

## DVOUVÝBĚROVÉ TESTY

11.12.2018

## ÚVODNÍ NASTAVENÍ.

- Z internetové stránky [www.karlin.mff.cuni.cz/~hudecova/education/](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~hudecova/education/) si stáhněte data `lq2.txt` a zdrojové kódy `cviceni11.R` a `figKS.R`, případně i `cviceni11-obrazky.R`.
- Otevřete si program R Studio, změňte si pracovní adresář a vyčistěte pracoviště  

```
setwd("H:/nmsa331")  
rm(list=ls())
```
- Do proměnné `alpha` is uložte testovací hladinu 0.05.

DATA. Data `lq2.txt` obsahují informace o náhodně vybraných žácích osmé třídy základní školy. Pro každého máme k dispozici jeho IQ, pohlaví (kódování 1 dívky a 0 chlapci) a dále pak průměrnou známku na vysvědčení v pololetí sedmé třídy a v pololetí osmé třídy.

IQ            hodnota IQ,  
ZN7           průměrná známka na vysvědčení v pololetí sedmé třídy,  
ZN8           průměrná známka na vysvědčení v pololetí osmé třídy,  
Pohlavi      pohlaví žáka (1- žena, 0 - muž)  
FPohlavi     jinak kódované pohlaví žáka (kategorie dívka, chlapec).

## DVOUVÝBĚROVÝ PROBLÉM

1. Načtěte si data `lq2.txt` a ujistěte se, že se Vám data dobře načetla.

```
Iq = read.table("Iq2.txt",header=T)  
summary(Iq)
```

```
attach(Iq)
```

Prohlédněte si základní charakteristiky polohy jednotlivých veličin pomocí funkce `summary`. Všimněte si rozličného výstupu pro veličiny `Pohlavi` a `FPohlavi`.

Příkaz `attach` nám zpřístupní jednotlivé proměnné z dat, takže je budeme moci volat přímo jejich názvem (např. `IQ` namísto `lq$IQ`).

2. Pomocí vhodného obrázku vizualizujte genderové složení našeho datového vzorku.
3. Budeme se zabývat otázkou, zda se nějak liší IQ u chlapců a dívek. Začneme nejprve prohlídkou popisných statistik.

```
IQchlapci=IQ[FPohlavi=="chlapec"]  
IQdivky=IQ[FPohlavi=="divka"]
```

```
#charakteristiky polohy dle pohlavi  
summary(IQchlapci)  
summary(IQdivky)
```

```
# nebo rychleji pomoci 1 prikazu
tapply(IQ,FPohlavi,summary)
```

```
# podmínene sd
tapply(IQ,FPohlavi,sd)
```

Co usuzujete na základě těchto číselných charakteristik?

4. Problém si ještě budeme vizualizovat:

```
boxplot(IQ~FPohlavi)
```

```
# totez jako
boxplot(IQchlapci,IQdivky,names=c("chlapci","divky"))
```

```
# muzeme vybarvit a doplnit popisky:
boxplot(IQ~FPohlavi,ylab="IQ",col=c("lightblue","pink"))
```

Co usuzujeme z tohoto obrázku?

5. Nyní se podíváme na to, zda je možné (resp. vhodné) předpokládat, že oba výběry pocházejí z normálního rozdělení.

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(IQchlapci,prob=T,xlim=c(60,150))
hist(IQdivky,prob=T,xlim=c(60,150))
```

```
par(mfrow=c(1,2))
qqnorm(IQchlapci,main="Chlapci")
qqline(IQchlapci)
qqnorm(IQdivky,main="Divky")
qqline(IQdivky)
par(mfrow=c(1,1))
```

## DVOUVÝBĚROVÝ KOLMOGOROVŮV-SMIRNOVŮV TEST

6. Pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu budeme testovat, zda je rozdělení IQ chlapců i dívek stejné.

- Co předpokládáme za model?
- Jak zní nulová a alternativní hypotéza?
- Provedeme test:

