α) 4. (i) ano ($y = x$), (ii) ano ($y = 1$), (iii) ne ($x = y - 1, z = y$) 5. (i) $a = b$ ($a - c \ge b - c$ & $a + c \le b + c$), (ii) neplatí pro žádná $a, b \in \mathbb{R}$, (iii) $a \ge b$, (iv) $a \ge b$, (v) platí pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ (stačí zvolit $u > |b - x|$)

4. Suprema a infima

1. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina. Předpokládejme, že má nejmenší prvek (tj. minimum, značíme $\min A$). Ukažte, že $\inf A = \min A$. Analogické tvrzení zformulujte a dokažte pro největší prvek (tj. maximum, $\max A$).

2. Nalezněte suprema a infima (případně maxima a minima) následujících množin (pokud existují):
a) $A = \langle 0, 1)$, b) $B = \{1, -5, 7, -3, 50\}$, c) $C = \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0\}$,
d) $D = (-1, 0) \cup \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$, e) $E = (1, 2) \cup \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$, f) $F = \left\{\frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{N}, m < n\right\}$.

3. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné omezené množiny. Označme $s = \inf A$, $S = \sup A$, $t = \inf B$, $T = \sup B$.
a) Vyjádřete $\inf(A \cup B)$ a $\sup(A \cup B)$ pomocí hodnot s, S, t, T.
b) Lze něco říci o $\inf(A \cap B)$ a $\sup(A \cap B)$?

4. Nalezněte $\sup M$ a $\inf M$, případně $\max M$ a $\min M$:
a) $M = \{\frac{n+1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$, b) $M = \{(-1)^n \frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\}$,
c) $M = \{(-1)^n \frac{n+1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$, d) $M = \{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$, e) $M = \{\frac{p}{p+q};\ p, q \in \mathbb{N}\}$,
f) $M = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, g) $M = \{\sin x;\ x \in (0, 2\pi)\}$, h) $M = \{\sin x;\ x \in (0, \pi)\}$,
i) $M = \{n^2 - m^2;\ m, n \in \mathbb{N}\}$, j) $M = \{n^2 - m^2;\ m, n \in \mathbb{N}, n > m\}$, k) $M = \{n^2 - m^2;\ m, n \in \mathbb{N}, n \leq m\}$,
l) $M = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$, m) $M = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{Z}\}$, n) $M = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j, k \in \mathbb{Z}\}$,
o) $M = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi;\ n \in \mathbb{N}\}$, p) $M = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi;\ n \in \mathbb{N} \text{ sudé}\}$, q) $M = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi;\ n \in \mathbb{N} \text{ liché}\}$

Výsledky: 2. a) $\min A = 0$, $\sup A = 1$ b) $\min B = -5$, $\max B = 50$ c) $\inf C = 0$, $\sup C = +\infty$ d) $\inf D = -1$, $\max D = 1$ e) $\inf E = 0$, $\sup E = 2$ f) $\inf F = 0$, $\sup F = 1$

3. a) $\inf(A \cup B) = \min\{s, t\}$, $\sup(A \cup B) = \max\{S, T\}$; b) Je-li $A \cap B \neq \emptyset$, pak $\max\{s, t\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{S, T\}$. Více říci nelze. Uvažte $A = (-1, 1)$ a $B = \{-1, 1\}$ nebo $B = \{-1, 0, 1\}$ nebo $B = \{-1, 0, \frac{1}{2}\}$.

4. a) $\inf M = 1$, $\max M = 2$ b) $\inf M = -1$, $\sup M = 1$ c) $\min M = -2$, $\max M = \frac{3}{2}$ d) $\inf M = -1$, $\max M = \frac{3}{2}$ e) $\inf M = 0$, $\sup M = 1$ f) $\min M = -1$, $\max M = 1$ g) $\min M = -1$, $\max M = 1$ h) $\inf M = 0$, $\max M = 1$ i) $\inf M = -\infty$, $\sup M = +\infty$ j) $\min M = 3$, $\sup M = +\infty$ k) $\inf M = -\infty$, $\max M = 0$ l) $\inf M = 0$, $\max M = \frac{5}{6}$ m) $\inf M = 0$, $\sup M = +\infty$ n) $\inf M = 0$, $\sup M = +\infty$ o) $\inf M = -1$, $\max M = 1$ p) $\min M = 0$, $\sup M = 1$ q) $\inf M = -1$, $\max M = 1$

5. Limity posloupností

1. Spočtěte následující limity posloupností:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{7}{n^5}}{7-\frac{3}{n^2}}, \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{n+7}{5n+3}, \quad \text{d) } \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+7)}{n^2+5n+15},$$

$$\text{e) } \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}, \quad \text{f) } \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}, \quad \text{g) } \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+3n-2}{4n^5+3n^3+1},$$

$$\text{h) } \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0}, \text{ kde } k,l \in \mathbb{N}\cup\{0\}, a_k \neq 0, b_l \neq 0,$$

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}, \quad \text{j) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right), \quad \text{k) } \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n+\sin 4n)^2},$$

$$\text{l) } \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}, \quad \text{m) } \lim_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l}, k,l\in\mathbb{N}, \quad \text{n) } \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k+(-n)^l}{(n-1)^k-n^l}, k,l\in\mathbb{N}.$$

