Waldovy testy, vlastnosti a Operační charakteristika

Adéla Zavřelová

11. března 2018

Úvod

Úloha

H_0 : "náhodná veličina X má rozdělení s hustotou $f_0(x)$",
H_1 : "náhodná veličina X má rozdělení s hustotou $f_1(x)$".

Chyba 1. a 2. druhu:

- $P(\text{zamítnutí } H_0 | \ H_0 \text{ platí}) = \alpha$
- $P(\text{zamítnutí } H_1 | \ H_1 \text{ platí}) = \beta$

Klasické testování hypotézy: Zvolíme rozsah n a α. Nelsilnější test:

- zamítneme H_0, jestliže $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \geq c$,
- nezamítneme H_0, jestliže $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} < c$.

Kde c je určeno tak, aby pravděpodobnost chyby 1. druhu byla nejvýše α.

Waldův test

Waldův test

Zvolíme A, B, tak aby pradědodobnosti chyb byly rovny α, β. Náhodný výběr $X_1, X_2, \dots$

- $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \leq B$: přijmeme H_0.
- $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \geq A$: přijmeme H_1.
- $B < \prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} < A$: pokračujeme ve výběru.

Waldův test

Rozsah výběru N je náhodný:

$$N = min\left\{ n : \prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} \notin (B, A) \right\}$$

Aproximace A, B:

$$B^* = \frac{\beta}{1-\alpha}, \; A^* = \frac{1-\beta}{\alpha}$$

Příklad

Úloha testování hypotézy:

H_0 : "náhodná veličina X má rozdělení $N(\mu_0, 1)$",
H_1 : "náhodná veličina X má rozdělení $N(\mu_1, 1)$",
kde $\mu_0 < \mu_1$ a požadujeme pravděpodobnosti chyb α, β.

Platí: $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} = exp\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i(\mu_1 - \mu_0) + \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{2} n\right\}$.

Nesekvenční postup: Zvolíme $n = \left[\left(\frac{u_{1-\alpha} + u_{1-\beta}}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2\right] + 1$

Zamítneme H_0, jestliže $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0) \geq u_{1-\alpha}$, jinak přijmeme H_0.
Sekvenční postup na základě $X_1, \dots, X_n$:

- přijmeme H_0, jestliže $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \left(log \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{\mu_1^2 - \mu_0^2}{2} n\right) \frac{1}{\mu_1 - \mu_0}$,
- přijmeme H_1, jestliže $\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \left(log \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{\mu_1^2 - \mu_0^2}{2} n\right) \frac{1}{\mu_1 - \mu_0}$,
- jinak pokračujeme ve výběru.

Obecný sekvenční test

$X_1, X_2, \ldots$ iid náhodné veličiny s hustotou $f(., \theta)$ závisející na neznámém parametru $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^\top \in \Theta$.

Úloha

$H_0: \theta \in \Theta_0$, $H_1: \theta \in \Theta_1$,
kde Θ_0 a Θ_1 jsou disjunkní podmnožiny Θ.

Zavedeme posloupnosti borelovských množin
$\{B_i\}_{i=1}^\infty$, $\{B_i^0\}_{i=1}^\infty$, $\{B_i^1\}_{i=1}^\infty$ takové, že

- B_i, B_i^0, B_i^1 jsou navzájem disjunktní množiny
- $\mathcal{R} = B_1 \cup B_1^0 \cup B_1^1$
  $B_1 \times \mathcal{R} = B_2 \cup B_2^0 \cup B_2^1 \subset \mathcal{R}^2$
  $\vdots$
  $B_{i-1} \times \mathcal{R} = B_i \cup B_i^0 \cup B_i^1 \subset \mathcal{R}^i$

Obecný sekvenční test

Test hypotézy H_0 proti hypotéze H_1

$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr. Test S se řídí pravidlem:

1. $(X_1, \ldots, X_n) \in B_n^0$: přijmeme H_0
2. $(X_1, \ldots, X_n) \in B_n^1$: přijmeme H_1
3. jinak pokračujeme v náhodném výběru

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^0 \ldots$ oblast přijetí H_0
$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^1 \ldots$ oblast přijetí H_1

Obecný sekvenční test

Test s pevným rozsahem výběru

Jestliže pro posloupnosti množin $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\left\{B_i^0\right\}_{i=1}^{\infty}$, $\left\{B_i^1\right\}_{i=1}^{\infty}$ existuje $n \in \mathcal{N}$ takové, že

$$B_i = \mathcal{R}^i, \quad i = 1, \ldots, n-1; \quad B_n^0 \cup B_n^1 = \mathcal{R}^n$$

mluvíme o testu s pevným rozsahem výběru.

