Dvoustupňové a vícestupňové odhady

Jana Vorlíčková

Matematicko-fyzikální fakulta

Univerzita Karlova

19. března 2018

Motivace

- Uvažujme rozdělení s parametry μ, σ^2, kde σ^2 je rušivý parametr.
- Pak neexistují metody pro konstrukci intervalového odhadu parametru dané délky a spolehlivosti či testovaní pro předem zvolenou sílu a spolehlivost při pevně daném rozsahu, které by nezávisely na rušivém parametru.
- Řešením jsou dvoustupňové a vícestupňové odhady - umožují nám sestrojit interval spolehlivosti pro μ o předem dané spolehlivosti a délce bez vlivu σ^2.

Neexistence odhadu pro pevně daný rozsah výběru

- Nechť $(Y_1, \dots, Y_n)^\mathsf{T} = \mathbf{Y}$ daný výběr s pevným počtem pozorování ze sdruženého rozdělení, které je dané hustotou

$$\sigma^{-n} f\left(\frac{y_1 - \mu}{\sigma}, \dots, \frac{y_n - \mu}{\sigma}\right) = \sigma^{-n} f(\sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mu\mathbf{1})),$$
$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\mathsf{T}, \mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\mathsf{T},$$

  kde $0 < \sigma < \infty$ a $-\infty < \mu < \infty$.
- Dále předpokládejme $f(\mathbf{x})$ spojitá pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Pak, pro $\forall\ \mu_1 \neq \mu_2$, když $\sigma \to \infty$ platí

$$\sup_{\mathcal{E}} \left| \int_{\mathcal{E}} \sigma^{-n} f(\sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mu_1\mathbf{1})) dy_1 \dots dy_n - \int_{\mathcal{E}} \sigma^{-n} f(\sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mu_2\mathbf{1})) dy_1 \dots dy_n \right| \longrightarrow 0, \tag{1}$$

  kde $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná.

Neexistence konfidenční množiny

- Předpokládejme, že μ a σ jsou neznámé. Pokud by konfidenční interval $\mathcal{S}(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}$ pro μ s pevně danou délkou a pokrytím bylo možné najít, pak pro pevné $0 < 1-\alpha < 1$, $0 < d < \infty$ platí

$$\mathrm{P}(\mu \in \mathcal{S}(\mathbf{Y}) | \mu, \sigma) \geq 1-\alpha \qquad \forall \mu, \sigma \tag{2}$$

$$\text{max. průměr } \mathcal{S}(\mathbf{y}) < 2d \qquad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

- Sporem lze ukázat, že neexistuje.

Testování

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{proti} \quad H_1 : \mu = \mu_1$$

Pak je možné najít kritickou funkci $\phi(Y)$ takovou, že

$$\mathbb{E}_{\mu_0,\sigma}\phi(Y) = \alpha \quad \mathbb{E}_{\mu_1,\sigma}\phi(Y) = \beta,$$

$0 < \alpha, \beta < 1$ a pro každé pevně zvolené σ, když $\mathcal{E}_\sigma \subset \mathbb{R}^n$ je kritický obor, který určuje nejsilnější test hypotezy H_0 proti H_1, pak

$$\beta \leq \mathrm{P}(Y \in \mathcal{E}_\sigma | \mu_1, \sigma) \quad \text{a} \quad \mathrm{P}(Y \in \mathcal{E}_\sigma | \mu_0, \sigma) = \alpha \quad \forall \sigma,$$

$$\mathrm{P}(Y \in \mathcal{E}_\sigma | \mu_1, \sigma) \longrightarrow \alpha \quad \text{pro} \quad \sigma \longrightarrow \infty.$$

Pak $\alpha \geq \beta$, pokud bereme β jako hladinu pro test H_1 proti H_0 dostáváme $\beta \geq \alpha$, tedy $\alpha = \beta$.

Dvoustupňový odhad střední hodnoty

- $Y_1, Y_2, \dots$ je i.i.d. posloupnost z $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, kde μ a σ^2 jsou neznámé parametry.
- Zajímá nás odhad μ.

Intervalový odhad pro μ

- Intervalový odhad s předem danou spolehlivostí $1 - \alpha$ a délkou d.
- Začínáme s rozsahem výběru $n_0 > 2$, a dále uvažujeme předem zvolené $z > 0$.