2. Spočtěte následující limity posloupností:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+\frac{1}{n}}, \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}, \text{ kde } a_n \geq 0 \text{ a } \lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*,$$

$$\text{c) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+15}-\sqrt{n+1}\right), \quad \text{d) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+5n-1}-\sqrt{n^2+3}\right), \quad \text{e) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11}-\sqrt[3]{n}\right),$$

$$\text{f) } \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right), \quad \text{g) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{\sqrt{n^7}+\sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7}-\sqrt[3]{n^7}}\right),$$

$$\text{h) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}, \quad \text{i) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}, \quad \text{j) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}},$$

$$\text{k) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}}, \quad \text{l) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{m) } \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+n}-n\right),$$

$$\text{n) } \lim_{n\to\infty} \left(n^2+\sin(n+1)\right)\left(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\right), \quad \text{o) } \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+1}\right).$$

3. Spočtěte následující limity posloupností:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}, \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n [kx]}{n^2}, x\in\mathbb{R}, \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}, \quad \text{d) } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}, \quad \text{e) } \lim_{n\to\infty} \frac{n+[\sqrt[3]{n}]^3}{n-[\sqrt{n+9}]},$$

$$\text{f) } \lim_{n\to\infty} q^n, \ q\in\mathbb{R}, \quad \text{g) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \ a\in(0,+\infty), \quad \text{h) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n},$$

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}, \quad \text{j) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}, \quad \text{k) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n},$$

$$\text{l) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}, a,b,c>0, \quad \text{m) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}}, a>b>0, \quad \text{n) } \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}\right),$$

$$\text{o) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left((n+2)^2-(n+1)^2\right)^{n+1}}{\left((n+1)^3-n^3-3n^2\right)^{n-1}}}.$$

4. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel splňující $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ nebo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

5. Spočtěte limity:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!}, \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}, \quad \text{d) } \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+2^n+17^n}{n!+n+3^n}, \quad \text{e) } \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5+(n+1)!}{n(n^6+n!)}.$$

6. Spočtěte limity:

$$\text{a)* } \lim_{n\to\infty} \sin n, \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{4}\sqrt{n}, \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{3}-\sin n-\cos n\right)\frac{n^5}{\sqrt[n]{2}-1},$$

$$\text{d) } \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{e) } \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \text{f) } \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \text{g)* } \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n.$$

7. Pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti spočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$, kde

a) $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{k}$ (kde $k > 1$ je parametr); b) $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = \frac{1-a_n}{2}$;

c) $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}$; d) $a_n = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2-\dots\sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}$.

8. Spočtěte následující limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2+\frac{1}{n})^{100} - (4-\frac{3}{n})^{50}}{(8-\frac{1}{n})^{34} - (4+\frac{1}{n})^{51}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+\sin^2 n} - \sqrt{n-\cos^2 n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+7)^{50} - (n^2+1)^{25}}{\sqrt{n^{100}+n^{99}-1} - \sqrt{n^{100}+2n^{99}+1}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[4]{n^4+4n^3} - n\right]$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[\sqrt[3]{n^3+1}] + [\sqrt[3]{n^3-1}]}{\sqrt[n]{1+2^n+\dots+n^n}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[\sqrt[3]{n^3+1}] - [\sqrt[3]{n^3-1}]}{\sqrt[n]{1+2^n+\dots+n^n}}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2016)!}{n^{2016}} \cdot \dfrac{\sqrt{(n!)^2+2016^n} - \sqrt{(n!)^2 - n^{2016}}}{2016^n}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{4^n+n} - \sqrt{4^n-n}}$.

Výsledky: 1. a) 0 b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{5}$ d) 2 e) 0 f) 2 g) $\frac{1}{4}$ h) 0 pro $k < l$, $\frac{a_k}{b_l}$ pro $k = l$, $\operatorname{sgn}\frac{a_k}{b_l} \cdot (+\infty)$ pro $k > l$ i) $\frac{1}{2}$ j) $-\frac{1}{2}$ k) $\frac{1}{2}$ l) $\frac{1}{2}$ m) 1 pro $k > l$, 0 pro $k = l$, -1 pro $k < l$ n) 1 pro $k > l$, $-\infty$ pro $k = l$ sudé, -1 pro $k = l$ liché, $(-1)^{l+1}$ pro $k < l$

2. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{A}$ pro $A \in \mathbb{R}$, $+\infty$ pro $A = +\infty$ c) 0 d) $\frac{5}{2}$ e) 0 f) neexistuje ($\lim a_{2n} = \frac{1}{2}$, $\lim a_{2n+1} = -\frac{1}{2}$) g) $\frac{2}{3}$ h) 1 i) 0 j) 0 k) 1 l) 0 m) $+\infty$ n) $\frac{1}{2}$ o) 1

3. a) 1 b) $\frac{x}{2}$ c) $+\infty$ d) 1 e) 2 f) $+\infty$ pro $q > 1$, 1 pro $q = 1$, 0 pro $q \in (-1, 1)$, neexistuje pro $q \le -1$ g) 1 h) 1 i) neexistuje ($\lim |a_n| = 1$) j) 5 k) 4 l) $\max\{a, b, c\}$ m) $\frac{1}{a}$ n) 0 o) $\frac{2}{3}$

5. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) 1

6. a) neexistuje (studujme $a_{n+2} - a_n$, též pro $\cos n$; lze i $\sin nx$) b) neexistuje (např. $\{a_{4n}\}$ a $\{a_{8n+2}\}$) c) $+\infty$ (zkuste vyjádřit $\sin x + \cos x$ pomocí $\sin(\alpha+\beta)$) d) $\frac{1}{e}$ e) 1 f) 0 g) e^2

