1)

$$\lim_{x\to+\infty}\log(e^x+x^2-\log x)\cdot\arcsin\frac{1}{x+\log x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{x+\log x}}{\frac{1}{x+\log x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\log\left(e^x\left(1+\frac{x^2}{e^x}-\frac{\log x}{e^x}\right)\right)\frac{1}{x+\log x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\log e^x+\log\left(1+\frac{x^2}{e^x}-\frac{\log x}{e^x}\right)}{x+\log x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{x^2}{e^x}-\frac{\log x}{e^x}\right)}{1+\frac{\log x}{x}}=\frac{1+0\cdot 0}{1+0}=1.$$

Argument funkce log má limitu $+\infty$ a dominantní je v něm člen e^x, vytkneme jej tedy. Dále limita argumentu funkce arcsin je dle aritmetiky limit rovna 0, takže funkce arcsin se zbavíme použitím známé limity $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y}=1$. Pro první rovnost dále použijeme aritmetiku limit. Pro druhou rovnost použijeme vzorec pro logaritmus a dále fakt, že $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{x+\log x}}{\frac{1}{x+\log x}}=1$ podle věty o limitě složené funkce, kde pro vnitřní funkci $g(x)=\frac{1}{x+\log x}$ platí $g(x)\neq 0$ pro $x\in\mathbb{R}$, a tedy je splněna podmínka (P). Protože $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log x}{e^x}=0$ podle růstové škály, platí $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{x^2}{e^x}-\frac{\log x}{e^x}=1$ dle aritmetiky limit. Podle věty o limitě složené funkce tedy $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(1+\frac{x^2}{e^x}-\frac{\log x}{e^x}\right)=\log 1=0$, přičemž je splněna podmínka (S), neboť vnější funkce log je spojitá v bodě 1. Odtud vidíme, že limita čitatele i jmenovatele v prvním zlomku ve druhém řádku výpočtu je rovna $+\infty$, přičemž dominantní člen je v obou případech x. Po vydělení dominantním členem tedy již můžeme použít aritmetiku limit a obdržíme výsledek.

2) Platí $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{cotg}x)^{\operatorname{tg}2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\exp(\operatorname{tg}2x\cdot\log\operatorname{cotg}x)$. Počítejme tedy nejprve limitu argumentu funkce exp:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\cdot\log\operatorname{cotg}x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\log\operatorname{cotg}x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\log\operatorname{cotg}x}{\operatorname{cotg}x-1}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{cotg}x-1}{\cos 2x}=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-1}{\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin x}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x+\sin x}=1.$$

Ze spojitosti funkcí $\sin(2x)$ a $\operatorname{cotg}x$ v bodě $\frac{\pi}{4}$ dostáváme $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x=1$ a $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{cotg}x=1$. Výraz $\sin 2x$ můžeme tedy z naší limity zkusit odstranit pomocí aritmetiky limit a dále vidíme, že nás zajímá chování funkce log v okolí 1. Logaritmus tedy zkusíme odstranit pomocí známe limity $\lim\limits_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}=1$. Protože funkce $g(x)=\operatorname{cotg}x$ je klesající na intervalu $(0,\pi)$, věta o limitě složené funkce s podmínkou (P), kde vnitřní funkce je g, nám dává $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\log\operatorname{cotg}x}{\operatorname{cotg}x-1}=1$. Poslední rovnost ve výpočtu pak plyne z toho, že funkce $\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x+\cos x}$ je spojitá v bodě $\frac{\pi}{4}$ dle aritmetiky spojitých funkcí, a můžeme tedy dosadit.

Výsledná limita je tedy $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\exp(\operatorname{tg}2x\cdot\log\operatorname{cotg}x)=\exp(1)=e$, přičemž využíváme větu o limitě složené funkce s podmínkou (S), neboť funkce exp je spojitá v bodě 1.

