

UKÁZKOVÁ ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKÁ 2019

1. [20 b.] Máme tři urny a v každé jsou zlaté i stříbrné mince. V urně A je 5 zlatých a 5 stříbrných mincí, v urně B jsou 2 zlaté a 8 stříbrných a urně C je 6 zlatých a 4 stříbrné. Náhodně vybereme z každé urny jednu minci a takto tažené tři mince přesuneme do peněženky. Označme jako X počet zlatých mincí v peněženke.
- (a) Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X .
- (b) Následně z peněženky vytáhneme náhodně jednu minci. Ta je zlatá. S jakou pravděpodobností zbývá v peněženke ještě alespoň jedna zlatá mince?
2. [35 b.] Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr ze spojitého rozdělení daného hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c(x + \lambda) & \text{pre } x \in (-\lambda, \lambda), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\lambda > 1$ je neznámý parametr a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta (která závisí na parametru λ).

- (a) Najděte konstantu c .
- (b) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X .
- (c) Najděte hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$.
- (d) Odhadněte parametr λ pomocí metody momentů. Je tento odhad nestranný a konzistentní?
3. [20 b.] Marie má velmi ráda mentolové bonbóny. Denně sní k bonbónů s pravděpodobností $1/5$ pro $k = 2, 3, 4, 5, 6$. Lze předpokládat, že počty bonbónů snědené v jednotlivých dnech jsou nezávislé náhodné veličiny.
- (a) S jakou pravděpodobností sní Marie za dvacet dní dohromady více než devadesát bonbónů?
- (b) Kolik si s sebou má vzít Marie bonbónů na 25 denní služební cestu, aby jí tato zásoba bonbónů vystačila na celý pobyt s pravděpodobností 99%?

Použijte vhodnou limitní větu. Nezapomeňte ověřit její předpoklady.

4. [25 b.] Náhodná veličina X má rozdělení dané následující tabulkou:

x	-1	0	1	2
$P(X = x)$	1/4	1/4	1/4	1/4

- (a) Uvažujte náhodný vektor daný předpisem $(Y, Z) = (X^2 - \max\{0, X\}, |1 - X|)$. Určete sdružené, a obě marginální rozdělení tohoto vektoru.
- (b) Najděte $P(Y < Z)$.
- (c) Spočítejte korelační koeficient náhodných veličin Y a Z . Jsou tyto veličiny nezávislé?

Vybrané hodnoty distribuční a kvantilové funkce normovaného normálního rozdělení:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\Phi(x)$	0.5000	0.6915	0.8413	0.9332	0.9772	0.9938	0.9987
x	0.01	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.99
$\Phi^{-1}(x)$	-2.3263	-1.6449	-1.2816	0	1.2816	1.6449	2.3263