7. a) $\frac{1}{k-1}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 2 d) 1

8. a) $-\frac{175}{136}$ b) $\frac{1}{2}$ c) -700 d) 0 e) 2 f) 0 g) $\frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{2}$

Řešené příklady:

1. $\lim a_n$, kde $a_n = \dfrac{(-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt[n]{n^3} - 1}$

Je $a_{12k} = \frac{1+\sin(3k\pi)-\cos(4k\pi)}{\sqrt[12k]{(12k)^3}-1} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim\limits_{k\to\infty} a_{12k} = 0$. Na druhou stranu,

$$a_{24k+6} = \frac{1 + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 6k\pi\right) - \cos(2\pi + 8k\pi)}{\sqrt[24k+6]{(24k+6)^3} - 1} = \frac{-1}{\sqrt[24k+6]{(24k+6)^3} - 1}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim\limits_{k\to\infty} a_{24k+6} = -\infty$. Zde jsme využili faktu, že posloupnost $\left\{\sqrt[24k+6]{(24k+6)^3}\right\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\{(\sqrt[n]{n})^3\}_{n=1}^{\infty}$, a tedy má stejnou limitu, a dále tvrzení „jedna lomeno kladná nula“ a aritmetiku limit. Tedy podle věty o limitě vybrané posloupnosti $\lim a_n$ neexistuje.

2. $\lim a_n$, kde $a_n = \dfrac{3^n - [\sqrt[3]{(n+1)!}]}{3n^3 - [\sqrt[3]{n!}]}$

Platí $a_n = \frac{[\sqrt[3]{(n+1)!}]-3^n}{[\sqrt[3]{n!}]-3n^3}$. Zde je již čitatel i jmenovatel pro velká n kladný (to plyne z růstové škály), takže nebudeme mít potíže při násobení nerovností. Dále je $[\sqrt[3]{(n+1)!}] - 3^n \geq \sqrt[3]{(n+1)!} - 1 - 3^n$ a $[\sqrt[3]{n!}] - 3n^3 \leq \sqrt[3]{n!}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Odtud

$$a_n \geq \frac{\sqrt[3]{(n+1)!} - 1 - 3^n}{\sqrt[3]{n!}} = \sqrt[3]{n+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{n!}} - \sqrt[3]{\frac{27^n}{n!}}$$

pro dostatečně velká n. Podle růstové škály, tvrzení o limitě třetí odmocniny a aritmetiky limit má výraz vpravo limitu $+\infty$. Z věty o jednom policajtovi pak plyne $\lim a_n = +\infty$.

3. $\lim a_n$, kde $a_n = \sqrt[n]{[n^4 \cos n] - n^2 3^n + 4^n}$

Vytkneme-li dominantní člen 4^n, obdržíme $a_n = 4 \cdot \sqrt[n]{\frac{[n^4\cos n]}{4^n} - \frac{n^2 3^n}{4^n} + 1}$. Platí $\lim \frac{n^2 3^n}{4^n} = \lim \frac{n^2}{(\frac{4}{3})^n} = 0$ podle růstové škály. Dále

$$\frac{-n^4 - 1}{4^n} \leq \frac{n^4 \cos n - 1}{4^n} \leq \frac{[n^4 \cos n]}{4^n} \leq \frac{n^4 \cos n}{4^n} \leq \frac{n^4}{4^n},$$

a tedy $\lim \frac{[n^4\cos n]}{4^n} = 0$ dle růstové škály, aritmetiky limit a věty o dvou policajtech. Další použití aritmetiky limit nám pak dává $\lim\left(\frac{[n^4\cos n]}{4^n} - \frac{n^2 3^n}{4^n} + 1\right) = 1$. Podle definice limity tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $\frac{1}{2} < \frac{[n^4\cos n]}{4^n} - \frac{n^2 3^n}{4^n} + 1 < 2$. Odtud $4 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2}} < a_n < 4 \cdot \sqrt[n]{2}$ pro $n \geq n_0$. S pomocí známých limit a věty o dvou policajtech tedy odvodíme, že $\lim a_n = 4$.

4.

$$\lim \frac{5 + \sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}} = \lim \frac{5 + \sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)} =$$

$$= \lim \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \cdot \left(\lim \frac{5}{\sqrt{n}} + \lim \frac{\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}}\right) = 1 \cdot \left(0 + \lim \frac{\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \lim \frac{(n^3+n^2)^2 - (n^2+n)^3}{\sqrt{n}\left(\sum_{i=0}^{5} \sqrt[6]{(n^3+n^2)^{2(5-i)}(n^2+n)^{3i}}\right)} = \lim \frac{-n^5 - 2n^4 - n^3}{n^5\sqrt{n}\left(\sum_{i=0}^{5} \sqrt[6]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2(5-i)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3i}}\right)} =$$

$$= \lim \frac{-1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}\left(\sum_{i=0}^{5} \sqrt[6]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10+i}}\right)} = \frac{-1-0-0}{+\infty \cdot 6} = 0.$$

Po vytknutí dominantního členu $\sqrt{n}$ ze jmenovatele jsme využili aritmetiku limit. Následně jsme zlomek rozšířili tak, abychom mohli použít vzorec pro $a^6 - b^6$. Posléze jsme vykrátili dominantní člen v čitateli (n^5) a na závěr jsme použili aritmetiku limit a tvrzení o limitě 6-té odmocniny.