Ostatní testy se nazývají sekvenční.
Řekneme, že sekvenční test skončí s pravděpodobností 1, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} P\left((X_1, \ldots, X_n) \in B_n; \theta\right) = 0, \text{ pro všechna } \theta \in \Theta.$$

Obecný sekvenční test

Operační charakteristika

Funkce proměnné θ, která udává pravděpodobnost přijetí hypotézy H_0, je-li skutečná hodnota parametru θ, se nazývá operační charakterstika testu S hypotézy H_0 proti alternativě H_1. Označení: $L_S(\theta)$

$$
\begin{aligned}
L_S(\theta) = P\left(\text{přijetí } H_0 \text{ na základě testu } S;\ \theta\right) = \\
= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left\{(X_1,\ldots,X_i)\in B_i^0\right\};\ \theta\right) = \\
= \sum_{i=1}^{\infty} P\left((X_1,\ldots,X_i)\in B_i^0;\ \theta\right).
\end{aligned}
$$

Síla testu:

$$P_S(\theta) = P\left(\text{zamítnutí } H_0;\ \theta\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left((X_1,\ldots,X_i)\in B_i^1;\ \theta\right).$$

Obecný sekvenční test

Rozsah výběru

Náhodnou veličinu

$$N = min\{n : \ (X_1, \ldots, X_n) \in B_n^0 \cup B_n^1\}$$

nazveme rozsahem výběru.
$E(N; \theta)$ se nazývá střední rozsah výběru.

Kritérium optimality

Úloha

$H_0: \ \theta \in \Theta_0, \ H_1: \ \theta \in \Theta_1,$

Test lze charakterizovat třemi veličinami:

- chyba 1. druhu
- chyba 2. druhu
- střední rozsah výběru

Kritérium optimality

Kritérium pro porovnávání sekvenčních testů

Úloha: $H_0: \ \theta \in \Theta_0$, $H_1: \ \theta \in \Theta_1$.
Označme $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ třídu testů splňujících:

- test skončí s pravděpodobností 1,
- $1 - L_S(\theta) \leq \alpha$, pro všechny $\theta \in \Theta_0$,
- $L_S(\theta) \leq \beta$, pro všechny $\theta \in \Theta_1$.

Kritérium optimality

Eficientnější test

Test $S^* \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ nazveme eficientnější (vydatnější), než test $S \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ na množině $\mathcal{A} \subset \Theta$, jestliže

$$E_{S^*}(N;\ \theta) < E_S(N;\ \theta),\ \text{pro všechna } \theta \in \mathcal{A}.$$

Stejnoměrně eficientní test

Test $S^* \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ nazveme stejnoměrně eficientním testem na množině $\mathcal{A} \subset \Theta$, jestliže

$$\inf_{S \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)} E_S(N;\ \theta) = E_{S^*}(N;\ \theta),\ \text{pro všechna } \theta \in \mathcal{A}.$$

Kritéruim optimality

Uvažujme případ jednoduchých hypotéz: $H_0: \ \theta = \theta_0$, $H_1: \ \theta = \theta_1$.

Waldův (sekvenční) test

$(X_1, \ldots, X_n)$ náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x, \theta)$. Waldův test (ozn. $S(b, a)$):

- přijmeme H_0, jestliže $Q_n(\theta_0, \theta_1) \leq b$,
- přijmeme H_1, jestliže $Q_n(\theta_0, \theta_1) \geq a$
- jinak pokračujeme v náhodném výběru

kde $Q_n(\theta_0, \theta_1) = \sum_{i=1}^n log \frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)}$.

Též nazýván sevenční test poměru pravděpodobnosti.

Kritérium optimality

Věta: Existence a tvar eficientního testu

Uvažujme úlohu $H_0: \ \theta = \theta_0$, $H_1: \ \theta = \theta_1$.
Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost iid veličin s hustotou $f(x, \ \theta), \ \theta \in \Theta$.
Pak mezi všemi testy S z $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$, pro které $E_S(N; \ \theta_i) < \infty$, $i = 0, 1$, je Waldův sekvenční test $S^*(b, a)$ stejnoměrně eficientní v bodech θ_0 a θ_1, tj.

$$E_{S^*(b,a)}(N; \ \theta_i) = \min_{S^* \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)} E_S(N; \ \theta_i), \quad i = 0, 1.$$

V případě složených hypotéz obecně neexistuje stejnoměrně eficientní test.

