

DOMÁCÍ ÚKOL Z NMAI059

Termín odevzdání: na cvičení v týdnu 3.12.–7.12. 2018

Příklad 1. Adam přichystal na oslavu tři druhy zákusků, od každého tři kusy. Na oslavu dorazilo pět Adamových přátel a každý z nich si náhodně vybral jeden zákusek.

- (a) S jakou pravděpodobností si nyní už Adam nemůže vybrat ze všech třech druhů zákusků?
- (b) S jakou pravděpodobností zůstanou na stole všechny tři druhy zákusků i poté, co si vybere i Adam?
- (c) Jestliže po výběru Adamových přátel zůstal na stole pouze jeden věneček, s jakou pravděpodobností zůstane tento zákusek na výběr i poté, co si vybral Adam?

Příklad 2. Uvažujme standardní balíček 32 karet. Z tohoto balíčku náhodně vybereme dvě karty a budeme uvažovat náhodný vektor $(X, Y)^\top$, kde X udává počet srdcových karet a Y počet králů.

- (a) Určete sdružené a marginální rozdělení $(X, Y)^\top$.
- (b) Spočítejte korelaci X a Y a rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.

Z balíčku se nám poztrácelo 8 karet, máme tedy již pouze 24 karet, z nichž je neznámý počet $0 \leq a \leq 8$ srdcových. Chtěli bychom zjistit hodnotu a , ale jediné co smíme, je vytáhnout náhodně dvě karty a podívat se, kolik z nich je srdcových. Označme tuto náhodnou veličinu jako Z .

- (c) Určete střední hodnotu Z .
- (d) Výše uvedený pokus provedeme n -krát. Máme tedy k dispozici n realizací náhodné veličiny Z , tj. Z_1, \dots, Z_n . Navrhněte, jak bychom pomocí nich mohli odhadnout neznámé a .
- (e) Proveďte prakticky pokus z (d): Odstraňte náhodně z balíčku 32 karet 8 karet a z takto zbylého balíčku proveďte Z_1, \dots, Z_n pro $n = 20$ a odhadněte a . Nakonec porovnejte se skutečností.

Příklad 3. Doba výpočtu (v sekundách) určité úlohy s náhodným vstupem je náhodná veličina s rozdělením s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & x \geq 1, \\ 0 & x < 1. \end{cases}$$

- (a) Určete pravděpodobnost toho, že výpočet skončí do 5 sekund. Vyznačte tuto pravděpodobnost v grafu hustoty f .
- (b) Určete střední hodnotu doby výpočtu.
- (c) Určete rozptyl doby výpočtu.
- (d) Předpokládejme, že umíme generovat náhodnou veličinu U s rovnoměrným rozdělením na $[0, 1]$. Navrhněte, jak lze pomocí U generovat X .
- (e) Pomocí postupu z předchozího bodu nagenerte nezávislé realizace X_1, \dots, X_n . Nakreslete graf porovnání empirické distribuční funkce a teoretické distribuční funkce. Proveďte pro $n = 20$, $n = 100$ a $n = 1000$. Popište, co pozorujete. Dále porovnejte průměr X_1, \dots, X_n se střední hodnotou X a opět okomentujte.

Kromě samotných výsledků odevzdejte i vytištěný zdrojový kód k tomuto bodu.