5. $\lim a_n$, kde $a_n = \left(\dfrac{2\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}} - \cos\dfrac{n\pi}{4}\right)\dfrac{2n}{1 - \sqrt[n]{2n}}$

Platí $\lim \sqrt[n]{2n} = \lim \sqrt[n]{2} \cdot \lim \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$ podle aritmetiky limit. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{2n} > 1$, a tedy $\lim \frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}} = -\infty$ podle tvrzení „jedna lomeno záporná nula“. Nyní se věnujme výrazu v závorkách. Vytknutím dominantního členu, aplikací aritmetiky limit a tvrzení o limitě odmocniny obdržíme $\lim \frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim \frac{2-\frac{1}{n^{1/6}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 2$. Podle definice limity tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}} > \frac{3}{2}$. Protože $\cos x \leq 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro $n \geq n_0$ platí

$\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}} - \cos\frac{n\pi}{4} > \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Vynásobíme-li předchozí nerovnost záporným výrazem $\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}$, dostaneme $a_n < \frac{1}{2}\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}$ pro $n \geq n_0$. Odtud podle věty o jednom policajtovi plyne $\lim a_n = -\infty$.

6.

$$\lim \frac{\sqrt[6]{n^5+1} - \sqrt[5]{n^4-n^3} + \sqrt[n]{n^2}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim \frac{n^{\frac{5}{6}}\left(\frac{\sqrt[6]{n^5+1}}{n^{\frac{5}{6}}} - \frac{\sqrt[5]{n^4-n^3}}{n^{\frac{5}{6}}} + \frac{\sqrt[n]{n^2}}{n^{\frac{5}{6}}}\right)}{n^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \lim \frac{n^{\frac{5}{6}}\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{n^5}} - \sqrt[5]{\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}} + \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{n^{\frac{5}{6}}}\right)}{n^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} =$$

$$= \lim n^{\frac{1}{3}} \cdot \lim \frac{\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{n^5}} - \sqrt[5]{\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}} + \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{n^{\frac{5}{6}}}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = +\infty \cdot \frac{1+0+0}{1} = +\infty.$$

Po vytknutí dominantních členů jsme využili aritmetiku limit a pro výpočet limity posledního zlomku znovu aritmetiku limit, tvrzení o limitě k-té odmocniny pro $k = 2, 5, 6$, a fakt, že $\sqrt[n]{n} \to 1$.

6. Řady

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{(2n^2+5)^2}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n, \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+100}\right)^n, \quad \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{7}\right)^n, \quad \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}, \quad \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin n,$$

$$\text{m) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log x},\ x \in \mathbb{R}, \quad \text{n) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}, \quad \text{o) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}, \quad \text{p) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n-2^n}, \quad \text{q) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}$$

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right), \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1}\right), \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}},$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad \text{f)* } \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2, \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)},$$

$$\text{h) } \frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\cdots, \quad \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, \quad \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}, \quad \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\log n},$$

$$\text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\log(n+1)}, \quad \text{m) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}\log\frac{1}{n}, \quad \text{n) } \sum_{n=3}^{\infty} \left(\log(\log n)\right)^{-\log n}$$

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}x^n, \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}x^n,$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-3)^n}{n}x^n$$

4. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right), \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\sqrt[n]{3}-1\right), \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2\pi)\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}},$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}, \quad \text{f) } \sum_{n=18}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+17}}{\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3+17n}}, \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\sqrt[3]{n^2-n}-\sqrt[3]{n^2-2n}\right),$$

$$\text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\sqrt{n^2-1}-n}{\sqrt{n^2+n}-n}, \quad \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos\frac{2}{\sqrt{n+4}}}, \quad \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\sqrt[n]{\frac{n^2}{n^2+1}}-1\right), \quad \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n},$$

$$\text{l) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}, \quad \text{m) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \quad \text{n) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)\frac{2-\cos(n\pi)}{4n}, \quad \text{o) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right),\ a \in \mathbb{R}$$

5. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}\operatorname{arctg} n, \quad \text{d) } \sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10\sin n}, \quad \text{e) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{3})}{\log(\log n)}, \quad \text{f) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\log^2 n}$$

6. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right), \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(1-\cos\frac{1}{n}\right), \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(1-\cos\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+1}\right)\right), \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\operatorname{arctg} n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n}, \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right),$$

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha e^{\sqrt{n^2+11}-\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\arcsin\frac{1}{n}, \quad \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha\log n, \quad \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$$

Výsledky: 1. a) D b) K c) D d) K e) K f) K g) K h) D i) K j) K k) K l) D m) K, právě když $0 < x < \frac{1}{e}$ n) D o) K p) K q) K

2. a) K b) D c) K d) K, právě když $\alpha > \frac{1}{2}$ e) D f) D g) K h) K i) K j) K k) K l) K m) K n) K

3. a) AK pro $x \neq \pm 1$, D pro $x = \pm 1$ b) AK pro $|x| \leq 1$, D jinak c) AK pro $x < 1$, D jinak d) AK pro $x \in \mathbb{R}$ e) AK pro $|x| \leq \frac{1}{2}$, D jinak f) AK pro $|x| < 1$, NAK pro $x = 1$, D jinak g) AK pro $|x| < 1$, NAK pro $x = \pm 1$, D jinak h) AK pro $|x| < \frac{1}{3}$, D jinak