```
ks.test(IQdivky, IQchlapci, exact = FALSE)
```

Jaký je náš závěr?

7. Testová statistika tohoto testu má tvar<sup>1</sup>

$$K_{n,m} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_X(x) - \hat{F}_Y(x)|.$$

<sup>1</sup>Za nulové hypotézy pro  $n, m \rightarrow \infty$  platí  $\sqrt{\frac{nm}{n+m}} K_{n,m} \xrightarrow{D} Z$ , kde  $Z$  je náhodná veličina s distribuční funkcí  $G(z) = \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 z^2}\right) I[z > 0]$ .

Ověříme, že R počítá podle stejného předpisu:

```
e1=ecdf(IQchlapci)
e2=ecdf(IQdivky)
max(abs(e1(IQ)-e2(IQ)))
```

Kdybychom chtěli zjistit, kde maximum nastává:

```
IQ[which.max(abs(e1(IQ)-e2(IQ)))]
```

Celou situaci si můžeme i vizualizovat pomocí následujícího obrázku:

```
source("figKS.R")
figKS(IQ, FPohlavi)
```

## DVOUVÝBĚROVÝ T-TEST

8. Pomocí dvouvýběrového t-testu budeme testovat shodu středních hodnot IQ u chlapců a dívek. Nejprve použijeme verzi pro shodné rozptyly.
- Jaký předpokládáme model? Jsou tyto předpoklady pro naše data reálné?
  - Napište, jaké hypotézy testujeme a porovnejte je s hypotézami K-S testu.
  - Připomeňte si tvar testové statistiky tohoto testu:

$$T_{n,m} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\bar{Y}_m - \bar{X}_n}{S_{n,m}}, \quad S_{n,m}^2 = \frac{1}{n+m-2} ((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2).$$

Jaké je její přesné rozdělení za nulové hypotézy (v předpokládaném modelu)?

- (d) Provedeme test:

```
t.test(IQ ~ FPohlavi, var.equal = TRUE)
# nebo jiný způsob zadání:
t.test(IQdivky, IQchlapci, var.equal = TRUE)
```

Jaký je náš závěr ohledně středních hodnot IQ? Co odhaduje uvedený interval spolehlivosti?

9. Spočítáme hodnotu testové statistiky manuálně:

```
xmean=mean(IQdivky)
ymean=mean(IQchlapci)
nx=length(IQdivky)
ny=length(IQchlapci)
S2=1/(nx+ny-2)*((nx-1)*var(IQdivky)+(ny-1)*var(IQchlapci))
```

```
(T.stat=(ymean-xmean)/(sqrt(S2*(1/nx+1/ny))))
```

```
# kritická hodnota
qt(1-alpha/2,df=nx+ny-2)
#p-hodnota
2 * pt(-abs(T.stat), df = nx+ny-2)
```

10. Který z předpokladů testu lze do určité míry ignorovat a test zůstane v platnosti alespoň asymptoticky? Nesplnění kterého předpokladu může naopak vést k nedodržení předepsané hladiny testu?

11. Nyní si vyzkoušíme jinou verzi t-testu, která předpoklad shody rozptylů neuvažuje. Jde o tzv. Welchův test.

(a) Provedeme test:

```
t.test(IQ ~ FPohlavi)
#nebo
t.test(IQchlapci, IQdivky)
```

Jaký je náš závěr? Jaké rozdělení má asymptoticky uvedená testová statistika? A na základě jakého rozdělení je spočtená p-hodnota? Co stačí předpokládat pro asymptotickou verzi testu?

Jak vidíme, tato verze t-testu je v R nastavena defaultně. Jelikož předem většinou nevíme, zda je možné předpokládat shodu rozptylů zkoumaných dvou výběrů, je lepší rovnou použít tuto obecnější verzi testu. V případě, že rozptyly ve skutečnosti shodné jsou, má tento obecnější test jen zanedbatelně nižší sílu ve srovnání s testem odvozeným pro výběry se shodným rozptylem, viz simulace ve 13.

12. Opět provedeme manuální výpočet testové statistiky

$$(T.W = (y_{\text{mean}} - x_{\text{mean}}) / (\sqrt{\text{var}(IQ_{\text{divky}}/n_x + \text{var}(IQ_{\text{chlapci}}/n_y)}))$$

13. Na základě následujících simulací porovnáme sílu t-testu se shodou rozptylů a Welchova testu pro situaci, kdy shoda rozptylů platí