3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 3x}}{\operatorname{arctg}(\arcsin 2x\cdot\sin 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x\cdot\sin 3x}{\operatorname{arctg}(\arcsin 2x\cdot\sin 3x)}\cdot\frac{2x}{\arcsin 2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\sqrt{\cos 3x}}{6x^2}=$$

$$=1\cdot 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\frac{1-\sqrt{\cos 3x}}{x^2}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos 3x}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{9}{1+\sqrt{\cos 3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{24}.$$

Funkce $x\mapsto\arcsin 2x\cdot\sin 3x$ je spojitá v 0, a proto $\lim_{x\to 0}\arcsin 2x\cdot\sin 3x=0$. Zajímá nás tedy chování arctg na okolí 0 a můžeme využít známou limitu $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{arctg}y}=1$. Protože $\arcsin 2x\cdot\sin 3x\neq 0$ pro $x\in P(0,1)$, platí $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x\cdot\sin 3x}{\operatorname{arctg}(\arcsin 2x\cdot\sin 3x)}=1$ dle věty o limitě složené funkce s podmínkou (P). Dále $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\arcsin 2x}=1$ a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=1$ (používáme lineární substituci ve známých limitách a aritmetiku limit). Druhá rovnost ve výpočtu tak plyne z aritmetiky limit. Pro třetí rovnost používáme opět aritmetiku limit a dále spojitost funkce cos v 0 a vzorec pro rozdíl odmocnin. Čtvrtá rovnost platí díky aritmetice limit. Konečně v páté rovnosti využijeme spojitost funkce $x\mapsto\frac{9}{1+\sqrt{\cos 3x}}$ v 0 a dále větu o limitě složené funkce (lineární substituce $g(x)=3x$).

4) Spočtěte $\lim_{x\to 1} f(x)$, kde $f(x) = \arccos \frac{x^{60}-3x+2}{x^{40}-2x+1}$.
Máme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{60}-3x+2}{x^{40}-2x+1} = \lim_{y\to 0} \frac{(y+1)^{60}-3(y+1)+2}{(y+1)^{40}-2(y+1)+1} = \lim_{y\to 0} \frac{\sum_{i=0}^{60}\binom{60}{i}y^i - 3y - 1}{\sum_{i=0}^{40}\binom{40}{i}y^i - 2y - 1} =$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sum_{i=2}^{60}\binom{60}{i}y^i + 57y}{\sum_{i=2}^{40}\binom{40}{i}y^i + 38y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sum_{i=2}^{60}\binom{60}{i}y^{i-1} + 57}{\sum_{i=2}^{40}\binom{40}{i}y^{i-1} + 38} = \frac{57}{38} = \frac{3}{2},$$

přičemž první rovnost plyne z věty o limitě složené funkce (afinní substituce $y = x - 1$) a předposlední rovnost ze spojitosti příslušné racionální funkce v 0. Podle definice limity tedy existuje prstencové okolí bodu 1 takové, že na něm platí $\frac{x^{60}-3x+2}{x^{40}-2x+1} > 1$. Definiční obor funkce arccos je ovšem $\langle -1, 1\rangle$. Proto funkce f není definována na žádném prstencovém okolí bodu 1, nemá tedy smysl počítat $\lim_{x\to 1} f(x)$.

5)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \lim_{y\to 0} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) \cdot \operatorname{tg} y = \lim_{y\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)} \cdot \frac{\operatorname{tg} y}{y} \cdot y = \lim_{y\to 0} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) \cdot \frac{\operatorname{tg} y}{y} \cdot \frac{2y}{\sin 2y} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Zajímá nás chování elementárních funkcí na okolí 0, zdá se tedy výhodné převést limitu na limitu v 0. To provedeme pomocí věty o limitě složené funkce (afinní substituce $y = \frac{\pi}{4} - x$). Ve zbytku výpočtu použijeme vzorce pro goniometrické funkce a na závěr aritmetiku limit, spojitost funkce $y \mapsto \sin(\frac{\pi}{2} - y)$ a lineární substituci $z = 2y$.