4. a) NAK b) NAK c) AK d) NAK e) AK f) D g) NAK h) NAK i) NAK j) AK k) NAK l) NAK m) D n) D o) AK pro $a = 0$, NAK pro $a \neq 0$

5. a) NAK b) NAK c) NAK d) NAK e) NAK f) NAK

6. a) D b) K c) K d) D e) D f) AK g) NAK h) NAK i) AK pro $\alpha < -1$, D jinak j) K k) K, právě když $\alpha > \frac{1}{2}$ l) K, právě když $a + b > 1$

7. Limity funkcí

1. Spočtěte následující limity funkcí ($m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry):

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2+x}{x^3+1}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-x}$, c) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x(x-2)^2} - \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$, f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$, g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$, h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-(1+nx)}{x^2+x^5}$, k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$,

l) $\lim\limits_{x\to 1} \big([x]-x\big)$, m) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left[\dfrac{1}{x}\right]$, n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, o) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$,

p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}$, q) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}$, r) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$, s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$,

t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$, u) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)$, v) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$,

w) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-1-x}$, x) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$, y) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, z) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$

2. Spočtěte následující limity funkcí ($a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry):

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{tg} x$, e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$, g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$, i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin ax-\cos ax}$, j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin^2 x}$,

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$, l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$, m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$, n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$,

o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log x^2}{x^3-1}$, p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(x^3+15)}{\log(x^{15}+3)}$, q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^x-2^x}{x}$, r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\sin^2 x}$, s) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

3. Spočtěte následující limity funkcí ($a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry):

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \log\dfrac{x^2+1}{x^2+5}$, b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x+1}{x+3}\right)^{5x-x^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+2\sin x)}{x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log\cos x}{x^2}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos x+\sin x)}{\operatorname{tg} x}$, g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2^x+8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$, i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$, j) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$,

k) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$, m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, n) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$, o) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \log(1+2^x)\cdot\log\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$, q) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$, r) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}$, s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\big(\sin(\sin x)\big)}{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)} x^k$, $k \in \mathbb{Z}$,

t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\right)$, u) $\lim\limits_{x\to 0+} \log(x\log a)\cdot\log\left(\dfrac{\log ax}{\log\frac{x}{a}}\right)$, $a>1$, v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin^2 x}-\cos x}{x^2}$,

w) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}-\sqrt{1+\cos 3x}}{\log(1+x^2)}$, x) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

4. Spočtěte následující limity funkcí ($\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sqrt{\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$, e) $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{\arccos x}{(1-x)^\alpha}$,

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log\cos(\pi 4^x)}$, g) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos x)^x-\sqrt{1+\sin^3 x}}{x^3}$, i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{x-1}+\sqrt[3]{\cos\pi x}}{\log^2 x}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(e^x-1\right)^{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^\alpha}}$

Výsledky: 1. a) $\frac{5}{21}$ b) 2 c) $+\infty$ d) 6 e) $-\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}$ g) $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ h) $\frac{m}{n}$ i) $\frac{1}{2}mn(n-m)$ j) $\frac{1}{2}n(n-1)$ k) $\frac{1}{2}n(n+1)$ l) neexistuje (zleva -1, zprava 0) m) 1 n) $\frac{1}{3}$ o) $-\frac{1}{2}$ p) 3 q) 1 r) $\frac{12}{5}$ s) $\frac{3}{2}$ t) $\frac{1}{4}$ u) 1 v) $-\frac{1}{16}$ w) $-\frac{1}{2}$ x) $\frac{112}{27}$ y) $\frac{1}{n}$ z) $\frac{a}{m}-\frac{b}{n}$

2. a) -3 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) -1 e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) 2 g) $\frac{a}{b}, b \neq 0$ h) -1 i) $\frac{1}{a}, a \neq 0$ j) $\frac{1}{2}$ k) $\frac{1}{2}$ l) $\frac{3}{4}$ m) $\frac{4}{3}$ n) $-\frac{1}{12}$ o) $\frac{2}{3}$ p) $\frac{1}{5}$ q) $\log 5$ r) 1 s) $\frac{1}{2}$

3. a) -4 b) 0 c) 2 d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{a^2}{b^2}, b \neq 0$ f) 1 g) 4 h) e^2 i) e^3 j) e k) 1 l) $\frac{1}{e}$ m) 1 n) $\frac{1}{e}$ o) $\frac{2}{3}$ p) $\log 8$ q) neexistuje (zleva $-\infty$, zprava $+\infty$) r) $+\infty$ s) 0 pro $k > 1$, $\frac{4}{\pi}$ pro $k = 1$, $+\infty$ pro $k < 1$ liché, neexistuje pro $k < 1$ sudé t) 0 u) $2\log a$ v) $\frac{3}{2}$ w) $\frac{5}{4\sqrt{2}}$ x) $e^{\frac{3}{2}}$

4. a) 1 b) neexistuje (ani jednostranné) c) 0 d) 1 e) 0 pro $\alpha < \frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ pro $\alpha = \frac{1}{2}$, $+\infty$ pro $\alpha > \frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{8}$ g) 2 h) -1 i) $1+\frac{\pi^2}{6}$ j) 1 pro $\alpha < 2$, 0 pro $\alpha \geq 2$