```
opak=1000
n1=100
n2=150
p.s=numeric(opak)
p.w=numeric(opak)
for(i in 1:opak){
  x=rnorm(n1,0.2,sd=1)
  y=rnorm(n2,0,sd=1)
  p.s[i]=t.test(x,y,var.equal=TRUE)$p.val
  p.w[i]=t.test(x,y)$p.val
}
mean(p.s<=0.05)
mean(p.w<=0.05)
```

14. V předchozích simulacích proved'te následující změnu: simulujte  $x$  za nulové hypotézy, tj. nastavte střední hodnotu na 0, ale změňte směrodatnou odchylku na 3. Tím se podíváme na to, jaká je hladina testů za nulové hypotézy v případě neshody rozptylů. Měli bychom vidět, že varianta t-testu, která shodu předpokládá, nedodržuje předepsanou hladinu testu.

15. Celou situaci si můžeme i graficky znázornit pomocí první simulace ze souboru `cviceni11-obrazky.R`. Současné nastavení nám ukazuje porovnání síly při shodě rozptylů. Změňte nastavení tak, abyste viděli, jak situace vypadá, pokud (a) zvýšíme směrodatnou odchylku  $x$ , (b) zvýšíme směrodatnou odchylku  $y$ .

## DVOUVÝBĚROVÝ WILCOXONŮV TEST (MANNŮV-WHITNEYŮV TEST)

14. Opět se vrátíme k původní otázce, a to, zda se liší IQ u chlapců a dívek. Nyní použijeme dvouvýběrový Wilcoxonův test.

- (a) Jaký model předpokládáme pro data?
- (b) Jak zní nulová a alternativní hypotéza?
- (c) Testová statistika má tvar

$$W_{n,m} = \sum_{i=1}^n R_i,$$

kde  $R_i$  je pořadí  $X_i$  ve sdruženém výběru  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ .

Pro jaké její hodnoty budeme zamítat?

- (d) Provedeme asymptotickou verzi testu (bez korekce pro spojitost):

```
wilcox.test(IQ~FPohlavi, correct = FALSE)
```

Jaký je náš závěr?

- (e) Přesnou verzi testu bychom zavolali pomocí nastavení `exact=TRUE` v předchozí funkci. Zkuste.

15. Zkusíme manuální výpočet jednotlivých položek testu. Spočítáme testovou statistiku podle vzorce z přednášky:

```
r=rank(IQ)
(W1=sum(r[FPohlavi=="divka"]))
(W2=sum(r[FPohlavi=="chlapec"]))
```

Dostali jsme stejný výsledek jako funkce `wilcox.test`?

P-hodnotu Wilcoxonova testu bychom dostali pomocí aproximace normálním rozdělením, viz Samostatná práce (iii).

16. Vypočteme Mannovu-Whitneyovu statistiku, která má tvar

$$W_{n,m}^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m I[X_i < Y_j]$$

a v případě, kdy máme v datech shody, tak

$$W_{n,m}^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left( I[X_i < Y_j] + \frac{1}{2} I[X_i = Y_j] \right).$$

Výpočet provedeme buď pomocí for cyklu (který je ale obecně v R mnohem pomalejší než maticové výpočty)

```
U1=0;U2=0
```

```
for(i in 1:nx)
  for(j in 1:ny){
    U1=U1+I(IQdivky[i]<IQchlapci[j])+1/2*I(IQdivky[i]==IQchlapci[j])
    U2=U2+I(IQdivky[i]>IQchlapci[j])+1/2*I(IQdivky[i]==IQchlapci[j])
  }
U1; U2
```

nebo pomocí matic:

```
x1 <- matrix(rep(IQdivky, ny), ncol = ny) # ve sloupcich IQdivky
x2 <- matrix(rep(IQchlapci, nx), ncol = ny, byrow = TRUE) # v radcich IQchlapci
(U1 <- sum(x1 < x2) + 0.5 * sum(x1 == x2))
(U2 <- sum(x1 > x2) + 0.5 * sum(x1 == x2))
```

Vidíme teď nějakou shodu s výstupem funkce `wilcox.test`?

17. Mezi Wilcoxonovou statistikou a M-W statistikou je jednoznačný vztah známý z přednášky:

```
(nx * ny + 0.5 * nx * (nx + 1) - W1)           # U1
(nx * ny + 0.5 * ny * (ny + 1) - W2)           # U2
```

18. V následujících simulacích si porovnáme sílu dnes uvažovaných testů pro několik vybraných situací. Využijeme k tomu funkci `simuluj`, kterou jsme si načetli spolu s obrázkem K-S testu. Do této funkce zadáme rozsahy uvažovaných výběrů  $n$  a  $m$  a který z následujících scénářů chceme:

- normal-posun:  $X_i \sim N(0, 1)$ ,  $Y_i \sim N(1, 1)$ ,
- normal-hetero  $X_i \sim N(0, 1)$ ,  $Y_i \sim N(0, 3)$ ,
- normal-exp:  $X_i \sim N(0, 1)$  a  $Y_i = W_i - 1$ , kde  $W_i \sim \text{Exp}(1)$ ,
- normal-exp2:  $X_i \sim N(0, 1)$  a  $Y_i = W_i - \log 2$ , kde  $W_i \sim \text{Exp}(1)$ .

```
simuluj(n=10, m=30, scenar="normal-posun")
```

```
simuluj(n=10, m=30, scenar="normal-hetero")
simuluj(n=100, m=300, scenar="normal-hetero")
```

```
simuluj(n=10, m=30, scenar="normal-exp")
simuluj(n=100, m=300, scenar="normal-exp")
```

```
simuluj(n=10, m=30, scenar="normal-exp2")
simuluj(n=100, m=300, scenar="normal-exp2")
```

Spusťte si jednotlivé příkazy postupně a zamyslete se, co testujeme a zda generujeme data za nulové hypotézy nebo za alternativy příslušného testu. Co testujeme u Wilcoxonova testu?

### SAMOSTATNÁ PRÁCE

- (i) Zjistěte, zda mají dívky v osmé třídě lepší známky než chlapci. Vyberte test vhodný pro naše data a interpretujte výsledek.
- (ii) Zjistěte, zda je rozdíl ve známkách z předchozího bodu větší než 0.5.
- (iii) V předchozí práci jsme zjistili, že funkce `wilcox.test` počítá Mannovu-Whitneyovu testovou statistiku a nikoliv Wilcoxonovu. Z přednášky ale víme, že Mannův-Whitneův test je ekvivalentní Wilcoxonově testu. Tudíž bychom měli dostat stejnou p-hodnotu. Spočítáme ji pomocí aproximace normálním rozdělením, kde musíme navíc přidat i korekci pro shody v datech:

```

n1=length(IQdivky)
n2=length(IQchlapci)

EW=n1*(n1+n2+1)/2

#vypocet korekce rozptylu:
t=table(r)
kor=sum(t^3-t)/((n1+n2)*(n1+n2-1))
varW.kor=n1*n2*(n1+n2+1-kor)/12

U=(W1-EW)/sqrt(varW.kor)

2*pnorm(-abs(U)) # p-hodnota

```

Dostali jsme nyní stejnou p-hodnotu jako funkce `wilcox.test`?

- (iv) Předpokládejme, že máme dva nezávislé výběry  $X_1, \dots, X_n$  a  $Y_1, \dots, Y_n$  (oba výběry mají stejný počet pozorování), kde  $X_i \sim \mathbf{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  a  $Y_i \sim \mathbf{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ . Chceme testovat shodu středních hodnot, tj.  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ . Co když namísto dvouvýběrového t-testu použijeme párový test? Tj. spočteme rozdíly  $Z_i = X_i - Y_i$  a pak test založíme na testové statistice

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{Z}_n}{S_n^{(Z)}}, \quad \text{kde} \quad S_n^{2(Z)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}_n)^2$$

a nulovou hypotézu zamítneme, pokud  $|T_n| > t_{n-1}(1 - \alpha/2)$ .

- (v) Rozdělení testové statistiky Welchova testu je aproximováno pomocí t-rozdělení s  $\nu$  stupni volnosti, kde  $\nu$  se určí na základě výběrových rozptylů a počtů pozorování v jednotlivých výběrech. Ověřte, zda R využívá stejný vzorec jako je uvedený ve [skriptech](#) v kapitole 6.3.
- (vi) Zajímá nás, zda v osmé třídě dochází k zlepšení prospěchu oproti sedmé třídě. Jaký test je vhodný pro tuto situaci? Proveďte jej a interpretujte závěr.