Intervalový odhad - Stein‘s first procedure

STAGE 1

- Vezmi pilotní výběr o rozsahu n_0, $Y_1, \ldots, Y_{n_0}$.
- Spočti výběrový průměr $\overline{Y}_0 = \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} Y_i$ a nevychýlený odhad s_0^2 ($s_0^2 > 0$) pro σ^2 s $n_0 - 1 = \nu_0$ stupni volnosti.
- Vezmi N takové, že

$$N = \max(n_0 + 1, \lfloor z^{-1} s_0^2 \rfloor + 1). \tag{4}$$

- Vyber $1 + N - n_0$ čísel $a_0, a_{n_0+1}, \ldots, a_N$ splňujících

$$a_0 + \sum_{k=n_0+1}^{N} a_k = 1, \tag{5}$$

$$\frac{a_0^2}{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{N} a_k^2 = z s_0^{-2}. \tag{6}$$

- Uvažuj nějakou konvenci (např. $a_{n_0+1} = \cdots = a_N$) a urči hodnoty $a_0, a_{n_0+1}, \ldots, a_N$ pro pevné s_0^2.

Intervalový odhad - Stein's first procedure

STAGE 2

- Vezmi další výběr $Y_{n_0+1}, \ldots, Y_N$ o rozsahu $N - n_0$.
- Označ statistiku I_N jako

$$I_N = a_0 \overline{Y}_0 + \sum_{k=n_0+1}^{N} a_k Y_k. \tag{7}$$

- Pak $I_N | s_0^2 \sim \mathcal{N}(\mu, z\sigma^2 s_0^{-2})$.

Intervalový odhad - Stein's first procedure

Věta

Pro I_N definované pomocí (4) - (7), $z^{-1/2}(I_N - \mu)$ má Studentovo t rozdělení s $\nu_0 = n_0 - 1$ stupni volnosti.

$$\mathrm{P}(-z^{1/2} t_{1-\alpha/2,\nu_0} < I_N - \mu < z^{1/2} t_{1-\alpha/2,\nu_0}) = 1 - \alpha,$$

$$\text{označme} \quad d = z^{1/2} t_{1-\alpha/2,\nu_0},$$

$$\mathrm{P}(I_N - d < \mu < I_N + d) = 1 - \alpha,$$

pro jakákoliv μ, σ^2. Pak $(I_N - d, I_N + d)$ je intervalový odhad μ o spolehlivosti $(1 - \alpha)$ s předem zvolenou délkou.

Intervalový odhad - Stein's second procedure

- Zaručuje alespoň 95 % pokrytí nebo maximální délku intervalu $2d$, nemáme už ale jistotu, že platí obojí zároveň jako v případě *Stein's first procedure*.

STAGE 1

- Vše probíhá stejně jako v případě STAGE 1 pro *Stein's first procedure*.
- Vezmi N takové, že

$$N = \max(n_0, \lfloor z^{-1} s_0^2 \rfloor + 1). \tag{8}$$

Intervalový odhad - Stein's second procedure

STAGE 2

- Pokud $N > n_0$, vezmi $N - n_0$ dodatečných pozorovaní $Y_{n_0+1}, \ldots, Y_N$, pokud $N = n_0$, ponechej.
- Spočti

$$\begin{aligned} \overline{Y}_N &= \frac{1}{N}\left(n_0\overline{Y}_0 + \sum_{k=n_0+1}^{N} Y_k\right) \qquad \text{pro} \quad N > n_0 \\ &= \overline{Y}_0 \qquad \text{pro} \quad N = n_0. \end{aligned} \tag{9}$$

- Pro dané s_0^2, N pevné $\sqrt{N}(\overline{Y}_N - \mu)/\sigma | s_0^2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Intervalový odhad - Stein's second procedure

Věta

Pro $\overline{Y}_N$ definované pomocí (8) - (9), $\sqrt{N}(\overline{Y}_N - \mu)/s_0$ má Studentovo t rozdělení s $\nu_0 = n_0 - 1$ stupni volnosti.

$$\mathrm{P}\left(\overline{Y}_N - \frac{s_0}{\sqrt{N}} t_{1-\alpha/2,\nu_0} < \mu < \overline{Y}_N + \frac{s_0}{\sqrt{N}} t_{1-\alpha/2,\nu_0}\right) = 1 - \alpha, \tag{10}$$

$$\text{volme } z \text{ tak, aby} \quad d = z^{1/2} t_{1-\alpha/2,\nu_0},$$

$$\text{pak} \quad d \geq \frac{s_0}{\sqrt{N}} t_{1-\alpha/2,\nu_0}.$$

Pak z (10) dostáváme intervalový odhad μ o spolehlivosti $(1-\alpha)$ a délkou omezenou shora $2d$. Alternativně, $(\overline{Y}_N - d, \overline{Y}_N + d)$ je interval odhad μ s délkou $2d$ mající alespoň $(1-\alpha)$ % pokrytí.