8. Derivace

1. Určete derivaci (případně jednostranné derivace) následujících funkcí všude tam, kde existují:

$$\text{a) } (x^8 + x^6 - 1)^{157}, \quad \text{b) } \sqrt[n]{x},\ n > 1 \text{ liché}, \quad \text{c) } \frac{1}{4} \log \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad \text{d) } \sin(x^3 \cos \log x), \quad \text{e) } \frac{e^{x^5} \cos(x + 7)}{\log(x^4 + 1)}, \quad \text{f) } (\sin x)^{|\cos x|},$$

$$\text{g) } \frac{(\log x)^x}{x^{\log x}}, \quad \text{h) } \left|\frac{x - 1}{1 - 2x}\right|, \quad \text{i) } \max\{x^2, x^3 + \operatorname{sgn} x\}, \quad \text{j) } \min\{x^2, \sqrt[3]{x}\}, \quad \text{k) } \arcsin \frac{4x}{x^2 + 4}, \quad \text{l) } \sqrt{1 - e^{-x^2}},$$

$$\text{m) } \sqrt{\operatorname{arctg}(\log^2 x)}, \quad \text{n) } \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}}, \quad \text{o) } \sqrt[3]{\big(1 - \exp(1 - x^2)\big)^2}, \quad \text{p) } \sqrt{\sin x \cos x}, \quad \text{q) } \arcsin \left|\frac{5x + 2}{3x - 6}\right|,$$

$$\text{r) } \arcsin \min\left\{1, \frac{1}{x}\right\}, \quad \text{s) } \cos x \cdot [\sin x]$$

2. Spočtěte následující limity funkcí:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}, \quad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{2x + 1}{3x + 1}, \quad \text{d) } \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x + \sin x}, \quad \text{e) } \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x},$$

$$\text{f) } \lim_{x\to +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \log x, \quad \text{g) } \lim_{x\to +\infty} \frac{\log^\beta x}{x^\gamma},\ \beta, \gamma > 0, \quad \text{h) } \lim_{x\to +\infty} \frac{x^\gamma}{a^x},\ a > 1, \gamma > 0,$$

$$\text{i) } \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{x}, \quad \text{j) } \lim_{x\to +\infty} x\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\Big), \quad \text{k) } \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, \quad \text{l) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arcsin x}{x^2},$$

$$\text{m) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log \frac{\sin x}{x}, \quad \text{n) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}, \quad \text{o) } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}, \quad \text{p) } \lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}, \quad \text{q) } \lim_{x\to 0} \frac{\log \sin(ax)}{\log \sin(bx)},$$

$$\text{r) } \lim_{x\to 0+} \frac{x^x - \cos x}{x \log x}, \quad \text{s) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(1 + x) - \operatorname{arctg}(1 - x)}{x}, \quad \text{t) } \lim_{x\to +\infty} x\Big(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\Big),$$

$$\text{u) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{\sin x}, \quad \text{v) } \lim_{x\to 0+} x^{(x^x - 1)}, \quad \text{w) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \text{x) } \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}, \quad \text{y) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$$

Výsledky: 1. a) $f'(x) = 314x^5(4x^2 + 3)(x^8 + x^6 - 1)^{156}$, $x \in \mathbb{R}$ b) $f'(x) = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(0) = +\infty$ c) $f'(x) = \frac{x}{x^4-1}$, $x \in D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ d) $f'(x) = x^2 \cos(x^3 \cos \log x)(3 \cos \log x - \sin \log x)$, $x \in (0, +\infty)$ e) $f'(x) = \frac{e^{x^5}}{\log^2(x^4+1)}\Big(\big((5x^4 \cos(x + 7) - \sin(x + 7)\big) \log(x^4 + 1) - \cos(x + 7)\frac{4x^3}{x^4+1}\Big)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
f) $f'(x) = (\sin x)^{|\cos x|} \operatorname{sgn}(\cos x)\big(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \log \sin x\big)$, $x \in D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, \pi + 2k\pi)$
g) $f'(x) = \frac{(\log x)^x}{x^{\log x}}\big(\log(\log x) + \frac{1}{\log x} - \frac{2}{x} \log x\big)$, $x \in D_f = (1, +\infty)$ h) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $f'(x) = \operatorname{sgn}\big(\frac{1-x}{1-2x}\big) \cdot \frac{1}{(1-2x)^2}$, $x \in D_f \setminus \{1\}$, $f'_+(1) = 1$, $f'_-(1) = -1$ i) $f'(x) = 2x$, $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) = 3x^2$, $x \in (0, +\infty$, $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = +\infty$
j) $f'(x) = 2x$, $x \in (0, 1)$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $f'_-(0) = +\infty$, $f'_+(0) = 0$, $f'_-(1) = 2$, $f'_+(1) = \frac{1}{3}$,
k) $f'(x) = \frac{4 \operatorname{sgn}(4-x^2)}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $f'_-(-2) = -\frac{1}{2}$, $f'_+(-2) = \frac{1}{2}$, $f'_-(2) = \frac{1}{2}$, $f'_+(2) = -\frac{1}{2}$ l) $f'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$ m) $f'(x) = \frac{\log x}{x\sqrt{\operatorname{arctg}(\log^2 x)}\big(1+\log^4 x\big)}$, $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, $f'_-(1) = -1$, $f'_+(1) = 1$
n) $D_f = \langle 0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{-1}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(2-\sqrt{x})^2}}$, $x \in (0, +\infty) \setminus \{4\}$, $f'_+(0) = -\infty$, $f'(4) = -\infty$ o) $f'(x) = \frac{4}{3} \frac{x \exp(1-x^2)}{\sqrt[3]{1-\exp(1-x^2)}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f'_-(-1) = -\infty$, $f'_+(-1) = +\infty$, $f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(1) = +\infty$, p) $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\rangle$, $f'(x) = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x \cos x}}$, $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $f'_+(2k\pi) = +\infty$, $f'_-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -\infty$, $f'_+(\pi + 2k\pi) = +\infty$, $f'_-(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi) = -\infty$, $k \in \mathbb{Z}$ q) $D_f = \langle -4, \frac{1}{2}\rangle$, $f'(x) = \frac{6 \operatorname{sgn}(5x+2)}{(2-x)\sqrt{2(x+4)(1-2x)}}$, $x \in D_f \setminus \{-4, -\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\}$, $f'_+(-4) = -\infty$, $f'_-(-\frac{2}{5}) = -\frac{25}{36}$, $f'_+(-\frac{2}{5}) = \frac{25}{36}$, $f'_-(\frac{1}{2}) = +\infty$, r) $D_f = (-\infty, -1\rangle \cup (0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f'(x) = 0$, $x \in (0, 1)$, $f'_-(-1) = -\infty$, $f'_-(1) = 0$, $f'_+(1) = -\infty$, s) $f'(x) = 0$, $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $f'(x) = \sin x$ $x \in (\pi + 2\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $f'_+(2k\pi) = 0$, $f'_-(\pi + 2k\pi) = 0$, $f'_+(\pi + 2k\pi) = +\infty$, $f'_-(2\pi + 2k\pi) = +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$