Vlastnosti Waldova sekvenčního testu

Označme

- $P(\text{přij. } H_0 \text{ na základě } S(b,a); \theta_1) = \beta$,
- $P(\text{přij. } H_1 \text{ na základě } S(b,a); \theta_0) = \alpha$.

Lemma

Pro Waldův sekvenční test $S(b,a)$ platí:

$$a \leq log \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad b \geq log \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Hodnoty b, a obvykle aproximujeme hodnotami

$$a^* = log \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad b^* = log \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Vlastnosti Waldova sekvenčního testu

Věta

Nechť

$$P\left(\frac{f(X_1,\theta_1)}{f(X_1,\theta_0)} > 1, \theta\right) > 0, \; P\left(\frac{f(X_1,\theta_1)}{f(X_1,\theta_0)} < 1, \theta\right) > 0, \; \theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}).$$

Pak test $S(b,a)$, $-\infty < b < 0 < a < \infty$, skončí s pravděpodobností 1, $E(N^k,\theta) < \infty$ pro libovolné $k > 0$ a $\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$
a existuje číslo $t_0(\theta) > 0$ takové, že $E(exp\{t\ N\},\theta) < \infty$ pro všechna $t \leq t_0(\theta)$.

Důkaz: Využití Waldových nerovností.

Vlastnosti Waldova sekvenčního testu

Věta

Nechť $S(b, a)$ a $S(b', a')$ jsou Waldovy testy, slpňující

$$P(\theta_0) > P'(\theta_0), \quad L(\theta_1) > L'(\theta_1).$$

Pak platí

$$b' \leq b < a \leq a',$$

kde aspoň jedna nerovnost $b' \leq b, a \leq a'$ je ostrá a

$$E(N, \theta) \leq E(N', \theta), \text{ pro všechny } \theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}).$$

Aproximace

Označme: $Z_i = log\frac{f(X_i,\theta_1)}{f(X_i,\theta_0)}$, $Q_n = \sum_{i=1}^n log\frac{f(X_i,\theta_1)}{f(X_i,\theta_0)}$.

Aproximace operační charakteristiky

Nechť $E[exp\{tZ_1\};\theta] < \infty$, pro všechna $t \in R$ a platí $P\left(\frac{f(X_1,\theta_1)}{f(X_1,\theta_0)} > 1, \theta\right) > 0$, $P\left(\frac{f(X_1,\theta_1)}{f(X_1,\theta_0)} < 1, \theta\right) > 0$, $\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$. Pak existuje funkce $h(\theta)$ definovaná na $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$, rovna nule jen v bodě θ^*, pro který $E[tZ_1; \theta^*] = 0$ a platí:

$$E(exp\{h(\theta)Q_N\}, \theta) = 1,$$

pro všechna $\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$.

Aproximace operační charakteristiky

$$L_S(\theta) = \; P\left(\text{přijetí } H_0 \text{ na základě testu } S;\ \theta\right)$$

$$\hat{L}_S(\theta) = \frac{1 - e^{h(\theta)a}}{e^{h(\theta)b} - e^{h(\theta)a}}, \text{ jestliže } E(Z_1,\ \theta) \neq 0.$$

$$\hat{L}_S(\theta^*) = \lim_{\theta \to \theta^*} \frac{1 - e^{h(\theta)a}}{e^{h(\theta)b} - e^{h(\theta)a}} = \frac{a}{a-b}, \text{ jestliže } E(Z_1,\ \theta^*) = 0.$$

Aproximace

Aproximace průměrného rozsahu výběru

Jestliže $E(Z_1,\ \theta) \neq 0$:

$$E_S(N,\theta) = \frac{E(Q_N,\theta)}{E(Z_1,\theta)}$$

$$\hat{E}_S(N,\theta) = \frac{L_S(\theta)b + (1 - L_S(\theta))a}{E(Z_1,\theta)} \simeq \frac{\hat{L}_S(\theta)b + (1 - \hat{L}_S(\theta))a}{E(Z_1,\theta)}.$$

Jestliže $E(Z_1,\ \theta^*) = 0$:

$$E_S(N,\theta) = \frac{E(Q_N^2,\theta^*)}{E(Z_1^2,\theta^*)}$$

$$\hat{E}_S(N,\theta) = \frac{L_S(\theta^*)b^2 + (1 - L_S(\theta^*))a^2}{E(Z_1^2,\theta^*)} \simeq \frac{-ab}{E(Z_1^2,\theta)}.$$