Testování

Hypotézy

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{proti} \qquad H_1 : \mu > \mu_0 \quad (H_2 : \mu \neq \mu_0)$$

Stein's first procedure

- Testová statistika
$$t = z^{-1/2}(I_N - \mu) \sim t_{\nu_0} \text{ za platnosti } H_0$$
- H_0 zamítáme právě tehdy, když $t > t_{1-\alpha,\nu_0}$
- Síla testu nezávisí na σ,
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(z^{-1/2}(I_N - \mu) + z^{-1/2}(\mu - \mu_0) > t_{1-\alpha,\nu_0}), \\ = \mathrm{P}(t_{\nu_0} > t_{1-\alpha,\nu_0} - z^{-1/2}(\mu - \mu_0)). \end{aligned}$$
- Chceme-li sílu větší než β pro $\mu > \mu_0 + \delta$, $\delta > 0$, bereme z splňující
$$\mathrm{P}(t_{\nu_0} > t_{1-\alpha,\nu_0} - z^{-1/2}\delta) = \beta.$$

Příklad

dataset `Hosi`

- $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- Průměrná porodní váha - μ, n - velikost výběru.
- Předem volíme β - síla testu pro $|\mu - \mu_0| > \delta$, hledáme N - počet pozorovaní, co musíme přidat, aby test měl požadovanou sílu.

	n = 50		n = 30	
δ [g]	$N \vert \beta = 0.95$	$N \vert \beta = 0.99$	$N \vert \beta = 0.95$	$N \vert \beta = 0.99$
50	1088	1583	1278	1865
100	235	359	297	444
150	77	132	116	181
200	22	53	52	89
250	0	16	23	46
350	0	0	0	9
500	0	0	0	0

Tabulka: Počty pozorování, které je třeba přidat k výběru o velikosti n pro dosažení požadované síly testu.

Testování

Stein's second procedure

- Testová statistika

$$t^* = \sqrt{N}(\overline{Y}_N - \mu)/s_0 \sim t_{\nu_0} \text{ za platnosti } H_0$$

- H zamítáme právě tehdy, když $t^* > t_{1-\alpha,\nu_0}$
- Síla testu

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(\sqrt{N}(\overline{Y}_N - \mu)s_0^{-1} > t_{1-\alpha,\nu_0} - \sqrt{N}(\mu - \mu_0)s_0^{-1} | \mu, \sigma), \\ &> \mathrm{P}(\sqrt{N}(\overline{Y}_N - \mu)s_0^{-1} > t_{1-\alpha,\nu_0} - z^{-1/2}(\mu - \mu_0)), \\ &= \mathrm{P}(t_{\nu_0} > t_{1-\alpha,\nu_0} - z^{-1/2}(\mu - \mu_0)). \end{aligned}$$

- Stejně jako v minulém případě síla testu bude větší než β pro vhodně zvolené z a nebude záviset na σ.

Bodový odhad

Uvažujme ztrátovou funkci $W(|a-\mu|)$, která je neklesající na $[0,\infty)$ s $W(0)=0$ a $W(\infty)\leq\infty$ a $\mathbb{E}W(c|t_{\nu_0}|)$ existuje pro vhodně zvolené ν_0 pro $\forall c>0$.

- I_N použijeme jako odhad μ

$$\mathbb{E}_{\nu,\sigma^2}W(|I_N-\mu|)=\mathbb{E}W(z^{1/2}|t_{\nu_0}|)=\int_{-\infty}^{\infty}W(z^{1/2}|x|)f_{\nu_0}(x)dx,$$

- z vlastností ztrátové funkce a předchozího plyne $\forall w\in[0,W(\infty))$ můžeme najít z tak, že $\mathbb{E}_{\nu,\sigma^2}W(|I_N-\mu|)=w$.
- $\overline{Y}_N$ bodový odhad μ

$$\mathbb{E}_{\nu,\sigma^2}W(|\overline{Y}_N-\mu|)\leq\mathbb{E}_{\nu,\sigma^2}W(z^{1/2}N^{1/2}s_0^{-1}|\overline{Y}_N-\mu|)=\mathbb{E}W(z^{1/2}|t_{\nu_0}|).$$

Střední hodnota velikosti výběru N

Uvažujme *Stein's second procedure*, kde $N = \max(n_0, \lfloor z^{-1}s_0^2 \rfloor + 1)$, $\frac{\nu_0 s_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu_0}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\sigma^2}(N) &= n_0 \mathrm{P}(z^{-1}s_0^2 \le n_0 | \sigma^2) + \sum_{n_0}^{\infty} (n+1) \mathrm{P}(n < z^{-1}s_0^2 \le n+1 | \sigma^2), \\
&= n_0 \mathrm{P}(\chi^2_{\nu_0} \le \nu_0 z \sigma^{-2} n_0), \\
&\quad + \sum_{n_0}^{\infty} (n+1) \mathrm{P}(n \nu_0 z \sigma^{-2} < \chi^2_{\nu_0} \le (n+1) \nu_0 z \sigma^{-2}).
\end{aligned}
$$

Pro n_0 a $z\sigma^{-2}$ malé dostáváme $\mathbb{E}_{\sigma^2}(N) \simeq z^{-1}\sigma^2$.