2. a) $-\frac{1}{6}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 1 (nejsou splněny předpoklady LH) d) 1 (po zderivování neexistuje) e) 0 (po zderivování komplikovanější) f) 0 g) 0 h) 0 i) $-\infty$ (nejsou splněny předpoklady LH) j) 1 k) 0 (po zderivování neexistuje) l) 0 m) $-\frac{1}{6}$ n) 2 o) $\frac{1}{3}$ p) $\frac{1}{6} \log a$ q) 1 r) 1 s) 1 t) 1 u) 0 v) 1 w) $e^{-\frac{1}{3}}$ x) $-\frac{e}{2}$ y) $-\frac{1}{3}$

9. Průběh funkce

1. Vyšetřete průběhy následujících funkcí:

a) $\sqrt[3]{(x^4-1)^2}$, b) $|x|\exp(-|x-1|)$, c) $|x-2|-2\operatorname{arctg} x$, d) $|x-1|\exp\left(-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$, e) $\arccos\left|\dfrac{1-x}{1-2x}\right|$,

f) $\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$, g) $\log\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, h) $\sqrt[5]{3x^5+5x^3}$, i) $\sqrt[5]{1-\sqrt{x+1}}$, j) $\sin x+\dfrac{1}{6\sin x}$, k) $\dfrac{e^{|x|}}{|e^x-3|}$,

l) $\sqrt{x}+\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$, m) $x^{2-3\log x}$, n) $\dfrac{4^x-\frac{5}{2}}{(2^x-2)^2}$, o) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{4\cos^2 x}$

Výsledky: 1. a) $D_f=\mathbb{R}$, f je spojitá, sudá, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, $f'(x)=\frac{8}{3}\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4-1}}$ pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f'_-(-1)=f'_-(1)=-\infty$, $f'_+(-1)=f'_+(1)=+\infty$, f je klesající na $(-\infty,-1)$ a $(0,1)$, rostoucí na $(-1,0)$ a $(1,+\infty)$, f má v 0 lokální maximum, v -1 a 1 globální minima, $f''(x)=\frac{8}{9}\frac{x^2(5x^4-9)}{\sqrt[3]{(x^4-1)^4}}$ pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, f je na $(-1,1)$ konkávní, na $\left(-\infty,-\sqrt{3/\sqrt{5}}\right)$ a na $\left(\sqrt{3/\sqrt{5}},+\infty\right)$ ryze konvexní, na $\left(-\sqrt{3/\sqrt{5}},-1\right)$ a $\left(1,\sqrt{3/\sqrt{5}}\right)$ ryze konkávní, body $\pm\sqrt{3/\sqrt{5}}$ jsou inflexní

b) $D_f=\mathbb{R}$, f je spojitá, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, $f'(x)=\exp(-|x-1|)\big(\operatorname{sgn} x-|x|\operatorname{sgn}(x-1)\big)$ pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $f'_-(0)=-\frac{1}{e}$, $f'_+(0)=\frac{1}{e}$, $f'_-(1)=2$, $f'_+(1)=0$, f je rostoucí na $(-\infty,-1)$ a $(0,1)$, klesající na $(-1,0)$ a $(1,+\infty)$, f má v -1 lokální maximum, v 0 globální minimum, v 1 globální maximum, $f''(x)=-(x+2)\exp(x-1)$ pro $x\in(-\infty,0)$, $f''(x)=(x+2)\exp(x-1)$ pro $x\in(0,1)$, $f''(x)=(x-2)\exp(1-x)$ pro $x\in(1,+\infty)$, f je ryze konvexní na $(-\infty,-2)$, $(0,1)$ a $(2,+\infty)$, ryze konkávní na $(-2,0)$ a $(1,2)$, body ± 2 jsou inflexní