6) Platí $\lim_{x\to 0}\big(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1\big)^{\frac{x^3+1}{x}} = \lim_{x\to 0} \exp\big(\frac{x^3+1}{x}\log(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)\big)$. Počítejme tedy nejprve limitu argumentu funkce exp:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+1}{x}\log(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1) = \lim_{x\to 0}(x^3+1) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\log(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)}{2e^{\frac{x}{x+1}} - 2} \cdot \lim_{x\to 0} 2\frac{e^{\frac{x}{x+1}} - 1}{x} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x}{x+1}} - 1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{2}{x+1} = 2.$$

Funkce $x \mapsto 2e^{\frac{x}{x+1}} - 1$ je spojitá v 0, po dosazení tedy obdržíme $\lim_{x\to 0} 2e^{\frac{x}{x+1}} - 1 = 1$. Odtud vidíme, že nás zajímá chování funkce log v okolí 1. Logaritmus tedy zkusíme odstranit pomocí známé limity $\lim_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$. Snadno spočteme, že pro $g(x) = 2e^{\frac{x}{x+1}} - 1$ platí $g(x) = 1$ pouze pro $x = 0$. Věta o limitě složené funkce s podmínkou (P), kde vnitřní funkce je g, nám tak dává $\lim_{x\to 0} \frac{\log(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)}{2e^{\frac{x}{x+1}} - 2} = 1$. První rovnost ve výpočtu výše plyne z aritmetiky limit a druhá z právě řečeného a ze spojitosti funkce $x \mapsto x^3 + 1$. Poslední rovnost plyne z aritmetiky limit, spojitosti funkce $x \mapsto \frac{2}{x+1}$ v 0 a konečně ze známé limity $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ zkombinované s větou o limitě složené funkce s podmínkou (P), neboť vnitřní funkce $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ je rovna 0 pouze pro $x = 0$.

Výsledná limita je tedy $\lim_{x\to 0}\big(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1\big)^{\frac{x^3+1}{x}} = \exp(2) = e^2$, přičemž využíváme větu o limitě složené funkce s podmínkou (S), neboť funkce exp je spojitá v bodě 2.

7)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}}{\arcsin^2 \frac{1}{x}} = +\infty$$

Platí $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ a $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$ podle aritmetiky limit a věty o limitě složené funkce s podmínkou (S), neboť vnější funkce $y \mapsto \sqrt{y}$ je spojitá v 1. Protože funkce arccotg je spojitá v 0 i v 1, můžeme opět použít větu o limitě složené funkce s podmínkou (S) a dostaneme $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4}$ a $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$. Podle aritmetiky limit je tedy limita čitatele rovna $\frac{\pi^2}{8} > 0$. Ze spojitosti funkce $\arcsin^2$ v 0 dostaneme $\lim_{x\to+\infty} \arcsin^2 \frac{1}{x} = 0$ (věta o limitě složené funkce s podmínkou (S)). Protože $\arcsin^2 \frac{1}{x} > 0$ pro $x > 1$, můžeme výslednou limitu spočítat pomocí tvrzení „A lomeno kladná nula“.

8) V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \left(\log \frac{n-1}{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p$.

Protože $\frac{n-1}{n+1} < 1$ for všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou členy řady záporné. Budeme tedy vyšetřovat řadu $\sum_{n=2}^{\infty} -a_n$ s kladnými členy. Platí $-a_n = \left(\log \frac{n+1}{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p$. Abychom zjistili, jak jsou členy řady přibližně velké, provedeme následující heuristickou úvahu: $\lim \frac{n+1}{n-1} = 1$, tedy nás zajímá chování funkce log na okolí 1. Tam lze ovšem výraz $\log y$ přibližně nahradit výrazem $y-1$, tedy v našem případě $\frac{n+1}{n-1} - 1 = \frac{2}{n-1}$. Činitel $\log \frac{n+1}{n-1}$ se tedy chová přibližně jako $\frac{1}{n}$. Dále platí $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p = \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^p}$, přičemž ve výrazu v závorce ve jmenovateli je dominantní člen $\sqrt{n}$. Činitel $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p$ se tedy chová přibližně jako $\frac{1}{n^{p/2}}$. Nyní již vidíme, že naši řadu má smysl srovnávat s řadou $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$, kde $b_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^{p/2}} = \frac{1}{n^{p/2+1}}$:

$$\begin{aligned}
\lim \frac{-a_n}{b_n} &= \lim \frac{\log \frac{n+1}{n-1}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p}{\frac{1}{n^{p/2}}} = \lim \frac{\log\left(1+\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n^{p/2}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^p} = \\
&= \lim \frac{\log\left(1+\frac{2}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \lim \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{2}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} \cdot \lim \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)^p = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{2}{x-1}\right)}{\frac{2}{x-1}} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x-1} \cdot \lim \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)^p = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2^p} \in (0,+\infty),
\end{aligned}$$

přičemž třetí rovnost plyne z aritmetiky limit, čtvrtá rovnost z Heineovy věty pro posloupnost $x_n = n$, pátá rovnost z aritmetiky limit a šestá rovnost jednak z věty o limitě složené funkce s podmínkou (P), neboť vnitřní funkce $x \mapsto \frac{2}{x-1}$ je nenulová, a jednak z Heineovy věty použité na funkci $x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\right)^p$, jež je spojitá na intervalu $\langle -1,+\infty)$, a posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$.

Podle limitního srovnávacího kritéria tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} -a_n$ (a tím pádem i řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$) konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{p/2+1}}$, což nastane, právě když $p/2+1 > 1$ neboli $p > 0$. (Uvědomme si, že přechod k řadě $\sum_{n=2}^{\infty} -a_n$ jsme provedli právě kvůli tomu, abychom mohli použít limitní srovnávací kritérium, které lze použít pouze pro řady s nezápornými členy.)

9) Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \frac{1+\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}}{1+\sin\frac{2}{n}-\cos\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}$.

Protože $\operatorname{tg} x$ se na okolí nuly chová přibližně jako x, činitel $\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}$ se chová přibližně jako $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Dále se na okolí nuly $\sin x$ chová jako x a $1-\cos x$ jako $\frac{1}{2}x^2$. Zdá se tedy, že výraz $\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin(2x)-\cos(2x)}$ se u nuly chová podobně jako výraz $\frac{x+\frac{1}{2}x^2}{2x+\frac{1}{2}(2x)^2}$, tedy má v nule konečnou nenulovou limitu. Vskutku,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin(2x)-\cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{1-\cos x}{x^2}x}{2\frac{\sin(2x)}{2x} + \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}4x} = \frac{1+\frac{1}{2}\cdot 0}{2+\frac{1}{2}\cdot 0} = \frac{1}{2}, \tag{1}$$

přičemž ve druhé rovnosti jsme použili aritmetiku limit a též větu o limitě složené funkce pro lineární substituci $g(x) = 2x$. Z tohoto rozboru plyne, že naše řada má (určitě pro velká n) kladné členy a má smysl ji srovnávat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde $b_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{1+\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}}{1+\sin\frac{2}{n}-\cos\frac{2}{n}} \cdot \lim \frac{\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{2} \cdot \lim \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} \in (0,+\infty),$$

kde první rovnost plyne z aritmetiky limit, druhá rovnost z Heineovy věty použité na (1) a posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$, a poslední rovnost plyne z Heineovy věty použité na $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ a posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$, a dále z tvrzení o limitě druhé odmocniny z posloupnosti.

Podle limitního srovnávacího kritéria tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, což je konvergentní řada. Řada ze zadání tedy konverguje.

10) Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Platí $a_n = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}$. Dále $\lim\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$, neboť jde o posloupnost vybranou z $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$. Z definice limity tedy plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že pro $n \geq n_0$ platí $1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 4$ a tedy i $1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n < \sqrt[n]{4}$. Limita obou odhadů je ovšem 1, takže podle věty o dvou policajtech i $\lim\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$. Konečně, z aritmetiky limit obdržíme $\lim a_n = \lim \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = 1$. Podle nutné podmínky konvergence tedy řada ze zadání nekonverguje.