

KLASICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

2.10.2019

-
1. V rybníku plave 100 rybiček, z nichž 5 je zlatých a ostatní jsou obyčejné. Náhodně vylovíme do podběráku tři rybičky.
 - (a) Jaká je pravděpodobnost, že jsme nevylovili ani jednu zlatou rybičku?
 - (b) Jaká je pravděpodobnost, že máme alespoň dvě zlaté rybičky?
 - (c) Jak by se (a) a (b) změnilo, pokud bychom pokus provedli jinak a rybičky lovili postupně s vrácením do vody?

 2. Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek s již nadepsanou adresou. Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
 - (a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
 - (b) Spočítejte limitu této pravděpodobnosti pro $n \rightarrow \infty$ a zjistěte, jak se tato limita liší od přesného výsledku pro $n = 5$ a $n = 10$.

 3. Na cvičení z Pravděpodobnosti a statistiky se r studentů rozděluje do n paralelek cvičení. Předpokládejme, že každý student si vybírá skupinu náhodně a že počet studentů ve skupinách je neomezený.
 - (a) Určete pravděpodobnost, že na cvičení ve středu se přihlásí právě k studentů.
 - (b) Jaká je pravděpodobnost, že na každém cvičení bude alespoň jeden student?
 - (c) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ tak, že $r/n \rightarrow \lambda > 0$.

 4. Uvažujte třídu n osob.
 - (a) S jakou pravděpodobností v této třídě existuje alespoň jedna osoba, která má narozeniny na Štědrý den?
Vyčíslete pro $n = 30$ a $n = 100$.
 - (b) Jaká je pravděpodobnost, že v této třídě existují dva lidé, kteří mají narozeniny ve stejný den?
 - (c) Kolik nejméně osob musí být ve třídě, aby pravděpodobnost z (b) byla vyšší než $1/2$?

Pro jednoduchost vždy uvažujte, že rok má 365 dní a že se lidé rodí rovnoměrně během roku.

OPAKOVÁNÍ

KLASICKÁ DEFINICE PRAVDĚPODOBNOСТИ:

- Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu
- $\omega \in \Omega$ elementární jev
- $A \subset \Omega$ náhodný jev
- Nechť Ω obsahuje **konečný** počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, a nechť všechny elementární jevy ω_i jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu A definujeme jako

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n},$$

kde $|A|$ = počet prvků množiny A .

VLASTNOSTI:

- $0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- jestliže $A \subset B$, pak $P(A) \leq P(B)$ a $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- (princip inkluze a exkluze)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$