c) $D_f=\mathbb{R}$, f je spojitá, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, $f'(x)=\operatorname{sgn}(x-2)-\frac{2}{1+x^2}$ pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f'_-(2)=-\frac{7}{5}$, $f'_+(2)=\frac{3}{5}$, f je klesající na $(-\infty,2)$, rostoucí na $(2,+\infty)$, f má ve 2 globální minimum, $f''(x)=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$ pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, f je ryze konkávní na $(-\infty,0)$, ryze konvexní na $(0,2)$ a $(2,+\infty)$, bod 0 je inflexní, asymptota v $+\infty$ je $y=x-2-\pi$, asymptota v $-\infty$ je $y=2+\pi-x$

d) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, f je spojitá, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$, $f'(x)=\exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\operatorname{sgn}(x-1)\left(1+\frac{2}{(x-1)^2}\right)$ pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, f je klesající na $(-\infty,1)$, rostoucí na $(1,+\infty)$, $f''(x)=2\exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\frac{-x^2+2x+1}{|x-1|^5}$ pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, f je ryze konkávní na $(-\infty,1-\sqrt{2})$ a $(1+\sqrt{2},+\infty)$, ryze konvexní na $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$, body $1\pm\sqrt{2}$ jsou inflexní, asymptota v $-\infty$ je $y=-x+1$, asymptota v $+\infty$ je $y=x-1$

e) $D_f=(-\infty,0\rangle\cup\langle 2/3,+\infty)$, f je spojitá na D_f, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pi/3$, $f(0)=f(2/3)=0$, $f'(x)=-\frac{\operatorname{sgn}(1-x)}{(1-2x)\sqrt{x(3x-2)}}$ pro $x\in D_f\setminus\{0,2/3,1\}$, $f'_-(0)=-\infty$, $f'_+(2/3)=+\infty$, $f'_-(1)=1$, $f'_+(1)=-1$, f je klesající na $(-\infty,0)$ a $(1,+\infty)$, rostoucí na $(2/3,1)$, f má v 1 globální maximum, v 0 a $2/3$ globální minimum, $f''(x)=\frac{(-12x^2+9x-1)\operatorname{sgn}(1-x)}{x(1-2x)^2(3x-2)\sqrt{x(3x-2)}}$ pro $x\in D_f\setminus\{0,2/3,1\}$, f je ryze konkávní na $(-\infty,0)$ a $(2/3,1)$, ryze konvexní na $(1,+\infty)$

f) $D_f=\mathbb{R}$, f je spojitá, periodická s periodou 2π, $f'(x)=-\frac{1+2\sin x}{(2+\sin x)^2}$ pro $x\in\mathbb{R}$, f je klesající na $(-\pi,-5\pi/6)$ a $(-\pi/6,\pi)$, rostoucí na $(-5\pi/6,-\pi/6)$, f má v $-\pi/6$ globální maximum, v $-5\pi/6$ globální minimum, $f''(x)=\frac{2\cos x(\sin x-1)}{(2+\sin x)^3}$ pro $x\in\mathbb{R}$, f je ryze konvexní na $(-\pi,-\pi/2)$ a $(\pi/2,\pi)$, ryze konkávní na $(-\pi/2,\pi/2)$, body $\pm\pi/2$ jsou inflexní

g) $f'(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+1)}$, $f''(x)=-\frac{x^4-4x^2-1}{x^2(x^2+1)^2}$

h) $f'(x)=\frac{3(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^2(3x^2+5)^4}}$, $f''(x)=\frac{6(x^2-1)}{\sqrt[5]{x^7(3x^2+5)^9}}$

i) $f'(x)=\frac{-1}{10\sqrt{x+1}\,\sqrt[5]{(1-\sqrt{x+1})^4}}$, $f''(x)=\frac{5-9\sqrt{x+1}}{100\sqrt{(x+1)^3}\,\sqrt[5]{(1-\sqrt{x+1})^9}}$

j) $f'(x)=\cos x\frac{6\sin^2-1}{6(1-\cos^2 x)}$, $f''(x)=\frac{(3\sin^2 x+2)(1-2\sin^2 x)}{6\sin^3 x}$

k) $f'(x)=-\frac{3e^x}{(e^x-3)^2}$ pro $x\in(\log 3,+\infty)$, $f'(x)=\frac{3e^x}{(e^x-3)^2}$ pro $x\in(0,\log 3)$, $f'(x)=\frac{2e^x-3}{e^x(e^x-3)^2}$ pro $x\in(-\infty,0)$, $f''(x)=\frac{3e^x(e^x+3)}{(e^x-3)^3}$ pro $x\in(\log 3,+\infty)$, $f''(x)=\frac{3e^x(e^x+3)}{(3-e^x)^3}$ pro $x\in(0,\log 3)$, $f''(x)=\frac{4e^{2x}-9e^x+9}{e^x(3-e^x)^3}$ pro $x\in(-\infty,0)$

l) $f'(x)=\frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)}$, $f''(x)=-\frac{x^2-4x-1}{4\sqrt{x^3}(x+1)^2}$

m) $f'(x)=2x^{1-3\log x}(1-3\log x)$, $f''(x)=2x^{-3\log x}(3\log x-2)(1+6\log x)$

n) $f'(x)=\frac{2^x(5-2^{x+2})\log 2}{(2^x-2)^3}$, $f''(x)=\frac{2^{x+1}(2^{2x+1}+3\cdot 2^x-5)\log^2 2}{(2^x-2)^4}$

o) $f'(x)=\frac{4\sqrt{5}\sin 2x}{16\cos^4 x+5}$, $f''(x)=8\sqrt{5}\cdot\frac{32\cos^6 x-48\cos^4 x-10\cos^2 x+5}{(16\cos^4 x+5)^2}$